O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Matematik analiz kafedrasi

ANALIZ ASOSLARI

fani uchun

o‘quv qo‘llanma

«5130100 MATEMATIKA»

ta’lim yo‘nalishi bakalavr talabalari uchun

Samarqand – 2021

UDK
BBK
A

R. Mardiyev, S.E. Usmanov. Analiz asoslari fani uchun o'quv qo'llanma. – Samarqand: SamDU nashri, 2021 y. – 283 b.

O'quv qo'llanma «Analiz asoslari» fani bo'yicha «5130100 – matematika» ta'lim yo'nalishi bakalavr talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, unda shu fanning namunaviy o'quv dasturidan kelib chiqib, haqiqiy sonlar, sonli ketma-ketliklar va ularning limiti, funksiya tushunchasi va funksiyaning uzluksizligi, funksiya limiti, funksiya hosilasi va differensiali, differensial hisobning tadbiqlari, aniqmas integrallarga oid nazariy ma'lumotlar, ayrim misollarning yechilishlari va mustaqil yechish uchun misollar keltirilgan. Bular talabalarga shu fanni yanada chuqurroq o'zlashtirishga yaqindan yordam beradi degan umiddamiz.

Taqrizchilar:

1. **Fizika-matematika fanlari doktori, professor**
   Ikromov Isroil Akramovich.

2. **Fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent**
   Niyozov Iqbol Ergashevich.

SamDU kengashi tomonidan 2021 yil 01 da nashrga tavsiya etilgan.

ISBN 978-9943

MUNDARIJA

KIRISH

Analiz asoslari matematik analiz fanining asosi bo‘lib hisoblanadi. Uni chuqur o‘rganish matematikaning ko‘pgina sohalarini o‘zlashtirishni va amaliy masalalarni yechishni osonlashtiradi.

Qo‘llanmaning birinchi bobida haqiqiy sonlar nazariyasi o‘nli kasrlar yordamida kiritilgan. Ikkinchi bob esa elementar funksiyalarni o‘rganishga bag’ishlangan bo‘lib, unda elementar funksiyalarning xossalari to‘liq va sodda bayon qilingan. Uchinchi bobda sonli ketma-ketlik tushunchasi va uning limiti hamda xossalari keltirilgan. To‘rtinchi bobda funksiyaning limiti va uning xossalari to‘liq bayon qilingan. Beshinchi bobda funksiyaning uzluksizligi tushunchasi, uzluksiz funksiyalarning xossalari keltirilgan. Oltinchi bob funksiyaning hosilasi va uning tadbiqlariga bag’ishlangan. Yettinchi bobda aniqmas integral tushunchasi va integrallash usullari yoritilgan.

Analiz asoslariga oid ta’rif va tushunchalar, xossalar, teoremalar bu xossalar va teoremalarga doir misol va mashqlar yordamida batafsil tahlil qilingan. Har bir bobning oxirida bobni takrorlash uchun test savollari berilgan.

Qo‘llanmada haqiqiy sonlar, sonli ketma-ketliklar va ularning limiti, funksiya tushunchasi va funksiyaning uzluksizligi, funksiyaning limiti, funksiya hosilasi va differensiali, differensial hisobning tadbiqlari, aniqmas integrallarni o‘rganishning asosiy usullari keltirilgan. Misol va nazariy mashqlarni yechish yo‘llari ko‘rsatilgan holda ko‘pgina tushuncha va ta’riflar yoritilib o‘tilgan. Mustaqil yechish uchun ham yetarli darajada misol va nazariy mashqlar keltirilgan. Ushbu o‘quv qo‘llanma birinchi kurs talabalariga va yuqorida aytilgan bo‘limlarni mustaqil o‘zlashtiruvchilar uchun mo‘ljallangan bo‘lib, talabalarga haqiqiy sonlar, sonli ketma-ketliklar va ularning limiti, funksiya tushunchasi va funksiyaning uzluksizligi, funksiya limiti, funksiya hosilasi va differensiali, differensial hisobning tadbiqlari, aniqmas integrallarni o‘rganishning asosiy usullarini, hamda bu mavzularni yaxshiroq o‘zlashtirib olishga yordam beradi. Shuningdek, talabalarga haqiqiy sonlar, sonli ketma-ketliklar va ularning limiti, funksiya tushunchasi va funksiyaning uzluksizligi, funksiya limiti, funksiya hosilasi va differensiali, differensial hisobning tadbiqlari, aniqmas integrallarni qo‘llanishiga doir amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan malaka va ko‘nikmalarni egallashda ham asosiy manbalardan biri bo‘lishi mumkin.

I Bob. HAQIQIY SONLAR

1-§.To‘plam tushunchasi. Qism to‘plamlar

Reja:

1. To‘plam tushunchasi.
2. Qism to‘plam tushunchsi.
3. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.
4. Mustaqil yechish uchun misollar.

1.To‘plam tushunchasi. To‘plam tushunchasi matematikaning boshlang'ich (ta'riflanmaydigan) tushunchalaridan biridir. U chekli yoki cheksiz ko‘p obyektlar (narsalar, buyumlar, shaxslar va h.k.) ni birgalikda bir butun deb qarash natijasida vujudga keladi.

Masalan, O‘zbekistondagi viloyatlar to‘plami; viloyatdagi maktablar to‘plami; butun sonlar to‘plami; to‘g'ri chiziq kesmasidagi nuqtalar to‘plami; sinfdagi o‘quvchilar to‘plami va hokazo. To‘plamni tashkil etgan obyektlar uning *elementlari* deyiladi.

To‘plamlar odatda lotin alifbosining bosh harflari bilan, uning elementlari esa shu alifboning kichik harflari bilan belgilanadi. Masalan, $A = \{a, b, c, d\}$ yozuvi A to‘plam *a,b,c,d* elementlardan tashkil topganligini bildiradi. x element X to‘plamga tegishli ekanligi $x \in X$ ko‘rinishda, tegishli emasligi esa $x \notin X$ ko‘rinishda belgilanadi. Masalan, barcha natural sonlar to‘plami N va 4, 5,$\frac{3}{4}$, π sonlari uchun $4 \in N, 5 \in N, \frac{3}{4} \notin N, \pi \notin N$ munosabatlar o‘rinli. Biz, asosan, yuqorida ko‘rsatilganidek buyumlar, narsalar to‘plamlari bilan emas, balki sonli to‘plamlar bilan shug'ullanamiz. Sonli to‘plam deyilganda barcha elementlari sonlardan iborat bo‘lgan har qanday to‘plam tushuniladi. Bunga N-natural sonlar to‘plami, Z- butun sonlar to‘plami, Q - ratsional sonlar to‘plami, R - haqiqiy sonlar to‘plami misol bo‘la oladi. To‘plam o‘z elementlarining to‘liq ro‘yxatini ko‘rsatish yoki shu to‘plamga tegishli bo‘lgan elementlargina qanoatlantiradigan shartlar sistemasini berish bilan to‘liq aniqlanishi mumkin. To‘plamga tegishli bo‘lgan elementlargina qanoatlantiradigan shartlar sistemasi shu to‘plamning *xarakteristik xossasi* deb ataladi. Barcha x elementlari biror b xossaga ega bo‘lgan to‘plam $X = \{x: b(x)\}$ kabi yoziladi. Masalan, ratsional sonlar to‘plamini $Q = \left\{r: r = \frac{p}{q},\ p \in Z, q \in N\right\}$ ko‘rinishda, $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglama ildizlari to‘plamini esa $X = \{x: ax^2 + bx + c = 0\}$ ko‘ri-nishda yozish mumkin. Elementlari soniga bog'liq holda to‘plamlar chekli va cheksiz to‘plamlarga ajratiladi. Elementlari soni chekli bo‘lgan to‘plam *chekli to‘plam,* elementlari soni cheksiz bo‘lgan to‘plam *cheksiz to‘plam* deyiladi.

1.1-misol. $A=\{x: x\in N, x^2>7\}$ to‘plam kvadrati 2 dan katta bo‘lgan barcha natural sonlardan tuzilgan, ya'ni $A=\{3,4,5,6,7,8,9,...\}$. Bu to‘plam - cheksiz to‘plamdir.

Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam *bo‘sh to‘plam* deyiladi. Bo‘sh to‘plam $\emptyset$ belgi orqali belgilanadi. Bo‘sh to‘plam ham chekli to‘plam hisoblanadi.

1.2-misol. $x^2+3x+2=0$ tenglamaning ildizlari $X=\{-2,-1\}$ chekli to‘plamni tashkil etadi. $x^2+3x+3=0$ tenglama esa haqiqiy ildizlarga ega emas, ya'ni uning haqiqiy yechimlar to‘plami bo’sh to’plamdir ($\emptyset$).

2. Qism to‘plam tushunchsi. Ayni bir xil elementlardan tuzilgan to‘plamlar *teng to‘plamlar* deyiladi. Agar A va B to‘plamlar teng bo‘lsa $A=B$ kabi, aks holda $A\neq B$ kabi yozamiz. Mana bu $\subset$ belgi orqali *o‘z ichiga olishlik munosabati* ifodalanadi ya’ni $A\subset B$ yozuv A ning har bir elementi B ning elementi ham bo‘lishini bildiradi. Bu holda A to‘plam B ning qism to‘plami, B esa A ning *ust to‘plami* deyiladi. Agar $A\subset B$ va $A\neq B$ bo‘lsa A to‘plam B ning *xos qism to‘plami* deyiladi va $A\subset B$ kabi yoziladi. $A=B$ bo‘lishi uchun $A\subset B$ va $B\subset A$ munosabatlarning bajarilishi zarur va yetarli.

3. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. To‘plam tushunchasini bering va ularga misollar keltiring.
2. Qism to‘plam ta’rifini ayting va unga misollar keltiring.

4. Mustaqil yechish uchun misollar.

Quyida berilgan to‘plamlarning elementlarini aniqlang.

1.1. $A=\{x: x\in N, -8<x\leq 5\}$.

1.2. $A=\{x\in Z:(2x-7)(x^2-16)=0,\ x\leq 0\}$.

1.3. $B=\{y\in R: y^3+5y^2+6y=0\}$.

1.4. $B=\left\{y\in R: y-\dfrac{1}{y}\leq 2,\ y<0\right\}$.

1.5. $A=\{x\in N: x^2-5x-6\leq 0\}$.

1.6. $C=\left\{x\in Z: \frac{1}{25}\leq 5^x\leq 26\right\}$.

1.7. $A=\{x\in R: \cos^2 2x=1,\quad 0<x\leq 2\pi\}$.

1.8. Ushbu $\{\{1;2\},\{2;3\}\}=\{1;2;3\}$ tenglik o‘rinlimi?

1.9. Ushbu $A=\{x\in R: x^3-7x^2+16x-12=0\}$ va $B=\{2;3\}$ to‘plamlarning tengligini ko‘rsating.

1.10. $A=\{a,b,c,d\}$ to‘plamning qism to‘plamlarini yozing.

1.11. $A=\{1,2,3,4\}$ to‘plamning qism to‘plamlarini yozing.

1.12. $A=\{-3,7,9,6,8\}$ to‘plamning qism to‘plamlarini yozing.

2-§. To‘plamlar ustida amallar

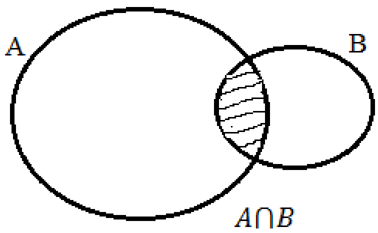
Reja:

1. To‘plamlar ustida amallar.
2. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.
3. Mustaqil yechish uchun misollar.

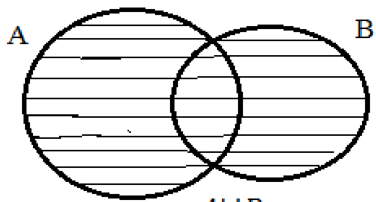
1.To‘plamlar ustida amallar. A va B to‘plamlarning ikkalasida ham mavjud bo‘lgan x elementga shu to‘plamlarning *umumiy* elementi deyiladi.

2.1-ta’rif. A va B to‘plamlarning *kesishmasi* (yoki *ko‘paytmasi)* deb, ularning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan to‘plamga aytiladi. A va B to‘plamlarning kesishmasi $A \cap B$ ko‘rinishda belgilanadi:
$A \cap B = \{x : x \in A$ va $x \in B\}$. 2.1-chizmada Eyler —Venn diagrammasi nomi bilan ataladigan chizmada A va B shakllarning kesishmasi $A \cap B$ ni beradi (chizmada shtrixlab ko‘rsatilgan).

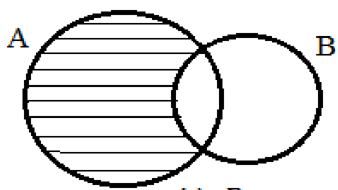
2.2-ta’rif. A va B to‘plamlarning *birlashmasi* (yoki *yig'indisi)* deb, ularning kamida bittasida mavjud bo‘lgan barcha elementlardan tuzilgan to‘plamga aytiladi. A va B to‘plamlarning birlashmasi $A \cup B$ ko‘rinishida belgilanadi: $A \cup B = \{x : x \in A$ yoki $x \in B\}$ (2.2-chizma).



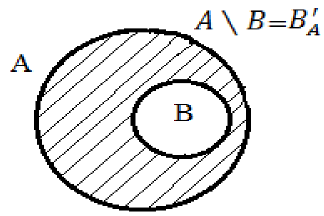
$A \cap B$
2.1-chizma



$A \cup B$
2.2-chizma



$A \setminus B$
2.3-chizma



2.4-chizma

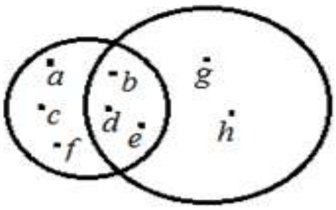
2.3-ta’rif. A va B to‘plamlarning *ayirmasi* deb, A ning B da mavjud bo‘lmagan barcha elementlaridan tuzilgan to‘plamga aytiladi. A va B to‘plamlarning ayirmasi $A \setminus B$ ko‘rinishda belgilanadi: $A \setminus B = \{x : x \in A$ va $x \notin B\}$ (2.3- chizma).

2.4-ta’rif. Agar $B \subset A$ bo‘lsa, $A \setminus B$ to‘plam B to‘plamning *to‘ldiruvchlsi* deyiladi va B' yoki B'_A bilan belgilanadi (2.4- chizma).

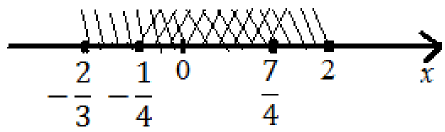
2.1-misol. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ va $B = \{b, d, e, g, h\}$ to‘plamlar berilgan. Ularning kesishmasi, birlashmasini topamiz va Eyler — Venn diagrammasida talqin etamiz. *b, d, e* elementlari A va B to‘plamlar uchun umumiy, shunga ko‘ra

$A \cap B = \{b, d, e\}$. Bu to‘plamlarning birlashmasi esa $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, h\}$ dan iborat (2.5-chizma).

2.2-misol. $A = \left\{x\colon -\frac{2}{3} \le x \le \frac{7}{4}\right\}$, $B = \left\{x\colon -\frac{1}{4} \le x \le 2\right\}$ to‘plamlarning kesishmasi, birlashmasi va ayirmasini topamiz. Buning uchun sonlar o‘qida $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, 2$ nuqtalarni belgilaymiz (2.6-chizma).



2.5-chizma



2.6-chizma

$$A \cap B = \left\{x\colon -\frac{1}{4} \le x \le \frac{7}{4}\right\}, \qquad A \cup B = \left\{x\colon -\frac{2}{3} \le x \le 2\right\},$$

$$A \setminus B = \left\{x\colon -\frac{2}{3} \le x \le -\frac{1}{4}\right\}.$$

2.3-misol. A={0;2;3}, C={0;1;2;3;4} to‘plamlar uchun A'=$C \backslash A$ ni topamiz. $A \subset C$ bo‘lgani uchun A'=$C \backslash A$ = {1; 4} bo‘ladi.

2.4-misol. Agar $A \subset B$ bo‘lsa, $A \cup B = B$ bo‘lishini isbot qilamiz.

Isbot. $A \subset B$ bo‘lsin. *a*) $A \cup B \subset B$ ni ko‘rsatamiz. $x \in A \cup B$ bo‘lsin. U holda $x \in A$ yoki $x \in B$ bo‘ladi. Agar $x \in A$ bo‘lsa, $A \subset B$ ekanidan $x \in B$ ekanligi kelib chiqadi, ikkala holda ham $A \cup B$ ning bar qanday elementi B ning ham elementidir. Demak, $A \cup B \subset B$.

b) $B \subset A \cup B$ ni ko‘rsatamiz. $x \in B$ bo‘lsin. U holda, to‘plamlar birlashmasining ta'rifiga ko‘ra $x \in A \cup B$ bo‘ladi. Demak, B ning har qanday elementi $A \cup B$ ning ham elementi bo‘ladi, ya'ni $B \subset A \cup B$. Shunday qilib, $A \cup B \subset B$, $B \subset A \cup B$. Bu esa $B = A \cup B$ ekanini tasdiqlaydi.

A va B *to‘plamlarning simmetrik ayirmasi* deb, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ to‘plamga aytiladi.

Ikki A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Birinchi elementi A to‘plamga, ikkinchi elementi B to‘plamga tegishli bo‘lgan tartiblangan (*a*,*b*) juftliklarni qaraylik: $a \in A, b \in B$.

2.5-ta’rif. Barcha (*a*,*b*) ko‘rinishdagi juftliklardan tuzilgan to‘plam A va B to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi deyiladi va $A \times B$ kabi belgilanadi.

2.5-misol. $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$ bo‘lsin. U holda

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\},$$

$$B \times A = \{(1,a), (2,a), (1,b), (2,b), (1,c), (2,c)\}.$$

Umuman aytganda $A \times B \ne B \times A$.

2.6-misol. Ayniyatni isbot qiling. $A\cap(B \vartriangle C) = (A\cap B) \vartriangle (A\cap C)$.

Yechish. $x\in A\cap(B\Delta C)$ bo‘lsin. U holda $x \in A$ va $x\in B\Delta C$ bo‘ladi. Bundan, agar $x \in B$ bo‘lsa $x \notin C$ bo‘lishi, va demak, $x \in A\cap B$ bo‘lishi kelib chiqadi, ammo $x \notin A\cap C$. Agar $x \in C$ bo‘lsa $x \notin B$. Demak, $x \in A\cap C$. Shunday qilib, $x\in(A\cap B)\Delta(A\cap C)$. Demak, $A\cap(B\Delta C)\subset(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

$x \in (A\cap B)\Delta(A\cap C)$ bo‘lsin. Agar $x \in A\cap B$ va $x \notin A\cap C$ bo‘lsa, u holda $x\in A$, $x\in B$, $x\notin C$ bo‘ladi. Demak, $x \in A\cap(B\Delta C)$. Agar $x \in A\cap C$ va $x \notin A\cap B$ bo‘lsa, u holda $x \in A$, $x \in C$, $x\notin B$. Demak, $x \in A\cap(B\Delta C)$ bo‘ladi. Shunday qilib, $(A\cap B)\Delta(A\cap C) \subset A\cap(B\Delta C)$.

To‘plamlar ustida bajariladigan amallarning *xossalari* sonlar ustida bajariladigan amallarning xossalariga o‘xshash. Har qanday X, Y va Z to‘plamlar uchun:
1^0. $X\cup Y = Y\cup X$;
2^0. $X\cap Y = Y\cap X$;
3^0. $(X\cup Y)\cup Z = X(Y\cup Z) = (X\cup Z)\cup Y$;
4^0. $(X\cap Y)\cap Z = (X\cap Z)\cap Y = X\cap(Y\cap Z)$;
5^0. $(X\cup Y)\cap Z = (X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$;
6^0. $(X\cap Y)\cup Z = (X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$
tengliklar bajariladi.

Agar qaralayotgan to‘plamlar ayni bir U to‘plamning qism-to‘plamlari bo‘lsa, U to‘plam *universal* to‘plam deyiladi.

2.7-misol. Ayniyatni isbot qiling. $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Yechish. $x \in A\cap(B\cup C)$ bo‘lsin. U holda $x \in A$ va $x \in B\cup C$ bo‘ladi. Agar $x\in B$, bo‘lsa, $x \in A\cap B$ bo‘ladi, va demak, $x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$. Agar $x\in C$ bo‘lsa, $x \in A\cap C$ bo‘ladi, va demak, $x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$. Shunday qilib, $A\cap(B\cup C) \subset (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

$x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$ bo‘lsin. Agar $x \in A\cap B$ bo‘lsa, $x \in A$ va $x \in B$ bo‘ladi. Bundan $x \in A$ va $x \in B$, ya’ni $x \in A\cap(B\cup C)$ kelib chiqadi. Agar $x \in A\cap C$ bo‘lsa, $x \in A$ va $x \in C$ bo‘ladi. Bundan $x \in A$ va $x \in B\cup C$, ya’ni $\boldsymbol{x} \in A\cap(B\cup C)$ kelib chiqadi. Shunday qilib, $(A\cap B)\cup(A\cap C) \subset A\cap(B\cup C)$.

2. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. To‘plamlar ustida birlashma amalini ayting va unga misollar keltiring.
2. To‘plamlar ustida kesishma amalini ayting va unga misollar keltiring.
3. To‘plamlar ustida ayirma amalini ayting va unga misollar keltiring.

3. Mustaqil yechish uchun misollar.

2.1. Ushbu $A = \{y \in Z: y^3 + 5y^2 + 6y = 0\}$ va $B = \{2; 5\}$ to‘plamlar tengmi?
2.2. Agar A to‘plam x^2-$7x$+12=0 tenglama ildizlari to‘plami va $B = \{3; 4\}$, bo‘lsa, A=B bo‘lishini isbotlang.

2.3. $\varnothing \neq \{\varnothing\}$ bo‘lishini isbotlang.

2.4. $\{\{1,2\}, \ \{2,3\}\} \neq \{1,2,3\}$ ekanligini isbotlang.

2.5. $A\cup B, A\cap B, A\backslash B, B\backslash A$ larni toping, agar

a) $A=\{-1,0,3,4\}, B=\{0,4,6\}$; b) $A=[0,2], B=[1,5]$;

c) $A=[0,2], B=\{0,4,6\}$; d) $A=(-\infty, 7), \ B=(5,8)$;

e) $A=[1,3]\cup[5,7], B=[2,6]$.

2.6.Quyidagi ayniyatlarni isbot qiling:

a) $A\cup A=A\cap A=A$; b) $A\cap B=B\cap A$; c) $A\cup B=B\cup A$;

d) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$; e) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

f) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

g) $(A\cap B)\cup(C\cap D)=(A\cup C)\cap(B\cup C)\cap(A\cup D)\cap(B\cup D)$;

h) $(A\cup B)\cap A=(A\cap B)\cap A=A$.

3-§.Natural sonlar va ular ustida arifmetik amallar. Ratsional sonlar va ular ustida arifmetik amallar

Reja:

1. Natural sonlar va ularning xossalari.
2. Butun sonlar.
3. Ratsional sonlar va ularning xossalari.
4. Ratsional sonlar to‘plamining zichligi.
5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.
6. Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Natural sonlar va ularning xossalari. Ma’lumki, natural son deb sanoq uchun ishlatiladigan sonlarga aytiladi va u quyidagiga belgilanadi: $N=\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$. Natural sonlar to‘plamida qo‘shish va ko‘paytirish amallri quyidagicha aniqlangan: to‘plamdan olingan ixtiyoriy m va n sonlarning yig’indisi deb $m+n$ bilan belgilanadigan shunday $p\in N$ songa aytiladiki, u m va n sonlar birgalikda nechta birlardan iborat bo‘lsa, shuncha birdan iborat bo‘ladi

$$m,n\in N \Longrightarrow p=m+n, p\in N.$$

Bu sonlarning ko‘paytmasi deb mn bilan belgilanadigan shunday $q\in N$ songa aytiladiki, u m marta olingan n ta birlar soniga teng bo‘ladi:

$$m,n\in N \Longrightarrow q=mn, q\in N.$$

Bu amallar kommutativlik, assotsiyativlik va distrubutivlik xossalarga ega:

1^0. $m+n=n+m$, $mn=nm$.

2^0. $(m+n)+k=m+(n+k)$, $(mn)k=m(nk)$.

3^0. $(m+n)k=mk+nk$.

4^0. N to‘plamda 1 elementi mavjudki, $1\cdot n=n\cdot 1=n$ bo‘ladi.

2. Butun sonlar. Natural sonlar to‘plamiga 0 sonini va manfiy ishora bilan olingan natural sonlarni birlashtirishdan hosil bo‘lgan to‘plam butun sonlar to‘plami deb ataladi va u Z harfi bilan belgilanadi: $Z = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$. Bu to‘plamdagi nol ixtiyoriy $n \in N$ uchun $n+0=n$ va $n+(-n)=0$ tenglikni qanoatlantiradi. Bu yerda $-n$ va n sonlar qarama-qarshi sonlar deb ataladi. Shunday qilib, ta’rifga binoan N sonlar to‘plami butun sonlar to‘plamining qism to‘plami ekan: $N \subset Z$. Ko‘pincha natural sonlar musbat butun sonlar to‘plami deb ham yuritiladi. Butun sonlar to‘plami ham natural sonlar to‘plami singari tartiblangan to‘plamdan iborat.

$\forall m, n \in Z, m \pm n \in Z, m \cdot n \in Z,$ ya’ni butun sonlar to‘plamida qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish amallari quyidagi xossalarga ega:

1^0. $m+n=n+m$, $mn=nm$.

2^0. $(m+n)+k=m+(n+k)$, $(mn)k=m(nk)$.

3^0. $(m+n)k=mk+nk$.

4^0. Z to‘plamda 1 element mavjudki, $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$ bo‘ladi.

5^0. $\forall m \in Z$ uchun Z to‘plamda shunday $-m$ element mavjudki, $m+(-m)=0$.

6^0. $\forall m \in Z$ element uchun $m+0=0+m=m$.

7^0. $\forall m \in Z$ element uchun $m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0$.

Butun sonlar to‘plamida $m+x=n,\ m,n \in Z$ tenglama Z da har doim yechimga ega bo‘ladi, lekin $m \cdot x = n, m \neq 0$ tenglama Z da har doim ham yechimga ega bo‘lavermaydi.

Masalan: $2x = 6$ tenglama Z da $x = 3$ yechimga ega, $2x = 5$ tenglama esa Z da yechimga ega emas. Bundan esa, butun sonlar to‘plamini kengaytirish zarurligi kelib chiqadi.

3.Ratsional sonlar va ularning xossalari. Ratsional son tushunchasi va uning xossalari bizga maktab kursidan ma’lum. Ixtiyoriy p butun sonni $p = \frac{p}{1}$ ko‘rinishda tasvirlash mumkin bo‘lganligidan, butun son ham ratsional son hisoblanadi. Masalan, $0 = \frac{0}{1}, 1 = \frac{1}{1}$.

$a = \frac{p}{q}$ va $b = \frac{p_1}{q_1}$ ratsional sonlar berilgan bo‘lsin. Bu ratsional sonlarni taqqoslash quyidagicha amalga oshiriladi:

1) agar $pq_1 = qp_1$ bo‘lsa, u holda $a = b$,
2) agar $pq_1 > qp_1$ bo‘lsa, u holda $a > b$,
3) agar $pq_1 < qp_1$ bo‘lsa, u holda $a < b$.

Ratsional sonlar ustida qo‘shish va ko‘paytirish amali

$$a + b = \frac{pq_1 + qp_1}{qq_1}, a \cdot b = \frac{pp_1}{qq_1}$$

tengliklar orqali aniqlanadi. Bu amallar

1) kommutativlik: $a + b = b + a, ab = ba,$

2) assosiativlik: $(a + b) + c = a + (b + c), (ab)c = a(bc),$

3) distributivlik: $a(b + c) = ab + ac$

xossalarini qanoatlantiradi.

Har qanday a ratsional son uchun $a + 0 = a, a \cdot 1 = a$ tengliklar o‘rinli.

Ratsional sonlar ustida ayirish va bo‘lish amallari mos ravishda qo‘shish va ko‘paytirish amallariga teskari amal sifatida aniqlanadi.

Ixtiyoriy a va b ratsional sonlari uchun shunday yagona x ratsional soni mavjudki, bu ratsional son uchun $b + x = a$ tenglik o‘rinli. Bu x son a va b ratsional sonlarning ayirmasi deyiladi va $a - b$ kabi belgilanadi. Xususiy holda, $0 - b$ ayirma $-b$ orqali belgilanadi.

Agar $b \neq 0$ bo‘lsa, u holda yagona z soni mavjudki, $bz = a$ tenglik bajariladi. Bu son a va b ratsional sonlarning bo‘linmasi deyiladi va $\frac{a}{b}$ kabi belgilanadi.

Ratsional sonlarni taqqoslash quyidagi xossalarga ega:

1) $a > b$ va $b > c$ bo‘lsa, u holda $a > c,$

2) $a > b$ bo‘lsa, ixtiyoriy c uchun $a + c > b + c,$

3) agar $a > b$ va $c > d$ bo‘lsa, u holda $a + c > b + d,$

4) agar $a > b$ va $c > 0$ bo‘lsa, u holda $ac > bc,$

5) agar $a > b$ va $c < 0$ bo‘lsa, u holda $ac < bc.$

Ratsional sonlar to‘plami Q orqali belgilanadi va quyidagicha yoziladi:

$$Q = \left\{ r : r = \frac{p}{n}, (p, n) = 1, p \in Z, n \in N \right\}.$$

Ratsional sonlar to‘plamida to‘rt arifmetik amallarni bajarish bilan birga birinchi tartibli chiziqli tenglamalarni ham yechish mumkin. Ammo sodda ko‘rinishdagi $x^2 = a, a \in N$ kvadrat tenglama Q da har doim yechimga ega emas. Shu va shu kabi masalalar Q ratsional sonlar to‘plamini kengaytirish zaruriyatini tug’diradi. Bu kabi masalalar irratsional son deb ataluvchi son tushunchasiga olib keladi. Biz keyingi paragrafda shu kabi masalalar bilan shug’ullanamiz.

4. Ratsional sonlar to‘plamining zichligi. Faraz qilaylik $r, t \in Q$ $r < t$ bo‘lsin. U holda, $\frac{r+t}{2} \in Q, r < \frac{r+t}{2} < t.$ Bu esa $\forall r$ va $\forall t$ ratsional sonlar orasida $\frac{r+s}{2}$ hamda s va t orasida $\frac{s+t}{2}$ ratsional sonlar borligini ko‘rsatadi, yani $r < \frac{r+s}{2} < \frac{r+t}{2} < \frac{s+t}{2} < t.$ Bu jarayonni istalgancha davom ettirish natijasida, r va t ratsional sonlar orasida cheksiz ko‘p ratsional sonlar borligi aniqlanadi. Bu xossa ratsional sonlar to‘plami Q ning *zichlik xossasi* deyiladi.

5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Natural sonlar deb qanday sonlarga aytiladi va natural sonlar to‘plami qanday belgilanadi?
2. Natural sonlar to‘plami ustida bajariladigan amallar va ularning xossalarini ayting.
3. Butun sonlar deb qanday sonlarga aytiladi va butun sonlar to‘plami qanday belgilanadi?
4. Butun sonlar to‘plami ustida bajariladigan amallar va ularning xossalarini ayting.
5. Ratsional sonlar deb qanday sonlarga aytiladi?
6. Ratsional sonlar to‘plami ustida bajariladigan amallar va ularning xossalarini ayting.
7. Ratsional sonlar to‘plamining zichlik xossasini ayting.

6. Mustaqil yechish uchun misollar.

Hisoblang.

3.1. $2:\frac{3}{5}+\frac{3}{5}:2+1\frac{1}{2}:6+6:\frac{1}{2}.$ **3.2.** $6\frac{1}{4}\cdot 8-3\frac{2}{3}\cdot 5\frac{1}{2}+2\frac{2}{5}\cdot 4\frac{7}{12}.$

3.3. $\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}:4\frac{4}{7}}$ **3.4.** $\dfrac{\left(1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}+3\frac{3}{4}\right)\cdot 3\frac{3}{5}}{14-15\frac{1}{8}:2\frac{1}{5}}.$

3.5. $\dfrac{0{,}7222....-0{,}4(6)}{1\frac{4}{5}}\cdot\dfrac{1{,}125+1{,}75-0{,}41(6)}{0{,}59}.$

3.6. $\dfrac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}.$

3.7. $\left(\left(\frac{7}{9}-\frac{47}{72}\right):1{,}25+\frac{7}{40}\right):(0{,}358-0{,}108)\cdot 1{,}6-\frac{19}{25}.$

4-§. Davriy o‘nli kasrlar. Irratsional sonlar. Haqiqiy sonlar. Haqiqiy songa kami bilan va ortig’i bilan o‘nli yaqinlashtirish. Haqiqiy sonlarni taqqoslash

Reja:

1. Davriy o‘nli kasrlar. Irratsional sonlar. Haqiqiy sonlar.

2. Haqiqiy songa kami bilan va ortig’i bilan o‘nli yaqinlashtirish.

3. Haqiqiy sonlarni taqqoslash.

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.
5. Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Davriy o‘nli kasrlar. Irratsional sonlar. Haqiqiy sonlar.

Cheksiz o‘nli kasrlar.

a) Davriy o‘nli kasrlar. Bizga maktab kursidan ma’lumki ixtiyoriy ratsional sonni chekli yoki cheksiz davriy o‘nli kasrlar orqali ifodalash mumkin. Masalan: $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{1}{3}$= 0,333…=0,(3). Aksincha, cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig’indisini topish formulasidan foydalanib, bunday o‘nli kasrlarni ratsional son orqali ifodalash mumkin .

Ixtiyoriy chekli o‘nli kasrni davri 0 ga teng bo‘lgan cheksiz davriy o‘nli kasr deb hisoblash mumkin. Masalan: $\frac{1}{2} = 0{,}5(0)$. Bundan tashqari chekli o‘nli kasr ko‘rinishida tasvirlangan ratsional sonni davri 9 ga teng bo‘lgan cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishida ham tasvirlash mumkin. Masalan: 0,5=0,4(9).

b) Haqiqiy sonlar to‘plami.

Quyidagi ko‘rinishdagi cheksiz o‘nli kasrni qaraymiz:

$$\pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \qquad (4.1)$$

Bu kasr «+» va «-» ishora, a_0- manfiy bo‘lmagan butun son, hamda 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 sonlarni qabul qiluvchi $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ o‘nli belgilar berilishi bilan aniqlanadi.

(4.1) ko‘rinishdagi o‘nli kasrni haqiqiy son deb ataymiz. Agar (4.1) ko‘rinishdagi kasrning oldida + ishorasi tursa u tushirilib qoldiriladi va quyidagicha yoziladi.

$$a_0{,}a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \qquad (4.2)$$

Bu ko‘rinishdagi o‘nli kasrni manfiy bo‘lmagan haqiqiy son deb ataymiz.
Agar $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ sonlardan aqalli birortasi 0 dan farqli bo‘lsa (4.2) ko‘rinishdagi o‘nli kasrni musbat haqiqiy son deb ataymiz, $-a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ ko‘rinishdagi o‘nli kasrni musbat bo‘lmagan haqiqiy son deb ataymiz. Agar $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ sonlarning aqalli birortasi noldan farqli bo‘lsa u holda $-a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ haqiqiy sonni manfiy haqiqiy son deb ataymiz .

4.1-ta’rif. Agar $a = a_0{,}a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ va $b = -a_0{,}a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ bo‘lsa, a va b sonlar qarama-qarshi sonlar deyiladi.

4.2-ta’rif. Agar (4.1) o‘nli kasr davriy bo‘lsa, u ratsional son deyiladi, agar (4.1) kasr davriy bo‘lmasa, u irratsional son deyiladi. Barcha irratsional sonlar to‘plamini I harfi bilan belgilaymiz.

(4.1) ko‘rinishdagi barcha o‘nli kasrlar to‘plami haqiqiy sonlar to‘plami deyiladi va R harfi balan belgilanadi. Masalan: $0{,}123456789101112131415\ldots$ davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasr, demak, bu irratsional son. Ushbu $b = 4{,}10\,100\,1000\,10000\,\ldots$ soni ham irratsional sondir.

2.Haqiqiy songa kami bilan va ortig’i bilan o‘nli yaqinlashtirish.

Manfiy bo‘lmagan haqiqiy $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ songa quyidagi ikkita chekli o‘nli kasrlar $\bar{a}_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$ va $\underline{\alpha}_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ ni mos qo‘yamiz. Bu sonlarni mos ravishda a sonining ortig’i va kami bilan n chi o‘nli yaqinlashishlari deymiz.

Agar a manfiy son bo‘lsa, uning ortig’i va kami bilan n chi o‘nli yaqinlashishlari quyidagicha aniqlanadi:

$$\bar{\alpha}_n = -a_0, a_1 a_2 \dots a_n; \quad \underline{\alpha}_n = -a_0, a_1 a_2 \dots a_n - \frac{1}{10^n}.$$

3. Haqiqiy sonlarni taqqoslash.

a) Musbat haqiqiy sonlarni taqqoslash. Ikki $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ va $b = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ manfiy bo‘lmagan haqiqiy sonlar berilgan bo‘lsin.

Agar $\forall k,\ (k = 0,1,2,\dots)$ sonlari uchun $a_k = b_k$ bo‘lsa, u holda $a = b$ deyiladi, ya’ni

$$\{a = b\} \Leftrightarrow \{a_k = b_k, k = 0,1,2,\dots\},$$
$$\{a = 0\} \Leftrightarrow \{a_k = 0, k = 0,1,2 \dots\}.$$

Agar $a_0 < b_0$ yoki $a_0 = b_0$ bo‘lib, shunday $\exists n \in N,\ a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}$ bo‘lib, $a_n < b_n$ bo‘lsa, u holda a son b sondan kichik deyiladi va $a<b$ kabi yoziladi, ya’ni

$$\{a < b\} \Leftrightarrow a_0 < b_0 \text{ yoki } \left\{\exists n \in N: a_k = b_k, k = \overline{0, n-1};\ a_n < b_n\right\}.$$

Xuddi yuqoridagiga o‘xshash $a>b$ munosabatning ta’rifi beriladi:

$$\{a > b\} \Leftrightarrow a_0 > b_0 \text{ yoki } \left\{\exists n \in N: a_k = b_k, k = \overline{0, n-1};\ a_n > b_n\right\}.$$

Yuqoridagi munosabatlardan ko‘rinadiki, ixtiyoriy musbat haqiqiy sonlar uchun a=b, $a > b$ *va* $a < b$ munosabatlardan biri bajariladi.

b) Ixtiyroy haqiqiy sonlarni taqqoslash.

Agar a musbat haqiqiy son bo‘lsa, u holda bu sonning moduli deb shu sonning o‘ziga aytiladi.

Agar a manfiy son, ya’ni $a = -a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ bo‘lsa, u holda bu sonning moduli deb $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ soniga aytiladi. a sonning modulini $|a| = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ orqali belgilaymiz. Demak $|a|$ – hamma vaqt manfiy bo‘lmagan haqiqiy sondan iborat ekan. Agar $a > 0$ va $b \le 0$ bo‘lsa, u holda $a > b$ deb hisoblanadi.

Agar a va b sonlarning ikkalasi ham manfiy bo‘lsa, u holda ularni taqqoslash quyidagicha amalga oshiriladi.

Agar a va b sonlari uchun $a < 0$ va $b < 0$ bo‘lsa, u holda:

1) $|a| > |b|$ bo‘lsa, $a < b$ deb hisoblanadi;
2) $|a| < |b|$ bo‘lsa, $a > b$ deb hisoblanadi;
3) $|a| = |b|$ bo‘lsa, $a = b$ deb hisoblanadi.

Shunday qilib, ixtiyoriy haqiqiy son uchun taqqoslash qoidasi aniqlanadi. Haqiqiy sonlarni taqqoslash quyidagi xossalarga ega.

Haqiqiy sonlarni taqqoslash tranzitivlik xossasiga ega.

4.1-lemma. Agar $\alpha < \beta$ va $\beta < \gamma$ bo‘lsa u holda $\alpha < \gamma$.

Isbot:
$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$
$$\beta = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$
$$\gamma = c_0, c_1 c_2 \dots c_n \dots$$
bo‘lsin. p va m natural sonlari mos ravishda
$$a_k = b_k \text{ va } b_k = c_k \ (k = 0,1,2,\dots)$$
tengliklar buziladigan eng kichik nomerlar bo‘lsin. Faraz qilaylik, $p \leq m$ bo‘lsin. U holda $a_p < c_p$ va $a_k = c_k$ $k = \overline{0, p-1}$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $\alpha < \gamma$ munosabatning bajarilishini bildiradi. $m < p$ bo‘lmagan holda ham bu xossa shunga o‘xshash isbotlanadi

4.2-lemma. Agar α va β haqiqiy sonlar uchun $\alpha < \beta$ munosabat bajarilgan bo‘lsa, u holda shunday bir r ratsional son mavjudki, $\alpha < r < \beta$ munosabat bajariladi.

Isbot. Agar α va β sonlar ratsional sonlar bo‘lsa, u holda $r = \frac{\alpha+\beta}{2}$ deb olsak, u holda $\alpha < r < \beta$ munosabat bajarilishi ko‘rinib turibdi.

Endi faraz qilaylik $\beta \epsilon I$ bo‘lsin. Aniqlik uchun $\alpha \geq 0$ deb faraz qilamiz. $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, $\beta = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ bo‘lsin. $\beta > \alpha$ va $\alpha \geq 0$ bo‘lganligidan $\beta > 0$ ekanligi va $\exists p \in N$: $a_p < b_p$ va $a_p = b_p$, $k = \overline{1, p-1}$ munosabatning bajarilishi kelib chiqadi. $\overline{r} = a_0, a_1 a_2 \dots a_{p-1}, b_p(0) \dots$ deb olamiz. Bundan va $\beta \in I$ bo‘lganligi uchun shunday $\exists m \in N$: $b_{p+m} > 0$ bo‘ladi. Bundan esa $\overline{r} < \beta$ ekanligi kelib chiqadi. $\alpha < \overline{r}$ munosabat esa $\overline{r}$ ratsional sonining (ko‘rinishidan bog’liq) tuzilishidan kelib chiqadi. Demak $\alpha < \overline{r} < \beta$ munosabat bajarilar ekan. α yoki α va β sonlarining ikkalasi ham irratsional bo‘lgan hol o‘xshash isbotlanadi. Lemma isbot bo‘ldi.

Izoh: Shu lemmada r o‘rniga irratsional son olsak ham o‘rinli.

Natija: Agar $\alpha \in R$, $\beta \in R$ va $\alpha < \beta$ bo‘lsa, u holda $\exists r \in Q$, $\exists r' \in Q$: $\alpha < r < r' < \beta$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Irratsional sonlar deb qanday sonlarga aytiladi?

2.Haqiqiy sonlar deb qanday sonlarga aytiladi?

3.Irratsional sonlar to‘plami ustida bajariladigan amallar va ularning xossalarini ayting.

5. Mustaqil yechish uchun misollar.

4.1. $\alpha = 0{,}8687889909192 \dots$ va $\beta = 0{,}868788(8)$ sonlarini taqqoslang.

4.2. $\alpha = 0{,}8687889(9)\ldots$ va $\beta = 0{,}86878889909192\ldots$ sonlarini taqqoslang.

4.3. $\alpha = 2{,}21222333444455556666\ldots$ va

$\beta = 2{,}212123333444445555556666666\ldots$ sonlarini taqqoslang.

4.4. $\alpha = 0{,}0102030405060708090100110 12013\ldots$ sonning ortig'i bilan 10-o'rinli yaqinlashishini kami bilan 11-o'rinli yaqinlashishini toping.

4.5. $\alpha = 111213141516171819202122 2324\ldots$ sonning ortig'i va kami bilan 200-o'rinli yaqinlashishini toping.

4.6. Ixtiyoriy haqiqiy sonning o'nli yaqinlashishlari quyidagi xossalarga ega ekanligini isbotlang:

a) $\bar{\alpha}_k - \underline{\alpha}_k = \frac{1}{10^k},\ k \in N.$

b) $\underline{\alpha}_1 \le \underline{\alpha}_2 \le \underline{\alpha}_3 \le \cdots \le \underline{\alpha}_n \le \cdots.$

c) $\bar{\alpha}_1 \ge \bar{\alpha}_2 \ge \bar{\alpha}_3 \ge \cdots \ge \bar{\alpha}_n \ldots.$

d) $\underline{\alpha}_n < \bar{\alpha}_n,\ \forall n, m \epsilon N.$

4.7. $\alpha \in R,\ \beta \in R$ va $\alpha < \beta$ bo'lsin. U holda shunday γ irratsional son topilib $\alpha < \gamma < \beta$ tengsizlik o'rinli bo'lishini isbotlang.

5-§. Chegaralangan va chegaralanmagan sonli to'plamlar. Chegaralangan to'plamning aniq chegaralari va ular haqidagi teoremalar

Reja:

1. Chegaralangan va chegaralanmagan sonli to'plamlar.
2. Chegaralangan to'plamning aniq chegaralari va ular haqidagi teoremalar.
3. To'plamning aniq yuqori va aniq quyi chegaralarining xossalari.
4. Mustaqil yechish uchun misollar.
5. O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Chegaralangan va chegaralanmagan sonli to'plamlar.

Sonli to'plamlar. $\forall a, b \in R$ sonlar berilgan bo'lib, $a < b$ bo'lsin. $E = [a,b] = \{x : x \in R,\ a \le x \le b\}$ to'plamga segment deyiladi.
$E_1 = (a,b) = \{x : x \in R, a < x < b\}$ to'plamga interval deb ataladi, $E_2 = [a,b) = \{x: x \in R, a \le x < b\}$, $E_3 = (a,b] = \{x: x \in R, a < x \le b\}$ to'plamlar yarim segmentlar deb ataladi.

5.1-ta'rif. Agar $\exists C \in R : \forall x \in X \to x \le C$ (5.1)

munosabat bajarilsa, u holda X to'plam yuqoridan chegaralagan deyiladi. (5.1) tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy C soni X to'plamning yuqori chegarasi deyiladi.

5.1-misol. 1) $E = \left\{\frac{1}{n} : n = 1,2,3, \dots\right\}$ to‘plam yuqoridan chegaralangan, chunki uning har bir elementi 1 dan katta emas.

2) $N = \{n : n = 1,2,3, \dots\}$ to‘plam yuqoridan chegaralanmagan.

5.2-ta’rif. Agar $\exists C' \in R : \forall x \in X \rightarrow x \geq C'$ (5.2)

bo‘lsa, Y to‘plam quyidan chegaralangan deyiladi.

(5.2) tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy C soni X to‘plamning quyi chegarasi deyiladi. Ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, agar biror C soni X to‘plamning yuqori (quyi) chegarasi bo‘lsa, u holda shu C dan katta bo‘lgan (kichik bo‘lgan) har qanday son X to‘plamning yuqori (quyi) chegarasi bo‘lar ekan.

5.2-misol. $N = \{n : n = 1,2,3, \dots\}$ to‘plam quyidan 1 soni bilan chegaralangan, chunki $\forall n \in N$ uchun $n \geq 1$ tengsizlik bajariladi.

5.3-ta’rif. Agar sonli to‘plam quyidan ham, yuqoridan ham chegaralangan bo‘lsa, bu to‘plam chegaralangan to‘plam deyiladi, ya’ni

$$\{X - c\text{hegaralangan to}'\text{plam}\} \Leftrightarrow \{\exists C' \in R, \exists C \in R, \forall x \in X \rightarrow C' \leq x \leq C\}.$$

Agar E to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, u holda uni yuqoridan chegaralovchi sonlar cheksiz ko‘p bo‘ladi. Agar E to‘plam quyidan chegaralangan bo‘lsa, u holda uni quyidan chegaralovchi sonlar cheksiz ko‘p bo‘ladi. Yuqori chegaralarning eng kichigini, quyi chegaralarning eng kattasini topish muhim rol o‘ynaydi.

2.Chegaralangan to‘plamning aniq chegaralari va ular haqidagi teoremalar.

5.4-ta’rif. X haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lib, agar biror M soni uchun

1) $\forall x \in X \longrightarrow x \leq M,$ (5.3)

2) $\forall M' < M, \exists x_{M'} \in X \rightarrow x_{M'} > M'$ (5.4)

shartlar bajarilsa, u holda M soni X to‘plamning aniq yuqori chegarasi deyiladi va $M=supX$ kabi belgilanadi.

5.5-ta’rif. X haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lib, agar biror m soni uchun

1) $\forall x \in X \rightarrow x \geq m,$

2) $\forall m' > m,\ \exists x_{m'} \in X \rightarrow x_{m'} < m'$

shartlar bajarilsa, m soniga X to‘plamning aniq quyi chegarasi deyiladi va $m=infX$ kabi belgilanadi..

Shunday qilib, quyidagi munosabalar o‘rinli:

$$\{M = supX\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \longrightarrow x \leq M\} \wedge \{\forall M' < M, \exists x_{M'} \in X \rightarrow x_{M'} > M'\},$$

$$\{m = infX\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \longrightarrow x \geq m\} \wedge \{\forall m' > m, \exists x_{m'} \in X \rightarrow x_{m'} < m'\}.$$

Aniq yuqori va aniq quyi chegara ta’riflarini boshqacha ham berish mumkin.

5.6-ta’rif. X sonli to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar M soni uchun

1) $\forall x \epsilon X \to x \leq M$,

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X \to x_\varepsilon > M - \varepsilon$

munosabatlar bajarilsa, u holda M soni X to‘plamning aniq yuqori chegarasi deyiladi. Agar m soni uchun

1) $\forall x \in X \to x \geq m$,

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X \to x_\varepsilon < m + \varepsilon$

munosabatlar bajarilsa, u holda m soni X to‘plamning aniq quyi chegarasi deyiladi.

5.3-Misol. $(a, b) = \{x: a < x < b\}$ to’plamning aniq yuqori va aniq quyi chegaralarini toping.

Yechish. 5.6-ta’rifning 1-shartini tekshiramiz. $\forall x \in (a, b)$ olsak, $x<b$ bo’ladi. Endi bu ta’rifning 2-shartini tekshiramiz. $\forall \varepsilon > 0$ son olsak ham, masalan, $x_\varepsilon = b - \frac{\varepsilon}{2} \in (a, b)$ topiladi va $b - \frac{\varepsilon}{2} > b - \varepsilon$, ya’ni $x_\varepsilon > b - \varepsilon$ bo’ladi. 5.6-ta’rifning ikkala sharti ham bajarildi. Demak, $sup(a,b)=b$ ekan. Xuddi shunday, 5.6-ta’rif yordamida $inf(a,b)=a$ ekanligini ko’rsatish mumkin.

To‘plamlarning aniq yuqori va aniq quyi chegaralariga quyidagicha ham ta’rif berish mumkin.

5.7-ta’rif: Har qanday chegaralangan to‘plam uchun uni yuqoridan chegaralovchi sonlarning eng kichigi (quyidan chegaralovchi sonlarning eng kattasi) uning aniq yuqori chegarasi (aniq quyi chegarasi) deyiladi.

5.1-teorema. Agar haqiqiy sonlarning bo‘sh bo‘lmagan X to‘plami yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, u holda sup$X$ mavjud. Agar X to‘plam quyidan chegaralangan bo‘lsa, u holda inf$X$ mavjud.

Isbot: Isbotni aniq yuqori chegaraning mavjudligini ko‘rsatish bilan chegaralanamiz. Shart bo‘yicha X to‘plam bo‘sh emas, ya’ni hech bo‘lmaganda 1 ta elementga ega. Ikki hol bo‘lishi mumkin:

1) X to‘plamda hech bo‘lmaganda 1 ta nomanfiy son mavjud.

2) X to‘plamning hamma elementlari manfiy.

Shuning uchun, teoremani isbotlash uchun ikki holni qaraymiz.

1- hol. X to‘plamning aqalli bitta manfiy bo‘lmagan elementi bo‘lsin.

Dastlab X to‘plamni manfiy bo‘lmagan elementlardan tuzilgan deb faraz qilaylik. Teorema shartiga ko‘ra $\exists C, \forall x \in X \to x \leq C$. Faraz qilaylik, $c = c_0, c_1 c_2 \dots c_n \dots$ bo‘lsin. Bu yerda c_0 manfiy bo‘lmagan butun son va $c_0 < c_0 + 1$ tengsizlik bajariladi. $c_0 + 1 = n_0$ belgilashni kiritsak,

$$\forall x \in X \to x \leq c < n_0 (n_0 - \text{natural son}) \quad (5.5)$$

munosabat bajariladi.

Bundan ko‘rinadiki, X to‘plamning ixtiyoriy $x=a_0,a_1,a_2...a_n...$ elementi uchun $0 \leq a_0 < n_0$ bajariladi. Demak, agar biz X to‘plamning elementlarining butun qismlaridan tuzilgan to‘plamni E bilan belgilasak, bu to‘plamning chekli to‘plam (bo‘sh ham emas) ekanligini olamiz. Shuning uchun E to‘plamning eng katta elementi mavjud va uni $\overline{a}_0$ kabi belgilaymiz. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$X_0 = \{x \in X: x = \overline{a}_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots\} = \left\{x \in X: a_0 = \overline{a}_0\right\}.$$

Ko‘rinib turibdiki, X_0 to‘plam X to‘plamning qism to‘plami ($X_0 \subset X$) bo‘ladi.

E_1 orqali X_0 to‘plamning elmentlarining o‘nli kasrlarga yoyilishidagi birinchi o‘nli raqamlaridan tuzilgan to‘plamni belgilaymiz. Bu to‘plamning elementlari 0,1,2,…9 sonlarining biridan iborat bo‘ladi va bo‘sh to‘plam emas.

Bu E_1 to‘plam chekli to‘plam bo‘lgani uchun $\overline{a}_1 = \max\limits_{x \in X_0} a_1$ mavjud.

$$X_1 = \{x \in X: x = \overline{a}_0, \overline{a}_1 a_2 \dots a_n \dots\}$$

bo‘lsin, u holda $X \supset X_0 \supset X_1$ bo‘ladi. X_1 to‘plamning ikkinchi o‘nli raqamlarining eng kattasinini $\overline{a}_2 = \max\limits_{x \in X_1} a_2$ deb belgilasak, u holda

$$X_2 = \{x \in X: x = \overline{a}_0, \overline{a}_1 \overline{a}_2 \dots a_n \dots\} = \left\{x \in X_1: a_2 = \overline{a}_2\right\}.$$

Bu jarayonni davom ettirib, bo‘sh bo‘lmagan $\{X_k\}$ to‘plamlar ketma-ketligini va $\overline{a}_k$ raqamlar ketma-ketligini quramizki,

$$X \supset X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{k-1} \supset X_k \supset \cdots,\ \overline{a}_k = \max_{x \in X_{k-1}} a_k,$$

$$X_k = \{x \in X: x = \overline{a}_0, \overline{a}_1 \overline{a}_2 \dots \overline{a}_k a_{k+1} \dots\} = \left\{x \in X_{k-1}: a_k = \overline{a}_k\right\}$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Quyidagi o‘nli kasrni qaraymiz: $\overline{x} = \overline{a}_0, \overline{a}_1 \dots = \overline{a}_0, \{\overline{a}_n\}$ va $x = supX$ ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun quyidagi 2 ta shart bajarilishini ko‘rsatamiz:

$$x \in X \to x \leq \overline{x}, \tag{5.6}$$

$$\forall x' < \overline{x},\ \exists \tilde{x} \in X:\ \tilde{x} > x'. \tag{5.7}$$

Ixtiyoriy $x \in X$ element olamiz va $x = a_0, \{a_0\}$ bo‘lsin. (5.6) shartning bajarilishini ko‘rsatish uchun quyidagi 3 ta holni ko‘rib chiqamiz:

barcha $k = 0,1,2,\dots$ lar uchun $x \notin X_k$, (5.8)

barcha $k = 0,1,2,\dots$ lar uchun $x \in X_k$, (5.9)

$\exists m$: $x \in X_{m-1}$, $x \notin X_m$. (5.10)

(5.8) dan $a_0 < \overline{a}_0$ kelib chiqadi, shuning uchun $x < \overline{x}$ bo‘ladi. Agar (5.9) shart bajarilsa, barcha $k = 0,1,2,\dots$ lar uchun $a_k = \overline{a}_k$ bo‘ladi, bu yerdan $\overline{x}$ sonning aniqlanishiga ko‘ra $x = \overline{x}$ bo‘ladi. Nihoyat (5.10) dan X_m to‘plamlarning va $\overline{x}$ sonning aniqlanishiga ko‘ra

$$x = \overline{a}_0, \overline{a}_1 \overline{a}_2 \dots \overline{a}_{m-1} a_m \dots < \overline{a}_0, \overline{a}_1 \overline{a}_2 \dots \overline{a}_{m-1} \overline{a}(0) \leq \overline{x},$$

va shuning uchun $x < \overline{x}$ bo‘ladi. Shunday qilib (5.6) isbotlandi.

Endi (5.7) shartni tekshiramiz. X to‘plamning hamma elementlari nomanfiy bo‘lganligi uchun agar $x' < 0$ bo‘lsa, (5.7) munosabat hamma $\tilde{x} \in X$ larda o‘rinli bo‘ladi.

$0 \leq x' \leq \overline{x}$ va $x' = a'_0, \{a'_n\}$ bo‘lsin. U holda $a'_0 < \overline{a}_0$ yoki $k = 0,1,2, \dots, m-1$ larda $a'_k < \overline{a}_k, a'_m < \overline{a}_m$ bo‘ladi. Birinchi holda $\tilde{x}$ sifatida X_0 to‘plamning ixtiyoriy elementini olish mumkin, chunki $a'_0 < \overline{a}_0$ va $\tilde{x} \in X_0$ shartlardan quyidagilar kelib chiqadi:

$x' < \tilde{x} = \overline{a}_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \leq \overline{x},$ ya’ni $x' < \tilde{x} = \overline{x}$ va $\tilde{x} \in X_0 \subset X$.

Ikkinchi holda (5.7) ni $\forall \tilde{x} \in X$ element qanoatlantiradi, chunki

$$x' = \overline{a}_0, \overline{a}_1 \overline{a}_2 \dots \overline{a}_{m-1} a'_m \dots < \overline{a}_0, \overline{a}_1 \overline{a}_2 \dots \overline{a}_m a_{m+1} \dots = \tilde{x} \leq \overline{x}.$$

Shunday qilib, $x' < \tilde{x} \leq \overline{x}$ ga ega bo‘lamiz, bu yerda $\tilde{x} \in X_m \subset X$. (5.7) shart tekshirildi.

(5.6) va (5.7) shartlar tekshirildi, ya’ni $x = \sup X$ ekan. Demak X to‘plam manfiy bo‘lmagan elementlardan tuzilgan holda teorema isbot bo‘ldi.Agar X to‘plamning aqalli birortasi $x_0 \geq 0$ manfiy bo‘lmagan elementi bo‘lsa, u holda $\{\tilde{x} = x \in X : \tilde{x} \geq x_0\}$ to‘plam manfiy bo‘lmagan elementlardan tuzilgan bo‘ladi va $\sup X = \sup \tilde{X}$ bo‘ladi. Bu holda teoremani isbotlash oldingi holga kelar ekan.

2-hol. X to‘plam faqat manfiy elementlardan tuzilgan bo‘lsin, u holda X to‘plamning ixtiyoriy elementini

$$x = -a_0, a_1 a_2 \dots a_n \tag{5.11}$$

ko‘rinishda tasvirlash mumkin. a_0^* son hamma $x \in X$ lar uchun (5.11) dagi a_0 sonlarning eng kichigi, a_1^* son $a_0 = a_0^*$ bo‘ladigan X to‘plamning birinchi o‘nli raqamlarining eng kichigi bo‘lsin. a_2^* son $a_0 = a_0^*, a_1 = a_1^*$ bo‘ladigan X to‘plamning ikkinchi o‘nli raqamlarining eng kichigi bo‘lsin va hokazo. Shu usul bilan $x^* = -a_0^*, a_1^* a_2^* \dots a_n^* \dots = -a_0^*, \{a_n^*\}$ son aniqlanadi. Keyin birinchi holdagidek $x^* = \sup X$ bo‘lishi ko‘rsatiladi. Teorema isbot bo‘ldi.

5.2-teorema. Bo‘sh bo‘lmagan X va Y haqiqiy sonlar to‘plamlari berilgan bo‘lsin. Agar $\forall x \in X$ va $\forall y \in Y$ uchun $x \leq y$ munosabat bajarilsa, u holda $\sup X$, $\inf Y$ lar mavjud va $x \leq \sup X \leq \inf Y \leq y$ tengsizlik o‘rinli.

Isbot. Bo‘sh bo‘lmagan X to‘plamning ixtiyoriy elementi Y to‘plamning ixtiyoriy elementidan kichik bo‘lganligi uchun X to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘ladi. Demak, 5.1-teoremaga asosan $\sup X$ mavjud. Shunga o‘xshash Y to‘plamning ixtiyoriy elementi X to‘plamning ixtiyoriy elementidan katta bo‘lganligi uchun Y to‘plam quyidan chegaralangan bo‘ladi. Bu holda ham 5.1-teoremaga asosan $\inf Y$ mavjud. Aniq chegaralarning ta’rifiga ko‘ra $\forall x \epsilon X \rightarrow x \leq \sup X, \forall y \epsilon Y \rightarrow \inf Y \leq y$ munosabatlar o‘rinli. Bulardan teorema to‘liq isbot bo‘lishi uchun sup$X$≤inf Y bo‘lishini ko‘rsatish qoldi. Ixtiyoriy $x \in X$ va $y \in Y$ uchun $x \leq y$ tengsizlik bajarilganligi uchun, har bir $y \in Y$ soni X to‘plamning yuqori chegarasi bo`lishligi kelib chiqadi. $X$ to`plamning aniq yuqori chegarasi, ya`ni sup$X$ soni yuqori chegaralarning eng kichigi bo`lganligi uchun ixtiyoriy $y \in Y$ uchun sup$X \leq y$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Bu tengsizlikdan esa sup$X$ soni Y to`plamning quyi chegarasi va inf$Y$ soni quyi chegaralarning eng kattasi bo`lganligi uchun sup$X$≤inf$Y$ tengsizlikni olamiz. Demak, $x \leq$ sup$X$≤inf $Y \leq y$ tengsizlik o`rinli ekan. Teorema isbot bo‘ldi.

5.2-teorema to‘plamlarning ajralishi haqidagi teorema deyiladi.

5.1-eslatma. $M = \sup E$ son E ga qarashli bo‘lishi ham, qarashli bo‘lmasligi ham mumkin. Agar $M = \sup E$ mavjud bo‘lsa, u yagona bo‘ladi.

3. To‘plamning aniq yuqori va aniq quyi chegaralarining xossalari.

1^0. Agar E to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘lib, $E_1 \subset E$ bo‘lsa, u holda $\sup E_1 \leq \sup E$.

Isboti. E yuqoridan chegaralangan bo‘lgani uchun, u aniq yuqori chegaraga ega, $\alpha = \sup E$. $E_1 \subset E$ bo‘lgani uchun E_1 ham yuqoridan chegaralangan. Shuning uchun $\alpha_1 = \sup E_1$ mavjud. Endi $\alpha_1 \leq \alpha$ ekanligini isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni $\alpha_1 > \alpha$ bo‘lsin. U holda $\exists a \in Q$ uchun $\alpha_1 > a > \alpha$ bajariladi. Ammo yuqori chegaraning ta’rifiga ko‘ra shunday α_1^* topiladiki $\alpha_1^* \in E_1, \alpha_1^* > a \Rightarrow \alpha_1^* > \alpha$.

Ammo $E_1 \subset E$ va $\alpha = \sup E$ bo‘lganligi uchun $\alpha_1^* \leq \alpha$. Shunday qilib ziddiyatga keldik. Demak, $\alpha_1 \leq \alpha$, ya’ni $supE_1 \leq supE$.

2^0. E to‘plam quyidan chegaralangan bo‘lsa, va $E_1 \subset E$ bo‘lsa, u holda $infE \leq infE_1$.

3^0. E to‘plam chegaralangan bo‘lib $E_1 \subset E$ bo‘lsa, $\inf E \leq \inf E_1 \leq \sup E_1 \leq \sup E$ munosabatlar o‘rinli.

4^0. Agar $\forall x \in E$ uchun $x \leq \alpha$ bajarilsa, u holda $\sup E \leq \alpha$ o‘rinli bo‘ladi.

5^0. Agar $\forall x \in E$ uchun $\beta \leq x$ bo‘lsa, u holda $\beta \leq \inf E$.

Agar R ga $-\infty$ va $+\infty$ simvollarni qo‘shsak, $\overline{R} = R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ to‘plamni hosil qilamiz.

4.Mustaqil yechish uchun misollar.

5.1. Agar $A = \{C -$ soni $X \subset R$ to‘plamning yuqori chegarasi } bo‘lsa, bu mulohazani kvantorlar yordamida yozing.

5.2. 5. 1-misoldagi A mulohazaning inkori ya’ni $\bar{A}$ mulohazani yozing.

5.3. Agar $B = \{C' -$ soni, $X \subset R$ to‘plamning quyi chegarasi} bo‘lsa, buni kvantorlar orqali yozing.

5.4. Agar $D=\{X$ to‘plam yuqoridan chegaralangan $\}$ bo‘lsa, bu mulohazani kvantorlar orqali yozing.

5.5. Quyidagi mulohazalarning inkorini kvantorlar orqali yozing.

$a)A=\{X$ to‘plam quyidan chegaralangan$\}$.

$b)B=\{C-X$ to‘plamning yuqori chegarasi$\}$.

$v)D=\{X$ to‘plam chegaralangan$\}$.

$c)E=\{X$ to‘plam yuqoridan chegaralangan$\}$.

5.6. $a)0.75(9)=0.76(0)=0.76\ b)0.01(9)=0.02(0)=0.02$ tengliklar to‘g’rimi.

5.7. *N*-natural sonlar to‘plami quyidan chegaralanganmi?

5.8. Z-butun sonlar to‘plami chegaralanganmi?

5.9. $[a,b]=\{x: a\le x\le b\}$ segmentning aniq quyi va aniq yuqori chegaralarini toping.

Quyidagi to‘plamlarning aniq quyi va aniq yuqori chegaralarini toping.

5.10. $(a,b)=\{x: a<x<b\}$. **5.11.** $[a,b)=\{x: a\le x<b\}$.

5.12. $A=\left\{\frac{1}{n}, n\in N\right\}$. **5.13.** $B=\left\{1+\frac{1}{n}, n\in N\right\}$. **5.14.** $D=\left\{n+\frac{1}{n}, n\in N\right\}$.

5.15. $A=\{x:\ x>1\}$. **5.16.** $B=\left\{\frac{1}{2}\pm\frac{n}{2n+1}:\ n\in N\right\}$ to‘plam berilgan. sup$B$=1, inf$B$=0 bo‘lishini isbotlang.

5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Sonli to‘plamlar deb qanday to‘plamlarga aytiladi va unga misollar keltiring.
2. To‘plamning aniq yuqori va aniq quyi chegaralari ta’rifini va ularning xossalarini ayting.
3. Chegaralangan to‘plamning aniq yuqori va aniq quyi chegaraga ega ekanligi haqidagi teoremani ayting va uni isbotlang.

6-§. Haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallar

Reja:

1. Haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallar.
2. Mustaqil yechish uchun misollar.
3. O’z-o’zini tekshirish savollari.

1.Haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallar.

Haqiqiy sonlarni qo‘shish va ayirish

α va β haqiqiy sonlar berilgan bo`lsin.

$$r\le\alpha\le s, r'\le\beta\le s' \tag{6.1}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $r,\ s,\ r',\ s'$ ratsional sonlar uchun

$$r+r'\le\delta\le s+s' \tag{6.2}$$

munosabatni qanoatlantiradigan δ haqiqiy soniga α va β haqiqiy sonlarning yig'indisi deyiladi va $\alpha+\beta$ kabi belgilanadi.

Shu ta'rif ma'noga ega ekanligini, ya'ni δ sonining mavjudligi va yagonaligini ko'rsatamiz.

6.1-teorema: Ixtiyoriy α va β haqiqiy sonlar uchun ularning yig'indisi mavjud va yagonadir.

Isbot: *a)* Mavjudligini ko'rsatamiz. (6.1) tengsizliklardan $r \leq s, r' \leq s'$ kelib chiqadi. Bu yerdan ratsional sonlarning tengsizlikka bog'liq xossalaridan

$$r + r' \leq s + s' \tag{6.3}$$

tengsizlikni olamiz. $r + r'$ ko'rinishdagi ratsional sonlar to'plamini E orqali belgilaymiz. (6.3) munosabatdan E to'plamning yuqoridan chegaralanganligi ko'rinib turibdi. Bundan esa o'tgan mavzudagi to'plamlarning ajralishi haqidagi teoremaga ko'ra sup$E$ ning mavjudligi kelib chiqadi.

$\delta = \sup E$ belgilashni kiritib, bu δ sonning (6.2) munosabatni qanoatlantirishini ko'rsatamiz. $r + r' \leq \delta$ ekanligi bevosita E to'plamning tuzilishidan va aniq yuqori chegaraning ta'rifidan kelib chiqadi. $\delta \leq s + s'$ tengsizlik esa (6.3) munosabatdan va $5-\S$ dagi 5.2-teoremadan kelib chiqadi. Demak $\delta = \sup E$ soni (6.2) munosabatni qanoatlantirar ekan, demak α va β sonlarning yig'indisi mavjud ekan.

b) Yagonaligini ko'rsatamiz. (6.2) shartni qanoatlantiruvchi δ sonining yagonaligini ko'rsatamiz. Faraz qilamiz (6.2) munosabatni qanoatlantiruvchi yana bitta δ' soni mavjud bo'lib, $r + r' \leq \delta \leq \delta' \leq s + s'$ bo'lsin.

(6.1) munosabatdagi r va r', s va s' ratsional sonlar o'rnida α va β haqiqiy sonlarning $n+1$ chi kami bilan, (ortig'i bilan) o'nli yaqinlashishlarini olish ham mumkin, ya'ni

$$\underline{\alpha}_{n+1} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_{n+1}, \quad \underline{\beta}_{n+1} \leq \beta \leq \bar{\beta}_{n+1} \tag{6.4}$$

munosabatlar orinli bo'ladi (r ning o'rniga $\underline{\alpha}_{n+1}$ va s ning o'rniga $\bar{\alpha}_{n+1}$) α va β sonlarning yig'indisi mavjudligidan va $\delta \leq \delta'$ ekanligidan, hamda (6.4) munosabatdan

$$r_{n+1} = \underline{\alpha}_{n+1} + \underline{\beta}_{n+1} \leq \delta \leq \delta' \leq \bar{\alpha}_{n+1} + \bar{\beta}_{n+1} = s_{n+1} \tag{$*$}$$

tengsizlikni olamiz. Ikkinchi tomondan

$$s_{n+1} - r_{n+1} = \left(\overline{\alpha}_{n+1} - \underline{\alpha}_{n+1}\right) + \left(\overline{\beta}_{n+1} - \underline{\beta}_{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{2}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^{n}} \tag{6.5}$$

tengsizlik o'rinli. $(*)$ munosabatni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$r_{n+1} \leq \delta \leq \delta' \leq s_{n+1} \tag{6.6}$$

(6.5) va (6.6) lardan va quyidagi lemmadan haqiqiy sonlar yig'indisining yagonaligi kelib chiqadi.

6.1-lemma. δ va $\delta' \in R$ sonlar berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $n \in N$ da

$$x_n \leq \delta \leq \delta' \leq y_n, \quad (6.7)$$

$$y_n - x_n < \frac{1}{10^n} \quad (6.8)$$

munosabatlar bajarilsa, u holda $\delta = \delta'$ bo‘ladi. Bu yerda $x_n, y_n \in Q$.

Isbot: Faraz qilaylik $\delta \neq \delta'$ va $\delta < \delta'$ bo‘lsin. U holda $r \in Q$ va $r' \in Q$ sonlar topiladiki, $\delta \leq r < r' \leq \delta'$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Bundan esa $m \in N$ son topiladiki,

$$r' - r > \frac{1}{10^m} \quad (6.9)$$

bo‘ladi. Ikkinchi tomondan (6.7) munosabatdan $x_n \leq \delta \leq r < r' \leq \delta' \leq y_n$ kelib chiqadi. Demak

$$x_n \leq r < r' \leq y_n \quad (6.10)$$

(6.8), (6.9), (6.10) lardan $\frac{1}{10^m} < r' - r \leq y_n - x_n < \frac{1}{10^n}$ bo‘ladi. Bu yerdan

$$\frac{1}{10^m} < \frac{1}{10^n} \quad (6.11)$$

ekanligi kelib chiqadi. (6.11) tengsizlik tayinlangan m da $\forall n \in N$ da bajarilishi kerak bo‘lganligi uchun qarama-qarshilikka kelamiz. Bu qarama-qarshilik lemmani isbotlaydi.

Haqiqiy sonlarni ayirish amali xuddi ratsional sonlarni ayirish amali kabi qo‘shish amaliga teskari amal sifatida kiritiladi.

Haqiqiy sonlarni ko‘paytirish va bo‘lish.

α va β musbat haqiqiy sonlar berilgan bo‘lsin.

$$0 < r \leq \alpha \leq s, 0 < r' \leq \beta \leq s' \quad (6.12)$$

munosabatlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy r, s, r', s' ratsional sonlari uchun

$$r \cdot r' \leq \delta < s \cdot s' \quad (6.13)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi δ soniga α va β haqiqiy sonlarning ko‘paytmasi deyiladi va $\alpha\beta$ kabi yoziladi.

6.2-teorema. Ixtiyoriy α, β musbat haqiqiy sonlarning ko‘paytmasi mavjud va yagonadir.

Isbot. Ko‘paytmaning mavjudligi 6.1-teoremadagi yig’indining mavjudligini isbotlaganimizdek isbotlanadi. (6.13) tengsizlikni qanoatlantiruvchi r va r' ratsional sonlarni ko‘paytirish natijasida hosil bo‘ladigan rr' ko‘rinishdagi sonlarning to‘plamini *D* orqali belgilab, δ sifatida $supD$ ni olamiz. (δ soni α va β haqiqiy sonlarning ko‘paytmasi sifatida keladi).

Ko‘paytmaning yagonaligini isbotlaymiz.

$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ va $\beta = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ sonlar uchun mos ravishda $\underline{\alpha}_m$, $\underline{\beta}_m$ lar kami bilan, $\bar{\alpha}_m$, $\bar{\beta}_m$ sonlari esa ortig’i bilan m -chi o‘nli yaqinlashishlari bo‘lsin. U holda $\underline{\alpha}_m \le \alpha \le \bar{\alpha}_m < a_0 + 1$, $\underline{\beta}_m \le \beta \le \bar{\beta}_m < b_0 + 1$ tengsizliklar o‘rinli.

Faraz qilaylik (6.13) tengsizlikni qanoatlantiruvchi δ va δ' sonlari mavjud va ular $\delta < \delta'$ tengsizlikni qanoatlantirsin. (6.12) munosabatdagi r, s, r', s' sonlar o‘rnida mos ravishda $\underline{\alpha}_m, \bar{\alpha}_m, \underline{\beta}_m, \bar{\beta}_m$ sonlarni olamiz. Osonlik bilan ko‘rish mumkinki, $\exists k \in N$, $a_0 + b_0 + 2 < 10^k$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bundan esa $\forall m \in N$ uchun

$$\underline{\alpha}_m + \bar{\beta}_m < \underline{\alpha}_m + \bar{\beta}_m + 2 \le 10^k \qquad (6.14)$$

tengsizlikning bajarilishi kelib chiqad (chunki $\bar{\alpha}_m \le a_0 + 1$ va $\bar{\beta}_m \le b_0 + 1$). $r_n = \underline{\alpha}_{n+k} \cdot \underline{\beta}_{n+k}$, $s_n = \bar{\alpha}_{n+k} \cdot \bar{\beta}_{n+k}$ belgilashlarni kiritib va (6.13) hamda (6.14) dan foydalanib, ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$s_n - r_n = \bar{\alpha}_{n+k} \cdot \bar{\beta}_{n+k} - \underline{\alpha}_{n+k} \cdot \underline{\beta}_{n+k} = \bar{\alpha}_{n+k} \cdot \bar{\beta}_{n+k} - \underline{\alpha}_{n+k} \cdot \bar{\beta}_{n+k} + \underline{\alpha}_{n+k} \cdot$$

$$\bar{\beta}_{n+k} - \underline{\alpha}_{n+k} \cdot \underline{\beta}_{n+k} = (\bar{\alpha}_{n+k} - \underline{\alpha}_{n+k})\underline{\beta}_{n+k} + \underline{\alpha}_{n+k}(\bar{\beta}_{n+k} - \underline{\beta}_{n+k}) = \frac{\bar{\beta}_{n+k}}{10^{n+k}} +$$

$$\frac{\underline{\alpha}_{n+k}}{10^{n+k}} = \frac{\underline{\alpha}_{n+k} + \bar{\beta}_{n+k}}{10^{n+k}} \le \frac{10^k}{10^{n+k}} = \frac{1}{10^n}$$

munosabatni olamiz. Bu yerdan 6.1-lemmaga asosan $\delta = \delta'$ ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Ixtiyoriy $\alpha, \beta \in R$ sonlarining ko‘paytmasi quyidagicha aniqlanadi.

1. Agar α=0 bo‘lsa , $\forall \beta \in R$ uchun $\alpha \cdot \beta$=0 bo‘ladi.
2. Agar α<0 va $\beta < 0$ bo‘lsa , u holda $\alpha \cdot \beta = |\beta| \cdot |\alpha|$.
3. Agar α>0, $\beta < 0$ yoki α<0, $\beta > 0$ bo‘lsa , u holda $\alpha \cdot \beta = -|\beta| \cdot |\alpha|$.

Haqiqiy sonlar bo‘linmasi.

$x\alpha=\beta$ tenglamaning $\alpha \ne 0$ bo‘lgandagi yechimi (yagona yechimga egaligini ko‘rsatish mumkin) β sonning α soniga bo‘linmasi deyiladi va $\frac{\beta}{\alpha}$ kabi belgilanadi.

2.Mustaqil yechish uchun misollar

6.1. b=101001000100001… irratsional sonning kami bilan va ortig’i bilan o‘ninchi, yuzinchi va minginchi o‘nli yaqinlashishlarini toping .

6.2. a=1,12245678910111213… irratsional sonning beshinchi, oltinchi, o‘n beshinchi o‘nli yaqinlashishlarni (ortig’i bilan va kami bilan) toping.

6.3. 6.1 va 6.2-misollardagi a va b irratsional sonlarning yig’indisi va ko‘paytmasi mavjudligini va ularning ham irratsional son ekanligini isbotlang.

6.4. a va b musbat haqiqiy sonlarning ko‘paytmasi mavjud va yagonaligini isbotlang (dastlab ko‘paytmaning ta’rifini keltiring).

6.5. Ixtiyoriy $\alpha = a_0, a_1 \dots a_n \dots$ haqiqiy sonning kami bilan k-o‘rinli yaqinlashishini $\underline{\alpha_k}$ va ortig’i bilan k- o‘rinli yaqinlashishlarini $\overline{\alpha_k}$ kabi belgilab quyidagi munosabatlarning o‘rinli ekanligini isbotlang:

a) $\overline{\alpha_k} - \underline{\alpha_k} = \frac{1}{10^k}$, $k \epsilon N$,

b) $\underline{\alpha_1} \leq \underline{\alpha_2} \leq \cdots \leq \underline{\alpha_n} \leq \cdots$,

c) $\overline{\alpha_1} \geq \overline{\alpha_2} \geq \cdots \geq \overline{\alpha_n} \geq \cdots$,

d) $\forall\, n$ va $\forall m$ uchun $\underline{\alpha_n} < \overline{\alpha_m}$.

6.6. Haqiqiy sonlarni taqqoslash tranzituvlik xossasiga ega ekanligini ko‘rsating.

6.7. α va β haqiqiy sonlar α<β tengsizlikni qanoatlantiradi. Shunday γ irratsional son topilib α<γ<β tengsizlik o‘rinli bo‘lishini ko‘rsating.

6.8. a) { x: α≤ x ≤β}, b) { x: α≤ x<β}, c) { x: α<x ≤β}, d) { x: α<x<β} to‘plamlar qanday nomlanadi? Bu to‘plamlarning chetki nuqtalari (chap chetki nuqtasi, o‘ng chetki nuqtasi), ichki nuqtalari deb qanday nuqtalariga aytiladi?

3.O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Haqiqiy sonlarni qo‘shish va ayirish ta’riflarini ayting
2. Haqiqiy sonlarni ko‘paytirish va bo‘lish ta’riflarini ayting.
3. Haqiqiy sonlarni yig’indisi haqidagi teoremani ayting.

7-§. Haqiqiy sonlar to‘plamining xossalari. To‘laligi (zichligi). Sonning absolyut qiymati (moduli)

Reja:

1. Haqiqiy sonlarning xossalari.
2. Haqiqiy sonning moduli.
3. Mustaqil yechish uchun misollar.
4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Haqiqiy sonlarning xossalari. Ratsional sonlar ustida o‘rnatilgan amallar qanday xossalarga ega bo‘lsa, haqiqiy sonlar ham shu xossalarga ega . Bu xossalarning ba’zilarini keltirish bilan chegaralanamiz.

7.1-lemma. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ uchun $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ tenglik o‘rinli

Isbot: $\delta = \alpha + (\beta + \gamma), \delta' = (\alpha + \beta) + \gamma$ belgilashlarni kiritamiz. $\delta = \delta'$ ekanligini isbot qilishimiz kerak. Faraz qilaylik $\delta < \delta'$ bo‘lsin. α, β, γ sonlarning (n+1) – chi kami bilan o‘nli yaqinlashishlarini mos ravishda $\underline{\alpha}_{n+1}, \underline{\beta}_{n+1}, \underline{\gamma}_{n+1}$ kabi, ortig’i bilan (n+1) - chi o‘nli yaqinlashishlarini esa $\overline{\alpha}_{n+1}, \overline{\beta}_{n+1}, \overline{\gamma}_{n+1}$ bilan belgilaymiz. O‘nli yaqinlashishlarning ta’rifiga ko‘ra

$$\left.\begin{aligned} \underline{\alpha}_{n+1} \le \alpha \le \overline{\alpha}_{n+1} \\ \underline{\beta}_{n+1} \le \beta \le \overline{\beta}_{n+1} \\ \underline{\gamma}_{n+1} \le \gamma \le \overline{\gamma}_{n+1} \end{aligned}\right\} \qquad (7.19)$$

munosabat o‘rinli. Haqiqiy sonlarni qo‘shish qoidasiga ko‘ra

$$\underline{\alpha}_{n+1} + \underline{\beta}_{n+1} \le \alpha + \beta \le \overline{\alpha}_{n+1} + \overline{\beta}_{n+1}, \qquad (7.20)$$

$$\underline{\beta}_{n+1} + \underline{\gamma}_{n+1} \le \beta + \gamma \le \overline{\beta}_{n+1} + \overline{\gamma}_{n+1}. \qquad (7.21)$$

Endi $\alpha\ va\ \beta+\gamma$ hamda $(\alpha+\beta)$ va γ sonlarning qo‘shish qoidasiga ko‘ra (7.19), (7.20), (7.21) larni hisobga olgan holda

$$(\underline{\alpha}_{n+1} + \underline{\beta}_{n+1}) + \underline{\gamma}_{n+1} \le (\alpha+\beta) + \gamma \le (\overline{\alpha}_{n+1} + \overline{\beta}_{n+1}) + \overline{\gamma}_{n+1}, \qquad (7.22)$$

$$\underline{\alpha}_{n+1} + \left(\underline{\beta}_{n+1} + \underline{\gamma}_{n+1}\right) \le \alpha + (\beta+\gamma) \le \overline{\alpha}_{n+1} + (\overline{\beta}_{n+1} + \overline{\gamma}_{n+1}) \qquad (7.23)$$

tengliklarni olamiz. Ratsional sonlarni qo‘shish assosiativlik xossasiga ega bo‘lganligi uchun (7.22), (7.23) tengsizliklarning chap qismi:

$$r_n = \underline{\alpha}_{n+1} + \underline{\beta}_{n+1} + \underline{\gamma}_{n+1}$$

ga teng, o‘ng qismi esa $s_n = \overline{\alpha}_{n+1} + \overline{\beta}_{n+1} + \overline{\gamma}_{n+1}$ ga teng.
(7.22) va (7.23) dan:

$$r_n \le \delta \le \delta' \le s_n \qquad (7.24)$$

kelib chiqadi. Shunday qilib

$$s_n - r_n = (\overline{\alpha}_{n+1} - \underline{\alpha}_{n+1}) + \left(\overline{\beta}_{n+1} - \underline{\beta}_{n+1}\right) + (\overline{\gamma}_{n+1} - \underline{\gamma}_{n+1}) = \frac{3}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^n}.$$

Demak, $s_n - r_n < \frac{1}{10^n}$. Bundan va 6.1-lemmaga asosan $\delta = \delta'$ ekanligi kelib chiqadi. Shunga o‘xshash haqiqiy sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish amallarining boshqa xossalari ham isbotlanadi.

7.2-lemma. $\alpha, \beta \in R$ sonlar berilgan bo‘lsin. Agar $\alpha \neq 0$ bo‘lsa, u holda $\frac{\beta}{\alpha}$ mavjud va yagonadir.

Bu lemmaning isbotini mustaqil bajarishga qoldiramiz.

2. Haqiqiy sonning moduli.

a haqiqiy sonning moduli quyidagiga teng: $|a| = \begin{cases} a, & \text{agar } a \ge 0 \text{ bo'lsa} \\ -a, & \text{agar } a < 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

Haqiqiy sonning modulining ayrim xossalarini keltiramiz.

1^0. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, a \in R, b \in R;$

2^0. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, a \in R, b \neq 0, b \in R;$

3^0. $|a+b| \le |a| + |b|, a \in R, b \in R;$

4^0. $|a+b| \ge |a| - |b|, a \in R, b \in R;$

5^0. $|a-b| \le |a| + |b|, a \in R, b \in R;$

6^0. $|a-b| \ge |a| - |b|, a \in R, b \in R;$

7^0. $a \le |a|, a \in R$;

8^0. $-a \le |a|, a \in R$;

9^0. $|-a| = |a|, a \in R$;

10^0. $|a^2| = |a|^2 = a^2, a \in R$;

11^0. $|a^{2n}| = |a|^{2n} = a^{2n}, a \in R$;

12^0. $-|a| \le a \le |a|, a \in R$.

3.Mustaqil yechish uchun misollar.

7.1. Quyidagi tengliklarni isbotlang:

a) $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \alpha\beta = \beta\alpha$ (kommutativlik).

b) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$; $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (assosiativlik).

c) $\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta$ (distributivlik).

d) Agar $\alpha > \beta$ va $c>d$ bo‘lsa, u holda $\alpha + c > \beta + d$.

e) Agar $\alpha > \beta$ va $\beta > \gamma$ bo‘lsa, u holda $\alpha > \gamma$.

f) Agar $\alpha>\beta$ va $\gamma < 0$ bo‘lsa, u holda $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

g) Agar $\alpha \neq 0$, $\alpha\beta=0$ bo‘lsa, u holda $\beta = 0$.

4.O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1) Haqiqiy sonlarni qo‘shishning kommutativlik xossasini isbotlang.

2) Haqiqiy sonlarni ko‘paytirishning kommutativlik xossasini isbotlang.

8-§. Chekli va cheksiz (sanoqli) to‘plamlar. Sanoqli va kontinum quvvatli to‘plamlar

Reja:

1.Ratsional sonlar to‘plamining sanoqliligi.
2.Mustaqil yechish uchun misollar.
3. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Ratsional sonlar to‘plamining sanoqliligi. X va Y sonli to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Agar bu to‘plamlarning elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, ya’ni

a) Har bir $x \in X$ elementga yagona $y \in Y$ element mos qo‘yilgan;

b) Har bir $y \in Y$ elementga biror $x \in X$ element mos qo‘yilgan;

c) X to‘plamning har xil elementiga Y to‘plamning har xil elementlari mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda X va Y to‘plamlar ekvivalent deyiladi va X~Y kabi yoziladi.

N natural sonlar to‘plamiga ekivivalent bo‘lgan to‘plamlar sanoqli to‘plamlar deyiladi. $n \in N$ soniga mos qo‘yiluvchi X sanoqli to‘plamning elementini x_n orqali belgilasak, X to‘plamni $X=\{x_n, n \in N\}$ ko‘rinishda yoki $X=\{x_n\}$ ko‘rinishida yozish mumkin. Demak sanoqli to‘plamning elementlarini natural sonlar bilan nomerlab chiqish mumkin .

8.1-teorema. Ratsional sonlar to‘plami Q sanoqlidir**.**

Isbot. E musbat ratsional sonlar to‘plami bo‘lsin. Bu to‘plam barcha qisqarmaydigan $\frac{p}{q}$ ko‘rinishdagi kasrlar to‘plamidan iborat, bu yerda $p, q \in N$. Bu ko‘rinishdagi kasrlarni, p+q yig’indi dastlab 1 ga, 2 ga, va 3 ga (va hakazo) teng bo‘lganlarini quyidagicha ko‘rinishda yozib olamiz:

$\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}$, $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}$, ……

p+q=2, p+q=3, p+q=4, p+q=5.

Natijada E to‘plamning barcha elementlari yozib chiqilgan bo‘ladi. Bu ko‘rinishdagi sonlarni

$r_1 = \frac{1}{1}$, $r_2 = \frac{2}{2}$, $r_3 = \frac{2}{1}$, $r_4 = \frac{1}{3}$, $r_5 = \frac{3}{4}$, $r_6 = \frac{1}{4}$, $r_7 = \frac{2}{3}$,…

ko‘rinishda nomerlab chiqamiz. Ko‘rinib turibdiki, natural sonlar to‘plami bilan bir xil qiymatli moslik o‘rnatildi . Osonlik bilan ko‘rish mumkinki, Q ratsional sonlar to‘plami

$$0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, \dots, r_n, -r_n, \dots$$

ko‘rinishda yozilgan sonlar to‘plami bilan ustma-ust tushadi. Bu ko‘rinishdagi sonlar to‘plamini

$$s_0 = 0, s_1 = r_1, s_2 = -r_1, s_3 = r_2, s_4 = -r_2, \dots, s_{2n+1} = r_n, s_{2n} = -r_n, \dots$$

ko‘rinishda qaytadan nomerlab chiqib, bu to‘plam bilan yana natural sonlar to‘plami N o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin ekanligini olamiz. Demak, Q ratsional sonlar to‘plami sanoqli to‘plam ekan.

8.2-teorema. Haqiqiy sonlar to‘plami R sanoqli to‘plam bo‘la olmaydi.

Isbot. R_+ - musbat haqiqiy sonlar to‘plamining sanoqsizligini ko‘rstamiz. Teskarisini faraz qilsak, u holda to‘plamning barcha elementlari nomerlab chiqilgan bo‘ladi, ya’ni uning elimentlarini $\{a_n\}$, $n \in N$ ko‘rinishda tasvirlash mumkin bo‘ladi. Har bir a_n son haqiqiy son bo‘lganligi uchun uni $a_n = a_0^n, a_1^n, a_2^n \dots$ ko‘rinishdagi o‘nli kasr shaklda tasvirlanadi. Shunday $\beta = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ soni topilib, β son $\{a_n\}$ ketma-ketlikning elementi bo‘lmasligini ko‘rsatamiz. b_1 ni $b_1 \neq a_1^{(1)}$, $b_1 \neq 9, b_1 \neq 0$ shartni qanoatlantiradigan, b_2 ni esa $b_2 \neq a_2^{(2)}$, $b_2 \neq 9, b_1 \neq 0$ shartni qanoatlantiradigan, umuman $\forall n \in N$ b_n sonini $b_n \neq a_n^{(n)}$, $b_n \neq 9$, $b_n \neq 0$ shartni qanoatlantiradigan qilib tanlab olamiz. U holda $\forall n \in N$, $\beta \neq a_n$ bo‘ladi. Bu esa R_+ musbat haqiqiy sonlar to‘plamining barcha elementlari $\{a_n\}, n \epsilon N$ ko‘rinishda tasvirlanishiga qarama-qarshi. Demak, R_+ musbat haqiqiy sonlar to‘plami sanoqli to‘plam bo‘la olmas ekan. $R_+ \subset R$ bo‘lganligi uchun R to‘plam ham sanoqsiz bo‘ladi. Xuddi shunga o‘xshash [0;1] segmentning ham sanoqsizligini ko‘rsatish mumkin.

8.1-tarif: Agar *X* sonli to‘plam [0; 1] segmentga ekvivalent bo‘lsa, u holda *X* to‘plamni kontinium quvvatli to‘plam yoki qisqacha *C* quvvatli to‘plam deyiladi.

8.3-teorema. Har qanday [a;b] segment (a;b) interval yoki yarim segment [a;b) *C* **(kontinium quvvatli) to‘plam bo‘ladi.**

Isbot. *y=a+(b-a)x* formula [*a;b*] segment bilan [0;1] segment o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatadi. Cheksiz to‘plamdan bitta yoki ikkita elementni chiqarib tashlash yoki qo‘shib qo‘yish bu hosil bo‘lgan to‘plam dastlabki to‘plamga ekvivalent to‘plam bo‘lganligidan interval yarim interval ham kontinium quvvatli to‘plam bo‘ladi.

2.Mustaqil yechish uchun misollar.

Quyidagi tasdiqlarni isbotlang.

8.1. Har qanday cheksiz to‘plamdan sanoqli bo‘lgan qism to‘plam ajratish mumkinligini isbotlang.

8.2. Sanoqli to‘plamning har qanday cheksiz qism to‘plami sanoqlidir.

8.3. Agar sanoqli *A* to‘plamdan chekli *M* to‘plamni chiqarib tashlasak u holda *A\M* to‘plam sanoqli bo‘ladi.

8.4. O‘zaro kesishmaydigan cheklita yoki sanoqlita sanoqli to‘plamlarning yigindisi yana sanoqli to‘plam bo‘ladi.

8.5. Agar cheksiz *M* to‘plamga chekli yoki sanoqli *A* to‘plamni birlashtirsak u holda $M+A \sim M$ bo‘ladi.

8.6. Agar *S* cheksiz to‘plam kontinium quvvatli A esa uning chekli yoki sanoqli qism to‘plami bo‘lsa, u holda $S \sim S \backslash A$.

8.7. Kontinium quvvatli o‘zaro kesishmaydigan sanoqlita to‘plamlarning birlashmasi kontinum quvvatlidir.

8.8. $A=\{1, 4, 9, 16, \ldots, n^2 \ldots \}$ va $B=\{1, 8, 27, \ldots, n^3, \ldots\}$ to‘plamlar bir xil quvvatlidir.

8.9. To‘g’ri burchakli uchburchak kateti va gipotenuzasidagi nuqtalar to‘plami bir xil quvvatli.

8.10. $N=\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ va $Z=\{\ldots -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ to‘plamlar bir xil quvvatli.

8.11. [0; 1] va [1; 12] to‘plamlarning bir xil quvvatli ekanligini isbotlang.

8.12. [*a; b*] va [0; 1) to‘plamning bir xil quvvatli ekanligini isbotlang.

3.O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1) Qanday to‘plamlar ekvivalent to‘plamlar deyiladi?

2) Qanday to‘plamlar sanoqli to‘plamlar deyiladi?

3) Qanday to‘plamlar kontinium quvvatli to‘plamlar deyiladi?

9-§. Matematik induksiya usuli va Nyuton binomi

Reja:

1. Matematik induksiya usuli.
2. Nyuton binomi.
3. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.
4. Mustaqil yechish uchun misollar.

1.Matematik induksiya usuli. Induksiya so‘zi lotincha so‘z bo‘lib xususiy mulohazalardan umumiy xulosa chiqarish ma`nosini bildiradi. Matematik induksiya usuli mohiyati quyidagicha:

1.Isbot qilinayotgan tasdiq $n=1$ uchun tekshiriladi. To‘g’riligiga ishonch hosil qilgandan so‘ng ikkinchi bosqichga o‘tiladi.

2.Shu tasdiqni $n=k$ uchun to`g`ri deb olib, uchinchi bosqichga o‘tiladi.

3.Tasdiq $n=k+1$ uchun to`g`ri ekanligi isbot qilinadi.

Bu usulning qo‘llanishiga doir misollar qaraymiz.

9.1-misol. $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ tenglikni isbotlang.

Isbot. 1) $n=1$ uchun $1=\frac{1(1+1)}{2}$; $1=1$ to‘g’ri.

2) $n=k$ uchun $1+2+3+\ldots+k=\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$ tenglik to‘g’ri deb olib,

3) $n=k+1$ uchun $1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}$ tenglikni to‘g’riligini isbotlaymiz. Oson ko‘rish mumkinki

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}+(\kappa+1)=\frac{\kappa(\kappa+1)+2(\kappa+1)}{2}=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}$$

tenglik o‘rinli.

9.2-misol. $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$ tenglikni isbotlang.

Isbot. 1) $n=1$ da $1^3=1^2$ o‘rinli.

2) $n=k$ da $1^3+2^3+\ldots+k^3=(1+2+3+\ldots+k)^2$ ni to‘g’ri deb faraz qilamiz.

3) $n=k+1$ da $1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=(1+2+3+\ldots+k+(k+1))^2$ tenglikning to‘g’riligini isbotlaymiz. Haqiqatan ham,

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=(1+2+3+\ldots+k)^2+(k+1)^3=$$

$$\frac{\kappa^2(\kappa+1)^2}{4}+(\kappa+1)^3=(\kappa+1)^2\left(\frac{\kappa^2}{4}+\kappa+1\right)=(\kappa+1)^2\left(\frac{\kappa}{2}+1\right)^2=$$

$$=(\kappa+1)^2\frac{(\kappa+2)^2}{4}=\left(\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}\right)^2=(1+2+3+\ldots+\kappa+(\kappa+1))^2$$ munosabat o‘rinli.

9.3-misol. $1 \cdot 2+2 \cdot 3+3 \cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ tenglikni isbotlang.

Isbot. 1) $1 \cdot 2=\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$; 2=2 bo‘lganligi uchun $n=1$ da tenglik to‘g’ri.

2) $n=k$ da $1 \cdot 2+2 \cdot 3+3 \cdot 4+\ldots+k(k+1)=\frac{\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)}{3}$ tenglikni to‘g’ri deb faraz qilamiz.

3) $n=k+1$ da $1 \cdot 2+2 \cdot 3+3 \cdot 4+\ldots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)}{3}$ ning to‘g’riligini isbotlaymiz. Haqiqatan ham

$$1 \cdot 2+2 \cdot 3+3 \cdot 4+\ldots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)}{3}+(\kappa+1)(\kappa+2)=$$

$$=(\kappa+1)(\kappa+2)\left[\frac{\kappa}{3}+1\right]=(\kappa+1)(\kappa+2)\left(\frac{\kappa+3}{3}\right)=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)}{3}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

9.4-misol. $1+2+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$ tenglikni isbotlang.

Isbot. 1) $n=1$ da $1=1^2$ tenglik to‘g’ri.

2) $n=k$ da $1+2+3+5+7+\ldots+(2k-1)=k^2$ ni to‘g’ri deb faraz qilamiz.

3) $n=k+1$ da $1+2+3+5+7+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$ ning to‘g’riligini isbotlaymiz, ya’ni

$1+2+3+5+7+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

9.5-misol. $$\frac{1}{3 \cdot 5}+\frac{1}{5 \cdot 7}+\frac{1}{7 \cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{3(2n+3)}$$ tenglikni isbotlang.

Isbot. 1) $n=1$ da $\frac{1}{3 \cdot 5}=\frac{1}{3(2+3)}, \frac{1}{15}=\frac{1}{15}$ tenglik o‘rinli.

2) $n=k$ da $$\frac{1}{3 \cdot 5}+\frac{1}{5 \cdot 7}+\frac{1}{7 \cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k}{3(2k+3)}$$ ni to‘g’ri deb faraz qilamiz.

3) $n=k+1$ da

$$\frac{1}{3 \cdot 5}+\frac{1}{5 \cdot 7}+\frac{1}{7 \cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}=\frac{k+1}{3(2k+5)}$$ ning

to‘g’riligini isbotlaymiz. Haqiqatan ham

$$\frac{1}{3 \cdot 5}+\frac{1}{5 \cdot 7}+\frac{1}{7 \cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2\kappa+1)(2\kappa+3)}+\frac{1}{(2\kappa+3)(2\kappa+5)}=\frac{\kappa}{3(2\kappa+3)}+\frac{1}{(2\kappa+3)(2\kappa+5)}=$$

$$=\frac{1}{2\kappa+3}\left(\frac{\kappa}{3}+\frac{1}{2\kappa+5}\right)=\frac{1}{2\kappa+3}\cdot\frac{\kappa(2\kappa+5)+3}{3(2\kappa+5)}=\frac{1}{2\kappa+3}\left(\frac{2(\kappa+1)(\kappa+\frac{3}{2})}{3(2\kappa+5)}\right)=$$

$=\frac{1}{2\kappa+3}\cdot\frac{(\kappa+1)(2\kappa+3)}{3(2\kappa+5)}=\frac{\kappa+1}{3(2\kappa+5)}$ munosabatlar o‘rinli.

Matematik induksiya usuli yordamida tengsizliklarni ham isbotlash mumkin.

9.6-misol. Barcha $n>1\ (n\in N)$ sonlar uchun ushbu

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$

tengsizlikning to‘g’riligini isbotlang.

Yechilishi. Tengsizlikning chap tomonini S_n bilan belgilaymiz.

1) $n=2$ bo‘lganda $\frac{7}{12}=\frac{14}{24}>\frac{13}{24}$ bo‘lib, bu esa berilgan tengsizlikning ekanligini isbotlaydi.

2) $n=k$ natural son uchun $S_k>\frac{13}{24}$ tengsizlik to‘g’ri deb faraz qilib, $n=k+1$ bo‘lganda, $S_{k+1}>\frac{13}{24}$ tengsizlikning to‘g’riligini isbotlaymiz. Ushbu

$$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k} \text{ va } S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

ifodalarni taqqoslaymiz. Bulardan

$$S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$$

kelib chiqadi. $\forall k\ (k\in N)$ uchun oxirgi tenglikning o‘ng tomoni musbat bo‘lganligidan, $S_{k+1}>S_k$ bo‘ladi. O‘z navbatida, $S_k>\frac{13}{24}$ bo‘lganligi uchun, $S_{k+1}>\frac{13}{24}$ tengsizlik ham o‘rinli bo‘ladi. Bu esa, berilgan tengsizlikning o‘rinli ekanligini isbotlaydi.

Shunday qilib, matematik induksiya usuliga asosan, $n>1\ (n\in N)$ lar uchun berilgan tengsizlik o‘rinli ekan.

2.Nyuton binomi. Nyuton binomi – ikki hadning darajasini yakka hadlar yig’indisi ko‘rinishida ifodalovchi formulaning nomi.

Ikkihadning kvadrati uchun: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ formulani qadimgi Bobil metematiklari bilishgan. Agar bu formulani ikkala qismini ham $a+b$ ga ko‘paytirib, qavslarni ochsak $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ hosil bo‘ladi. Buni va hokazo davom ettirsak, quyidagi tasdiq kelib chiqadi.

1-tasdiq. *Ixtiyoriy a, b haqiqiy sonlar va ixtiyoriy* $n \in N$ *son uchun quyidagi Nyuton binomi formulasi o'rinli:*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n, \quad (9.1)$$

bu yerda C_n^k *- n ta turli elementdan k tadan takrorlashsiz gruppalashlar soni, ya'ni* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, $k = \overline{1,n}$, C_n^k *lar binomial koeffitsiyentlar deyiladi.*

Isboti. Matematik induksiya usulidan foydalanamiz. $n = 1$ bo'lganda, $C_1^0 a + C_1^1 b = a + b$ bo'ladi va (9.1) formula o'rinli.

(9.1) formula o'rinli deb faraz qilib, quyidagi formula o'rinli bo'lishini isbotlaymiz:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k \quad (9.2)$$

(9.1) formulaning ikki tomonini $a+b$ ga ko'paytirsak $(a+b)^{n+1} = A_n + B_n$ ni olamiz. Bunda

$$A_n = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k,$$

$$B_n = a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}.$$

Natijada quyidagini olamiz

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}. \quad (9.3)$$

Ravshanki, (9.2) va (9.3) formulalarning o'ng tomonlarini taqqoslab, shunday xulosaga kelamizki, (9.2) formulaning to'g'riligini ko'rsatish uchun

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k \quad (9.4)$$

tenglikni isbotlash yetarli.

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, $k = \overline{1,n}$, formulani qo'llab quyidagini topamiz:

$$C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} = \frac{kn(n-1)\ldots(n-(k-2))}{k!}.$$

Shuning uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-2))}{k!}\left(n-(k-1)+k\right) =$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)-1)\ldots((n+1)-(k-1))}{k!} = C_{n+1}^k.$$

(9.4) formula to‘g’ri ekan, shuning uchun (9.2) formula o‘rinli. Demak, matematik induksiya usuliga asosan, (9.1) formula ixtiyoriy $n \in N$ sonlar uchun o‘rinli ekan.

Bu tasdiq Paskaldan ancha oldin XI-XII asrda yashagan o’rta osiyolik shoir va matematik Umar Xayyomga ma`lum bo‘lgan.

Demak (9.1) formula Nyuton binomi formulasi deyiladi.

Nyuton binomi formulasining xossalari :

1. a ning ko‘rsatkichi kamayib boradi, b ning ko‘rsatkichi ortib boradi. Ularning ko‘rsatkichlari yig’indisi m ga teng.
2. Yoyilma m+1 ta haddan ibrat.
3. Binomial koeffitsiyentlar yig’indisi 2^m ga teng.
4. Yoyilmaning istalgan hadi $T_{k+1}=C_n^k a^k b^{n-k}$ dan iborat.
5. Yoyilmaning chetlaridan teng uzoqlikda turgan hadlarning koeffitsiyentlari o‘zaro teng.

3.O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Matematik induksiya usulining mohiyatini tushuntiring.
2. Nyuton binomi formulasini yozing.
3.Nyuton binomi formulasini isbotlang.

4.Mustaqil yechish uchun misollar.

9.1. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$ ayniyat $\forall n \in N$ uchun o‘rinli ekanligi isbotlansin.

9.2. Barcha $x>-1$ va $\forall n \in N$ sonlar uchun $(1+x)^n \geq 1+nx$ Bernulli tengsizligi isbotlansin.

9.3. Ixtiyoriy natural n soni uchun quyidagi tengliklarning to‘g’riligini isbotlang:

1. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. $1^2+3^2+5^2+....+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$.

3. $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot\sin\frac{nx}{2}\cdot\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{-1}$..

4. $1+2x+3x^2+....+nx^{n-1}=\frac{1+(n-1)x^n-nx^{n-1}}{(1-x)^2}, \quad x\neq 1.$

5. $1+2q+3q^2+...+nq^{n-1}=\frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}$.

6. $\frac{(n+1)(n+2)...(2n-1)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}=2^n$.

7. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$

8. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n};\quad n\geq 2.$

9.4. Har bir natural *n* uchun a_n soni *b* soniga bo‘linishini isbotlang:

a) $a_n=5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{n-1},\quad b=19.$

b) $a_n=5^{n+2}+26\cdot 5^n+8^{2n+1},\quad b=59.$

c) $a_n=5^{n+3}\cdot 2^n-125,\quad b=45.$

9.5. Matematik induksiya usulidan foydalanib, ixtiyoriy n $(n\in N)$ lar uchun quyida berilgan tengsizliklarning to‘g’riligini isbotlang.

a) $2^n>2n+1, n\geq 3.$ b) $2^n>n^3,\ \ n\geq 10.$

c) $(1+a)^n\geq 1+na,\ a>-1.$ d) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}},\ n>1.$

9.6. Agar $\left(n+\frac{1}{n}\right)^n$ yoyilmaning boshidan to‘rtinchi hadining oxiridan to‘rtinchi hadiga ko‘paytmasi 14400 ga teng bo‘lsa, yoyilmaning eng katta binomial koeffisiyentini toping.

9.7. $\left(\sqrt[7]{7}+\sqrt[13]{13}\right)^{100}$ yoyilmaning barcha ratsional hadlarini toping.

9.8. $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ binom yoyilmasining a^7 qatnashgan hadining nomerini toping.

9.9. Qaysi biri katta: 100^{101} mi yoki 101^{100} mi?

9.10. Yig’indini hisoblang:

a) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n.$

b) $C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n.$

I bobni takrorlash uchun test savollari

1. $\{x:\ x\in R,\ \ a<x<b\}$ to‘plam nima deb ataladi?
   a) interval b) segment c) yarim segment d) nur
2. To‘plamning aniq yuqori chegarasi deb nimaga aytiladi?
   a) yuqori chegaralarning eng kichigi
   b) quyi va yuqori chegaralar yig’indisining yarimi
   c) quyi chegaralarning eng kattasi
   d) yuqori chegaralarning eng kattasi

3. b soni qanday shartlar bajarilganda E to‘plamning aniq quyi chegarasi deyiladi?

a) $\forall x \in E, \ \ x \le b$ va $\forall \varepsilon > 0 \wedge \exists x' \in E$ bo‘lib, $x' \le b - \varepsilon$ bo‘lsa

b) $\forall x \in E, \ \ x \ge b$ va $\forall \varepsilon > 0 \wedge \exists x' \in E$ bo‘lib, $x' < b + \varepsilon$ bo‘lsa

c) $\forall x \in E, \ \ x \ge b$ va $\forall \varepsilon > 0 \wedge \exists x' \in E$ bo‘lib, $x' > b + \varepsilon$ bo‘lsa

d) $\forall x \in E, \ \ x \ge b$ va $\forall \varepsilon > 0 \wedge \exists x' \in E$ bo‘lib, $x' = b + \varepsilon$ bo‘lsa

4. Agar har qanday M son berilganda ham shunday $n_0 \in N$ son topilsaki, $n > n_0$ lar uchun quyidagi shart bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti $+\infty$ deb ataladi?

a) $x_n = M$ b) $x_n > M$ c) $x_n \le M$ d) $x_n < M$

5. $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} - 1 \right\}, \quad n \in N$ to‘plamning aniq quyi chegarasini toping.

a) -1 b) -2 c) 3 d) 0

6. A va B to`plamlarning har ikkalasiga bir vaqtda tegishli elementlardan tashkil topgan to`plam qanday nomlanadi?

a) A va B to`plamlarning kesishmasi

b) A va B to`plamlarning ayirmasi

c) A va B to`plamlarning simmetrik ayirmasi

d) A va B to`plamlarning birlashmasi

7. Birorta ham elementga ega bo`lmagan to`plam qanday nomlanadi?

a) cheksiz to`plam b) bo`sh to`plam c) chekli to`plam d) sanoqli to`plam.

8. $A\{-7,-4,7\}, B\{-5,0,2,7\}, C\{-4,0,1,7\}$ to`plamlar uchun $(A \cup B) \setminus C$ to`plam elementlarini ko`rsating.

a) $\{-7,-5,-7\}$ b) $\{-7,5,2\}$ c) $\{-7,-5,2\}$ d) $\{-7,0,2\}$

9. $A = (-11,4], B = [0,5)$ to`plamlar berilgan. $A \cap B$ ni toping.

a) $(0,4)$. b) $[4,5)$ c) $(-11,4]$ d) $[0,4]$

10. Agar A ixtiyoriy sonli to`plam bo`lsa, $A \cap \varnothing$ ni toping.

a) $\varnothing$ b) A c) $A \setminus \emptyset$ d) 0

11. Agar bo‘sh bo‘lmagan haqiqiy sonlar to‘plami E quyidan chegaralangan bo‘lsa u holda… .

a) supE mavjud b) inf E mavjud c) inf E va supE mavjud

d) inf E va supE mavjud emas

12. $(a+b)^{10}$ ifodaning yoyilmasidagi 5-hadining oldidagi koeffisiyentini toping.

a) 600 b) 210 c) 152 d) 120

13. $(a+b)^5$ ifodaning yoyilmasidagi 5-hadining oldidagi koeffisiyentini toping.

a) 4 b) 10 c) 15 d) 5

14. Sanoqli to‘plamning har qanday cheksiz qism to‘plami haqidagi quyidagi tasdiqlarning qaysi to‘g’ri.

a) sanoqli to‘plam b) chekli to‘plam c) sanoqsiz to‘plam d) kontinium quvvatli to‘plam.

15. Chekli sondagi sanoqli to‘plamlarning birlashmasi haqidagi quyidagi tasdiqlarning qaysi biri o‘rinli.

a) sanoqli to‘plam b) chekli to‘plam c) sanoqsiz to‘plam d) kontinum quvvatli to‘plam.

16. Sanoqli sondagi sanopli to‘plamlarning birlashmasi haqidagi quyidagi tasdiqlarning qaysi biri o‘rinli.

a) sanoqli to‘plam b) chekli to‘plam c) sanoqsiz to‘plam d) kontinum quvvatli to‘plam.

17. Quyidagi to‘plamlarning qaysi biri sanoqli emas.

a) (0;1) b) Q-ratsiolan sonlar to‘plami c) N – natural sonlar to‘plami d) Z– butun sonlar to‘plami

18. Quyidagi to‘plamlarning qaysi biri kontinium quvvatli to‘plam.

a) (0;1) b) Q -ratsiolan sonlar to‘plami c) N – natural sonlar to‘plami d) Z – butun sonlar to‘plami

19. Quyidagi to‘plamlarning qaysi biri kontinium quvvatli to‘plam emas.

a) Q -ratsiolan sonlar to‘plami b) $(-\infty;\ +\infty)$ c) $(-\infty;\ 0)$ d) $(0;\ +\infty)$

20. Quyidagi sonlarning qaysi biri irratsional son.

a) $\frac{1}{3}$ b) 0,123(123) c) 0,123456789101112... d) 0,0001

21. sup$X$=M tenglik quyidagi munosabatlarning qaysi biri bajarilganda o‘rinli.

a) $\forall x \in M \quad x \leq M$ va $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in X,\ M - \varepsilon < x_\varepsilon$

b) $\forall x \in M \quad x \leq M$ va $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon,\ M - \varepsilon < x_\varepsilon$

c) $\forall x \in M \quad x \leq M$ va $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X,\ M + \varepsilon < x_\varepsilon$

d) $\forall x \in M \quad x \geq M$ va $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X,\ M + \varepsilon < x_\varepsilon$

22. Quyidagi X to‘plamlarning qaysi biri uchun sup$X \subset X$ munosabat o‘rinli.

a) $X = [0,1)$ b) $X = N$, N-natural sonlar toplami c) $X = (0,1]$ d) X=*(0,9)*

23. Quyidagi X to‘plamlarning qaysi biri uchun $\inf X \subset X$ munosabat o‘rinli.

a) $X=(0,9)$ b) $X = (0,1]$ c) $X = N,$ N-natural sonlar toplami

d) $X = [0,1)$

24. Agar α va β – haqiqiy sonlar uchun $\alpha<\beta$ tengsizlik bajarilsa quyidagi tasdiqlarning qaysi biri o‘rinli emas (bu yerda Q- ratsional sonlar to‘plami, I-irratsional sonlar to‘plami).

a) $\forall r \in Q \cap (\alpha;\beta)$ va $\forall \gamma \in I \Rightarrow \alpha < r < \gamma < \beta$

b) $\exists r \in Q \Rightarrow \alpha < r < \beta$

c) $\exists r' \in Q\ \exists r \in Q \Rightarrow \alpha < r < r' < \beta$

d) $\exists \gamma \in I \Rightarrow \alpha < \gamma < \beta$

25. ,, X to‘plam yuqoridan chegaralangan’’ tasdig’ining inkori qaysi javobda to‘g’ri ko‘rsatilgan.

a) $\exists M \in R,\ \exists x_0 \in X,\ x_0 > M$

b) $\forall M \in R,\ \exists x_0 \in X,\ x_0 > M$

c) $\forall M \in R,\ \forall x \in X,\ x \le M$

d) $\exists M \in R,\ \forall x \in X,\ x \ge M.$

26. “X to‘plam quyidan chegaralangan“ tasdig’ining inkori qaysi javobda to‘g’ri ko‘rsatilgan.

a) $\exists m \in R,\ \exists x \in X \to x \le m$

b) $\exists m \in R,\ \exists x_0 \in X \to x_0 < m$

c) $\forall m \in R,\ \exists x \in X \to x \ge m$

d) $\forall m \in R,\ \exists x_0 \in X \to x_0 < m$

27. X to‘plamning chegaralanganlik ta’rifini bering.

a) $\exists M \in R,\ \exists m \in R, \forall x \in X \to m \le x \le M$

b) $\exists M \in R,\ \forall x \in X \to x \le M$

c) $\exists m \in R,\ \forall x \in X \to x \ge m$

d) $\forall M \in R,\ \forall m \in R, \exists x \in X \to m \le x \le M$

28. X to‘plam yuqoridan chegaralangan deyiladi, agarda

a) $\exists M \in R,\ \forall x \in X \to x \le M$

b) $\exists M \in R,\ \exists x \in X \to x \le M$

c) $\exists m \in R,\ \forall x \in X \to x \ge m$

d) $\forall M \in R,\ \forall m \in R, \exists x \in X \to m \le x \le M$

29. X to‘plam quyidan chegaralangan deyiladi, agarda

a) $\exists m \in R,\ \forall x \in X \to x \ge m$

b) $\exists M \in R,\ \exists x \in X \to x \le M$

c) $\exists M \in R,\ \forall x \in X \to x \le M$

d) $\forall M \in R,\ \forall m \in R,\ \exists x \in X \to m \le x \le M$

30. Har qanday cheksiz to‘plamdan ajratilgan qism to‘plamlar uchun quyidagi mulohazalarning qaysi biri to‘g’ri?

a) cheksiz bo‘ladi b) chekli va bo‘sh bo‘ladi

c) cheksiz, bo‘sh bo‘ladi d) bo‘sh, chekli, cheksiz bo‘lishi mumkun

31. Har qanday sanoqli to‘plamdan ajratilgan qism to‘plamlar uchun quyidagi mulohazalarning qaysi biri to‘g’ri?

a) bo‘sh, sanoqli b) bo‘sh chekli c) bo‘sh, chekli, sanoqli d) sanoqli

32. Har qanday kontinium quvvatli to‘plamdan ajratilgan qism to‘plamlar ucun quyidagi mulohazalarning qaysi biri to‘g’ri?

a) bo‘sh, chekli, sanoqli, kontinuum quvvatli b) bo‘sh chekli sanoqli

c) bo‘sh, chekli, kontinium quvvatli d) bo‘sh, kontinium quvvatli

33. $\{x: x \in R, a \leq x < b\}$ to‘plamning aniq quyi chegarasini toping.

a) $b - \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$ b) b c) a d) $b - 1$

34. $\left\{\frac{n+1}{n}, n \in N\right\}$ to‘plamning aniq quyi chegarasini toping.

a) 2 b) 0 c) 1 d) $\frac{1}{2}$

35. $A = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots\}$, $B = \{1, 8, 27, \ldots, n^3, \ldots\}$,

$C = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ to‘plamlar bir xil quvvatlimi?

a) A va B bir xil quvvatli b) ha c) yo‘q d) A va C bir xil quvvatli

36. $A = [0,1]$, $B = [1,10)$, $C = (-\infty, +\infty)$ to‘plamlar bir xil quvvatlimi?

a) yo‘q b) ha c) A va B bir xil quvvatli d) A va C bir xil quvvatli

37. Kontinium quvvatli o‘zaro kesishmaydigan sanoqli to‘plamlarning birlashmasi kontinium quvvatli bo‘ladimi?

a) yo‘q b) ha c) sanoqli to‘plam bo‘ladi

d) sanoqli to‘plam ham kotinium to‘plam ham bo‘lishi mumkin

38. $A\{-7, -4, 7\}, B\{-5, 0, 2, 7\}, C\{0, 1, 7\}$ to\`plamlar uchun $(A \cup B) \setminus C$ to\`plam elementlarini ko\`rsating.

a) $\{-7, 0, 2\}$ b) $\{-7, -5, 2\}$ c) $\{-7, -5, -7\}$ d) $\{-7, -4, 5, 2\}$

39. $A = (-11, 4]$, $B = [0, 5]$ to\`plamlar berilgan. $A \cap B$ ni toping.

a) $(-11, 4]$ b) $[0, 4]$ c) $[4, 5]$ d) $(0, 4)$.

40. Quyidagi to\`plamlardan qaysi biri uchun $x = -10, x = 0, x = 2, x = 2,05$ sonlari limitik nuqta bo\`ladi?

a) $[-10, 1) \cup (2, 3)$ b) $[-10, 2]$ c) $[-10, 0) \cup (0, 3)$ d) $[-10,0) \cup (0,2]$

II Bob. ELEMENTAR FUNKSIYALARNING XOSSALARI

10-§. Akslantirishlar va ularning turlari. Funksiya tushunchasi. Aniqlanish va qiymatlar sohasi

Reja:

1. Akslantirishlar va ularning turlari.
2. Funksiyaning ta`rifi.
3. Funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasi.
4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.
5. Mustaqil yechish uchun misollar.

1.Akslantirishlar va ularning turlari. Agar sonli to‘plamlar o‘rnida ixtiyoriy to‘plamlar qaralsa, u holda funksiya tushunchasining umumlashmasi, ya’ni akslantirish ta’rifiga kelamiz. Faraz qilaylik, E va F to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

10.1-tarif: Agar E to‘plamdan olingan har bir x elementga biror f qoida yoki qonunga ko‘ra F to‘plamning bitta $y \in F$ elementi mos qo‘yilgan bo‘lsa, E to‘plamni F to‘plamga akslantirish berilgan deyiladi va $f: E \to F$ yoki $x \to y$, ($x \in E, \quad y \in F$) kabi belgilaniladi. Bunda E to‘plam f akslantirishning aniqlanish to‘plami deyiladi.

10.1–misol. Ushbu $N = \{1,2, \dots, n, \dots\}$ va $N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Agar har bir natural n ($n \in N$) songa $\frac{1}{n}$ $\left(\frac{1}{n} \in N'\right)$ sonni mos qo‘ysak, unda $f: N \to N'$, $n \to \frac{1}{n}$ akslantirish hosil bo‘ladi. U $f(n) = \frac{1}{n}$ kabi ham yoziladi. Agar har bir natural n ($n \in N$) songa $\frac{1}{n^2}$ ($\frac{1}{n^2} \in N'$) sonni mos qo‘ysak, unda $\varphi: N \to N'$, $n \to \frac{1}{n^2}$ akslantirishga ega bo‘lamiz: $\varphi(\mathrm{n}) = \frac{1}{n^2}$.

Faraz qilaylik,

$$f: E \to F \tag{10.1}$$

akslantirish berilgan bo‘lsin. $x \in E$ elementga mos qo‘yilgan $y \in F$ element x ning aksi (obrazi) deyiladi va $y = f(x)$ kabi belgilanadi.

Endi $y \in F$ elementni olaylik. E to‘plamning shunday x elementlarini qaraymizki, $f(x) = y$ bo‘lsin. Bunday $x \in E$ elementlar $y \in E$ ning asli (proobrazi) deyiladi va $f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi va $f^{-1}(y) = \{x \in E: f(x) = y\}$ kabi yoziladi.

Agar $\mathrm{A} \subset E$ bo‘lsa, ushbu $\{f(x): x \in A\}$ to‘plam A to‘plamning F dagi aksi deyiladi va $f(A)$ kabi belgilanadi: $f(A) = \{f(x): x \in A\}$.

Agar $B \subset F$ bo‘lsa, ushbu $\{x \in E: f(x) \in B\}$ to‘plam B to‘plamning E dagi asli deyiladi va $f^{-1}(B)$ kabi belginadi: $f^{-1}(B) = \{x \in E: f(x) \in B\}$.

10.2-misol. Faraz qilaylik, $N = \{1,2, \dots, n, \dots\}$ va M{-1, 1} to‘plamlar berilgan bo‘lib, ushbu $f: N \to M$ akslantirish $f(n) = (-1)^n$ ko‘rinishda bo‘lsin. Ravshanki, $5 \in N$ sonining aksi $f(x) = -1$. 1$\in M$ sonining asli esa $f^{-1}(1) = \{2,4,6, \dots\}$ bo‘ladi. Shuningdek, $A = \{3,4\} \subset N$ to‘plamning aksi $F(A) = \{-1,1\} = M$, $B = \{-1\} \subset M$ to‘plamning asli esa $f^{-1}(B) = \{1,3,5, \dots\}$ bo‘ladi.

Faraz nqilaylik, A va B to‘plamlar F to‘plamning qismiy to‘plamlari bo‘lsin, ya’ni $A \subset F$, $B \subset F$. U holda

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Xuddi shunday,

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \; f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi.

Aytaylik, $f: E \to F$ akslantirish berilgan bo‘lib, $f(E)$ esa E to‘plamning aksi bo‘lsin: $f(E) = \{f(x): x \in E\}$.

10.2-ta’rif. Agar (10.1) akslantirishda $f(E) \subset F$ bo‘lsa, u holda (10.1) akslantirish *E* to‘plamni F to‘plamning ichiga akslantirish deyiladi.

Masalan, $N = \{1,2, \dots, n, \dots\}$ va $N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ to‘plamlar uchun ushbu $f: N \to N'$, $n \to \frac{1}{3n}$ akslantirish N to‘plamni N' to‘plamning ichiga akslantirish bo‘ladi.

10.3-ta’rif. Agar (10.1) akslantirishda $f(E) = F$ bo‘lsa, (10.1) akslantirish E to‘plamni F to‘plamning ustiga akslantirish (syurektiv akslantirish) deyiladi.

Masalan, $N = \{1,2, \dots, n, \dots\}$ va M{-1, 1} to‘plamlar uchun $n \to (-1)^n$ akslantirish *N* to‘plamni M to‘plamning ustiga akslantirish bo‘ladi.

10.4-ta’rif. Agar (10.1) ustiga akslantirish bo‘lib, bu akslantirish E to‘plamning turli elementlarini F to‘plamning turli elementlariga akslantirsa (10.1) inyektiv akslantirish deyiladi.

10.5-ta’rif. Agar (10.1) ustiga akslantirish bo‘lib, u inyektiv akslantirish ham bo‘lsa, (10.1) o‘zaro bir qiymatli akslantirish (moslik) deyiladi.

Masalan, $N = \{1,2, \dots, n, \dots\}$ va $N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ to‘plamlar uchun ushbu $f: N \to N'$, $n \to \frac{1}{n}$ akslantirish o‘zaro bir qiymatli (biyektiv) akslantirish bo‘ladi.

10.6-ta’rif. $f: E \to F$ akslantirish o‘zaro bir qiymatli akslantirish bo‘lsin. F to‘plamning har bir y ($y \in F$) elementiga E to‘plamning bitta x elementini ($x \in F$) mos qo‘yadigan va $g(y) = g\big(f(x)\big) = x$ munosabat bilan aniqlanadigan $g: F \to E$ akslantirish $f: E \to F$ ga nisbatan teskari akslantirish deyiladi va f^{-1} kabi belgilanadi: $f^{-1}: E \to F$.

Demak, $f: E \to F$ ga teskari akslantirish mavjud bo‘lishi uchun:

1) f ustiga akslantirish,
2) F to‘plamdan olingan har bir y elementining E to‘plamdagi asli

$$f^{-1}(y) = f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

yagona bo‘lishi kerak.

**2. Funksiyaning ta`rifi.** Bizga $X$ va $Y$ $(X \subset R, Y \subset R)$ to`plamlar berilgan bo`lsin, $x \in X,\ y \in Y$ bo`lsin.

**10.7-ta`rif.** Agar haqiqiy sonlar to`plami X ning har bir x elementiga biror f qoida yoki qonun bo`yicha $Y$ to`plamning yagona y elementi mos qo`yilsa, u holda shu $X$ to`plamda x o`zgaruvchining funksiyasi berilgan deyiladi va $y = f(x)$ deb belgilanadi.

Bunda: x-erkli o`zgaruvchi yoki funksiyaning argumenti deyiladi, $y$-erksiz o`zgaruvchi yoki funksiya deyiladi.

3. Funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasi.

**10.8-ta`rif.** Erkli o`zgaruvchi x ning funksiyani ma`noga ega qiladigan hamma qiymatlari to`plami funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(y)$ yoki $D(f)$ kabi belgilanadi.

**10.9-ta`rif.** Erksiz o`zgaruvchi y ning qabul qiladigan qiymatlari esa funksiyaning qiymatlari to`plami deyiladi va $E(y)$ yoki $E(f)$ kabi belgilanadi.

10.3-misol: $y = \dfrac{1}{x^2 + 5x - 6}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish: Bu funksiya aniqlangan bo`lishi uchun kasrning maxraji 0 dan farqli bo`lishi kerak. Shuning uchun $x^2+5x-6 \neq 0$ tenglamani yechamiz:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} \neq \frac{-5 \pm 7}{2},\ x_1 \neq 1,\ x_2 \neq -6.$$

Demak, funksiyaning aniqlanish sohasiga 1 va -6 nuqtalar kirmaydi. Shunday qilib, $D(y)$ =(-∞;-6) ∪ (-6;1) ∪ (1;∞) bo‘ladi.

10.4-misol: $y = \dfrac{3x+5}{x^4 - 8x}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish: Kasr ratsional funksiya ma`noga ega bo`lishi uchun maxraji 0 dan farqli bo`lishi kerak. Shuning uchun $x^4-8x \neq 0$ tenglamaning yechimini topamiz: $x(x^3-8) \neq 0$ => $x_1 \neq 0$, $x^3-8 \neq 0$, $(x-2)(x^2+2x+4) \neq 0$ => $x \neq 2$.

$(x^2+2x+4)=0$ tenglama yechimga ega emas. Demak, funksiyaning aniqlanish sohasi $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; \infty)$ dan iborat.

10.5-misol. $y=x+9$ funksiyaning qiymatlar sohasini toping.

Yechish: y istalgan qiymatni qabul qiladi. Ta'rifga asosan $y=x+9$ funksiyaning qiymatlar sohasi $E(y) =(-\infty,+\infty)$ bo'ladi.

10.6-misol. $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning qiymatlar sohasini toping.

Yechish: $y=\frac{1}{x}$ tenglamani x ga nisbatan yechamiz. $yx=1$, $x=\frac{1}{y}$. Ta`rifga asosan $y\neq 0$ dan tashqari hamma qiymatlarida aniqlangan. Demak, qiymatlar sohasi $E(y) =(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ dan iborat.

10.7-misol. $y = signx = \begin{cases} -1, & agar\, x<0 \\ 0, & agar\, x=0 \\ 1, & agar\, x>0 \end{cases}$ funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini toping.

Yechish: Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D(y) = R$ dan, qiymatlar sohasi $E(y)=\{-1,0,1\}$ to'plamdan iborat.

4. O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Funksiyaning ta'rifini ayting.
2. Funksiyaning aniqlanish sohasini tushuntiring.
3. Funksiyaning qiymatlar sohasini tushuntiring.

5. Mustaqil yechish uchun misollar.

10.1. $f(x) = x^2$ bo'lsin. U holda:

a) $f: R \to R$ akslantirish syuryektiv ham, inyektiv ham emas;

b) $f: R \to R_+ \cup \{0\}$ akslantirish syuryektiv, ammo inyektiv emas;

c) $f: R \to R_-$ akslantirish ham syuryektiv, ham inyektiv emasligini isbotlang.

10.2. $f: X \to [5, 20]$, $f(x) = x^2 + 2$ funksiya berilgan. X to'plam qanday tanlansa, f ustiga (syuryektiv) akslantirish bo'ladi?

10.3. $f: X \to R_+, f(x) = x^2 + 1$ funksiya berilgan. X to'plam qanday tanlansa, f inyektiv akslantirish bo'ladi?

10.4. a) $f: [0, \pi] \to [-1; 1], f(x) = cosx,$

b) $f: [0, \pi] \to [0; 1],\ g(x) = sinx,$

c) $\varphi: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0; 1],\ \varphi(x) = sinx,$

d) $\phi: [0,3] \to [0; 10],\ \phi(x) = x^2 + 1$

akslantirishlar ichidan inyektiv, syuryektiv va biyektivlarini ajrating.

Funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping.

10.5. $y=\dfrac{x^2}{1+x}$. **10.6.** $y=\sqrt{3x-x^3}$. **10.7.** $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

10.8. $y=\log_2(x^2-4)$. **10.9.** $y=\log_3(x+2)+\log_3(x-2)$. **10.10.** $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

10.11. $y=\sqrt{\cos x^2}$. **10.12.** $y=\lg\sin\dfrac{\pi}{x}$. **10.13.** $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$.

10.14. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$. **10.15.** $y=\arccos(2\sin x)$. **10.16.** $y=\lg[\cos(\lg x)]$.

Funksiyalarning qiymatlar sohalarini toping.

10.17. $y=\sqrt{2+x-x^2}$. **10.18.** $y=\lg(1-2\cos x)$.

10.19. $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$. **10.20.** $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

11-§. Funksiyaning grafigi. Funksiyalarning berilish usullari. Bir nechta formulalar bilan berilgan usullar. Funksiyalar bilan arifmetik amallar bajarish

Reja:

1. Funksiyaning grafigi.
2. Funksiyalarning berilish usullari. Bir nechta formulalar bilan berilgan usullar.
3. Funksiyalar bilan arifmetik amallar bajarish.
4. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar.
5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.
6. Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Funksiyaning grafigi.

**11.1-ta`rif.** Funksiyaning grafigi deb, koordinatalar tekisligining absissalari argumentining qiymatlariga teng, ordinatalari esa unga mos qiymatlariga teng bo`lgan hamma nuqtalar to`plamiga aytiladi.

Bu ta’rifni quyidagicha aytish ham mumkin. Bizga $y=f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin.

11.2-ta’rif. Tekislikning $(x, f(x))$ kabi aniqlangan nuqtalaridan iborat ushbu $\{(x, f(x))\}=\{(x, f(x)) : x\in X,\ y=f(x)\in Y\}$ to‘plam funksiyaning grafigi deb ataladi.

Faraz qilaylik, koordinata tekisligida biror $y(x)$ funksiyaning grafigi tasvirlangan bo`lsin. Berilgan grafik bo`yicha x ning biror aniq qiymatiga $y(x)$ funksiyaning mos qiymatini topish uchun bunday yo`l tutamiz. Absissalar o`qining x koordinatali nuqtasidan shu o`qqa perpendikulyar o`tkazamiz va uning berilgan funksiya grafigi bilan kesishgan nuqtasini topamiz. Kesishish nuqtasining ordinatasi funksiyaning mos qiymati bo`ladi.

Funksiyaning grafik yordamida berilish usuli grafik usul deyiladi.

2. Funksiyalarning berilish usullari. Bir nechta formulalar bilan berilgan usullar.

Funsiyalar odatda 3 xil usulda berilishi mumkin.

1.Analitik usulda (formula ko`rinishida). Masalan: $y=kx+b$, $y=x^2$.

2.Jadval usulda.

3.Grafik usulda.

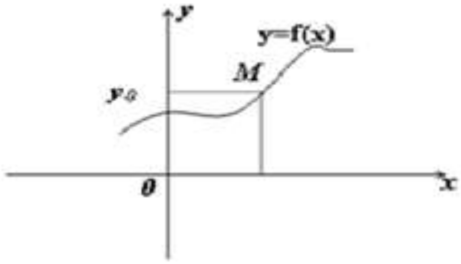
Analitik usul. Ko‘pincha x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bunda argument x ning har bir qiymatiga mos keladigan y funksiyaning qiymati x ustida analitik amallar - qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish, darajaga ko‘tarish, ildizdan chiqarish, logarifmlash va h.k. amallarni bajarish natijasida topiladi. Odatda bunday usul - funksiyaning analitik usulda berilishi deyiladi.

Jadval usul. Ba’zi hollarda $x \in X$ ва $y \in Y$ o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish formulalar yordamida berilmasdan, jadval orqali berilgan bo‘lishi ham mumkin. Masalan, t - yanvar oyining birinchi dekadasi (10 kunligi) kunlari nomeri bo‘lsa, T - shu nomerli kuni soat 16^{00} da Samarqand shahrida kuzatilgan havo haroratini bildirsin, natijada quyidagi jadvalga kelamiz:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	-3^0	-5^0	$+2^0$	$+5^0$	$+1^0$	0^0	-2^0	-5^0	-3^0	-1^0

Bunda t - argument, T - funksiya bo‘ladi. Bog‘lanishning bunday berilishi, funksiyaning jadval usulda berilishi deb ataladi.

Grafik usul. xOy koordinatalar tekisligida x ning X to‘plam $(X = D(f))$ dan olingan har bir qiymati uchun $\mathrm{M}(x,y)$ nuqta yasaladi, bunda nuqtaning abssissasi x, ordinatasi esa y bo‘lib u y funksiyaning x ga mos kelgan qiymatiga teng. Yasalgan nuqtalarni birlashtirsak, natijada biror chiziq hosil bo‘ladi, hosil bo‘lgan bu chiziq berilgan funksiyaning grafigi deb qaraladi (11.1-chizma).



11.1–chizma

11.1-misol: $y=x^2+2$ funksiya berilgan. Shu funksiyaning grafigiga koordinatalari 1) (1;3), 2) (2,2) bo`lgan nuqta tegishli yoki tegishli emasligini aniqlang.

Yechish: $y(1)=1^2+2=3$ bo‘lganligi uchun (1;3) nuqta funksiyaning grafigiga tegishli. $y(2)=2^2+2=6$ bo‘lganligi uchun (2;2) nuqta funksiyaning grafigiga tegishli emas.

Shuni ta’kidlash kerakki, funksiya har xil oraliqlarda har xil formulalar bilan berilishi ham mumkin. Masalan, quyidagi

$$f(x)=\begin{cases} -x, & agar\ x<0 \\ x^2, & agar\ 0\le x\le 1 \\ 2-\sqrt{x}, & agar\ x>1 \end{cases}$$

funksiya R da uchta har xil formulalar bilan analitik usulda berilgan.

3. Funksiyalar bilan arifmetik amallar bajarish.

Bitta X to‘plamda aniqlangan $f(x)$ va g(x) funksiyalar uchun ularning yig’indisi $f+g$, ayirmasi f-g, ko‘paytmasi $f\cdot g$, bo‘linmasi $\frac{f}{g}$ aniqlanadi. Bular yangi funksiyalar hisoblanadi va quyidagi formulalar bilan ifodalanadi:

$a)\ f(x)\pm g(x);$ b) $f(x)\cdot g(x);$ c) $\dfrac{f(x)}{g(x)},(g(x)\neq 0, x\in X)\cdot$

4. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar.

$y=f(x)$ funksiya X to‘plamda aniqlangan bo‘lsin.

11.3-ta’rif. Agar shunday o‘zgarmas M (o‘zgarmas m) son topilib, istalgan $x\in X$ uchun $f(x)\le M$ $(f(x)\ge m)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi, aks holda esa, funksiya yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan deyiladi.

11.4-ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya X to‘plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo‘lsa, ya’ni shunday o‘zgarmas M va m sonlar mavjud bo‘lib, istalgan $x\in X$ uchun

$$m\le f(x)\le M \tag{11.1}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya X to‘plamda *chegaralangan* deyiladi.

$m=\inf\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ son $f(x)$ funksiyaning X to‘plamdagi aniq quyi chegarasi, $M=\sup\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ son esa $f(x)$ funksiyaning X to‘plamdagi aniq yuqori chegarasi deyiladi.

$M-m$ ayirma $f(x)$ funksiyaning X *to‘plamdagi tebranishi* deb ataladi.

Agar $f(x)$ funksiya chegaralangan bo‘lib, m va M sonlar uning aniq quyi va aniq yuqori chegaralari bo‘lsa, u holda

$$|f(x)|\le C \tag{11.2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, bunda $C=\max\{|M|,\ |m|\}$. (11.1) va (11.2) tengsizliklar o‘zaro teng kuchlidir.

Demak, (11.2) tengsizlik funksiyaning chegaralanganlik shartini ifodalaydi.

Chegaralangan funksiyalarning grafigi Ox o‘qqa parallel bo‘lgan $y=C$ va $y=-C$ to‘g‘ri chiziqlar orasida bo‘ladi.

11.5-ta’rif. Agar istalgan musbat $C>0$ son uchun shunday $x_c\in X$ topilib, $|f(x_c)|>C$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda chegaralanmagan deyiladi.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida chegaralanmagan bo‘lsa, u x_0 *nuqtada chegaralanmagan* deyiladi.

$f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada chegaralangan bo‘lishi uchun uning $[a;b]$ kesmaning har bir nuqtasida chegaralangan bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Chegaralangan funksiya quyidagi xossalarga ega:

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X to‘plamda aniqlangan bo‘lib, ular shu to‘plamda chegaralangan bo‘lsa, u holda

a) $f(x)\pm g(x)$; *b)* $f(x)\cdot g(x)$; *c)* $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0,\ x\epsilon X)$; $|f(x)|, |g(x)|$

funksiyalar ham X to‘plamda chegaralangan bo‘ladi.

11.6–ta’rif. Y to‘plamning aniq yuqori (quyi) chegarasiga $f(x)$ funksiyaning X to‘plamdagi aniq yuqori (quyi) chegarasi deyiladi va u $\sup\limits_{x\epsilon X}\{f(x)\}$ $\left(\inf\limits_{x\epsilon X}\{f(x)\}\right)$ kabi belgilanadi.

5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Funksiyaning grafigi tarifini ayting.
2. Funksiyaning berilish usullarini ayting.
3. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalarning ta’rifini ayting.

6.Mustaqil yechish uchun misollar.

11.1. $y=x^2-5x+6$ funksiya berilgan. Shu funksiya grafigiga koordinatalari 1)(1;2), 2) (-2;0), 3) (-2;20), 4) (3;0) bo`lgan nuqta tegishli bo`lish yoki bo`lmasligini aniqlang.

11.2. Funksiyaning grafigini chizing: $y = x^2 + 3$.

11.3. Funksiyaning grafigini chizing: $y = \frac{3x+2}{2x-3}$.

11.4. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini chizing.

1. $y=x+2$. 2. $y=x^2-3$. 3. $y=x-2$. 4. $y=x^4-x^2$.
5. $y=x-3$. 6. $y=x^3-2$. 7. $y=x^3+2$. 8. $y=-x^3-3$.

11.5. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini bitta koordinatalar sistemasida chizing.

1. $y = \frac{12}{x},\ y = 3x$. 2. $y = -\frac{8}{x},\ y = -2x$.
3. $y = \frac{2}{x},\ y = x - 1$. 4. $y = \frac{6}{x+1},\ y = x + 2$.

12-§. Juft va toq funksiyalar. Monoton funksiyalar. Davriy va davriymas funksiyalar

Reja:

1. Juft va toq funksiyalar.
2. Monoton funksiyalar.
3. Davriy va davriymas funksiyalar.
4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.
5. Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Juft va toq funksiyalar.

12.1-ta`rif: Agar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘lib, aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lgan barcha x lar uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik bajarilsa $f(x)$ juft funksiya deyiladi.

Masalan: $y=x^4$ va $y = \frac{1}{x^2}$ funksiyalar 12.1-ta’rifga asosan juft funksiyalar, chunki bu funksiyaning aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik va istalgan x uchun $(-x)^4=x^4$ hamda istalgan $x\neq0$ uchun $\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$.

12.2-ta`rif: Agar $f(x)$ unksiyaning aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘lib, aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lgan barcha x lar uchun $f(-x) = -f(x)$ tenglik bajarilsa $f(x)$ toq funksiya deyiladi.

Masalan: $y=x^5$, $y=\frac{1}{x^3}$ funksiyalar 12.2-ta'rifga asosan toq funksiyalar, chunki bu funksiyaning aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik va istalgan x uchun $(-x)^5=-x^5$ hamda istalgan $x\neq 0$ uchun $\frac{1}{(-x)^3}=\frac{-1}{x^3}$.

Juft va toq funksiyalarning aniqlanish sohalari koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik ekanligini ta`kidlab o`tamiz.

12.1 va 12.2-ta'riflarning shartlarini qanoatlantirmagan funksiyalar juft ham toq ham bo‘lmagan funksiyalar bo‘ladi.

Masalan: $y=2x+1$ funksiyaning juft funksiya ham toq funksiya ham emasligini ko`rsatamiz.

$$y(-x)=2(-x)+1=-2x+1\neq 2x+1, \text{ ya'ni } y(-x)\neq y(x).$$

Demak, bu funksiya juft ham toq ham bo‘lmagan funksiya.

12.1-misol: $y=2x^4$ funksiyaning juft yoki toqligini aniqlang.

Yechish: $y(-x)=2(-x)^4=2(x)^4=y(x)$. Demak, bu funksiyaning aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik va $y(-x)=y(x)$ shart bajarildi. Shuning uchun 12.1-ta'rifga asosan bu funksiya juft funksiyadir.

12.2-misol: $y=x^3+x^5$ funksiyaning juft yoki toqligini aniqlang.

Yechish: $y(-x)=(-x)^3+(-x)^5=-x^3-x^5=-(x^3+x^5)=-y(x)$. Demak, bu funksiyaning aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik va $y(-x)=-y(x)$ shart bajarildi. Shuning uchun 12.2-ta'rifga asosan bu funksiya toq funksiyadir.

2. Monoton funksiyalar.

**12.3-ta`rif.** Agar argumentning biror oraliqdan olingan katta qiymatiga funksiyaning katta qiymati mos kelsa, ya`ni shu oraliqqa tegishli istalgan x_1, x_2 uchun $x_2>x_1$ tensizlikdan $y(x_2)>y(x_1)$ tengsizlik kelib chiqsa, $y(x)$ funksiya shu oraliqda o`suvchi funksiya deyiladi.

12.4-ta`rif. Agar biror oraliqqa tegishli istalgan x_1, x_2 uchun $x_2>x_1$ tengsizlikdan $y(x_2)<y(x_1)$ tengsizlik kelib chiqsa, $y(x)$ funksiya shu oraliqda kamayuvchi funksiya deyiladi.

$y=kx+b$ funksiya, $k>0$ da har doim o`suvchi to`g`ri chiziq bo`ladi, $k<0$ da funksiya har doim kamayuvchi to`g`ri chiziq bo`ladi.

12.3-misol: $y=x^2$ funksiyaning kamayish va o`sish oraliqlarini topamiz.

Yechish: $\forall x_1, x_2 \epsilon(-\infty;0)$ sonlar uchun $x_2>x_1$ bo‘lganda $y(x_2)=x_2^2<x_1^2=y(x_1)$ bo‘lganligi uchun 12.4-ta'rifga ko‘ra bu funksiya $(-\infty;0)$ oraliqda kamayuvchi. $\forall x_1, x_2 \epsilon(0;+\infty)$ sonlar uchun $x_2>x_1$ bo‘lganda $y(x_2)=x_2^2>x_1^2=y(x_1)$ bo‘lganligi uchun 12.3-ta'rifga ko‘ra bu funksiya $(0,+\infty)$ oraliqda o`suvchi.

3. Davriy va davriymas funksiyalar.

**12.5-ta`rif.** Agar *f(x)* funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli har qanday $x$ uchun bu funksiyaning $x$ va $x+T$ $(T \neq 0)$ nuqtalardagi qiymatlari teng, ya`ni $f(x+T)=f(x)$ bo`lsa, *f(x)* funksiya davriy funksiya deyiladi va T son uning davri deb ataladi.

Masalan, *sinx* va *cosx* funksiyalar eng kichik musbat davri 2π ga teng bo‘lgan davriy funksiyalar bo‘ladi. *tgx* va *ctgx* funksiyalar esa eng kichik musbat davri π bo‘lgan davriy funksiyalar bo‘ladi.

Agar $f(x)$ funksiyaning eng kichik musbat davri T_0 bo`lsa, u holda, bu funksiyaning hamma davrlari $T_0$ ga karrali bo`ladi, ya`ni agar $T$ son $f(x)$ ning ixtiyoriy davri bo`lsa, u holda $T=nT_0$ bo‘ladi, bunda n nolga teng bo`lmagan butun son.

12.4-misol: $y=cos2x$, $y=sin\frac{x}{3}$ funksiyalarning eng kichik musbat davrlarini toping.

Yechish: a) $cos2(x+\pi)=cos(2x+2\pi)=cos(2\pi+2x)=cos2x$ bo‘lganligi uchun $y=cos2x$ funksiya eng kichik musbat davri π bo‘lgan davriy funksiya ekan.

b) $\frac{x}{3}=2\pi$, $x=6\pi$, $sin\left(\frac{x+6\pi}{3}\right)=sin\left(2\pi+\frac{x}{3}\right)=sin\frac{x}{3}$ bo‘lganligi uchun $y=sin\frac{x}{3}$ funksiya eng kichik musbat davri 6π bo‘lgan davriy funksiya ekan.

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Monoton funksiyalarning ta’rifini ayting.

2.Davriy funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?

5.Mustaqil yechish uchun misollar.

Quyidagi funksiyalardan qaysilari juft, qaysilari toq ekanligini aniqlang.

12.1. $f(x)=3x-x^3$; **12.2.** $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$;

12.3. $f(x)=a^x+a^{-x}$ $(a>0)$; **12.4.** $f(x)=ln\frac{1-x}{1+x}$;

12.5. $f(x)=ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Quyidagi funksiyalardan qaysilari davriy funksiyalr va ularning davrlarini aniqlang.

12.6. $f(x)=Acos\lambda x+Bsin\lambda x$; **12.7.** $f(x)=sinx+\frac{1}{2}sin2x+\frac{1}{3}sin3x$;

12.8. $f(x)=2tg\frac{x}{2}-3tg\frac{x}{3}$; **12.9.** $f(x)=sin^2x$;

12.10. $f(x)=sinx^2$; **12.11.** $f(x)=\sqrt{tgx}$;

12.12. $f(x)=tg\sqrt{x}$; **12.13.** $f(x)=sinx+\sin(x\sqrt{2})$.

Quyidagi funksiyalar berilgan oraliqda kamayuvchi ekanligini isbotlang.

12.14. $f(x)=x^2$ $(-\infty<x\leq 0)$; **12.15.** $f(x)=cosx$ $(0\leq x\leq \pi)$.

Quyidagi funksiyalar berilgan oraliqda o‘suvchi ekanligini isbotlang.

12.16. $f(x)=x^2$ $(0\leq x<+\infty)$; **12.17.** $f(x)=sinx$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq \frac{\pi}{2}\right)$;

12.18. $f(x) = tgx \ \ (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$;

12.19. $f(x) = 2x + sinx \ \ (-\infty < x < +\infty)$.

13-§. Berilgan funksiyaga teskari funksiya tushunchasi

Reja:

1. Teskari funksiyalar.

2. Mustaqil yechish uchun savollar.

3. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Teskari funksiyalar. $f(x)$ funksiya X to‘plamda aniqlangan bo‘lib, funksiyaning o‘zgarish (qiymatlar) sohasi Y bo‘lsin.

13.1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiyaning har bir $y \in Y$ qiymatiga biror, g munosabatga ko‘ra, X dan faqat bitta x qiymat mos kelsa, Y to‘plamda funksiya aniqlangan bo‘ladi, va u $y = f(x)$ ga nisbatan *teskari funksiya* deyiladi va $x = f^{-1}(y) = g(y)$ ko‘rinishda belgilanadi.

Odatdagidek, funksiyani y bilan, argumentni esa x bilan belgilashlarga muvofiq, $x = f^{-1}(y)$ ko‘rinishda yozishadi. $f^{-1}(x) = g(x)$ desak, $y = g(x)$ bo‘ladi.

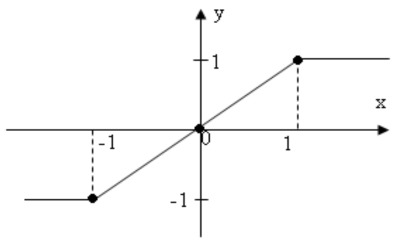
13.1-teorema. $f(x)$ funksiya $D(f)$ to‘plamda teskari $g(x)$ funksiyaga ega bo‘lishi uchun, o‘z aniqlanish sohasidagi argumentning har xil qiymatiga funksiyaning ham har xil qiymati mos kelishi zarur va yetarli, ya’ni $\forall x_1, x_2 \in D(f)$ lar uchun $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

13.2-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya X da aniqlangan qat’iy monoton o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lsa, Y da $y = f(x)$ ga teskari funksiya mavjud, bu funksiya ham qat’iy monoton o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘ladi.

13.1-eslatma. Agar funksiya monoton bo‘lib, lekin qat’iy monoton bo‘lmasa, bu funksiyaning teskarisi mavjud bo‘lmaydi. Buni, masalan, 13.1-chizmada ko‘rsatilgan,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ x, 1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

funksiya misolida ko‘rish mumkin.



13.1-chizma

13.2-eslatma. Juft funksiyaning teskarisi mavjud emas. Xususiy holda, aniqlanish sohasining funksiya qat'iy monoton bo'lgan qismlarida teskari funksiya mavjud bo'ladi. Masalan, $y = x^2$ funksiya uchun $[0,+\infty)$ da $y = \sqrt{x}$ teskari funksiya bo'ladi.

13.3-eslatma. Davriy funksiyaning teskarisi mavjud emas. Xususiy holda, aniqlanish sohasining funksiya qat'iy o'suvchi (kamayuvchi) bo'lgan qismlarida teskari funksiyalar mavjud bo'ladi. Masalan, $f_1(x) = \sin x \ \left(x\epsilon\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$; $f_2(x) = \cos x \ \ (x\epsilon[0;\pi])$; $f_3(x) = tgx \ \left(x\epsilon\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right)$; $f_4(x) = ctgx(x \in (0,\pi))$ funksiyalar uchun ko'rsatilgan oraliqlarda $g_1(y) = \arcsin y \ \ (y \in [-1,1])$, $g_2(y) = \arccos y \ \ (y \in [-1,1])$; $g_3(y) = arctgy \ \ (y \in (-\infty,+\infty))$; $g_4(y) = arcctgy \ \ (y \in (-\infty,+\infty))$ teskari funksiyalar mavjud, chunki bu oraliqlarda ular qat'iy monotondir.

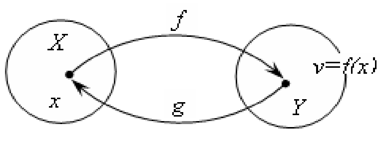
13.4-eslatma. $y = f(x)$ funksiya va bu funksiyaga teskari bo'lgan $x = f^{-1}(y)$ funksiyaning aniqlanish sohasi va o'zgarish sohasi o'z rollarini almashtiradi, ya'ni $y = f(x)$funksiyaning aniqlanish sohasi teskari funksiyaning o'zgarish sohasi bo'ladi, $y = f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasi esa, teskari funksiyaning aniqlanish sohasi bo'ladi.

$y = f(x)$ funksiya biror X to'plamda aniqlangan bo'lib, uning qiymatlari to'plami Y bo'lsin. $g(y)$ funksiya Y to'plamda aniqlangan bo'lib, X to'plam esa uning qiymatlari to'plami bo'lsin.

13.3-teorema. $g(y)$ funksiya $y = f(x)$ ga teskari funksiya bo'lishi uchun,

$$g(f(x)) = x \quad (x \in X) \ \ (f(g(y)) = y \ \ (y \in Y)) \tag{13.1}$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli (13.2-chizma).



13.2-chizma

13.1.-misol: $f(x)=x,\ g(x)=\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ funksiyalar (13.1) shartni qanoatlantiradi. Haqiqatan, ham $f\big(g(x)\big)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$. Demak, ular bir-biriga teskari funksiyalar bo‘ladi.

$y=f(x)$ to‘g‘ri funksiyadan $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiyaga o‘tish va uning grafigini chizish uchun quyidagi amallarni bajarish maqsadga muvofiq:

1. $y=f(x)$ tenglama x o‘zgaruvchiga nisbatan (agar tenglamani x ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa) yechiladi: $x=f^{-1}(y)=g(y)$.

2. x ni y bilan almashtiriladi: $y=f^{-1}(x)=g(x)$.

3. $y=f(x)$ to‘g‘ri funksiyaning grafigi chiziladi.

4. Hosil qilingan $y=f(x)$ funksiyaning grafigini I va III chorak koordinatalar burchaklaridan o‘tuvchi bissektrisaga nisbatan simmetrik almashtirish natijasida teskari funksiya grafigi hosil qilinadi.

2.Mustaqil yechish uchun misollar.

Quyidagi funksiyalar uchun teskari funksiyasi $x=\varphi(y)$ ni va uning aniqlanish sohasini toping.

13.2. $y=2x+3$ $(-\infty<x<+\infty)$; **13.3.** $y=x^2$ $(-\infty<x\leq 0)$;

13.4. $y=x^2$ $(0\leq x<+\infty)$; **13.5.** $y=\frac{1-x}{1+x}$ $(x\neq -1)$;

13.6. $y=\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leq x\leq 0)$; **13.7.** $y=\sqrt{1-x^2}$ $(0\leq x\leq 1)$;

13.8. $y=shx$ $(-\infty<x<+\infty)$, bu yerda: $shx=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$;

13.9. $y=thx$ $(-\infty<x<+\infty)$, bu yerda: $thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$;

13.10. $y=\begin{cases} x, & agar\ -\infty<x<1 \\ x^2, & agar\ \ 1\leq x\leq 4 \\ 2^x, & agar\ 4<x<+\infty \end{cases}$.

3. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Teskari funksiyaning ta’rifini ayting.

2.Teskari funksiya haqidagi teoremalarni ayting.

14-§. Chiziqli funksiya va uning xossalari, grafigi. Kvadrat funksiya va uning xossalari, grafigi. Kasr chiziqli funksiyaning xossalari va grafigi

Reja:

1. Chiziqli funksiya va uning xossalari, grafigi.

2. Kvadrat funksiya va uning xossalari, grafigi.

3. Kasr chiziqli funksiyaning xossalari va grafigi.

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

5. Mustaqil yechish uchun misollar.

1.Chiziqli funksiya va uning xossalari, grafigi.

**14.1-ta`rif:** $y= kx+b$ ko`rinishdagi funksiyaga chiziqli funksiya deyiladi.

Bunda: k va b – haqiqiy sonlar, x, y - o`zgaruvchilar, k – burchak koeffitsiyent va $k=tg\alpha$, α - to‘g’ri chiziqning Ox o‘qi bilan tashkil etgan burchagi.

Ma’lumki, chiziqli funksiyaning grafigi to`g`ri chiziqdan iborat va uning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to`plamidir. $k\neq 0$ da qiymatlar sohasi ham barcha haqiqiy sonlar to`g`ri chizig`idan iborat. $k>0$ da bu funksiya $(-\infty;+\infty)$ oraliqda o`sadi. $k<0$ da bu funksiya $(-\infty;+\infty)$ oraliqda kamayadi.

Umuman, $y=kx+b$ funksiyaning grafigi $y = kx$ funksiya grafigini ordinatalar o‘qi bo‘ylab b birlikka siljitish yo‘li bilan hosil qilinadi. $y = kx$ va $y=kx+b$ funksiyalarning grafiklari parallel to‘g'ri chiziqlar bo‘ladi.

$y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ to`g`ri chiziqlar $k_1=k_2$ bo`lganda parallel bo`ladi.

Bu to`g`ri chiziqlar $k_1 \cdot k_2= -1$ bo`lganda perpendikulyar bo`ladi.

$y=kx$ funksiyaga to`g`ri proporsionallik deyiladi. Uning grafigi koordinatalar boshidan o`tuvchi to`g`ri chiziqdan iborat.

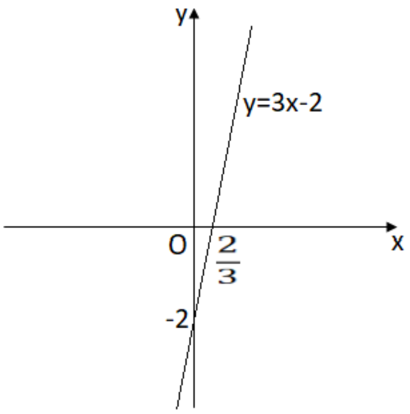
Chiziqli funksiyaga oid misollar.

14.1-misol: $y=3x-2$ funksiya grafigini chizing.

Yechish: Qiymatlar jadvalini tuzamiz:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	-2	1	4	7	-5	-8	-11

2) Grafigini chizamiz:



2.Kvadrat funksiya va uning xossalari, grafigi.

**14.2-ta`rif**: $y=ax^2+bx+c$ ko`rinishdagi funksiyaga kvadrat funksiya deyiladi. Bunda a,b,c – haqiqiy sonlar, x,y - o`zgaruvchilar.

Kvadrat funksiyaning grafigi paraboladan iborat. Kvadrat funksiyaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to`plamidir. $a>0$ da parabola tarmoqlari yuqoriga yo`nalgan bo`ladi, $a<0$ da esa parabola tarmoqlari pastga yo`nalgan bo`ladi.

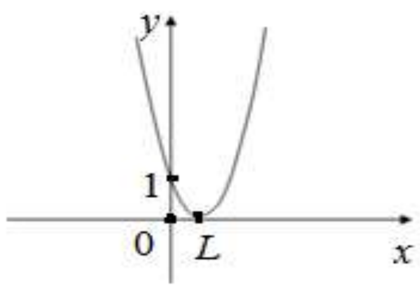
$y=x^2$ funksiya bizga tanish. Uning grafigi, uchi koordinatalar boshida va tarmoqlari yuqoriga yo'nalgan parabola. $y=ax^2$ funksiya grafigi esa x^2 parabolani abssissalar o'qidan a koeffitsiyent bilan cho'zish ($|a|>1$ da) yoki qisish ($|a|<1$ da) orqali hosil qilinadi. $a<0$ da $y=ax^2$ parabola Ox o'qiga nisbatan simmetrik akslanadi. Ixtiyoriy $a\neq 0$ da $y=ax^2$ funksiya grafigi paraboladan iborat.

$y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ funksiyaning grafigini yasash maqsadida ax^2+bx+c ifodani $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ yoki $y=a(x+\alpha)^2+\beta$ ko'rinishga keltiramiz, bunda $\alpha=-\frac{b}{2a}$, $\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}$. Bundan ko'rinadiki, $y=ax^2+bx+c$ funksiyaning grafigi $y=ax^2$ parabolani Oy o'qqa nisbatan α qadar va Ox o'qqa nisbatan β qadar parallel ko'chirish orqali hosil qilinadi, bunda parabolaning uchi $O(0;0)$ nuqtadan $L(\alpha;\beta)$ nuqtaga o'tadi.

Kvadrat funksiyaga oid misollar:

14.2-misol: $y=x^2-2x+1$ funksiya grafigini chizing.

Yechish: Parabola uchining koordinatalarini topamiz:
$\alpha=-\frac{b}{2a}=1,\ \beta=\frac{4ac-b^2}{4a}=0$. Demak parabolaning uchi $L(1,0)$ nuqtada ekan. Parabolaning shoxlari yuqoriga yo'nalganligini e'tiborga olib, uning grafigini yasaymiz:



3.Kasr chiziqli funksiyaning xossalari va grafigi. Ikki chiziqli funksiyaning nisbatidan iborat

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \tag{14.1}$$

kasr-chiziqli funksiyani qaraymiz. Uning grafigi to'g'ri chiziq yoki giperbola bo'lishi mumkin:

1) agar $c=0, d\neq 0$ bo'lsa, (14.1) munosabat $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ chiziqli funksiyaga aylanadi, uning grafigi to'g'ri chiziqdan iborat;

2) agar $c \neq 0,\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = m$ bo‘lsa, $y = \frac{mcx+md}{cx+d} = m$ ga ega bo‘lamiz. Bu holda (14.1) funksiya grafigi *Ox* o‘qqa parallel bo‘lgan va $M\left(-\frac{d}{c}; m\right)$ nuqtasi chiqarib tashlangan y=m to‘g’ri chiziq bo‘ladi;

3) $a \neq 0,\ \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$. Avval $\frac{ax+b}{cx+d}$ kasrdan butun qism ajratamiz:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} = \beta + \frac{k}{x-\gamma},$$

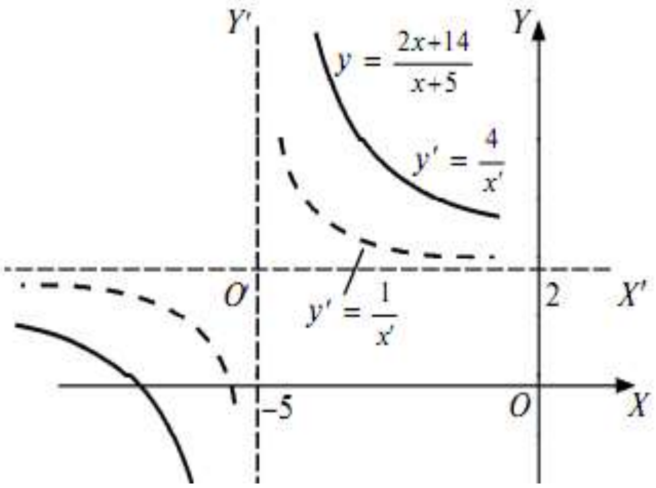
bunda $\beta = \frac{a}{c}, k = \frac{bc-ad}{c^2},\ \gamma = -\frac{d}{c}$. (14.2)

Bundan ko‘rinadiki, $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ funksiyaning grafigi $y = \frac{k}{x}$ funksiya grafigi (giperbola) ni parallel ko‘chirishlar bilan hosil qilinadi. Bunda koordinatalar boshi $L(\gamma; \beta)$ nuqtaga o‘tadi. γ, β, k lar (14.2) formulalar bo‘yicha topiladi.

Kasr chiziqli funksiyaga oid misollar.

14.3-misol: $y = \frac{2x+14}{x+5}$ funksiyaning grafigini yasang.

Yechish: Kasrdan butun qismini ajratamiz: $\frac{2x+14}{x+5} = 2 + \frac{4}{x+5}$, unda $\gamma = -5, \beta = 2, k = 4$. $O'(-5; 2)$ nuqtadan yordamchi $O'x'$ va $O'y'$ koordinatalar o‘qlarini o‘tkazamiz. Ularda $y = \frac{1}{x}$ funksiya grafigini, so‘ng $y = \frac{k}{x}$ funksiya grafigini yasaymiz. Bu grafik *xOy* koordinatalar sistemasida $y = \frac{2x+14}{x+5}$ funksiyaning grafigi bo‘ladi.



4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Chiziqli funksiya va uning xossalarini ayting.
2. Kvadrat funksiya va uning xossalari ayting.
3. Kasr chiziqli funksiyalarning xossalari ayting.

5.Mustaqil yechish uchun misollar.

14.1. *y(x)*=3*x*-1 chiziqli funksiya berilgan.

1) *y*(0), *y*(1), *y*(2) larni toping;

2) agar $y(x)$ =-4, $y(x)$=8, $y(x)$=0 bo‘lsa, x ning qiymatini toping.

14.2. Koordinata boshi va M nuqtadan o‘tivchi to‘g’ri chiziq tenglamasini tuzing.

1) $M(3;-4)$; 2) $M(0;-3)$; 3) $M(3;0)$; 4) $M(2;5)$.

14.3. Funksiyaning grafigini yasang.

1) $y=x-2$; 2) $y=-x+3$; 3) $y=4x-2$; 4) $y=-2x-5$.

14.4. Funksiyaning grafigini yasang.

1) $y=2x+1$; 2) $y= -2x+1$; 3) $y =3x-4$; 4) $y=0,5x-1$; 5) $y=\frac{1}{4}x-2$.

14.5. Funksiyaning grafigini uning koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini topib, yasang.

1) $y=2x+2$; 2) $y=-\frac{1}{2}x-1$; 3) $y =4x+8$; 4) $y=-3x +6$; 5) $y =2,5x+5$.

14.6. Funksiyalarning grafiklarini yasang.

1) $y = x^2+6x-20$; 2) $y = -x^2-6x+20$; 3) $y =3x^2-6x+4$;

4) $y = 2x – x^2$; 5) $y = 6-4x– x^2$; 6) $y = 2x^2+8x-1$.

14.7. A, B, C nuqtalardan o‘tuvchi parabolani yasang va tenglamasini tuzing:

1) $A(2; -1)$, $B(1; 3)$, $C(0; 2)$;

2) $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(0; 2)$;

3) $A(-2; 1)$, $B(5; -1)$, $C(4; 2)$;

4) $A(2; 0)$, $B(3; -6)$, $C(4; 1)$.

14.8. x_0 abssissali nuqtada $y = ax^2 + b$ parabolaga urinuvchi to‘g‘ri chiziqning tenglamasini tuzing, bunda:

1) $a =-1$, $b =1$, $x_0 =3$; 2) $a =4$, $b=2$, $x_0 = 2$.

14.9. Funksiyalarning grafiklarini yasang.

1) $y=\frac{2x-5}{x+1}$; 2) $=\frac{-3x+2}{2x-3}$; 3) $y=\frac{4x+1}{2x-3}$; 4) $y=\frac{3x+4}{2x-1}$; 5) $y=\frac{x+9}{-3x+1}$.

14.10. A, B, C nuqtalar ustidan o‘tuvchi $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ funksiya grafigini yasang.

1) $A(-2; 0)$, $B(1; 4)$, $C(0; 2)$;

2) $A(1; -3)$, $B(3; 2)$, $C(-1; 3)$;

3) $A(4; -3)$, $B(2; 1)$, $C(3; -4)$;

4) $A(-5; 1)$, $B(-2; 3)$, $C(-1; 5)$.

15-§. Darajali funksiya va uning xossalari, grafigi. Ko‘rsatkichli funksiya va uning xossalari, grafigi. Logarifmik funksiya va uning xossalari, grafigi

Reja.

1. $y = x^n$ funksiya va uning xossalari, grafigi.

2. $y = a^x$ funksiya va uning xossalari, grafigi.

3. $y = log_a x$ funksiya va uning xossalari, grafigi.

4. Mustaqil yechish uchun misollar.
5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. $y=x^n$ funksiya va uning xossalari, grafigi. $y=x^n$ formula bilan berilgan darajali funksiyani ko`rib chiqamiz. Bunda $x$- erkli o`zgaruvchi n- esa natural son. Bunday funksiya natural ko`rsatkichli darajali funksiya deyiladi.

x^n ifoda istalgan x da ma`noga ega. Shuning uchun natural ko`rsatkichli darajali funksiyaning aniqlanish sohasi hamma haqiqiy sonlar to`plami bo`ladi. Darajali funksiya xossalarini keltirish uchun daraja ko`rsatkichi juft son bo`lgan holda xossalarni ko`rib chiqamiz.

n juft bo`lganda $y=x^n$ funksiyaning xossalari:

1^0. Agar $x=0$ bo`lsa, $y=0$ bo`ladi.

2^0. Funksiyaning grafigi koordinatalar boshidan o`tadi.

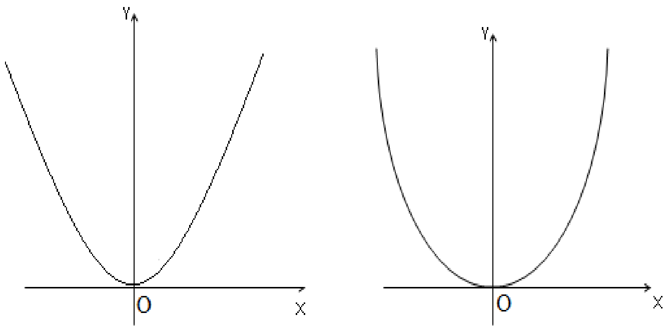
3^0. Agar $x\neq 0$ bo`lsa, $y>0$ bo`ladi. Bu musbat sonnig ham manfiy sonning ham juft darajasi musbatligidan kelib chiqadi. Funksiyaning grafigi birinchi va ikkinchi koordinata choraklarida joylashgan.

4^0. Funksiya juft bo`ladi. $n$ juft bo`lganda $(-x)^n = x^n$ tenglik istalgan x uchun to`g`riligi kelib chiqadi. Funksiyaning grafigi ordinatalar o`qiga nisbatan simmetrik.

5^0. Funksiya $[0;+\infty)$ oraliqda o`sadi va $(-\infty;0]$ oraliqda kamayadi

6^0. Funksiyaning qiymatlari sohasi nomanfiy sonlar to`plamidir.

Quyida $y=x^2$ va $y=x^4$ funksiyalarning grafiklarini keltiramiz.



Endi darajali funksiyani daraja ko`rsatkichi toq bo`lgandagi xossalarini ko`rib chiqamiz.

1^0. Agar $x=0$ bo`lsa, $y=0$ bo`ladi

2^0. Agar $x>0$ bo`lsa, $y>0$ bo`ladi.

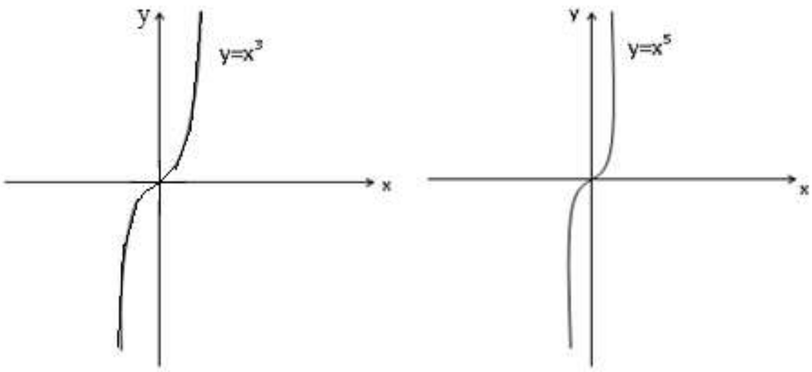
Agar $x<0$ bo`lsa $y<0$ bo`ladi. Funksiyaning grafigi birinchi va uchinchi choraklarda joylashgan bo‘ladi.

3^0. Funksiya toq bo`ladi. Bu hol n toq bo`lganda istalgan x uchun $(-x)^n=-x^n$ tenglik to`g`ri bo`lishidan kelib chiqadi.

4^0. Funksiya butun aniqlanish sohasida o`sadi.

5^0. Funksiya qiymatlari sohasi hamma haqiqiy sonlar to`plamidir.

Masalan, $y=x^3$, $y=x^5$ funksiyalarning grafiklarini keltiramiz.



15.1-misol: y= $\sqrt{x}$ va y= $\sqrt[3]{x}$ funksiyalar haqida ma`lumot.

1) y= $\sqrt{x}$ funksiya va grafigi.

y= $\sqrt{x}$ funksiya darajali funksiyaning $n=\frac{1}{2}$ bo`lgandagi ifodasidir.

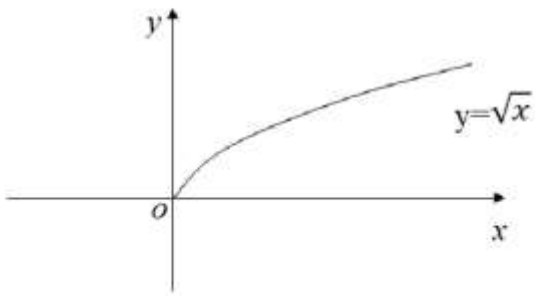
Bu funksiyaning xossalari quyidagicha:

1^0. y= $\sqrt{x}$ funksiyaning aniqlanish sohasi barcha nomanfiy haqiqiy sonlar to`plami bo`ladi.

2^0. y= $\sqrt{x}$ funksiya $x \geq 0$ oraliqda o`sadi.

3^0. y= $\sqrt{x}$ funksiyaning grafigi $0<x<1$ oraliqda $y=x$ funksiyaning grafigidan yuqorida, $x>1$ oraliqda esa $y=x$ funksiyaning grafigidan pastda yotadi.

$y=\sqrt{x}$ funksiyaning grafigi:



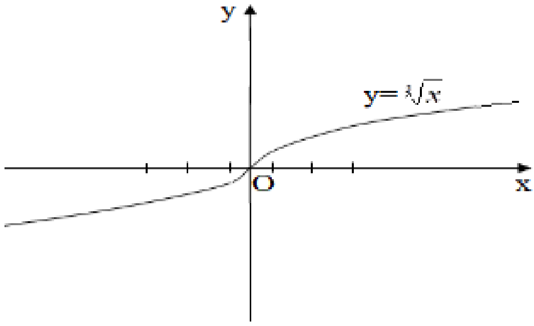
4^0. y= $\sqrt{x}$ funksiyaning qiymatlar sohasi barcha nomanfiy sonlar to`plami bo`ladi.

y= $\sqrt[3]{x}$ funksiyaning quyidagi xossalari bor.

1^0. Funksiyaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to‘plami.

2^0. Funksiyaning qiymatlar sohasi barcha haqiqiy sonlar to`plami.

3^0. Funksiyaning grafigi:



4^0. Funksiya $(-\infty; +\infty)$ oraliqda o`suvchi.

2. y=a^x funksiya va uning xossalari, grafigi

y=a^x funksiyaga ko‘rsatkichli funksiya deyiladi. Bunda $a \neq 1, a > 0$ bo‘ladi.

Ko‘rsatkichli funksiyaning xossalarini keltiramiz:

1^0. Ko‘rsatkichli funksiyaning aniqlanish sohas: $D(y) = (-\infty;+\infty)$.

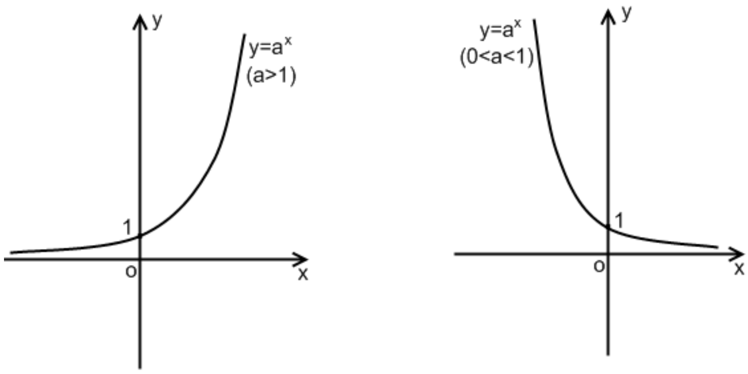
2^0. Ko‘rsatkichli funksiyaning qiymatlar sohasi: $E(y) = (0; +\infty)$.

3. y=a^x ko‘rsatkichli funksiya a>1 bo‘lganda barcha haqiqiy sonlar to‘plamida o‘suvchi bo‘ladi, 0<a<1 bo‘lganda esa kamayuvchi bo‘ladi.

a) a>1 va x_2>x_1 bo‘lsin. U holda x_2>x_1 bo‘lganligi sababli $x_2 - x_1 > 0$ va $a^{x_2-x_1} > 1$ yoki $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Bundan $a^{x_2} > a^{x_1}$ ekanligi kelib chiqadi.

b) 0<a<1 va x_2>x_1 bo‘lsin. U holda $a^{x_2} < a^{x_1}$ bo‘ladi, chunki 0<a<1 bo‘lganligi uchun $\frac{1}{a} > 1$ va $\left(\frac{1}{a}\right)^{x_2} > \left(\frac{1}{a}\right)^{x_1}$ yoki $a^{x_2} < a^{x_1}$ bo‘ladi.

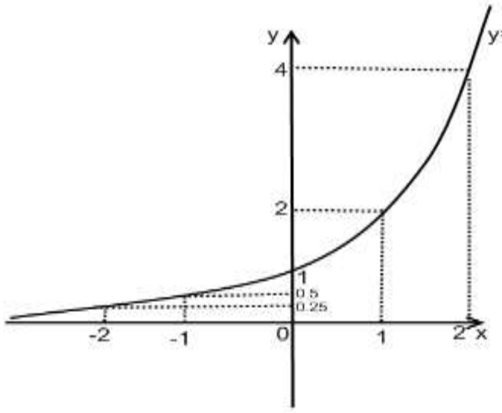
4^0. y=a^x funksiyaning grafigi a ning har qanday qiymatida ham (0;1) nuqtadan o‘tib, Ox o‘qidan yuqorida joylashgan bo‘ladi.



15.2 – misol: y=2^x funksiyaning grafigini yasang.

Yechish: Bu funksiya grafigini yasash uchun ushbu jadvalni to‘ldiramiz va shu jadval asosida funksiyaning grafigini chizamiz:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	0,25	0,5	1	2	4

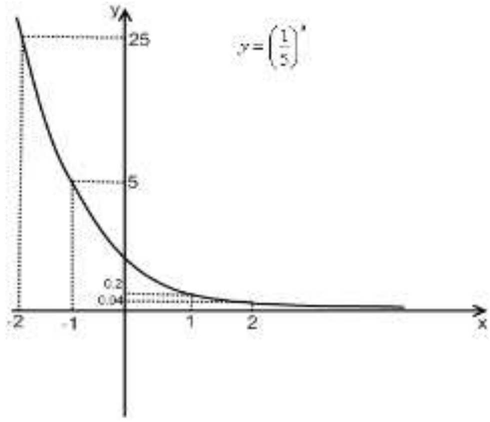


15.3-misol. $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ funksiyaning grafigini yasang.

Yechish: $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ funksiya uchun ushbu jadvalni to‘ldiramiz:

x	-2	-1	0	1	2
$y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$	25	5	1	0,2	0,04

Jadval asosida funksiyaning grafigini chizamiz.



3. $y=\log_a x$ funksiya va uning xossalari, grafigi.

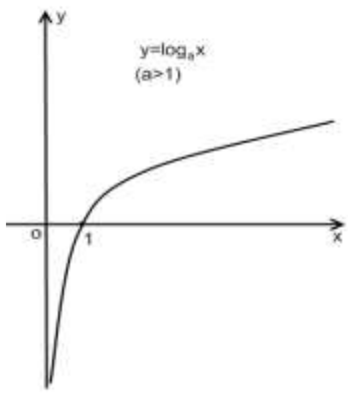
y=log$_a$x (a>0, $a\neq1$) ko‘rinishdagi funksiyaga logarifmik funksiya deyiladi. Logarifmik funksiya quyidagi xossalarga ega:

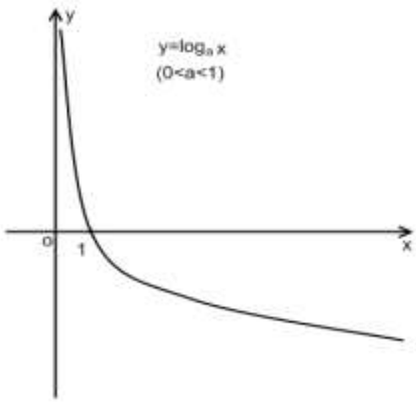
1^0. Logarifmik funksiyaning aniqlanish sohasi barcha musbat haqiqiy sonlar to‘plamidan iborat, chunki $\log_a x$ ifoda x>0 bo‘lgandagina ma’noga ega.

2^0. Logarifmik funksiyaning qiymatlar sohasi barcha haqiqiy sonlar to‘plami R dan iborat.

3^0. $y=\log_a x$ funksiya x>0 oraliqda, agar a>1 bo‘lsa o‘suvchi, 0<a<1 bo‘lsa kamayuvchi hisoblanadi.

4^0. $y=\log_a x$ funksiya grafigini keltiramiz:





4. Mustaqil yechish uchun misollar.

15.1. Taqqoslang.

1) $\sqrt[5]{2}$ va $\sqrt[5]{3}$; 2) $\sqrt[10]{0.8}$ va 1; 3) $\sqrt[4]{1.8}$ va 1; 4) $\sqrt[5]{-0.2}$ va 0.

15.2. Ifodaning qiymatini toping.

1) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}}\cdot\sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$. 2) $3^5\cdot 81:243$. 3) $\sqrt[3]{10+\sqrt{73}}\cdot\sqrt[3]{10-\sqrt{73}}$.

15.3. Funksiyaning grafigini yasang.

1) $y=5^x$; 2) $y=0,2^x$; 3) $y=1,2^x$; 4) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

15.4. Berilgan funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping.

1) $y=log_7(2x+3)$.
2) $y=\log_2\sqrt{25-x^2}$.
3) $y=\log_\pi(10-5x)$.
4) $y=log_3x$.
5) $y=\log_8\frac{2-x}{x+1}$.

15.5. Qaysi biri kattaligini aniqlang.

1) log_37+log_34 va $log_3(7+4)$;
2) $log_{0,7}3+log_{0,7}4$ va $log_{,7}(3+4)$;
3) $log_52+log_51,5$ va $log_5(2+1,5)$.

15.6. Berilgan funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping.

1) $y=log_3(x-5)$; 2) $y=log_{0,3}(7-3x)$; 3) $y=log_{0,1}(x^2-4)$.

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping.

15.7. $y=\log_{x^2}(x+2)$; **15.8.** $y=\log_{x^2+2x}(x^2-2)$; **15.9.** $y=\log_{cosx} sinx$.

Quyidagi tenglamalarni yeching.

15.10. $\log_{sinx}2\cdot\log_{sin^2x}3=1$; **15.11.** $\log_{25}\left(5^{2sinx}-4\right)=2sinx+sin\frac{3\pi}{2}$.

Quyidagi tengsizliklarni yeching.

15.12. $\log_{\frac{4}{3}} cosx\geq\log_{\frac{4}{9}}\frac{3}{2}$, $-2<x<3$;

15.13. $2+\log_2\left(\frac{1}{4}-cosx\right)\geq-\log_{\frac{1}{2}}(1+cos3x)$.

15.14. $lgtg1^0\cdot lgtg2^0\cdot\ldots\cdot lgtg89^0$ ifodaning qiymatini toping.

15.15. $lgsin1^0\cdot lgsin2^0\cdot\ldots\cdot lgsin90^0$ ifodaning qiymatini toping.

5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Ko‘rsatkichli funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?
2. Ko‘rsatkichli funksiyaning xossalarini ayting.
3. $y=a^x$ funksiyaning grafigi qaysi nuqtadan albatta o‘tadi?
4. Logarifmik funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?
5. Logarifmik funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasini ayting.
6. Qanday asosda logarifmik funksiya o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘ladi?

16-§. Trigonometrik funksiyalar va ularning xossalari, grafiklari

Reja:

1. $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyalar va ularning xossalari, grafiklari.
2. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ funksiyalar va ularning xossalari, grafiklari.
3. Mustaqil yechish uchun misollar.
4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyalar va ularning xossalari, grafiklari.

y=sinx funksiya.

1. $y=\sin x$ funksiyaning aniqlanish sohasi R.
2. $y=\sin x$ funksiyaning qiymatlar sohasi [-1;1] segment.
3. $y=\sin x$ funksiya eng kichik musbat davri 2π bo‘lgan davriy funksiya.
4. $y=\sin x$ toq funksiya.
5. $x = \pi n$, $n\in Z$ larda $\sin x=0$.
6. $x = \pi/2+2\pi n$, $n\in Z$ larda $\sin x=1$.
7. $x = -\pi/2+2\pi n$, $n\in Z$ larda $\sin x=-1$.
8. $y=\sin x$ funksiya musbat qiymatlarni $(0; \pi)$ oraliqda va bu oraliqni $2\pi n$ ($n = \pm1; \pm2,\ldots$) qadar siljitish bilan hosil bo‘ladigan oraliqlarda qabul qiladi.
9. $y=\sin x$ funksiya manfiy qiymatlarni $(\pi;2\pi)$ oraliqda va bu oraliqni 2πn (n = $\pm1; \pm2,\ldots$) qadar siljitish bilan hosil bo‘ladigan oraliqlarda qabul qiladi.
10. $y=\sin x$ funksiya $[-\pi/2;\pi/2]$ kesmada va bu kesmani $2\pi n$ ($n = \pm1; \pm2,\ldots$) qadar siljitish bilan hosil bo‘lgan kesmalarda o‘sadi.
11. $y=\sin x$ funksiya $[\pi/2;3\pi/2]$ kesmada va bu kesmani $2\pi n$ ($n = \pm1; \pm2,\ldots$) qadar siljitish bilan hosil bo‘lgan kesmalarda kamayadi.
12. $y=\sin x$ funksiyaning grafigi 16.1-chizmada berilgan.

y=cosx funksiya.

1. $y=\cos x$ funksiyaning aniqlanish sohasi R.
2. $y=\cos x$ funksiyaning qiymatlar sohasi [-1;1] segment.
3. $y=\cos x$ funksiya eng kichik musbat davri 2π bo‘lgan davriy funksiya.
4. $y=\cos x$ juft funksiya.
5. $x =\pi/2+\pi n$, $n\in Z$ larda $\cos x=0$.

6. $x = 2\pi n$, $n \in Z$ larda $\cos x = 1$.

7. $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ larda $y = \cos x = -1$.

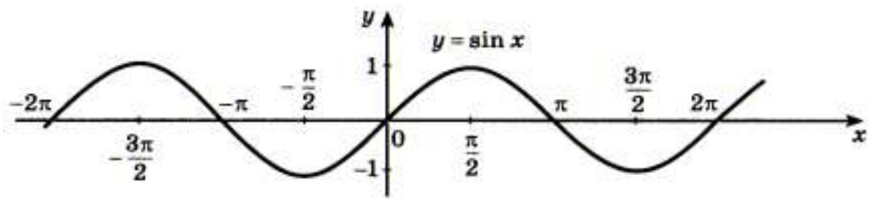
8. $y = \cos x$ funksiya musbat qiymatlarni $(-\pi/2;\ \pi/2)$ oraliqda va bu oraliqni $2\pi n$ $(n = \pm 1; \pm 2, \dots)$ qadar siljitish bilan hosil bo‘ladigan oraliqlarda qabul qiladi.

9. y=cosx funksiya manfiy qiymatlarni $(\pi/2; 3\pi/2)$ oraliqda va bu oraliqni $2\pi n$ $(n = \pm 1; \pm 2, \dots)$ qadar siljitish bilan hosil bo‘ladigan oraliqlarda qabul qiladi.

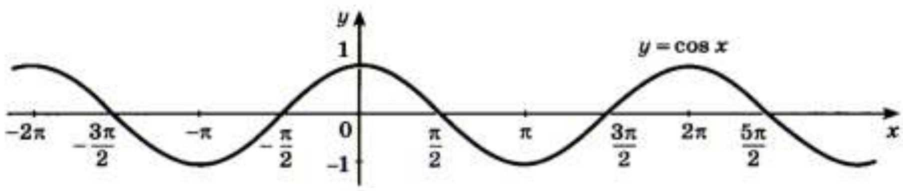
10. $y = \cos x$ funksiya $[\pi;\ 2\pi]$ kesmada va bu kesmani $2\pi n$ $(n = \pm 1; \pm 2, \dots)$ qadar siljitish bilan hosil bo‘lgan kesmalarda o‘sadi.

11. $y = \cos x$ funksiya $[0;\ \pi]$ kesmada va bu kesmani $2\pi n$ $(n = \pm 1; \pm 2, \dots)$ qadar siljitish bilan hosil bo‘lgan kesmalarda kamayadi.

12. $y = \cos x$ funksiyaning grafigi 16.2-chizmada berilgan.



16.1-chizma.



16.2-chizma.

2. $y = tg\,x$, $y = ctg\,x$ funksiyalar va ularning xossalari, grafiklari.

$y = tgx$ funksiya

1. $y = tgx$ funksiyaning aniqlanish sohasi $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$ bo‘lgan barcha haqiqiy sonlar to‘plami.

2. $y = tgx$ funksiyaning qiymatlar sohasi R.

3. $y = tgx$ funksiya eng kichik musbat davri π bo‘lgan davriy funksiya.

4 $y = tgx$ toq funksiya.

5. $x = \pi n$, $n \in Z$ larda $tgx = 0$.

6. $y = tgx$ funksiya musbat qiymatlarni $(\pi n;\ \pi/2 + \pi n)$, $n \in Z$ oraliqlarda qabul qiladi.

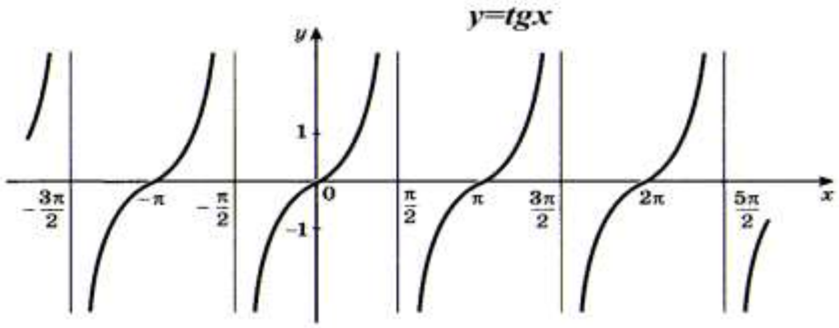
7. $y = tgx$ funksiya manfiy qiymatlarni $(-\pi/2 + \pi n;\ \pi n)$, $n \in Z$ oraliqlarda qabul qiladi.

8. $y = tgx$ funksiya $(-\pi/2 + \pi n;\ \pi/2 + \pi n)$, $n \in Z$ oraliqlarda o‘sadi.

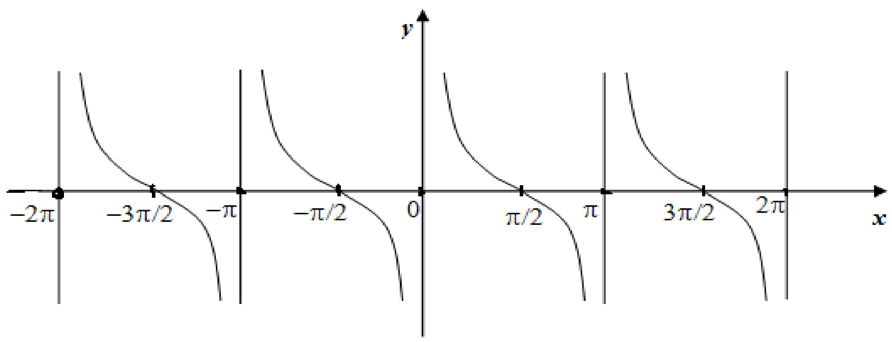
9. $y = tgx$ funksiya grafigi 16.3-chizmada berilgan.

y = ctgx funksiya.

1.$y=ctgx$ funksiyaning aniqlanish sohasi $x\neq\pi n$, $n\in Z$ bo‘lgan barcha haqiqiy sonlar to‘plami.
2. $y=ctgx$ funksiyaning qiymatlar sohasi barcha haqiqiy sonlar to‘plami R.
3. $y=ctgx$ funksiya eng kichik musbat davri π bo‘lgan davriy funksiya.
4 $y=ctgx$ toq funksiya.
5. $y=ctgx$ funksiya 0 ga teng qiymatni $x=\pi/2+\pi n$, $n\in Z$ larda qabul qiladi.
6. $y=ctgx$ funksiya musbat qiymatlarni $(\pi n;\ \pi/2+\pi n)$, $n\in Z$ oraliqlarda qabul qiladi.
7. $y=ctgx$ funksiya manfiy qiymatlarni $(\pi/2+\pi n;\ \pi+\pi n)$, $n\in Z$ oraliqlarda qabul qiladi.
8. $y=ctgx$ funksiya $(\pi n;\ \pi+\pi n)$, $n\in Z$ oraliqlarda kamayadi.
9. y=ctgx funksiya grafigi 16.4-chizmada berilgan.



16.3-chizma.



16.4–chizma

3. Mustaqil yechish uchun misollar.

16.1. Berilgan kesmani shunday ikki kesmaga ajratingki, ularning birida funksiya o‘ssin, ikkinchisida esa kamaysin.

$$1)\ \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right];\quad 2)\ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];\quad 3)\ [0;\pi];\quad 4)\ \left[\frac{\pi}{2};2\pi\right].$$

16.2. Funksiyalarning davrlarini toping.

$$1)\ y=\cos 3x;\ 2)\ y=\cos\frac{1}{2}x;\quad 3)\ y=\sin 2x;\quad 4)\ y=\sin\frac{1}{3}x;$$

16.3. Funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

1) $ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $ctg(-2x)$; 4) $tg(-2x)$.

16.4. Funksiyaning nollarini toping.

1) $tg2x$; 2) $ctg\frac{x}{3}$; 3) $tg3x$; 4) $ctg3x$.

16.5. Quyidagi funksiyalarning xossalarini tekshiring va grafiklarini yasang:

1) $y=ctg2x$; 2) $y=ctg(2x-\frac{\pi}{3})$; 3) $y=ctg\frac{\pi}{2}$; 4) $y=2ctgx$;

5) $y=|ctg2x|$; 6) $y=\frac{1}{2}tg2x$; 7) $y=|tg2x|$;

8) $y=tg2(x+\frac{\pi}{4})$; 9) $y=ctg|x|$; 10) $y=tg|x-\frac{\pi}{6}|$;

11) $y=[ctgx]$; 12) $y=\{ctgx\}$; 13) $y=[tg\frac{x}{2}]$.

16.6. Quyidagi funksiyalarning xossalarini tekshiring va grafiklarini yasang:

1) $y=ctg2x$; 2) $y=ctg(2x-\frac{\pi}{3})$; 3) $y=ctg\frac{\pi}{2}$;

4) $y=2ctgx$; 5) $y=|ctg2x|$; 6) $y=\frac{1}{2}tg2x$; 7) $y=|tg2x|$;

8) $y=tg2(x+\frac{\pi}{4})$; 9) $y=ctg|x|$; 10) $y=tg|x-\frac{\pi}{6}|$;

11) $y=[ctgx]$; 12) $y=\{ctgx\}$; 13) $y=[tg\frac{x}{2}]$.

Quyidagi tenglamlarni yeching.

16.7. $\cos\frac{\pi x}{9}\cos\frac{2\pi x}{9}\cos\frac{4\pi x}{9}=\frac{1}{8}$; **16.8.** $\cos^{120}x-\sin^{120}x=1$;

16.9. $\cos^{68}x+\sin^{59}x=1$;

16.10. $$\frac{1}{\cos x\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x\cos 3x}+...+\frac{1}{\cos 100x\cos 101x}=0.$$

Ko‘rsatma: $$\frac{1}{\cos kx\cos(k+1)x}=\frac{1}{\sin x}\left(\frac{\sin(k+1)x}{\cos(k+1)x}-\frac{\sin kx}{\cos kx}\right)$$ ayniyatdan foydalaning.

16.11. Isbotlang: $$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

16.12. *A*, *B*, *C* uchburchakning burchaklari bo‘lsa, $8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le 1$ tengsizlikni isbotlang.

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. *y=sinx* funksiyaning xossalarini ayting.
2. *y=cosx* funksiyaning xossalarini ayting.
3. *y=tgx* funksiyaning xossalarini ayting.

4. $y=ctgx$ funksiyaning xossalarini ayting.

17-§. Teskari trigonometrik funksiyalar va ularning xossalari, grafiklari. Maxsus funksiyalar: $y = |x|$, $y = \{x\}$, $y = [x]$. Dirixle funksiyasi

Reja:

1. Teskari trigonometrik funksiyalar va ularning xossalari, grafiklari.
2. Maxsus funksiyalar: $y = |x|$, $y = \{x\}$, $y = [x]$. Dirixle funksiyasi.
3. Mustaqil yechish uchun misollar.
4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Teskari trigonometrik funksiyalar va ularning xossalari, grafiklari

y=arcsinx funksiya.

Ushbu

$$y=\sin x,\quad -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2} \qquad (17.1)$$

funksiyani qaraymiz. x argumentning qiymatlari $-\frac{\pi}{2}$ *dan* $\frac{\pi}{2}$ gacha o‘sib borganda y ning qiymatlari -1 dan 1 gacha o‘sib borishi va [-1; 1] kesmani to‘ldirishi bizga ma’lum. Bu yerdan, y ning [-1;1] kesmadagi har bir qiymatiga $\sin x=y,\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ shartlarni qanoatlantiruvchi birgina x sonni, ya’ni x = arcsin y sonni mos qo‘yish mumkinligi kelib chiqadi.

Har bir $y\in[-1;\ 1]$ songa uning arksinusini mos qo‘yib, quyidagi funksiyaga ega bo‘lamiz:

$$x = \arcsin y,\quad -1\le y\le 1 \qquad (17.2)$$

x va y o‘zgaruvchilarning (17.1) shartni qanoatlantiruvchi har qanday qiymatlari jufti (17.2) shartni ham qanoatlantiradi va aksincha, shu juftlik uchun (17.2) shart bajarilsa, u holda x va y uchun (17.1) shart ham bajariladi (isbotlang). Demak, (17.1) va (17.2) funksiyalar o‘zaro teskari funksiyalardir.

Odatda funksiyaning argumenti x bilan, funksiyaning o‘zi esa y bilan belgilangani uchun (17.2) da x ni y bilan, y ni esa x bilan almashtirib, quyidagi funksiyaga ega bo‘lamiz:

$$y = \arcsin x,\quad -1\le x\le 1 \qquad (17.3)$$

$y=\arcsin x$ funksiya $y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ funksiyaga teskari funksiya bo‘lgani uchun uning ayrim xossalarini $y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ funksiyaning xossalaridan hosil qilish mumkin.

1°. $y=\arcsin x$ funksiyaning aniqlanish sohasi [-1; 1] kesmadan iborat, chunki $y=\sin x$ funksiyaning qiymatlari sohasi [-1; 1] kesmadan iborat.

2°. $y = arcsinx$ funksiyaning qiymatlari sohasi $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmadan iborat, chunki $y= sinx$ funksiyaning aniqlanish sohasiga $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesma tegishli.

17.1-eslatma. $y=sinx$ funksiya (-∞;+∞) oraliqda teskarilanuvchi emas, chunki har qanday $y\epsilon[-1;1]$ songa $sinx=y$ shartni qanoatlantiruvchi cheksiz ko‘p $x\epsilon(-\infty;+\infty)$ sonlar mos keladi. $y=sinx$ funksiyaning teskarilanuvchi bo‘lishligini ta’minlash uchun uning aniqlanish sohasi sun’iy ravishda toraytiriladi va aniqlanish sohasi sifatida $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesma olinadi.

3°. $y= arcsinx$ funksiya [-1;1] kesmada o‘sadi, chunki $y=sinx$ funksiya $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada o‘suvchi funksiyadir.

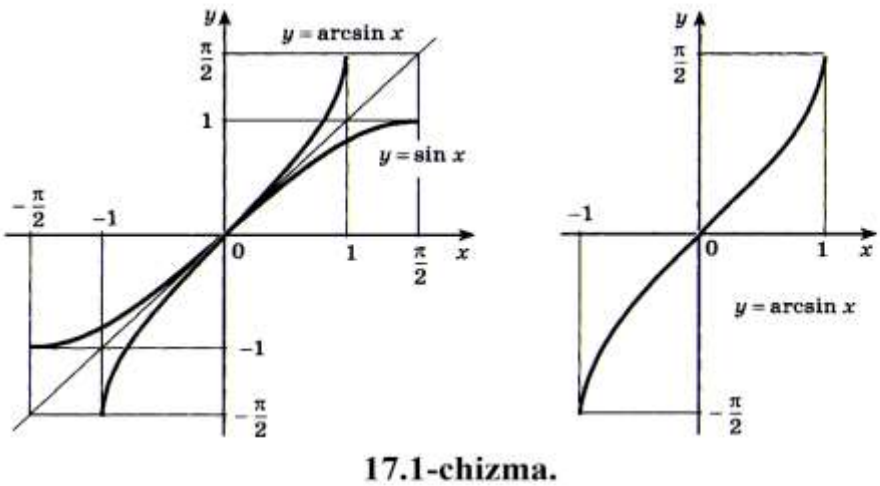
4°. $y=arcsinx$ funksiya toq funksiya, ya’ni $arcsin(-x)=-arcsinx$ tenglik barcha $x\epsilon[-1; 1]$ lar uchun o‘rinli.

5°. $y = arcsinx$ funksiya davriy funksiya emas.

Haqiqatan ham, $y=arcsinx$ funksiya davriy funksiya va $T\neq 0$ son $y=arcsinx$ funksiyaning biror davri, ya’ni barcha $x\epsilon[-1;1]$ lar uchun $arcsin(x+T) = arcsinx$ tenglik bajariladi deb faraz qilaylik. U holda bu tenglikdan $x =0\epsilon[-1; 1]$ da $arcsinT = 0$ ga ega bo‘lamiz.

Demak, $T = 0$. Bu esa $T\neq 0$ ekanligiga zid. Shunday qilib, $y=arcsinx$ funksiya davriy funksiya emas.

$y=arcsinx$ funksiya $y=sinx$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ funksiyaga teskari funksiya bo‘lgani uchun, uning grafigini $y=sinx$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ funksiya grafigini $y=x$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish bilan hosil qilish mumkin (17.1-chizma).



17.1-chizma.

$y=arccosx$ funksiya.

y=cosx, $0 \le x \le \pi$ funksiya teskarilanuvchi va unga teskari funksiya *y= arccosx*, $-1 \le x \le 1$ funksiyadan iborat ekanligi xuddi yuqoridagi kabi mulohazalar yuritib hosil qilinadi.

y=arccosx funksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz:

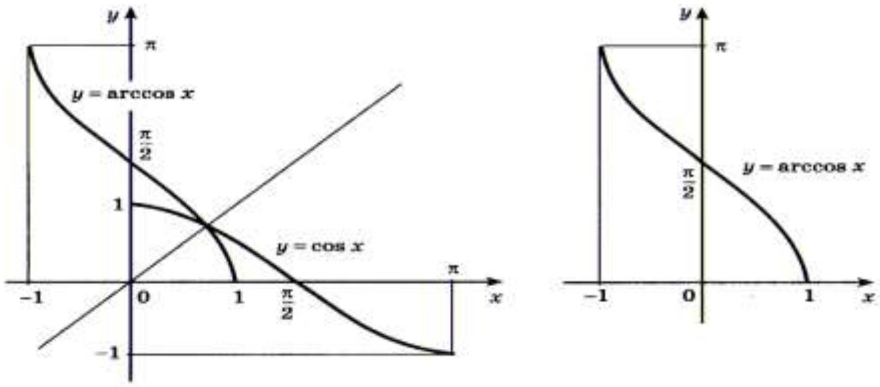
1°. *y=arccosx* funksiyaning aniqlanish sohasi [-1;1] kesmadan iborat.

2°. *y=arccosx* funksiyaning qiymatlari sohasi [0; π] kesmadan iborat.

3°. *y=arccosx* funksiya [-1; 1] kesmada kamayadi.

4°. *y=arccosx* funksiya juft funksiya ham emas, toq funksiya ham emas.

5°. *y=arccosx* funksiya davriy emas. *y=arccosx* funksiyaning grafigi *y=cosx*, $0 \le x \le \pi$ funksiya grafigini *y=x* to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish bilan hosil qilinadi (17.2-chizma).



17.2-chizma.

y=arcsinx va *y=arccosx* funksiyalarning asosiy xossalarini jadvalda keltiramiz:

Xossalari	Funksiya	
	y=arcsinx	*y=arccosx*
Aniqlanish sohasi	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Qiymatlar sohasi	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$[0; \pi]$
Monotonligi	$[-1; 1]$ oraliqda o‘suvchi	$[-1; 1]$ oraliqda kamayuvchi
Juft-toqligi	toq funksiya	juft, toq emas
Davriyligi	davriy emas	davriy emas

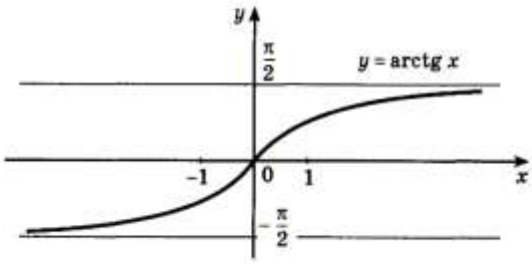
y=arctgx va _y=arcctgx_ funksiyalar.

y=arctgx, $x \in R$ funksiya *y=tgx*, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ funksiyaga, *y=arcctgx*, *x*є*R* funksiya esa *y=ctgx*, (0<*x*<π) funksiyaga teskari funksiyadir. Ularning asosiy xossalarini jadval ko‘rinishida keltiramiz.

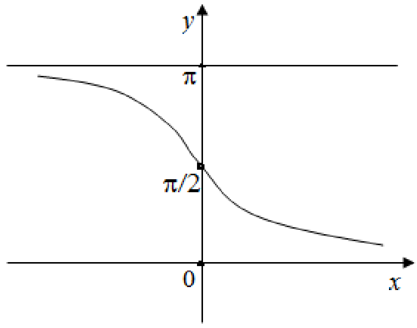
Xossalari	Funksiya	
	y=arctgx	*y=arcctgx*
Aniqlanish sohasi	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

Qiymatlar sohasi	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	$(0;\pi)$
Monotonligi	$(-\infty;+\infty)$ oraliqda o‘suvchi	$(-\infty;+\infty)$ oraliqda kamayuvchi
Juft-toqligi	toq funksiya	juft, toq emas
Davriyligi	davriy emas	davriy emas

y=arctgx va *y=arcctgx* funksiyalarning grafiklari mos ravishda 17.3-chizma va 17.4-chizmalarda tasvirlangan.



17.3-chizma.



17.4–chizma.

y=arcsinx, *y=arccosx*, *y=arctgx* va *y=arcctgx* funksiyalar teskari trigonometrik funksiyalar deb ataladi. Boshqa funksiyalar kabi, bu funksiyalarning ham ba’zi nuqtalardagi aniq qiymatlarini, masalan, arcsin1=$\frac{\pi}{2}$, *arccos*1=0, $arccos\,\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, $arcctg\,\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$ ekanligini ko‘rsatish mumkin. Umumiy holda esa turli hisoblash vositalari (grafiklar, jadvallar, kalkulatorlar va h.k.) yordamida bu funksiyalarning taqribiy qiymatlari kerakli aniqlikda hisoblanadi.

17.1-misol. Kalkulator yordamida *arcsin*0,5773 $\approx$ 0,615, *arccos*0,5773 $\approx$ 0,836 ekanligini topish mumkin.

17.2-misol. $y=arcsin(x^2+1)$ funksiyaning aniqlanish sohasini va qiymatlari sohasini topamiz.

Yechish. *y=arcsinx* funksiyaning aniqlanish sohasi [-1; 1] kesmadan iborat. Shu sababli, $y=arcsin(x^2+1)$ funksiya *x* ning $-1\le x^2+1\le 1$ shart bajariladigan barcha qiymatlaridagina aniqlangandir. $-1\le x^2+1\le 1$ tengsizlik *x*=0 bo‘lganda va faqat shu holda bajariladi. *x=0* bo‘lganda, $y(0)=arcsin(0^2+1)=arcsin1=\frac{\pi}{2}$. Shunday qilib, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi {0} to‘plamdan, qiymatlar sohasi esa {$\frac{\pi}{2}$} to‘plamdan iborat.

17.3-misol. $y=\frac{\arccos(x^2+1)}{x}$ funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlari sohasini topamiz.

Yechish. Bu funksiya x ning $x\neq 0$ va $-1\leq x^2+1\leq 1$ shartlarni qanoatlantiradigan barcha qiymatlaridagina aniqlangan. x ning $x\neq 0$, $-1\leq x^2+1\leq 1$ shartlar bir vaqtda o‘rinli bo‘ladigan qiymati mavjud emas. Shunday qilib, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi, shuningdek, qiymatlar sohasi ham bo‘sh to‘plamdir.

17.4-misol. $y=arcsinx$, $-\frac{1}{2}\leq x<0$ funksiyaning aniqlanish sohasini va qiymatlar sohasini topamiz.

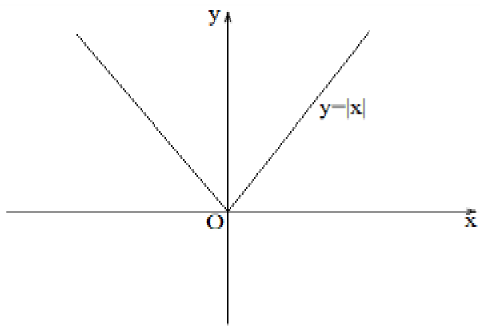
Yechish. Funksiyaning berilishidan ko‘rinadiki, uning aniqlanish sohasi $-\frac{1}{2}\leq x<0$ oraliqdan, qiymatlar sohasi esa $y=arcsinx$ funksiya [-1; 1] kesmada o‘suvchi va $y(-\frac{1}{2})=-\frac{\pi}{6}$, $y(0)=0$ bo‘lgani uchun $[-\frac{\pi}{6};0)$ oraliqdan iborat bo‘ladi.

2. Maxsus funksiyalar: $y=|x|$, $y=\{x\}$, $y=[x]$. **Dirixle funksiyasi.**

Avval $y=|x|$ funksiyani ko`rib chiqamiz. Biz bilamizki $|x|$ ifoda har qanday $x$ da ma`noga ega bo`lgani uchun bu funksiyaning aniqlanish sohasi haqiqiy sonlar to`plami bo`ladi. $y=|x|$ funksiyani quyidagicha ifodalash mumkin.

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Bu funksiyani grafigi $[0;+\infty)$ oraliqda $y=x$ funksiyaning grafigi bilan mos tushadi. Bu funksiyaning grafigi koordinatalar boshidan chiquvchi va I,II koordinata burchaklari bisektrissalari bo`lgan ikkita nurdan iborat.



17.1-ta’rif: x haqiqiy sonning butun qismi deb, x dan katta bo‘lmagan eng katta butun songa aytiladi. x sonning butun qismi $[x]$ simvol bilan belgilanadi.
Masalan: [3,2]=3, $[\pi]=3$, [-3,2]=-4, $[-\pi]=-4$, [-7,8]=-8:
$f(x)=[x]$ funksiyani qaraylik, bu funksiya quydagi xossalarga ega:

1. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi R to‘plamdan, qiymatlar sohasi Z to‘plamdan iborat.
2. Ixtiyoriy haqiqiy x son uchun $[x]\leq x<[x]+1$ tenglik o‘rinli.
3. Istalgan x_1 va x_2 haqiqiy sonlar uchun $[x_1+x_2]\geq[x_1]+[x_2]$.
4. Ixtiyoriy x haqiqiy va n butun sonlar uchun $[x+n]=[x]+n$ tenglik to‘g’ri.

5. Agar $[x]=[y]$ bo‘lsa, $|x-y|<1$ bo‘ladi.

6. Agar *n* natural son bo‘lsa, u holda $\left[\frac{[n]}{x}\right]=\left[\frac{n}{x}\right]$ bo‘ladi.

17.2-ta’rif: *x* haqiqiy sonning kasr qismi deb, *x* bilan uning butun qismi orasidagi ayirmaga aytiladi. *x* sonning kasr qismi $\{x\}$ simvol bilan belgilanadi. U holda $\{x\}=x-[x]$ bo‘ladi.

Masalan: $\{3,2\}=3,2-[3,2]=3,2-3=0,2$, $\{-3,2\}=-3,2-[-3,2]=-3,2+4=0,8$.

Istalgan *x* sonini uning butun va kasr qismlari yig’indisi, ya’ni $x=[x]+\{x\}$ ko‘rinishida tasvirlash mumkin.

1. $y=\{x\}$ funksiyaning aniqlanish sohasi *R* dan iborat. Qiymatlar sohasi $[0;1)$ oraliqdan iborat.
2. Ixtiyoriy *x* haqiqiy son uchun $\{[x]\}=0$ va $[\{x\}]=0$ bo‘ladi.
3. $y=\{x\}$ funksiya asosiy davri 1 ga teng davriy funksiyadir, ya’ni $\{x\}=\{x+1\}$ tenglik istalgan haqiqiy son uchun bajariladi.

17.5-misol: Ifodani hisoblang. $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+...+[\sqrt{9}]+[\sqrt{10}]$, bunda $[a]\to a$ sonning butun qismi.

Yechish: Bizga malumki, $\sqrt{1}=1,\ 1<\sqrt{2}<2,\ 1<\sqrt{3}<2,\ \sqrt{4}=2,\ 2<\sqrt{5}<3,$ $2<\sqrt{6}<3,\ \ 2<\sqrt{7}<3,\ \ 2<\sqrt{8}<3,\ \ \sqrt{9}=3, 3<\sqrt{10}<4$. U holda $[\sqrt{1}]=1, [\sqrt{2}]=1,$ $[\sqrt{3}]=1, [\sqrt{4}]=2, [\sqrt{5}]=2, [\sqrt{6}]=2, [\sqrt{7}]=2, [\sqrt{8}]=2, [\sqrt{9}]=3, [\sqrt{10}]=3$. Bularni hisobga olsak $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+...+[\sqrt{9}]+[\sqrt{10}]=1+1+1+2+2+2+2+2+3+3=19$.

17.6-misol: $[\lg 28]+[\lg 0,026]$ yig’indini hisoblang. Bunda $[a]$ yozuv *a* sonning butun qismini bildiradi.

Yechish. $1<\lg 28<2,$ $\lg 0,026=\lg(26\cdot 10^{-3})=\lg 26-3,$ *1<lg26<2* bo‘lganligi sababli $[\lg 28]=1, [\lg 0,026]=-2$ bo‘ladi. U holda $[\lg 28]+[\lg 0.026]=1-2=-1$.

17.7-misol: Tenglamani yeching: $[x^2]=9$.

Yechish: $x^2=t$ belgilash kiritaylik. U holda [*t*]=9 bo‘ladi. $9\le t<10$ tengsizlikni qanoatlantirivchi *t* sonlar [*t*]=9 tenglamaning yechimi bo‘ladi. Belgilashni hisobga olsak $9\le x^2<10$ bo‘ladi. Bu tengsizlikni yechamiz. $y=x^2$ funksiyaning $[0;\infty)$ oraliqda o‘sivchiligidan $\sqrt{9}\le\sqrt{x^2}<\sqrt{10}$, yoki $3\le|x|<\sqrt{10}$ bo‘ladi. Bu tengsizlikni yechishda ikki holni qaraymiz.

1-hol. *0<x* bo‘lsa, $|x|=x$ bo‘ladi. U holda tenglamaning $3\le|x|<\sqrt{10}$ yechimini topamiz.

2-hol. *x<0* bo‘lsa $|x|=-x$. Buni hisobga olsak, $3\le -x<\sqrt{10}$ yoki

$-\sqrt{10} < x \le -3$ bo‘ladi. Yuqoridagi ikki holni birlashtirib, berilgan tenglamani yechimini hosil qilamiz. Javob: $\left(-\sqrt{10};-3\right]\cup\left[3;\sqrt{10}\right)$.

17.8-misol. $[\lg x]\cdot\{\lg x\}=\lg x$ tenglamani yeching.

Yechish: $[\lg x]=n, n\in Z$ va $\{\lg x\}=a, 0\le a<1$ bo‘lsin. U holda $lgx=n+a$ bo‘ladi. Bularni berilgan tenglamaga qo‘ysak, $na=n+a$ ga ega bo‘lamiz. Bundan $n=\frac{a}{n-1}$ *yoki* $a=\frac{n}{n-1}$ bo‘ladi. $0\le a<1$ ekanligidan $n\le 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $\lg x=\frac{n^2}{n-1}$ kelib chiqadi. Bundan $x=10^{\frac{n^2}{n-1}}$ yechimni olamiz.

Javob: $x=10^{\frac{n^2}{n-1}}$, $n\le 0$, n - butun son.

17.9-misol. $\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$ tenglamani yeching.

Yechish. $\frac{15x-7}{5}=t$ deb belgilab, $x=\frac{5t+7}{15}$ bo‘lishini hisobga olsak, tenglama $\left[\frac{10t+39}{40}\right]=t$ ko‘rinishni oladi. Butun qismning ta’rifiga asosan $0\le\frac{10t+39}{40}-t<1$ bo‘ladi. Bu tengsizlikni yechib, $-\frac{1}{30}<t\le 13$ ni hosil qilamiz. t sonning butun son ekanligidan oxirgi tengsizlikdan $t=0$ bo‘lsa, $x_1=\frac{7}{15}$, $t=1$ bo‘lsa, $x_2=\frac{7}{15}$ bo‘ladi. Javob: $x_1=\frac{7}{15}$, $x_2=\frac{4}{5}$.

17.10-misol. x^2-2$\{x\}$-5=0 tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamadan 2$\{x\}$=x^2-5 kelib chiqadi. $0\le\{x\}<1$ dan $5\le x^2<7$ yoki $\sqrt{5}\le|x|<\sqrt{7}$ bo‘ladi. Bu yerdan $[x]$=2 yoki $[x]$=-3 bo‘ladi. Endi $\{x\}=x-[x]$ ekanligini hisobga olsak, berilgan tenglama quydagi ikki holatga ajraladi.

1) x^2-2(x-5)-5=0 yoki 2) x^2-2(x+3)-5=0 .

Birinchi tenglamani yechib $x=1\pm\sqrt{2}$ ni hosil qilamiz. $x=1+\sqrt{2}$ ildizi $[x]$=2 shartni qanoatlantiradi. Ikki tenglamani yechib [x]=-3 shartni qanoatlantirivchi $x=1-2\sqrt{3}$ ildizni hosil qilamiz. Javob: $x=1+\sqrt{2}$, $x=1-2\sqrt{3}$.

17.11-misol. $\left[-x^2+3x\right]=\left[x^2+\frac{1}{2}\right]$ tenglamani yeching.

Yechish. $x^2+\frac{1}{2}>0$ ekanligi ma’lum. Shuning uchun $\left[x^2+\frac{1}{2}\right]=n\ge 0.$

Ikkinchi tomondan $-x^2+3x\ge 3$ yoki $x^2-3x+3\le 0$ tengsizlik yechimga ega emas. Shuning uchun n soni 1; 1; 2 qiymatlar qabul qilishi mumkin.

1) n=0 bo‘lsin. $\left[-x^2+3x\right]=0;\begin{cases}0\le -x^2+3x\le 1\\ 0\le x^2+\frac{1}{2}<1\end{cases}$ dan $0\le x<\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ ni olamiz.

2)n=1 bo‘lsin. $\left[-x^2+3x\right]=1;\begin{cases}1\le -x^2+3x\le 2\\ 1\le x^2+\frac{1}{2}<2\end{cases}$ dan $\frac{\sqrt{2}}{2}\le x<1$ ni olamiz.

3)n = 2 bo‘lsin. $\left[-x^2+3x\right]=2;\begin{cases}2\le -x^2+3x\le 3\\ 2\le x^2+\frac{1}{2}<3\end{cases}$ dan $\frac{\sqrt{6}}{2}\le x<\frac{\sqrt{10}}{2}$ ni olamiz.

Ushbu $D(x)=\begin{cases}1, & agar\ x\in Q\\ 0, & agar\ \ x\in I\end{cases}$ munosabat bilan aniqlangan funksiyaga Dirixle funksiyasi deyiladi. Ko’rinib turibdiki, bu funksiyaning aniqlanish sohasi R dan va qiymatlar sohasi $\{0;1\}$ to’plamdan iborat.

Ravshanki, $T\in Q, T\neq 0$ bo’lganda $\forall x\in R$ uchun $D(x+T)=D(x)$ tenglik o’rinli bo’lganligi uchun Dirixle funksiyasi davriy funksiya va ixtiyoriy $T\neq 0$ ratsional son uning davri ekan. Agar $T\in I$ bo’lsa, $\forall x\in R$ uchun $D(x+T)=D(x)$ tenglik o’rinli bo’lmaydi. Demak, irratsional sonlar Dirixle funksiyasi uchun davr emas.

Shunday qilib, Dirixle funksiyasining davrlari to’plami $Q\setminus\{0\}$ dan iborat. Eng kichik musbat davri esa mavjud emas - barcha musbat ratsional sonlar to’plamining infimumi nol bo’lib, u $Q\setminus\{0\}$ ga tegishli emas.

4. Mustaqil yechish uchun misollar.

17.1. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang.

1) y=$|x|+2$. 2) $y=|x|-3$. 3) y=$|x-2|$. 4) $y=arcsin2x+\pi$.

5) $y=arccos2x+\pi$. 6) $y=arctgx-\pi$.

17.2. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang.

1) $y=-arcsin(1+x)$. 2) $y=arcsin(sinx^2)$.

3) $y=arccos(cosx^2)$. 4) $y=arcsin(cosx^2)$.

17.3. $y=|x|$ funksiyaning grafigidan foydalanib, quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang.

1) $y=|x|-3$; 2) $y=|x+1|-3$; 3) $y=-|x|$; 4) $y=|-x|$;

5) $y=|-2-3x|$; 6) $y=3|x|$; 7) $y=\left|\frac{x}{2}\right|$; 8) $y=3\left|\frac{x}{2}\right|$;

9) $y=3|x-2|-4$; 10) $y=-2|-3x|-4$; 11) $y=3|2x-4|+5$;

12) $y=-5|2x-4|+1$; 13) $y=|3-x|$; 14) $y=|2-4x|+3$.

17.4. Funksiyalarning grafiklarini chizing:

1) y=$\{x\}$; 2) y=$[x]$; 3) y=$\{x\}$+1; 4) $y=[x]-1$;

5) y=$\{5+x\}$; 6) y=$[5+x]$; 7) y=x^2+$\{x\}$; 8) y=$[x]$+x.

17.5. Tenglamalarni yeching.

1) $[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}-1$; 2) $[x^2]=4$; 3) $[x^2]=x$;

4) $[x^2]=[x]$; 5) $[x^2-4x]=x-6$; 6) $[x]+[2x]=2$;

7) $[x]+[2x]+[3x]=3$; 8) $[x]+[2x]+\cdots+[nx]=1,\ n\geq 2,\ n\in N$;

5.O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Teskari trigonometrik funksiyalar deb qanday funksiyalarga aytiladi?

2. *y=arcsinx*, *y=arccosx* funksiyalarning xossalarini keltiring.

3. *y=arctgx*, *y=arcctgx* funksiyalarning xossalarini keltiring.

4. $y=|x|$ funksiyaning xossalarini ayting.

5. $y=[x]$ funksiyaning xossalarini ayting.

6. $y=\{x\}$ funksiyaning tarifini va xossalarini ayting.

II bobni takrorlash uchun test savollari

1. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}}{x+2}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

a) $x<-1$ b) $x\neq -2$ c) $|x|=2$ d) $|x|\geq 2$

2. Funksiyaning aniqlanish sohasini toping: $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-1}$

a) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ \infty)$ b) $(-\infty;\ 1)$ c) $(1;\ \infty)$ d) $(-1;\ \infty)$

3. Funksiyaning aniqlanish sohasini toping: $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x(x+2)}$

a) $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$ b) $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ \infty)$ c) $(0;\ \infty)$ d) $(-2;\ 0)$

4. Funksiyaning aniqlanish sohasini toping: $f(x)=\dfrac{x-12}{x+12}$

a) $(-\infty;-12)\cup(-12;\ +\infty)$ b) $(0;12)$ c) $(-12;\ +\infty)$ d) $(-\infty;\ 0)\cup(12;+\infty)$

5. Funksiyaning aniqlanish sohasini toping $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$

a) (-1;5) b) (1;6) c) [1;6] d) (0;8)

6. Funksiyaning aniqlanish sohasini toping $y=\log_2\dfrac{x-2}{x+2}$

a) (-∞;-2)∪(2;+∞) b) (-∞;+∞) c) (-∞;-2) d) (2;+∞)

7. Funksiyaning aniqlanish sohasini toping $y=\arccos\dfrac{3x+4}{5}$

a) (0;+∞) b) -1;2) c) [-3;1/3] d) (0;+∞]

8. Funksiyalardan qaysi bir juft funksiya.

a) $y=e^{-x}+2$ b) $y=2^{x^2}+3x^2+2x$; c) $y=2^{3x}+2^{-3x}+x$ d) $y=2^{-x^2}$

9. Funksiyalardan qaysi bir toq funksiya

a) $y=\sin^3 x-7x$ b) $y=2^{\cos x}+\sin 3x$ c) $y=\frac{2x-3}{\sin x}$; d) $y=\sin 3x\cdot tg5x.$

10. Funksiya tushunchasini quyidagi usullardan qaysi biri yordamida berib bo`lmaydi?

a) grafik b) analitik c) intuitiv d) jadval

11. $f:X\to Y$ funksiya berilgan. Tekislikning $\{(x,y): x\in X,\ y\in Y\}$ nuqtalari to`plami qanday nomlanadi?

a) funksiyaning nollari

b) funksiyaning aniqlanish sohasi

c) funksiyaning qiymatlari to`plami

d) funksiyaning grafigi

12. $f(x)=\ln(x^2+x-2)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

a) $(-\infty;\ -2)\cup(1;\ +\infty)$

b) $(-\infty;\ -2)\cup(3;+\infty)$

c) $(1,-2)$

d) $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$

13. $f(x)=\ln(x^2+x-6)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

a) $(-\infty;\ -3)\cup(2;\ +\infty)$ b) $(-2,3)$ c) $(-3,-2)$

d) $(-\infty;\ -3)\cup(1;\ +\infty)$

14. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri davriy emas?

a) $\sin x+\cos x$ b) $e^{x+\sin x}$ c) $\ln(1+\sin x)$ d) $\sqrt{1+tg^2x}$

15. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri juft?

a) e^{1-x} b) $x^2+arctgx$ c) $\ln(x^3-1)$ d) $\frac{\sin x}{x}$

16. Quyidagi funksiyalardan nechtasi juft:

$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\varphi(x)=x\sin x$,

$g(x)=x^2arctg\frac{x}{x^2+7}$ $\phi(x)=x^5+\frac{1}{x^3}$

a) 2 b) birorta ham juft emas c) 1 d) 3

17. Har bir x elementga yagona $y\in Y$ ni mos quyuvchi va $f(X)=Y$ shartni qanoatlantiruvchi $f:X\to Y$ akslantirish qanday nomlanadi?

a) in`yektiv b) syu`ryektiv c) bi`yektiv d) uzluksiz

18. $f:X\to Y$ akslantirishda X to`plamning aksi $Y$ to`plam bilan ustma-ust tushsa bunday akslantirish qanday nomlanadi?

a) bi`yektiv b) syu`ryektiv c) in`yektiv d) uzluksiz

19. $f:X\to Y$ akslantirish X to`plamning har xil elementlarini $Y$ to`plamning har xil elementlariga akslantirsa bunday akslan tirish qanday nomlanadi?

a) uzluksiz   b) syu`ryektiv   c) in`yektiv   d) bi`yektiv

20. $f: X \to Y$, $f(x) = \sin x$ akslantirish qaysi holda syu`ryektiv bo`ladi?

a) $X = [0,\pi], Y = [0,1]$ b) $X = [-\pi,\pi]$, Y=$[0,1]$ c) $X = R$, $Y = R$

d) $X = [0,\pi], Y = [-1,1]$

21. $f: X \to Y$, $f(x) = \cos x$ akslantirish qaysi holda in`yektiv bo`ladi?

a) $X = [0,2\pi], Y = [0,1]$ b) $X = [-\pi,\pi]$, Y=$[-1,1]$ c) $X = [0,\pi], Y = R$

d) $X = [-\pi,\pi], Y = R$

22. $f: X \to Y$, $f(x) = tgx$ akslantirish qaysi holda b`yektiv bo`ladi?

a) $X = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), Y = R$ b) $X = [0,\frac{\pi}{4}]$, Y=$[0,1]$ c) $X = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), Y = [0,1]$

d) $X = [0,\frac{\pi}{4}], Y = R$

23. $f(x) = \sin x$ va $g(x) = e^x$ funksiyalarning $f \circ g$ superpozitsiyasini toping.

a) $\sin x$ b) $\sin e^x$ c) e^x d) $e^{\sin x}$

24. $f(x) = \sqrt{x}$ va $g(x) = \sqrt[3]{x}$ bo`lsa, $\sqrt[9]{x}$ funksiya quyidagi superpozitsiyalardan qaysi biri bo`lishi mumkin?

a) $f \circ f$ b) $g \circ g$ c) $f \circ g$ d) $g \circ f$

25. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri juft?

a) $x^2 + arctgx$ b) $\frac{\sin 3x}{x}$ c) $\ln(x^3 - 1)$ d) $\frac{\sin x}{x^2}$

III BOB. SONLI KETMA-KETLIKLAR VA ULARNING LIMITI

18-§. Sonli ketma-ketlik tushunchasi. Ketma-ketlik limitining ta'rifi

Reja:

1.Sonli ketma-ketlik tushunchasi.
2.Ketma-ketlikning berilish usullari.
3.Ketma-ketlik limitining ta'rifi.
4.O'z-o'zini tekshirish savollari.
5.Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Sonli ketma-ketlik tushunchasi. Agar har bir natural son n ga biror haqiqiy x_n soni mos qo'yilgan bo'lsa, u holda

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik (sonli ketma-ketlik) berilgan deyiladi.

Ketma-ketlik qisqacha $\{x_n\}$ shaklda yoziladi. x_n ga ketma-ketlikning hadi (n-hadi) yoki elementi ($n-$elementi) deyiladi. n ga x_n-hadning nomeri deyiladi.

Sonli ketma-ketlik bu aniqlanish sohasi natural sonlar to'plamidan iborat bo'lgan funksiyadir. Bu funksiyaning o'zgarish sohasi, ya'ni x_n $(n \in N)$ sonlar to'plami ketma–ketlikning qiymatlari to'plami deyiladi. Ketma-ketlikning qiymatlari to'plami chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin, ammo ketma-ketlikning hadlari (elementlari) to'plami hamma vaqt cheksiz to'plamdir, chunki ketma-ketlikning 2 ta hadi bir-biridan hech bo'lmaganda nomeri bilan farq qiladi, masalan; $\{(-1)^n\}$ ketma-ketlikni qaraylik. Bu ketma-ketlikning qiymatlari to'plami 1 va -1 sonlaridan iborat. Uning hadlari to'plami cheksiz to'plamdir.

$\{n^2\}$ va $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketliklarning qiymatlari to'plami cheksiz to'plam bo'ladi.

2. Ketma-ketlikning berilish usullari. Ketma-ketlik har bir hadining nomeri bo'yicha shu hadni hisoblash formulasi orqali berilishi mumkin.

Masalan:

$$x_n = \frac{1}{n},\ x_n = \frac{(-1)^n + 1}{2},\ x_n = \frac{n^2+1}{n},\ x_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ketma-ketlik ba'zan rekurrent formula orqali berilishi mumkin:

a) Birinchi hadi beriladi (yoki dastlabki bir nechta hadi beriladi).

b) Ketma-ketlik hadining o'zidan oldingi hadiga (o'ziga qo'shni hadlariga) bog'lanish formulasi beriladi.

Masalan: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ x_3 = x_2 + x_1 = 2,\quad x_4 = x_3 + x_2 = 3, \dots$.

Arifmetik va geometrik progressiyada ayirmasi d va maxraji q bo‘lsa, ularning n –hadini topish formulasi rekurrent formula orqali berilgan ketma-ketlikka misol bo‘la oladi:

$$a_{n+1} = a_n + d, \qquad b_{n+1} = b_n q.$$

3.Ketma-ketlik limitining ta’rifi.

18.1-ta’rif. Agar ixtiyor musbat ε soni uchun shunday $n_0(\varepsilon)$ nomer topilsaki $n_0(\varepsilon)$ dan katta barcha n lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlik limiti deyiladi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ kabi yoziladi yoki $n \to \infty$ da $x_n \to a$ deb belgilanadi.

Bu ta’rifni logik simvollar yodamida quyidagicha yozish mumkin.

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N\ \big(n_0 = n_0(\varepsilon)\big),\ \forall n > n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizligi bajarilsa a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Demak,

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = a\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \ \forall n > n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon. \qquad (18.1)$$

Agar ketma-ketlikning limiti mavjud bo‘lsa, bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyiladi.

Demak, yaqinlashuvchi ketma-ketlik logik simvollar orqali quyidagicha yoziladi:

$$\exists a \in R,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \ \forall n > n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon. \qquad (18.2)$$

Bu munosabat bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyilar ekan.

18.1-misol. Limit ta’rifidan foydalanib, quyidagi ketma-ketlikning limitini toping:

$$x_n = \frac{n+1}{n}.$$

Yechish. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ ekanligini ko‘rsatamiz.

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n},\ \ |x_n - 1| = \frac{1}{n}$$

bo‘lganligi uchun $\frac{1}{n} < \varepsilon, n > \frac{1}{\varepsilon}$ tengsizliklar n_0 nomerni $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ deb olsak, barcha $n > n_0$ larda $|x_n - 1| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi, bu esa $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ ekanligini bildiradi.

18.1-ta’rifning inkori logik simvollar yordamida quyidagicha yoziladi:

$$\exists\varepsilon_0 > 0,\ \forall n_0 \in N,\ \ \exists n > n_0,\ |x_n - a| \geq \varepsilon_0. \qquad (18.3)$$

Ravshanki, (18.3) munosabat a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo‘lmasligini bildiradi.

Quyidagi

$$\forall a \in R, \exists\varepsilon_0 > 0, \forall n_0 \in N,\ \ \exists n > n_0, |x_n - a| \geq \varepsilon_0$$

munosabat esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limitga ega emasligini, ya'ni bironta son bu ketma-ketlikning limiti bo'lmasligini bildiradi. Boshqacha aytganda, bu munosabat $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi emasligini anglatadi.

Yaqinlashuvchi bo'lmagan ketma-ketlik uzoqlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

18.2-misol. Ketma-ketlik limiti ta'rifining inkori, ya'ni (18.3) munosabat bo'yicha $a = 1$ soni $x_n = sin\frac{n\pi}{2}$ ketma-ketlikning limiti bo'lmasligini ko'rsating.

Yechish. $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ deb olamiz, u holda $\forall n_0 \in N$ son uchun $n = 2n_0$ deb olsak, $n > n_0$ bo'lgan n natural son mavjud va

$$|x_n - a| = \left|sin\frac{2n_0\pi}{2} - 1\right| = |sin(n_0\pi) - 1| = 1 > \frac{1}{2}$$

munosabat bajariladi. Demak, (18.3) munosabatga ko'ra $a = 1$ soni $x_n = sin\frac{n\pi}{2}$ ketma-ketlikning limiti emasligini aniqlaymiz.

Agar $\forall n$ da $x_n = a$ bo'lsa u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik statsionar ketma-ketlik deyiladi. Statsionar ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

bo'ladi. (18.1) munosabatdan ko'rinadiki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsa, u holda $\{x_n - a\}$ ketma-ketlikning limiti 0 bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$, va aksincha $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo'ladi.

18.1-mashq. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ bo'lsa, u holda $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k, \dots$ ketma-ketlikning limiti ham a bo'lishini isbotlang.

Yana ta'rifga qaytib quyidagi mulohazalarni olamiz: $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ tengsizlikka ekvivalent. Ketma-ketlik limiti ta'rifidagi $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ tengsizlikdan ko'rinadiki, agar a soni x_n ketma-ketlikning limiti bo'lsa, x_n ketma-ketlikning ma'lum bir nomerdan keyingi hadlarning barchasi $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervalda yotadi. Bu interval tashqarisida yo elementi umuman bo'lmaydi, yo bo'lsa ham cheklita bo'ladi.

$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$intervalga a nuqtaning $\varepsilon -$atrofi deyiladi va $U_\varepsilon(a)$ kabi belgilanadi:

$$U_\varepsilon(a) = \{x: a\text{-}\varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x: |x\text{-}a| < \varepsilon\},$$

______|_________|___________|_____

$a - \varepsilon$ $\quad a \quad$ $a + \varepsilon$

18.1-ta'rifni, ya'ni ketma-ketlik limitining ta'rifini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

a soni x_n ketma-ketlikning limiti deyiladi, agar a nuqtaning $\forall\varepsilon$ atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko‘p elementi joylashgan bo‘lib, tashqarisida esa cheklita elementi qolgan bo‘lsa. Logik simvollardan foydalanib ketma-ketlik limitini quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \to x_n \in U_\varepsilon(a).$$

18.3-misol. $x_n = \{(-1)^n\}$ ketma-ketlikni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

x_1	x_2	x_3	x_4	$x_5, \ldots x_n, \ldots$
-1	1	-1	1	-1 ...$(-1)^n$ ...

Faraz qilaylik 1 nuqta bu ketma-ketlikning limiti bo‘lsin, u holda 1 nuqtaning $\forall\varepsilon$ atrofida ketma-ketlikning cheksizta elementi joylashgan bo‘lishi tashqarisida esa cheklita elementi joylashgan bo‘lishi kerak. $(1-\frac{1}{2}; 1+\frac{1}{2})$ atrofini olaylik, bu atrofi x_n ketma-ketlikning hamma juft nomer hadlari joylashgan lekin bu nuqtaning tashqarisida barcha toq nomerli hadlari qolayapti. Demak 1 nuqta ketma-ketlikning limiti bo‘la olmaydi. -1 nuqta ham xuddi shunday limiti bo‘la olmasligini osongina ko‘rish mumkin. 1 va -1 dan farqli istalgan $a \in R$ soni uchun, uning shunday $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ atrofi topilib, $1 \notin U_\varepsilon(a)$, $-1 \notin U_\varepsilon(a)$ va $U_\varepsilon(a)$ atrofda qaralayotgan ketma-ketlikning bironta ham elementi yotmasligini ko‘rish qiyin emas. Shuning uchun bu tanlangan nuqta ham bu ketma-ketlikning limiti bo‘la olmaydi. Demak, bu ketma-ketlik limitga ega emas ekan.

4.O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Sonli ketma-ketlik limitining ta’rifini atroflar yordamida bering.

2. $x_n = (-1)^n$ ketma-ketlikning limiti mavjud emasligini $''\varepsilon-\delta''$ tilida ko‘rsating.

3. $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlik limitining mavjudligini $''\varepsilon-\delta''$ tilida ko‘rsating.

4. Logik simvollar yordamida quyidagi mulohazalarning inkorini yozing.

a) $A = \{a\ soni - \{x_n\}$ ketma-ketlik limiti$\}$.

b) B=$\{\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlikdir$\}$.

5.Mustaqil yechish uchun misollar.

18.1. Ketma-ketlik limitining ta’rifi (18.1-ta’rif) bo‘yicha a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo‘lishini isbotlang.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n = \dfrac{3n-2}{2n-1},\ a = \dfrac{3}{2}.$ **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n = \dfrac{4n-1}{2n+1},\ a = 2.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n = \dfrac{5n+1}{10n-3},\ a = \dfrac{1}{2}.$ **4.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n = \dfrac{3n^2}{2-n^2},\ a = -3.$

5. $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n = \frac{2n}{n^3+1},\quad a=0.$ **6.** $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\quad x_n = \frac{2n+3}{n+5},\ a=2.$

7. $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\quad x_n = \frac{1-2n^2}{n^2+3},\ a=-2.$ **8.** $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n},\quad a=0.$

Bu har bir hol uchun quyidagi jadvalni to‘ldiring:

ε	0,1	0,01	0,001	…
$n_0(\varepsilon)$				

18.2. Ketma-ketlik limiti ta’rifining inkori ((18.3) munosabat) bo‘yicha a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo‘lmasligini korsating.

1. $a=-1, x_n=(-1)^n.$ **2.** $a=\frac{1}{2},\ x_n=\frac{1}{2n+1}.$

3. $a=1,\ x_n=(-1)^n+1.$ **4.** $a=\frac{1}{2},\ x_n=cos\frac{\pi n}{3}.$

5. $a=\frac{1}{2},\ x_n=sin\frac{\pi n}{6}.$ **6.** $a=-\frac{1}{2},\ x_n=\frac{n+1}{3-2n^2}.$

18.3. $x_n=\frac{1}{n^2}(1+2+3+4+\ldots+n)$ ketma-ketlikni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

19-§. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari

Reja:

1.Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari.
2.Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning tengsizliklarga bog’liq xossalari.
3.O‘z-o‘zini tekshirish savollari.
4.Mustaqil yechish uchun misollar.

1.Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega.

19.1-teorema. Sonli ketma-ketlik faqat bitta limitga ega bo‘lishi mumkin.

Isbot. Faraz qilaylik ketma-ketlik a va b limitlarga ega bo‘lib, $b>a$ bo‘lsin. $\varepsilon>0$ sonni shunday tanlashimiz mumkinki a va b nuqtalarning ε atroflari o‘zaro kesishmasin. (Masalan: $\varepsilon<\frac{b-a}{3}$ deb olsak, bu atrofi kesishmaydi) u holda a nuqta ketma-ketlikning limiti bo‘lganligi uchun a ning ε atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksizta elementi joylashgan bo‘lib, uning tashqarisida cheklita element yotadi. Jumladan b nuqtaning ε atrofida cheklita element qoladi. Bu esa b nuqtaning limit ekanligiga qarama-qarshi.

Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralanganligi.

19.1-ta’rif. Agar shunday c_1 topilib $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari $x_n\geq c_1$ tengsizlikni qanoatlantirsa, bu ketma-ketlik quyidan chegaralangan deyiladi. Logik simvollar orqali yozsak:

$\exists c_1, \forall n\in N \to x_n\geq c_1$ bo‘lsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik quyidan chegaralangan deyiladi.

$\exists c_2, \forall n \in N \rightarrow x_n \leq c_2$ bo‘lsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan deyiladi. Agar ketma-ketlik ham yuqoridan ham quyidan chegaralangan bo‘lsa, bu holda ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

Logik simvollar orqali quyidagicha yoziladi.

$$\exists \mathrm{c}_1, \exists \mathrm{c}_2, \ \forall \mathrm{n} \in \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{c}_1 \leq \mathrm{x}_\mathrm{n} \leq \mathrm{c}_2 \qquad (19.1)$$

munosabat bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

Ta’rifdan ko‘rinadiki agar ketma-ketlikning qiymatlari to‘plami chegaralangan bo‘lsa, bu ketma-ketlik chegaralangan bo‘lar ekan.

Izoh. (19.1) shart quyidagi shartga ekvivalent

$$\exists c, \forall n \in N \rightarrow |x_n| \leq c \qquad (-c \leq x_n \leq c) \qquad (19.2)$$

0 nuqtaning ε atrofi $(-\varepsilon, \varepsilon)$ interval ekanligini hisobga olsak quyidagi tasdiq o‘rinli:

Ketma-ketlik chegaralangan bo‘lsa, shunday c son topiladiki qaysikim $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari 0 nuqtaning c atrofida yotar ekan.

19.2-teorema. Agar ketma-ketlik limitga ega bo‘lsa, u chegaralangan bo‘ladi.

Isbot: $\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo‘lsin. U holda $\varepsilon = 1$ soni uchun $\exists n_0 \in N$ soni topiladiki, qaysikim $\forall n > n_0, -1 + a \leq x_n \leq 1 + a$ tengsizlik bajariladi.

$$c_1 = max\{x_1, x_2, x_3 \dots \dots x_n, 1 + a\}$$
$$c_2 = min\{x_1, x_2, x_3 \dots \dots .. x_n, a \text{ -1}\}$$

deb olsak, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari uchun $c_2 \leq x_n \leq c_1$ tengsizlik bajariladi. Bundan esa $\{x_n\}$ ketmma-ketlikning chegaralanganligini (19.1) ga asosan olamiz.

2.Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning tengsizliklarga bog’liq xossalari.

19.3-teorema. Agar $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ ketma-ketliklar

$$\exists n_0, \forall n > n_0 \rightarrow x_n \leq y_n \leq z_n \qquad (19.3)$$

va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a \qquad (19.4)$$

munosabatlarni qanoatlantirsa, u holda $\{y_n\}$ ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ bo‘ladi.

Isbot. Limit ta’rifiga ko‘ra, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1, \exists n_2, \forall n > n_1 \rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$ va $\forall n > n_1 \rightarrow z_n \in U_\varepsilon(a)$ bo‘ladi. Bu munosabatlardan va (19.3) dan

$$\forall n > \bar{n} \ \rightarrow y_n \in U_\varepsilon(a)$$

ekanligi kelib chiqadi, bu yerda $\bar{n} = max\{n_1, n_2\}$. Bu esa $a = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ ekanligini bildiradi. Teorema isbot bo‘ldi.

Bu teorema uch ketma-ketlik haqidagi teorema deyiladi.

19.1-misol. $\forall n \in N, a_n \geq -1$ va $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bo‘lsin.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{1+a_n}=1 \qquad (19.5)$$

ekanligini isbotlang.

Isbot. Agar $a_n \geq 0$ bo‘lsa, u holda

$$1\leq \sqrt[k]{1+a_n} \leq (\sqrt[k]{1+a_n})^k = 1+a_n = 1+|a_n|$$

bo‘ladi. Agar -1$\leq a_n < 0$ bo‘lsa, u holda

$$1 \geq \sqrt[k]{1+a_n} \geq \left(\sqrt[k]{1+a_n}\right)^k = 1+a_n$$

kelib chiqadi.

Demak, biz $a_n \geq 0$ da

$$1 \leq \sqrt[k]{1+a_n} \leq 1+a_n \qquad (19.6)$$

va -1$\leq a_n < 0$ da

$$1+a_n \leq \sqrt[k]{1+a_n} \leq 1 \qquad (19.7)$$

tengsizliklarni oldik. (19.6) va (19.7) tengsizliklardan 19.3-teoremaga asosan (19.5) kelib chiqadi.

19.2-misol. Agar $a > 1$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1$ ekanligini isbotlang.

Isbot. Agar $a > 1$ bo‘lsa, u holda $\sqrt[n]{a} > 1$ hamda

$$\sqrt[n]{a} - 1 = x_n \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1 + x_n, x_n > 0$$

munosabatlar o‘rinli. Bu yerdan va $a = (1+x_n)^n > x_n n$ hamda $x_n > 0$ bo‘lganligidan $0 < x_n < \frac{a}{n}$ ekanligini olamiz, ya’ni

$$0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a}{n}$$

bo‘ladi. Bu yerdan 19.3-teoremaga asosan

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}-1)=0$$

tenglikning o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Bundan esa

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$$

tenglikning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

19.3-misol. Agar $a > 1$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0$ ekanligini isbotlang.

Isbot. Aytaylik $m \in Z, m \geq k$ bo’lsin. Ravshanki,

$0 < \frac{n^k}{a^n} \leq \frac{n^m}{a^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[m]{a^n}}\right)^m = \left(\frac{n}{b^n}\right)^m$ tengsizlik o’rinli, bu yerda $b = \sqrt[m]{a} > 1$. U holda $n \to \infty$ da $0 < \frac{n}{b^n} = \frac{n}{\left(1+(b-1)\right)^n} = \frac{n}{1+n(b-1)+\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2+\cdots+(b-1)^n} < \frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2} \to 0$ munosabat to’g’ri bo’ladi. Demak, bu tengsizliklarga va 19.3-teoremaga ko’ra $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0$ ekan.

19.4-teorema. Agar $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$ bo‘lib, $a < b$ bo‘lsa, u holda $\exists n_0 \in N, \forall n > n_0$ lar uchun

$$x_n < y_n \tag{19.8}$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. $\varepsilon > 0$ sonni shunday tanlaymizki a va b nuqtalarning ε- atrofi o‘zaro kesishmasin (masalan $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$>0 deb olsak yetarli bo‘ladi). Limit ta’rifiga asosan berilgan $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday n_1 va n_2 nomerlar topiladiki, qaysikim $\forall n > n_1 \to x_n \in U_\varepsilon(a), \forall n > n_2 \to x_n \in U_\varepsilon(b)$ bo‘ladi. $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ deb olsak, u holda $\forall n > n_0 \to x_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < y_n$ tengsizlik bajariladi. Bundan esa (19.8) munosabatning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

1-natija. Agar $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ va $a < b$ bo‘lsa, u holda

$$\exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \to x_n < b$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Bu faktni isbotlash uchun 19.4-teoremadagi y_n ketma-ketlik o‘rnida $\{y_n\} = \{b\}$ statsionar ketma-ketlikni olish yetarli bo‘ladi.

2-natija. Agar $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$ va

$$\forall n \in N \to x_n \geq y_n \tag{19.9}$$

bo‘lsa, u holda

$$a \geq b \tag{19.10}$$

bo‘ladi.

Isbot. Faraz qilaylik (19.10) bajarilmasin, u holda $a < b$ bo‘ladi. 19.4-teoremaga asosan (19.8) bajariladi. Bu esa (19.9) shatrtga qarama-qarshi. Demak, (19.10) bajarilar ekan.

Izoh 1. Xususiy holda agar yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\forall n \in N \to x_n \geq \alpha$ $(x_n \leq \beta)$ munosabat bajarilsa, u holda $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \alpha$ $\left(\lim_{n\to\infty} x_n \leq \beta\right)$ bo‘ladi. Bu yerdan agar yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari $[a, b]$ segmetda joylashgan bo‘lsa, u holda bu ketma-ketlikning limiti ham shu segmentga tegishli bo‘ladi, ya’ni

$$a \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq b$$

munosabat bajariladi.

Izoh 2. 2-natijadan kelib chiqadiki, agarda ikkita yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketlik $x_n \geq y_n$ va $(x_n \leq y_n)$ munosabatlar bilan bog’langan bo‘lsa, ularning limitlari ham

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n = b \qquad \left(\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

xuddi shunday munosabat bilan bog’langan bo‘ladi. Ammo, agarda $x_n > y_n$ $(x_n < y_n)$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} x_n > \lim_{n\to\infty} y_n = b \qquad \left(\lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

munosabat bajarilmasligi mumkin. Umumiy holda

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n = b \qquad \left(\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

munosabat bajariladi.

Masalan: $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, $y_n = 1 - \frac{1}{n}$ bo‘lsa $x_n > y_n$ tengsizlik o‘rinli, ammo bu ketma-ketliklar uchun $\lim_{n\to\infty} x_n = 1 = \lim_{n\to\infty} y_n$ tenglik o‘rinli.

3.O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Yaqinlashuvchi ketma ketlikning chegaralanganligi haqidagi teoremani isbotlang.

2.Chegaralangan lekin yaqinlashuvchi bo‘lmagan ketma-ketlikka misol keltiring.

4.Mustaqil yechish uchun misollar.

19.1. Quyidagi ketma-ketliklar chegaralanganmi?

$a)\ x_n = (-1)^n n.$ $\qquad c)\ x_n = \frac{(-1)^n}{n}.$ $\qquad e)\ x_n = \frac{n^2+1}{3n^2+1}.$

$b)\ x_n = 2^n.$ $\qquad d)\ x_n = \frac{2^n}{n!}.$

19.2. Quyidagi tengliklarni isbotlang.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$ **2.** $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$ **3.** $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0\ (a > 1).$ **4.** $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}=0.$

5. $\lim_{n\to\infty} nq^n = 0,$ agar $|q| < 1.$ **6.** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1 (a > 0).$

7. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 (a > 1).$ **8.** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=1.$ **9.** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$

19.3. Yetarlicha katta n larda qaysi ifoda katta?

1. $100n + 200$ yoki $0{,}01n^2$; **2.** 2^n yoki n^{1000}; **3.** 1000^n yoki $n!$.

20-§. Cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklar. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar

Reja:

1. Cheksiz kichik ketma-ketliklar.
2. Cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalari.
3. Cheksiz katta ketma-ketliklar.
4. Cheksiz katta ketma-ketliklarning xossalari.
5. Yaqinlasuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar.
6. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.
7. Mustaqil yechish uchun misollar.

1.Cheksiz kichik ketma-ketliklar. Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bo‘lsa, bu ketma-ketlik cheksiz kichik kema-ketlik deyiladi.

Bu ta’rifni logik simvollar orqali yozsak,

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon), \qquad \forall n > n_0 \to |a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$$

bo‘ladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti a bo‘lsa, u holda $\{a_n\} = (x_n - a)$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

Haqiqatdan ham

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon$$

munosabat o‘rinli. Bu yerdan

$$|x_n - a| = |a_n|$$

tenglikka asosan $\{a_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini olamiz. Aksincha $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik va $x_n = a + \alpha_n$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo‘ladi.

Masalan: $\alpha_n = \frac{1}{n}, \beta_n = \frac{c}{a^n}, a > 1, \gamma_n = \frac{n+1}{n^2+2n+1}, \theta_n = \sqrt[n]{a} - 1, (a > 1)$ ketma-ketliklar cheksiz kichik ketma-ketliklar bo‘ladi, bu yerda c-o‘zgarmas son.

Biz yaqinlshuvchi ketma-ketliklarni xossalarini o‘rganishimiz uhun ketma-ketliklar ustida arifmetik amallarni kiritishimiz kerak.

Bizga $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin.

Bu ketma-ketliklarning yig’indis, ayirmasi, ko‘paytmasi, bo‘linmasi deb mos ravishda quyidagi ketma-ketliklarga aytamiz:

$$\{x_n + y_n\}, \quad \{x_n - y_n\}, \quad \{x_n y_n\}, \qquad \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}.$$

Oxirgi ketma-ketlik uchun $\forall n \in N$, $y_n \neq 0$ deb faraz qilinadi.

2.Cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalari. Cheksiz kichik ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega.

1.Chekli sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklarning yig’indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

Isbot. $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklar bo‘lsin. U holda tarifga ko‘ra:

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists n_1 \in N, \forall n > n_1 \to |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists n_2 \in N, \forall n > n_2 \to |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Agar biz $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ deb olsak, u holda

$$\forall n > n_0, |\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

munosabatni olamiz. Bu munosabatdan $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi.

Bu ikkita ketma-ketlik yig'indisi uchun isbotlangan xossani induksiya metodi bilan chekli sondagi ketma-ketliklar uchun ham isbotlash mumkin.

2.Cheksiz kichik ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlikka ko'paytmasi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot. $\{\alpha_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lsin, $\{\beta_n\}$ esa cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsin. $\{\alpha_n\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini isbotlashimiz kerak. $\{\alpha_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lgani uchun, $\exists C \in R, \forall n \in N \to |\alpha_n| < C$ bo'ladi. $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lgani uchun $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0, \forall n > n_0 \to\ |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{C}$ bo'ladi. Bu ikki munosabatdan $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0, \forall n > n_0 \to |\beta_n\alpha_n| < \varepsilon$ ekanligi kelib chiqadi, bu esa $\{\beta_n\alpha_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini isbotlaydi. Xususiy holda $\{\alpha_n\}$ statsionar ketma-ketlik va $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\{\alpha_n\beta_n\}$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Cheksiz kichik ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik bo'lganligi uchun yuqoridagi isbot qilingan xossadan chekli sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklarning ko'paytmasi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lishi kelib chiqadi.

3. Cheksiz katta ketma-ketliklar.

$\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\delta > 0$ soni uchun shunday N nomer topilsinki, qaysikim $n \geq N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha n lar uchun $|x_n| > \delta$ tengsizligi bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikni cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi. Bu holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ kabi yoziladi va ketma-ketlik cheksiz limitga ega deb ham aytiladi.

Logik simvollardan foydalanib, bu ta'rifni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\} \Leftrightarrow \forall\delta > 0,\ \exists N_\delta,\ \forall n \geq N_\delta \to |x_n| > \delta.$$

Bu ta'rifning geometrik interpretatsiyasini beramiz. $E = \{x \in R: |x| > \delta\}$ to'plamga ∞ (cheksizlik) ning δ atrofi deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz limitga ega bo'lsa, u holda ∞ (cheksizlikning) ixtiyoriy δ atrofida bu ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari yotib, tashqarisida esa cheklita elementi qoladi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $-\infty$ va $+\infty$ limitlari tushunchasi ham xuddi yuqoridagiga o'xshash kiritiladi. Bu limitlar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ kabi belgilanadi va quyidagicha aniqlanadi:

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\} \Leftrightarrow \forall\delta > 0,\ \exists N_\delta,\ \forall n \geq N_\delta \to x_N < -\delta,$$

$\{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty\} \Leftrightarrow \forall\delta > 0,\ \exists N_\delta,\ \forall n \geq N_\delta \to x_n > \delta.$

δ>0 bo‘lsin. $E_1 = \{x \in R: x < -\delta\}$ va $E_2 = \{x \in R: x > \delta\}$ to‘plamlarni mos ravishda -∞ va +∞ larning δ atrofi deyiladi. U holda $E = E_1 + E_2$ tenglik o‘rinli. Ta’rifga binoan, agarda +∞ ning ixtiyoriy atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko‘p elementi yotib, uning tashqarisida cheklita element qolsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $+\infty$ limitga ega deyilgan.

Ikkinchi ta’rifga ham shunga o‘xshash ma’no berishimiz mumkin.

Kelgusida $\{x_n\}$ ketma-ketlik limitga ega deyilganda, uning chekli limitga egaligi tushuniladi. Cheksiz limitga ega bo‘lgan hol alohida aytiladi.

4.Cheksiz katta ketma-ketliklarning xossalari.

Agar ketma-ketlikning limiti cheksiz bo‘lsa, uni uzoqlashuvchi ketma-ketlik deb qaraymiz.

20.1-eslatma. Har qanday cheksiz katta ketma-ketlik chegaralanmagan ketma-ketlikdir. Ammo har qanday chegaralanmagan ketma-ketlik cheksiz katta bo‘lishi shart emas. Masalan,

$$1, 1^2, 1, 2^2, 1, 3^2, \ldots, 1, n^2, 1, \ldots$$

ketma-ketlik chegaralanmagan bo‘lib, u cheksiz katta emas.

20.1-teorema. Agar $\forall n \in N$ uchun $x_n \neq 0$ bo‘lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta bo‘lsa, u holda $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘ladi.

20.2-teorema. Agar $\forall n \in N$ uchun $x_n \neq 0$ bo‘lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘lsa, u holda $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz katta bo‘ladi.

20.1-misol. *a)* $x_n = -\sqrt{n}$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$,

b) $\mathrm{x_n} = \frac{\mathrm{n}^2}{\mathrm{n}+2}$ bo'lsa, $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{x_n} = +\infty$,

c) $x_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

5.Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar.

20.3-teorema. Agar

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

bo‘lsa, u holda

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ab;$

c) $\forall n \in N \to y_n \neq 0$ va $b \neq 0$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}$

munosabatlar o‘rinli.

Isbot. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ bo‘lgani uchun

$x_n = a + \alpha_n$, $\quad y_n = b + \beta_n$ bo‘ladi. Bu yerda $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ etma-ketliklar cheksiz kichik ketma-ketliklardir.

$a)$ $x_n + y_n = a + \alpha_n + b + \beta_n = a + b + \alpha_n + \beta_n$ munosabatlardan va $\{\alpha_n + \beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lganligidan $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$ ekanligi kelib chiqadi.

$b)$ $x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ tenglik o‘rinli. Statsionar (o‘zgarmas) ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlikka ko‘paytmasi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lganligidan va ikkita cheksiz kichik ketma-ketlikning ko‘paytmasi ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lganligidan $\{\alpha_n\beta_n\}$, $\{b\alpha_n\}$, $\{a\beta_n\}$ -ketma-ketliklar ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi. Bundan esa cheksiz kichik ketma-ketliklarning yigi’indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lishini hisobga olsak $\{\theta_n\} = \{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n + \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlik eknligini olamiz va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$ tenglik kelib chiqadi.

Endi $\forall n \in N, y_n \neq 0$ va $b \neq 0$ bo‘lganda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

tenglikni isbotlaymiz. $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini isbotlaymiz. Ravshanki,

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = \frac{b(a + \alpha_n) - a(b + \beta_n)}{by_n} = \frac{ab + b\alpha_n - ab - a\beta_n}{by_n} =$$

$$= \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{by_n} = \left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)\frac{1}{y_n}$$

tenglik o‘rinli. Bu oxirgi ifodada qavs ichidagi qismi cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalariga ko‘ra cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi. Agarda biz $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlik ekanligini ko‘rsatsak yuqoridagi tenglikning o‘ng tomonidagi ifodaning (chegaralangan ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlikka ko‘paytmasi, yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lganligidan) cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligini ko‘rsatgan bo‘lamiz. Endi $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlik ekanligini ko‘rsatamiz:

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ bo‘lganligi uchun $\frac{|b|}{2}$ soni uchun $\exists n_0, \forall n > n_0 \to |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$ bo‘ladi. Ikkinchi tomondan modulning xossasiga ko‘ra, $|y_n - b| \geq |y_n| - |b|$ munosabat o‘rinli. Bu oxirgi ikki tengsizlikdan $|y_n| - |b| < \frac{|b|}{2}$ munosabat olamiz. Bundan esa agar $|y_n - b| \geq |y_n| - |b|$ ni $|b - y_n| \geq |b| - |y_n|$ deb yozsak $|b| - |y_n| < \frac{|b|}{2}$ munosabatni olamiz.

Demak, $|y_n| > \frac{|b|}{2.}$ Bu tengsizlikdan esa o‘z navbatida $\frac{1}{|y_n|} < \frac{|b|}{2}$ tengsizlikni olamiz, ya’ni $\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$ munosabat o‘rinli.

Agar biz

$$C = \max\{\frac{1}{|y_1|}, \frac{1}{|y_2|}, \dots, \frac{1}{|y_n|}, \frac{2}{|b|}\}$$

deb olsak

$$\forall n \in N \rightarrow \left|\frac{1}{y_n}\right| < C$$

ekanligini olamiz. Bu $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligini ko‘rsatadi.

Demak, yuqorida ta’kidlaganimizga asosan $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik va $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ bo‘ladi.

6.O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklarning ta’rifini keltiring.
2.Har qanday cheksiz katta ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladimi?
3.Sanoqli sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklarning yig’indisi cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladimi?
4.Yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi ketma-ketliklarning ko‘paytmasi yaqinlashuvchi bo‘ladimi?

7. Mustaqil yechish uchun misollar.

20.1. Quyidagi ketma-ketliklarni ta’rif yordamida cheksiz kichik ketma-ketliklar ekanligini isbotlang.

a) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. b) $x_n = \frac{2n}{n^3+1}$.

$c)$ $x_n = \frac{1}{n!}$. $d)$ $x_n = (-1)^n 0{,}999^n$.

Bu har bir hol uchun quyidagi jadvalni to‘ldiring:

ε	0,1	0,01	0,001	…
$n_0(\varepsilon)$				

20.2. Quyidagi ketma-ketliklarni ta’rif yordamida cheksiz katta ketma-ketliklar ekanligini isbotlang.

a) $x_n = (-1)^n n$. b) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$. $c)$ $x_n = lg(lgn)$, $n \geq 2$.

Bu har bir hol uchun quyidagi jadvalni to‘ldiring:

ε	10	100	1000	…
N				

20.3. a) $x_n = \frac{(-1)^n+n}{n}$, b) $x_n = \frac{(-1)^n(n^2+1)}{n}$, $c)$ $x_n = \frac{n^2+1}{n}$, $d)$ $x_n = \frac{(-1)^n n+n}{n^2}$

ketma-ketliklarni qaysi biri cheksiz katta yoki cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

20.4. $x_n \neq 0$ bo‘lsin. Agar $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik bo‘lsa, u holda $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

20.5. Quyidagi tasdiqlar to‘g’rimi:

a) ixtiyoriy cheksiz katta ketma-ketlik chegaralanmagan bo‘ladi.

b) ixtiyoriy chegaralanmagan ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo‘ladi.

20.6. $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik $\{y_{\boldsymbol{n}}\}$ esa cheksiz katta ketma-ketlik $\{x_n + y_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz katta ketma-ketlik bo‘lishini isbotlang.

20.7. Agar $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ bo‘lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$ bo‘lishini isbotlang.

20.8. Limitlarni hisoblang.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{5n+1}$; **2.** $\lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n+1}$; **3.** $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{5n^2+2n+3}$; **4.** $\lim_{n\to\infty} \frac{10000n}{n^2+1}$;

5. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-2n^2+5n+8}{4n^3+7n+5}$; **6.** $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{8n^2+1}{2n^2+1}}$; **7.** $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$;

8. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}}$; **9.** $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)^2-(n^2-1)^2}{(n+1)^4+(n-1)^4}$; **10.** $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3-(4n+3)^3}{(2n+1)^3-(n-2)^3}$;

11. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}\right)$; **12.** $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$;

20.9. Limitlarni hisoblang.

1. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+2} - \sqrt[3]{n^2-2}\right)$;

2. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$;

3. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n\,(n+1)(n+2)(n+3}\right)$;

4. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n^2+3n+2}\right)$;

5. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right)$.

20.10. Limitlarni hisoblang.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1^{\;2}+2^2+3^2+\cdots n^2}{n^3}$; **2.** $\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots\ldots+n(n+1)}{n^3}$;

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+\cdots.+n^3}{n^4+n^3+n+1}$; **4.** $\lim_{a\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n}, (a \neq -1)$;

5. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!+(2n-2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$; **6.** $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$. **7.** $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

8. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+..+a^n}{1+b+b^2+..+b^n}$ $(|a| < 1,\ |b| < 1)$; **9.** $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right)$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right)$; **11.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\ldots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)$. **13.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2n]{2}\right)$.

21-§. Monoton ketma-ketliklarning limiti. e soni

Reja:

1. Monoton ketma-ketliklar. Ketma-ketlikning chegaralari.
2. Monoton ketma-ketlikning limiti.
3. e soni.
4. Ichma-ich joylashgan kesmalar haqidagi Kantor teoremasi.
5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.
6. Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Monoton ketma-ketliklar. Ketma-ketlikning chegaralari.

Agar $\forall n \in N$ uchun

$$x_{n+1} \geq x_n \qquad (21.1)$$

bo‘lsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik o‘suvchi (kamaymovchi) ketma-ketlik deyiladi.

Agar $\forall n \in N$ uchun

$$x_{n+1} \leq x_n \qquad (21.2)$$

bo‘lsa, bu ketma-ketlik kamayuvchi (o‘smovchi) ketma-ketlik deyiladi.
Agar (21.1) va (21.2) munosabatlarni mos ravishda $x_{n+1} > x_n$ va $\mathrm{x_{n+1}} < \mathrm{x_n}$ ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qat’iyan o‘suvchi va qat’iyan kamayuvchi ketma-ketlik deymiz.

O‘suvchi va kamayuvchi ketma keliklar monoton ketma-ketliklar deyiladi.

Qat’iyan o‘suvchi va qat’iyan kamayuvchi ketma-ketliklar qat’iyan mononton ketma-ketliklar deyiladi.

Agar (21.1) va (21.2) tengsizliklar barcha $n > n_0$ lar uchun bajarailsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikni n_0 nomerdan boshlab o‘suvchi yoki kamayuvchi deyiladi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning qiymatlari to‘plamining aniq yuqori (quyi) chegarasiga $\{x_n\}$ ketlikning aniq yuqori (aniq quyi) chegarasi deyiladi va quyidagicha belgilanadi.

$$sup\{x_n\} \qquad (\,\inf\{x_n\}).$$

$\sup\{x_n\}$ va $\inf\{x_n\}$ ni logik simvollar orqali quyidagicha yozish mumkin:

$$\{C=\inf\{x_n\}\} \Leftrightarrow \left\{(\forall n \in N \to x_n \geq C) \cap \left(\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \epsilon N \to x_{n_0} < C+\varepsilon\right)\right\}, \qquad (21.3)$$

$$\left\{M=\sup\{x_n\}\right\} \Leftrightarrow \{(\forall n \epsilon N \to x_n \leq M) \cap (\forall \varepsilon > 0,\;\; \exists n_0 \epsilon N \to x_{n_0} > M-\varepsilon)\}. \qquad (21.4)$$

2. Monoton ketma-ketlikning limiti.

21.1-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik o‘suvchi bo‘lib, yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, u holda bu ketma-ketlikning limiti mavjud va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko‘ra $\forall n \in N, x_n \le x_{n+1}$ munosabat bajariladi va bu ketma-ketlikning aniq yuqori chegarasi mavjud. $\sup\{x_0\} = M$ bo‘lsin. (21.4) munosabatdan va ketma-ketlikning o‘suvchiligidan $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \to x_n > M - \varepsilon$ bo‘ladi. Ikkinchi tomondan $\forall n \in N,\ x_n < M$ tengsizlik o‘rinli.

Bu mulohazalar, agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning o‘suvchiligini hisobga olsak

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0 \to M - \varepsilon < x_n \le M$$

munosabatning bajarilishini bildiradi. Bu esa limit ta’rifiga ko‘ra

$$\lim_{n\to\infty} x_n = M = \sup\{x_n\}$$

ekanligini bildiradi.

21.2-teorema. Agar $\{x_n\}$ kamayuvchi bo‘lib, quyidan chegaralangan bo‘lsa, u holda bu ketma-ketlikning limiti mavjud va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Bu teorema yuqoridagi 21.1-teoremaga o‘xshash isbotlanadi.

3. e soni. $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ limit o‘rinlidir.

Umumiy hadi

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{21.5}$$

bo‘lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni qaraymiz. Bu ketma-ketlikning o‘suvchi va yuqoridan chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz.

Nyuton binomi formulasiga ko‘ra

$$x_n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n^2} + C_n^3 \frac{1}{n^3} + \cdots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n},$$

bu yerda $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)}{k!}, k = \overline{1,n},\ C_n^0 = 1.$ x_n ni quyidagicha yozib olamiz:

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \tag{21.6}$$

u holda x_{n+1} quyidagicha yoziladi:

$$x_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right). \tag{21.7}$$

(21.6) va (21.7) dagi hamma qo‘shiluvchilar musbat, hamda (21.6) dagi hamma qo‘shiluvchilar (21.7) dagi mos qo‘shiluvchilardan kichik, chunki

$1-\frac{m}{n}<1-\frac{m}{n+1}$; $\quad k=\overline{1,n-1}$. (21.7) ning qo‘shiluvchilari soni (21.6) ning qo‘shiluvchilari sonidan bitta ortiq. Shuning uchun barcha $n\in N$ lar uchun $x_{n+1}>x_n$ bo‘ladi, ya’ni $\{x_n\}$ qat’iy o‘suvchi ketma-ketlik. Undan tashqari $0<1-\frac{m}{n}<1, (m=\overline{1,n-1})$ bo‘lganligi uchun (21.6) dan $x_n<1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ bo‘lishi kelib chiqadi. Barcha $k\in N$ larda $\frac{1}{k!}\leq\frac{1}{2^{k-1}}$ bo‘lganligi uchun, geometrik progressiyaning yig’indisi formulasidan foydalanib

$$x_n<1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1+2(1-\frac{1}{2^{n)}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

bo‘lishini topamiz. Demak, $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ bo‘ladi, ya’ni $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik ekan. 21.1-teorema bo‘yicha $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti mavjud bo‘ladi. Bu limitni *e* harfi orqali belgilaymiz, Shunday qilib, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$. e soni irratsional son bo‘lib taxminan $e=2{,}718281828459$.

4.Ichma-ich joylashgan kesmalar haqidagi Kantor teoremasi.

Bizga $\Delta_1=[a_1,b_1],\Delta_2=[a_2,b_2],\dots,\Delta_n=[a_n,b_n]$, kesmalar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin.

Agar bu kesmalar ketma-ketligi quyidagi shartlarni qanoatlantirsa bu ketma-ketlikka ichma-ich joylashgan kesmalar ketma-ketligi deyiladi.

$$a)\ \Delta_1\supset\Delta_2\supset\ldots\supset\Delta_n\supset\ldots \tag{21.8}$$

ya’ni har bir segment o‘zidan oldingi segmentda saqlansa

$$\{\forall n\in N\to\Delta_{n+1}\subset\Delta_n\}$$

b) Δ_n kesmaning uzunligi $n\to\infty$ da nolga intilsin, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0 \tag{21.9}$$

bo‘lsa. (21.8) shart

$$a_1\leq a_2\leq a_3\leq\ldots\leq a_n\leq\ldots\leq b_{n+1}\leq b_n\leq\ldots\leq b_2\leq b_1 \tag{21.10}$$

shartga ekvivalent.

21.3-teorema. (Kantor teoremasi). Agar $\{\Delta_n\}$ kesmalar ketma-ketligi (21.8) va (21.9) shartlarni qanoatlantirsa, u holda shu kesmalarning barchasiga qarashli bo‘lgan yagona nuqta mavjuddir.

Isbot. a) Mavjudligi: $\{\Delta_n\}$ kesmalar ketma-ketligi teorema shartiga ko‘ra (21.10) shartni qamoatlantiradi. Bu shartdan

$$\forall n\in N\to a_n\leq b_n \tag{21.11}$$

shartning bajarilishi kelib chiqadi.

Sonli to‘plamlarining aniq quyi va aniq yuqori chegarasining mavjudligi haqidagi teoremaga ko‘ra (21.11) shart bajarilganda $\sup\{a_n\}$ va $\inf\{b_n\}$ mavjudligi va $a_n\leq\sup\{a_n\}\leq\inf\{b_m\}\leq b_m$ ekanligi kelib chiqadi. Agar

$\sup\{a_n\} = c$ deb olsak $\forall n, \forall m \in N \to a_n \leq c \leq b_m$ munosabatni olamiz. Bu munosabat esa $\{\Delta_n\}$ segmentlar ketma-ketligining barchasiga qarashli bo‘lgan nuqtaning mavjudligi kelib chiqadi. Endi c nuqtaning yagonaligini ko‘rsatamiz.

b) Yagonaligi:$\{\ \Delta_n\}$ segmentlar ketma-ketligini barchasiga qarashli bo‘lgan c va c^1 nuqtalar mavjud bo‘lib $c \neq c^1$ bo‘lsin deb faraz qilaylik. Bu holda $c < c^1$ yoki $c^1 < c$ bo‘lishi mumkin. Faraz qilaylik $c < c^1$ bo‘lsin. Bu nuqtalarning ikkalasi ham $\{\Delta_n\}$ kesmalar ketma-ketligiga qarashli bo‘lganligi uchun $a_n \leq c \leq c^1 \leq b_m$ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikdan va $c^1 - c > 0$ bo‘lganligidan.

$$b_n - a_n \geq c^1 - c > 0$$

ekanligini olamiz.

Demak, $\forall n \in N \to b_n - a_n > 0$ ekan, bundan esa $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) \geq a > 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu yerda $a = c^1 - c$.

Bu esa (21.9) shartga qarama-qarshi. Bu qarama-qarshilik farazimizning noto‘g’ri ekanligini ko‘rsatadi. Demak, $c = c^1$ bo‘lar ekan .

21.1-mashq. Agar (21.8) va (21.9) shartlar bajarilganda $\{a_n\}\, va\, \{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, $c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$ ekanligini ko‘rsating.

5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. $sup x_n$ va $inf\{y_n\}$ larning tariflarini keltiring.

2. e sonini $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ketma-ketlikning limiti ekanligini isbotlang.

6. Mustaqil yechish uchun misollar.

21.1. Monoton ketma-ketliklarning limiti haqidagi teoremadan foydalanib quyidagi ketma-ketliklarni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

1. $x_n = p_0 + \frac{p_1}{10}+ ... + \frac{p_1}{10^n}$ $(n = 1,2\ ...)$; p_i $(i = 0,1,2,...)$ lar p_1 dan boshlab 9 dan oshmaydigan nomanfiy butun sonlar.

2. $x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot ... \cdot \frac{n+9}{2n-1}$;

3. $x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) ... \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$;

4. $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) ... \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$;

5. $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, ...\ ,\ x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}, \ldots$

21.2. Limitlarni hisoblang.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$. **2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$. **3.** $\lim\limits_{n\to\mp}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$. **4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$.   **6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.   **7.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^2}$.   **9.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$.   **10.** $\lim\limits_{n\to\mp}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{-n}$.

21.3. Toping:

$\sup\left\{(-1)^n\,\frac{n+1}{n}\right\}$, $\inf\left\{(-1)^n\,\frac{n+1}{n}\right\}$, $\sup\left\{(-1)^n\,\frac{1}{n}\right\}$, $\inf\left\{(-1)^n\,\frac{1}{n}\right\}$.

21.4. Har qanday yuqoridan (quyidan) chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladimi? Misollar keltiring.

21.5. Agar (21.8) va (21.9) shartlar bajarilganda $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, $c=\sup\{a_n\}=\inf\{b_n\}$ ekanligini ko‘rsating.

22-§. Qismiy ketma-ketliklar va qismiy limitlar. Koshi kriteriyasi

Reja:

1. Qismiy ketma-ketliklar va qismiy limitlar.
2. Chegaralangan ketma-ketlikning qismiy limitining mavjudligi.
3. Koshi kriteriyasi.
4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.
5. Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Qismiy ketma-ketliklar va qismiy limitlar. Bizga $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Qat’iyan o‘suvchi $\{n_k\}$ natural sonlar ketma-ketligini qaraymiz: $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$.

$\{x_n\}$ ketma-ketlikdan $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots$ nomerli hadlarini ajratib olib tuzilgan ketma-ketlikka $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi deyiladi va $\{x_{n_k}\}$ kabi belgilanadi.

$\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlaridan shu ketma-ketlik hadlarining tartibida olib tuzilgandir.

$\{x_{n_k}\}$ yozuvda k soni $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ kema-ketlik hadlari tartib nomerini bildiradi. n_k esa shu x_{n_k} hadning $\{x_n\}$ ketma-ketlikdagi nomerini bildiradi. Shuning uchun hamma vaqt $n_k > k$ bo‘ladi va $k\to\infty$ ga $n_k\to\infty$ bo‘ladi.

Endi qismiy limit ta’rifini bermiz

22.1-ta’rif. $\{\mathrm{x_n}\}$ ketma-ketlikning $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketligini qaraylik. Bu qismiy ketma-ketlik uchun chekli yoki cheksiz $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ mavjud bo‘lsin. Bu holda a ga $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qismiy limiti deyiladi.

Masalan, $\{x_n\} = \{(-1)^n$ ketma-ketlikning -1 va 1 qismiy limitlari bo‘ladi.

Agar $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik, L esa uning barcha qismiy limitlari to‘plami bo‘lsin. U holda $supL$ ga $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqori limiti deyiladi va $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ belgilanadi.

$infL$ ga $\{x_n\}$ ketma-ketlikning quyi limiti deyiladi va $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ kabi belgilanadi. Masalan, 1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3,… ketma-ketlik uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli: $\{x_{3k+2}\} = 1, \lim_{k\to\infty} x_{3k+2} = 1, \{x_{3k-1}\} = 2, \lim_{k\to\infty} x_{3k+1} = 2, \{x_{3k}\} = 3, \lim_{k\to\infty} x_{3k} = 3.$

Demak, bu ketma-ketlik uchun $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_{n_k} = 3$ bo‘lsa, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathrm{x_n} = 1$ bo‘lar ekan. $\{x_n\} = \left\{\frac{(a+b)+(-1)^n(b-a)}{2}\right\}$ ketma-ketlik uchun a va b sonlari qismiy limitlari bo‘ladi.

2.Chegaralangan ketma-ketlikning qismiy limitining mavjudligi.

22.1-teorema (Bolsano-Veyershtrass). Har qanday chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

Isbot. $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo‘lsin. U holda

$$\exists a, \exists b, \forall n \in N \to x_n \in [a,b].$$

$\Delta = [a,b]$ kesmani d-nuqta yordamida teng ikkiga bo‘lamiz. $[a,d]$ va $[d,b]$ kesmalarning aqalli birontasida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko‘p elementlari yotadi. Agar ikkala kesamada ham cheksiz ko‘p element yotsa u holda o‘ng tomondagi kesmani olamiz. (Bundan keyin ham ikkala kesmada ham cheksiz ko‘p element yotsa o‘ng tomondagisini olamiz). Ketma-ketlikning cheksiz ko‘p elementi yotgan kesmani $\Delta_1 = [a_1, b_1]$ deb belgilaymiz. Ko‘rinib turibdiki Δ_1 kesmaning uzunligi $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ ga teng. Δ_1 kesmani yana teng ikkiga bo‘lamiz, hosil bo‘lgan 2 ta kesmalardan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko‘p elementi saqlanganini Δ_2 orqali belgilaymiz. $\Delta_2 = [a_2, b_2]$ kesmaning uzunligi $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$ ga teng.

Bu prossesni davom ettirib $\{\Delta_n\}$ kesmalar ketma-ketligini olamiz. Bu kesmalar ketma-ketligi quyidagi shartlarni qanoatlantiradi.

1. $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \ldots,$
2. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0, n \to \infty.$

Demak, $\{\Delta_n\}$ kesmalar ketligi ichma-ich joylashgan kesmalar ketma-ketligi bo‘lar ekan va Kantor teoremasiga ko‘ra shu kesmalarning barchasiga qarashli bo‘lgan yagona c nuqta mavjud,

$$\exists c, \forall n \in N \to c \in \Delta_n. \qquad (22.1)$$

Endi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning c nuqtaga intiluvchi $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketligi mavjudligini ko‘rsatamiz. Ya’ni

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c \tag{22.2}$$

bo‘lishini ko‘rsatamiz. Δ_1 kesma $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko‘p elementlarini o‘zida saqlagani uchun $\exists n_1 \in N, x_{n_1} \in \Delta_1$, Δ_2 kesma ham $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko‘p elementlarini saqlagani uchun $\exists \mathrm{n}_2 \in \mathrm{N}$, $\mathrm{n}_2 > \mathrm{n}_1, \mathrm{x}_{\mathrm{n}_2} \in \Delta_2$.

Umuman bu jarayonni davom ettirib, Δ_k kesma ham $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko‘p elementini o‘zida saqlagani uchun

$$\exists n_k \in N : x_{n_k} \in \Delta_k \text{ va } n_k > n_{k-1} > \ \dots\dots > n_1$$

bo‘ladi.

Demak, bu prossesni davom ettirib $\{\mathrm{x}_{\mathrm{n_k}}\}$ qismiy ketma-ketlikka ega bo‘ldik, qaysikim bu kema-ketlik quyidagi shartni qanoatlantiradi.

$$\forall k \in N, a_k \le x_{n_k} \le b_k \tag{22.3}$$

(22.1) va (22.3) dan $\forall k$ da x_{n_k} element bilan c nuqta orasidagi masofa Δ_k kesmaning uzunligidan oshmasligi kelib chiqadi, ya’ni

$$\left|x_{n_k} - c\right| \le \frac{b-a}{2^k} \tag{22.4}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. $\{\frac{b-a}{2^k}\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlikdir. Shuning uchun (22.4) dan

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \ \forall k > n_0 \to \left|x_{n_k} - c\right| < \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$ ekanligini bildiradi.

Demak, har qanday chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin ekan. Teorema isbot bo’ldi.

3.Koshi kriteriyasi. Bizga $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Agar bu ketma-ketlik

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, \forall m > n_0 \to |x_n - x_m| < \varepsilon \tag{22.5}$$

shartlni qanoatlantirsa, bu ketma-ketlik Koshi shartini qanoatlantiradi yoki fundamental ketma-ketlik deyiladi.

Osonlik bilan ko‘rish mumkinki (22.5) shart quyidagi shartga ekvivalent.

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0, \ \forall n > n_0, \ \forall p \in N \to \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon \tag{22.6}$$

22.2-teorema (Koshi kriteriyasi). $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun uning fundamental ketma-ketlik bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsin. U holda

$$\exists a, \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0, \forall n > n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon, \forall m > n_0 \to |x_m - a| < \ \varepsilon \tag{22.7}$$

munosabat bajariladi hamda

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| \tag{22.8}$$

tengsizlik o‘rinli. (22.7) va (22.8) dan

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n > n_0,\ \ \forall m > n_0 \to |x_n - x_m| < \ 2\varepsilon$$

ekanligi kelib chiqadi.

Bundan esa $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun (22.6) shartning bajarilishi kelib chiqadi, ya’ni fundamental ekan. Zarurligi isbot bo‘ldi.

Yetarliligi. (22.6) shartning yetarliligini isbotlashdan oldin quyidagi lemmani isbotlaymiz.

22.1-lemma. Har qanday fundamental ketma-ketlik chegaralangandir.

Isbot. $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo‘lsin, ya’ni

$$\forall\varepsilon > 0,\quad \exists n_\varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon,\quad \forall m \geq n_\varepsilon \to |x_n - x_m| < \varepsilon$$

bo‘lsin.

Bu munosabatda $\varepsilon = 1$ deb olib $m = n_\varepsilon$ bo‘lganda ham bajarilishini hisobga olsak

$$\left|x_n - x_{n_\varepsilon}\right| < 1,\quad x_{n_\varepsilon} - 1 < x_n < x_{n_\varepsilon} + 1$$

tengsizliklarning bajarilishi kelib chiqadi. Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralangan ekanligini ko‘rsatadi.

Endi Koshi shartlarining yetraliligini isbotlaymiz. $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo‘lsin, ya’ni

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall m \geq n_\varepsilon \to |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (22.9)$$

tengsizlik bajarilsin.

Yuqoridagi lemmaga asosan $\{x_n\}$ ketma-ketlik cegaralangan ketma-ketlik bo‘ladi. Demak, Bolsano-Veyshtrass teoremasiga asosan yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Bu qismiy ketma-ketlikning limiti a bo‘lsin, ya’ni

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a. \qquad (22.10)$$

(22.10) shartni kvantorlar orqali yozsak

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon,\ \forall k > k_\varepsilon \to \left|x_{n_k} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (22.11)$$

Agar biz $N_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, k_\varepsilon\}$ olsak, $n \geq N_\varepsilon$ lar uchun (22.9) va (22.11) dan quyidagi munosabatni olamiz.

$$|x_n - a| = \left|x_n - x_{n_\varepsilon} + x_{n_\varepsilon} - a\right| \leq \left|x_n - x_{n_\varepsilon}\right| + \left|x_{n_\varepsilon} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

((22.9)-munosabat $\mathrm{m} = \mathrm{n}_\varepsilon$ bo‘lganda ham bajarilishi hisobga olindi).

Bu esa limit ta’rifiga ko‘ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ekanlgini bildiradi.

22.1-misol. $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ formula bilan beriluvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchanlikka Koshi kriteriyasidan foydalanib tekshiring.

Dastlab biz Koshi shartining inkorini yozib olamiz:

$$\exists\varepsilon_0 > 0, \forall n \in N, \exists n_0 > n, \exists m_0 > n \to \left|x_{n_0} - m\right| \geq \varepsilon_0.$$

Qaralayotgan misol uchun Koshi shartining inkori bajarilishini ko‘rsatamiz. Keyin

$$|x_n - x_m| = \left|1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \dots\dots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \ \dots\dots + \frac{1}{2m}\right.$$
$$\left.- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \dots\dots + \frac{1}{m}\right)\right| =$$
$$\left|\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ \dots\dots + \frac{1}{2m}\right| > m\frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

tengsizlikni olamiz. $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ deb olsak $\forall n' \in N$ olmaylik va $\forall m > n'$ da va *n=2m* ga teng bo‘lganda $|x_n - x_m| \geq \frac{1}{2}$ bo‘lar ekan.

Demak, bu ketma-ketlik uchun Koshi sharti bajarilmayapti. Bundan esa bu ketma-ketlikning uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Qismiy ketma-ketlik va qismiy limit ta’rifini keltiring.
2.Ketma-ketlikning yuqori va quyi limiti ta’rifini bering.
3.Chegaralanmagan ketma-ketlik chekli qismiy limitga ega bo‘lishi mumkinmi?
4.Qismiy limitlari cheksiz ko‘p bo‘lgan ketma-ketlikka misol keltiring
5.Qismiy limitlari to‘plami barcha haqiqiy sonlardan iborat bo‘lgan ketma-ketlikka misol keltiring.

5. Mustaqil yechish uchun misollar.

22.1. Quyidagi ketma-ketliklarni Koshi kriteriyasidan foydalanib yaqinlashuvchilikka tekshiring.

1. $x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n,$ bu yerda $|a_k| < M$ $(k = 0,1,\dots)$ va $|q| < 1$;

2. $x_n = \frac{sin1}{2} + \frac{sin2}{2^2} + \ \dots + \frac{sinn}{2^n}$;

3. $x_n = \frac{cos1!}{1\cdot 2} + \frac{cos2!}{2\cdot 3} + \ \dots + \frac{cosn!}{n(n+1)}$;

4. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ \dots + \frac{1}{n^2}$.

Ko‘rsatma: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ $(n = 2,3,\dots)$ tengsizlikdan foydalaning.

22.2. Quyidagi ketma-ketliklarning eng katta hadini toping.

1. $x_n = \frac{n^2}{2^n}$; **2.** $x_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n}$; **3.** $x_n = \frac{100^n}{n!}$.

22.3. Quyidagi ketma-ketliklarning eng kichik hadini toping.

1. $x_n = n^2 - 9n - 100$; **2.** $x_n = n + \frac{100}{n}$.

22.4. Quyidagi ketma-ketliklar uchun $inf x_n$, $sup x_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ larni toping.

1. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$; **2.** $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$; **3.** $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$;

4. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} cos\frac{n\pi}{2}$; **5.** $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$;

6. $x_n = \frac{n-1}{n+1} cos\frac{2n\pi}{3}$; **7.** $x_n = n^{(-1)^n}$; **8.** $x_n = (-1)^n n$;

9. $x_n = 1 + nsin\frac{n\pi}{2}$; **10.** $x_n = -n(2 + (-1)^n)$; **11.** $x_n = \frac{1}{n-10,2}$.

III bobni takrorlash uchun test savollari

1. Agar har qanday M son berilganda ham shunday $n_0 \in N$ son topilsaki, $n > n_0$ lar uchun quyidagi shart bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti $+\infty$ deb ataladi?

   a) $x_n = M$ b) $x_n > M$ c) $x_n \le M$ d) $x_n < M$

2. Nuqtalar o‘rniga quyiladigan to‘g’ri javobni belgilang. Teorema. Ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Agar 1) $\{x_n\}$ o‘suvchi, $\{y_n\}$ kamayuvchi, 2) $\forall n \in N$ uchun $x_n < y_n$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ bo‘lsa, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va … o‘rinli bo‘ladi.

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

3. Nuqtalar o‘rniga qo’yiladigan to‘g’ri javobni belgilang. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)^\alpha - 1}{x} = \ldots$

   a) α b) $\frac{1}{\alpha}$ c) $-\alpha$ d) $\lg\alpha$

4. $x_n = \frac{3n^2 + n\cdot 1}{2^n}$ ketma-ketlikning limitini toping.

   a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) -1 d) 0

5. Ketma-ketlikning qismiy limitlarini toping.

$$3, \frac{1}{2}, 3+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 3+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

   a) 2, 0 b) 2, 1 c) 2, 5 d) 3, 0

6. Ketma-ketlikning qismiy limitlarini toping:

$$x_n = \frac{(a+3) + (-1)^n(a-3)}{2}$$

   a) *a; -3* b) *-3; a* c) *-a; a* d) *a; 3*

7. Ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlarini toping:

$$x_n = \frac{2 + (-1)^n}{2}$$

   a) 1,5; 0 b) 1,5; 1,5 c) 1,5; 2,5 d) 1,5; 0,5

8. Yagona chekli qismiy limitga ega bo‘lgan ketma-ketlikni yaqinlashuvchi deb ayta olamizmi?

a) Ha b) Yo‘q c) Bunday ketma-ketlik mavjud emas

d) Bunday ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladi

9. Ketma-ketlikning qismiy limitlari to‘plami sanoqsiz bo‘lishi mumkinmi

a) Yo‘q

b) Ha

c) Bunday ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladi

d) Bunday ketma-ketlik mavjud emas

10. Chegaralanmagan ketma-ketlik chekli qismiy limitga ega bo‘lishi mumkinmi?

a) Yo‘q b) Ha

c) Bunday ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladi

d) Bunday ketma-ketlik mavjud emas

11. $x_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$ ketma-ketlik uchun $\sup x_n$, $\inf x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ larni toping.

a) 1,5; -2; 1; -1 b) 1,5; -2; 2; -1

c) 1,5; -2; -2; -1 d) 1,5; -2; 1; -2

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}$ ni hisoblang.

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^3+15n}$ ni hisoblang.

a) 100 b)3 c) 0,01 d) 1

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$ ni hisoblang.

a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{4}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $-\frac{3}{4}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$ limitni hisoblang.

a) 2 b) 0 c) 4 d) -4

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ limitni hisoblang.

a) 1 b) 3 c) 0 d) -1

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$ limitni hisoblang.

a) 1 b) 2 c) 0 d) -2

18. Hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$;

a) 0,5 b) 1 c) -0,5 d) 0

19. Qaysi n nomerdan boshlab $x_n=\frac{2}{n^2}$ ketma-ketlikning hadlari $|x_n|<0,1$ tengsizlikni qanoatlantiradi?

a) 10 b) 5 c) 100 d) 9

20. Qaysi n nomerdan boshlab $x_n=\frac{1}{n}$ ketma-ketlikning hadlari 0 ning 0,1-atrofiga tegishli bo`ladi?

a) 1 b) 10 c) 11 d) 9

21. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlari $\forall n\in N, \exists M>0:\ |x_n|\le M$ shartni qanoatlantirsa, u qanday nomlanadi?

a) chegaralangan b) cheksiz katta c) cheksiz kichik d) yaqinlashuvchi

22. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari $\forall n\in N,\ \ x_n<x_{n+1}$ shartni qanoatlantirsa, u qanday nomlanadi?

a) o`suvchi b) o`smaydigan c) chegaralangan d) kamayuvchi

23. Chekli limitga ega ketma-ketlik qanday nomlanadi?

a) yaqinlashuvchi b) chekli ketma-ketlik c) chegaralangan d) cheksiz kichik

24. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning a soniga intilishining $\forall\varepsilon>0, \exists N: \forall n\ge N,$ $|x_n-a|<\varepsilon$ kabi ta’rifi qanday nomlanadi?

a) “$\varepsilon-N$” tildagi b) intuitiv c) atrof tushunchasi d) induktiv

25. Quyidagi ketma-ketliklardan qaysi biri chegaralangan?

a) $\sin\frac{n}{2}$ b) $(-1)^n\cdot n$ c) $n^{(-1)^n}$ d) $\ln(n+1)$

26. Quyidagi ketma-ketliklardan qaysi biri monoton?

a) $\frac{n}{n+1}$ b) $\cos n$ c) $(-1)^n\cdot\sqrt{n}$ d) $\frac{(-1)^n}{n}$

27. Quyidagi ketma-ketliklardan qaysi biri yaqinlashuvchi?

a) n^2-1 b) 2^n c) $arctgn$ d) $(-1)^n\cdot n$

28. Quyidagi ketma-ketliklardan qaysi biri uzoqlashuvchi?

a) $\cos\frac{n\pi}{3}$ b) $\frac{n}{n+1}$ c) $2^{-n}\cdot\sqrt{n}$ d) $\frac{(-1)^n}{\ln n}$

29. $\{x_n\}=\frac{n}{n+1}$ ketma-ketlik chegaralanganmi?

a) 1 b) chegaralangan c) chegaralanmagan d) 1

30. Berilgan $\{n!\}$, $\left\{\frac{10}{n!}\right\}$, $\left\{\frac{n}{3n+1}\right\}$, $\{\sin n\}$, $\{\sin 2n\pi\}$ ketma-ketliklardan nechtasi - yaqinlashuvchi?

a) 3 b) 2 c) 4 d) 5

31. $\{x_n\} = 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \ldots$ ketma-ketlik uchun quyidagi tasdiqlardan qaysi bir to`g`ri?

a) uzoqlashuvchi b) monoton c) chegaralangan d) yaqinlashuvchi

32. $x_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-2}$ ketma-ketlik uchun quyidagi tasdiqlardan qaysi bir to`g`ri?

a) yaqinlashuvchi b) cheksiz kichik c) cheksiz kata d) chegaralanmagan

33. $x_n = \frac{\sqrt[3]{n+1}-1}{\sqrt[3]{n+1}+1}$ ketma-ketlik uchun quyidagi tasdiqlardan qaysi bir to`g`ri?

a) yaqinlashuvchi b) cheksiz kichik c) cheksiz katta d) chegaralanmagan

34. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{-n}+2n^2-\cos n}{\ln n + n^2}$

a) 0,5 b) 2 c) ∞ d) 0

35. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$

a) 0 b) 1 c) ∞ d) 1,5

36. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$

a) 1 b) 0,5 c) ∞ d) 0

37. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{2n^3-1}+\sqrt[5]{n^7+3}}{\sqrt[6]{n^8+n^3+2}-n}$

a) 1 b) ∞ c) 0 d) 2

38. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{4n+1}\right)^{3n}$

a) $e^{\frac{3}{4}}$ b) e c) ∞ d) $\sqrt{2}$

39. Ketma-ketliklardan qaysi biri chegaralangan bo‘ladi.

a) $x_n = \sin n$ b) $x_n = (-1)^n \cdot n$ c) $x_n = n^2$ d) $x_n = n + \frac{n}{n+1}$

40. Nuqtalar o‘rniga yetishmayotgan (tushirib qoldirilgan) so‘zlarni qo’ying. Agar ketma-ketlik … bo‘lsa … bo‘ladi.

a) yaqinlashuvchi, chegaralangan
b) chegaralangan, limitga ega
c) monoton, chegaralangan
d) monoton, chegaralanmagan

41. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ bo‘lib, biror nomerdan boshlab $x_n \le z_n \le y_n$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda … bo‘ladi.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n < a$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n > a$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$

42. Ixtiyoriy … ketma-ketlikdan … qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

a) chegaralangan, yaqinlashuvchi
b) yaqinlashuvchi, chegaralanmagan
c) monoton, yaqinlashuvchi
d) uzoqlashuvchi, yaqinlashuvchi

43. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ limitni hisoblang.

a) e^3 b) e^{-2} c) e^2 d) e^4

44. Quyidag ketma-ketliklardan qaysi biri uzoqlashuvchi?

a) $\cos\frac{n\pi}{3}$ b) $\frac{n}{n+1}$ c) $2^{-n}\cdot\sqrt{n}$ d) $\frac{(-1)^n}{\ln n}$

45. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$ limitni hisoblang.

a) $e^{-5,5}$ b) e^{-5} c) $e^{-4,5}$ d) $e^{-6,5}$

46. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$ limitni hisoblang.

a) 2 b) 1 c) 0 d) 3

47. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$ limitni hisoblang.

a) e^{-2} b) e^{-1} c) e^{-3} d) e^{-4}

48. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$ limitni hisoblang.

a) -1 b) 1 c) e^{-1} d) e^{-2}

49. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$ limitni hisoblang.

a) $e^{-3/11}$ b) $e^{-3/8}$ c) $e^{-2/11}$ d) $e^{-4/11}$

50. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$ limitni hisoblang.

a) 0 b) e^{-1} c) $e^{-1,5}$ d) e^{-2}

51. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^2}$ limitni hisoblang.

a) $e^{-4/5}$ b) $e^{-3/11}$ c) $e^{-4/11}$ d) $e^{-2/11}$

52. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^2}$ limitni hisoblang.

a) 3 b) 2 c) 1 4) 0

53. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$ limitni hisoblang.

a) e^{-1} b) $e^{-1,5}$ c) e^{-2} d) e^{2}

54. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$ limitni hisoblang.

a) 2 b) 1 c) 0 d) 3

55. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+2}\right)^{n}$ limitni hisoblang.

a) e^{2} b) e^{-1} c) e^{-2} d) e

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$ limitni hisoblang.

a) e^{-1} b) e^{-2} c) e^{2} d) e

57. Qism limitlari 1,2,3,4 sonlari bo‘lgan ketma ketlikka misol quring

a) 1,2,3,4,1,2,3,4 , ... b) 1,2,3,1,2,3,1,2,3, ...

c) $(-1)^n\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)$ d) $\left(\frac{3+(-1)^n}{2}\right)$

58. Ketma-ketlik chegaralanmagan deyiladi, agarda

a) $\forall M\in R\ \ \exists n_0\in N, \to x_{n_0}>M$ b) $\exists M\in R\ \ \exists n_0\in N, \to x_{n_0}>M$

c) $\exists M\in R\ \ \exists n\in N, \to x_n>M$ d) $\forall M\in R\ \ \exists n\in N, \to x_n<M$

59. Agar $\lim_{n\to\infty} x_n=a, \lim_{n\to\infty} y_n=a$, bo‘lsa, u holda

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\dots x_n, y_n,$$

ketma-ketlikning limiti haqida nima deyish mumkun?

a) limitga ega emas b) a c) 2 ta qismiy limitga ega d) cheksiz ko‘p qismiy limitga ega

60. Agar $\lim_{n\to\infty} x_n=a$, bo‘lsa u holda $\{|x_n|\}$ ketma- ketlik limiti haqida nima deyish mumkun?

a) limitga ega emas b) $|a|$ b) 2 ta qismiy limitga ega
d) cheksiz ko‘p qismiy limitga ega

61. Agar $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, bo‘lsa, u holda $\{x_{n+1} - x_n\}$ ketma-ketlik limiti haqida nima deyish mumkin?
a) 2 ta qismiy limintga ega b) limitga ega emas c) 0 d) cheksiz ko‘p qismiy limitga ega

62. $\left\{\frac{n+1}{n}, n \in N\right\}$ to‘plamning aniq quyi chegarasini toping.
a) 2 b) 0 c) 1 d) $\frac{1}{2}$

63. $x_n = (-1)^n sin\frac{\pi n}{2}$ bo‘lsa $supx_n$ va $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ni toping
a) 1,1 b) $-1,1,\frac{1}{2}$ c) $1,-1,\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-1,1,\frac{\sqrt{2}}{2}$

64. Qaysi n nomerdan boshlab $x_n = \frac{2}{n^2}$ ketma-ketlikning hadlari $|x_n| < 0,1$ tengsizlikni qanoatlantiradi?
a) 10 b) 15 c) 100 d) 25

65. Qaysi n nomerdan boshlab $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlikning hadlari 0 ning 0,1-atrofiga tegishli bo`ladi?
a) 11 b) 10 c) 1 d) 9

66. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari $\forall n \in N,\ \ x_n < x_{n+1}$ shartni qanoatlantirsa, u qanday nomlanadi?
a) o`suvchi  b) kamayuvchi  c) o`smaydigan d) chegaralangan

67. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlari $\forall n \in N,\ \exists M > 0 : |x_n| \le M$ shartni qanoatlantirsa, u qanday nomlanadi?
a) chegaralangan b) yaqinlashuvchi c) cheksiz kichik
d) chegaralanmagan

68. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning a soniga intilishining $\forall\varepsilon > 0, \exists N, \forall n \ge N, x_n \in U_\varepsilon(a)$ kabi ta’rifi qanday nomlanadi?
a) “$\varepsilon - N$” tildagi b) intuitiv c) atrof tushunchasi yordamidagi d) induktiv

69. Quyidagi ketma-ketliklardan qaysi biri chegaralangan?
a) $\sin\frac{n}{2}$ b) $(-1)^n \cdot n$ c) $n^{(-1)^n}$ d) $\ln(n+1)$

70. Quyidagi ketma-ketliklardan qaysi biri monoton?
a) $\frac{n}{n+1}$ b) $\cos n$ c) $(-1)^n \cdot \sqrt{n}$ d) $\frac{(-1)^n}{n}$

IV BOB. FUNKSIYANING LIMITI

23-§. Funksiya limiti tushunchasi

Reja:

1. Atrof tushunchasi.
2. Funksiya limitining Koshi va Geyne ta'riflari.
3. To'plam bo'yicha limit tushunchasi.
4. Limitlarning tiplari.
5. O'z-o'zini tekshirish savollari.
6. Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Atrof tushunchasi. Funksiya limitiga ta'rif berishdan oldin, biz nuqtaning δ atrofi tushunchasini keltirib o'tamiz.

a nuqtaning δ atrofi deb, uzunligi 2δ ga va markazi a nuqtada bo'lgan intervalga aytilar edi va $U_\delta(a)$ kabi belgilanar edi, ya'ni

$U_\delta(a) = \{x: x \in (a-\delta, a+\delta) = \{x: a-\delta < x < a+\delta\}\}$.

Agar shu intervaldan a nuqtani chiqarib tashlasak, hosil bo'lgan to'plamga a nuqtaning o'yilgan (teshik) δ atrofi deyiladi va $\mathring{U}_\delta(a)$ shaklida belgilanadi.

$$\mathring{U}_\delta(a) = \{x: |x-a| < \delta, x \neq a\} = \{x: 0 < |x-a| < \delta\}.$$

2. Funksiya limitining Koshi va Geyne ta'riflari.

Funksiya limitining Koshi ta'rifi.

23.1-ta'rif. f funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. (a nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'lishi ham mumkin). Agar $\forall\varepsilon > 0$ soni uchun $\exists\delta > 0$ soni topilsaki $|x-a| < \delta, x \neq a$ munosabatni qanoatlantiruvchi x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda A soniga f funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deyiladi va $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$; ba'zan $x \to a$ da $f(x) \to A$ kabi belgilanadi. Bu ta'rif logik simvollar orqali quyidagicha yoziladi:

$$\left\{\lim_{x\to a} f(x) = A\right\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \ \exists\delta > 0, 0 < |x-a| < \delta,\quad \forall x \in D(f)$$
$$\to |f(x) - A| < \varepsilon\}.$$

Yoki atrof tushunchasidan foydalanib quyidagicha yozamiz:

$$\{\lim_{x\to a} f(x) = A\} \Leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0,\quad \exists\delta > 0, \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \to f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Funksiya limitining Geyne ta'rifi.

23.2-ta'rif. Agar f funksiya a nuqtaning biror o'yilgan atrofida aniqlangan, ya'ni $\exists\delta_0, \mathring{U}_{\delta_0}(a)$ to'plamda aniqlangan bo'lib, hadlari

$$x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(a)$$

bo‘lgan va a ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik olmaylik, unga mos funksiyaning qiymatlaridan tuzilgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik A soniga intilsa, A soniga f funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deyiladi va $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ kabi belgilanadi.

Limitning ikki ta’rifining ekvivalentligini ko‘rsatamiz.

23.1-teorema. Funksiya limitining Koshi va Geyne ta’riflari ekvivalentdir.

Isbot. Funksiya limitining Koshi ta’rifida ham Geyne ta’rifida ham, funksiyani a nuqtaning biror o‘yilgan atrofida aniqlangan deb olgan edik, ya’ni

$$\exists\delta_0, \mathring{U}_{\delta_0}(a) \subset D(f).$$

a) A soni f funksiyaning a nuqtadagi Koshi ta’rifi bo‘yicha limiti bo‘lsin, ya’ni

$\exists\delta_0, \mathring{U}_{\delta_0}(a) \subset D(f)$ va

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta \in (0, \delta_0]:\ \forall x \in \mathring{U}_{\delta}(a) \to f(x) \in U_{\varepsilon}(A) \qquad (23.1)$$

munosabat bajarilgan bo‘lsin.

Hadlari $\mathring{U}_{\delta}(a)$ to‘plamdan olingan a ga intiluvchi $\forall\{x_n\}$ ketma-ketlikni qaraylik. Ketma-ketlikning limiti a bo‘lganligi uchun

$$\exists n_\delta, \forall n \geq n_\delta \to x_n \in \mathring{U}_{\delta}(a)$$

shart bajariladi.

Bu yerdan (23.1) ga asosan

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n \geq N_\varepsilon\ \to f(x_n) \in U_\varepsilon(A). \qquad (23.2)$$

Bundan va $\{x_n\}$ ketma-ketlikning ixtiyoriyligidan Geyne ta’rifining bajarilishi kelib chiqadi, ya’ni A $-$soni f funksiyaning a nuqtadagi Geyne ta’rifi bo‘yicha limiti bo‘lar ekan.

b) Endi A soni f funksiyaning a nuqtadagi Geyne ta’rifi bo‘yicha limiti bo‘lsin. Faraz qilaylik A soni f funksiyaning a nuqtada Koshi ta’rifi bo‘yicha limiti bo‘lmasin. Bu holda Koshi ta’rfining inkori bajariladi, ya’ni:

$$\exists\varepsilon_0: \forall\delta > 0,\ (\delta \in (0, \delta_0]):\ \exists x(\delta) \in \mathring{U}_{\delta}(a) \to |f\big(x(\delta)\big) - A| \geq \varepsilon_0 \qquad (23.3)$$

munosabat bajariladi. (23.3) munosabatdagi δ sifatida $(0, \delta_0]$ oraliqdagi ixtiyoriy sonni olish mumkin. Shuning uchun $\delta = \frac{\delta_0}{n}$, $n \in N$, deb olish mumkin. $\delta = \frac{\delta_0}{n}$, $n \in N$ soniga mos keluvchi $x(\delta)$ ni $x_n = x\left(\frac{\delta_0}{n}\right)$ deb belgilab olamiz. U holda (23.3) ga asosan

$$\forall n \in N,\ \ 0 < |x_n - a| < \frac{\delta_0}{n} \qquad (23.4)$$

$$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0 \qquad (23.5)$$

tengsizliklar bajariladi. (23.4) dan:

$\forall n \in N, x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(a)$ va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ekanligi kelib chiqadi, (23.5) dan esa $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikning limiti A soni bo‘la olmasligi kelib chiqadi. Demak, A

soni f funksiyaning Geyne ta'rfi bo'yicha limiti bo'la olmaydi. Bu qarama-qarshilik farazimizning noto'g'riligini ko'rsatadi.

23.1-misol. $\lim\limits_{x\to 4} x^2 = 16$ tenglikni isbotlang.

Yechish. $\forall\varepsilon > 0$ son bo'yicha $\delta > 0$ sonni $0 < |x-4| < \delta$ tengsizlikdan

$$|x^2 - 16| < |x+4| \cdot |x-4| < \varepsilon \qquad (23.6)$$

tengsizlik kelib chiqadigan qilib tanlash mumkinligini isbotlash kerak.

$\delta > 0$ sonni birma-bir tanlaymiz. Avval 4 nuqtaning 1 radiusli $(\delta = 1)$ atrofini, ya'ni x ning $|x-4| < 1$ bo'ladigan qiymatlarini qaraymiz. Qaralayotgan atrofda

$$|x+4| = |x-4+8| \leq |x-4| + 8 < 9$$

va shunga ko'ra $|x+4| \cdot |x-4| < 9|x-4|$. (23.6) tengsizlik bajarilishi uchun $|x-4| < \frac{\varepsilon}{9}$ bo'lishi yetarli Shunday qilib, δ sifatida 1 va $\frac{\varepsilon}{9}$ sonlardan kichigini olish mumkin, ya'ni $\delta = min\left\{1;\ \frac{\varepsilon}{9}\right\}$.

23.2-misol.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ 2 - x^2, & x < 0 \end{cases}$$

funksiyaning 0 nuqtadagi limitini toping. $y = 2 + \varepsilon$ va $y = 2 - \varepsilon$ to'g'ri chiziqlar $y = f(x)$ funksiya grafigining absissasi $x_1 = -\sqrt{\varepsilon}$ va $x_2 = \varepsilon$ bo'lgan nuqtalarda kesib o'tadi. $\delta = \min(\varepsilon, \sqrt{\varepsilon})$ deb olsak, u holda, agar $|x| < \delta$ va $x \neq 0$ bo'lsa, $|f(x) - 2| < \varepsilon$ bo'ladi, ya'ni Koshi ta'rifiga ko'ra $\forall x \in \mathring{U}_\delta(0) \to f(x) \in U_\varepsilon$, ya'ni (23.2) munosabat bajariladi. Demak,
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$ bo'lar ekan.

23.3-misol. $y = sin\frac{1}{x}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi limiti mavjud emasligini Geyne ta'rifidan foydalanib ko'rsating.

Yechish. Nolga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ va $\{x'_n\}$ $(\forall n \in N\ \ x_n \neq 0,\ x'_n \neq 0)$ ketma-ketliklar mavjud bo'lib

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$$

ekanligini ko'rsatsak qaralayotgan funksiyaning Geyne ta'rifi bo'yicha 0 nuqtada limiti mavjud emasligini ko'rsatgan bo'lamiz. $x_n = \frac{1}{n\pi}$ va $x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ bo'lsin. Ravshanki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$.

Ammo, $n \to \infty$ da

$$f(x_n) = sin\pi = 0 \to 0,$$

$$f(\tilde{x}_n) = sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = sin\frac{\pi}{2} = 1 \to 1$$

munosabatlar o‘rinli. Shunday qilib, quyidagi munosabatni olamiz:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x'_n).$$

Bu esa $sin\frac{1}{x}$ funksiya $x = 0$ nuqtada limitga ega emasligini ko‘rsatadi.

Qismiy limit ta’rifi.

23.3-ta’rif. f funksiya a nuqtaning biror o‘yilgan $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$ atrofida aniqlangan bo‘lsin. Agar a ga intiluvchi shunday $\{x_n\}$ ketma-ketlik topilsaki, qaysikim,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda A soniga f funksiyaning a nuqtadagi qismiy limiti deyiladi.

3.To‘plam bo‘yicha limit tushunchasi. f funksiyani E to‘plamda qaraylik, bu yerda $E \subset D(f)$ bo‘lsin.

23.4-ta’rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy ε atrofida E to‘plamning a dan farqli kamida bitta elementi bo‘lsa, u holda a nuqta E to‘plamning limitik nuqtasi deyiladi.

a nuqta E to‘plamning limitik nuqtasi bo‘lsin, agarda $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap E \to |f(x) - A| < \varepsilon$ munosabat bajarilsa, A soni f funksiyaning a nuqtadagi E to‘plam bo‘yicha limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to a,\ x\in E} f(x) = A$$

kabi yoziladi.

Xuddi shunga o‘xshash E to‘plam bo‘yicha limitning Geyne ta’rifini ham berish mumkin.

23.4-misol. Dirixle funksiyasini qaraylik.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in I. \end{cases}$$

Shu funksiyaning Q to‘plam bo‘yicha $\forall a \in R$ nuqtadagi limiti

$$\lim_{x\to a,\ x\in Q} D(x) = 1$$

$\forall a \in R$ nuqtadagi I to‘plam bo‘yicha limiti esa

$$\lim_{x\to a,\ x\in I} D(x) = 0.$$

4. Limitlarning tiplari.

a) ***Bir tomonli chekli limitlar.*** Biz bundan keyin f funksiyani a nuqtaning biror o‘yilgan δ atrofida aniqlangan deb faraz qilamiz.

23.5-ta’rif. Agar $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in (a - \delta, a) \to |f(x) - A| < \varepsilon$ munosabat bajarilsa A soni f funksiyaning a nuqtadagi chap limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \text{ yoki } f(a-0)$$

kabi belgilanadi.

Xuddi shunga o‘xshash o‘ng limit tushunchasini kiritish mumkin.

23.6-ta’rif. Agar $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in (a, a+\delta) \to |f(x) - A| < \varepsilon$ munosabat bajarilsa, A soni f funksiyaning a nuqtadagi o‘ng limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \text{ yoki } f(a+0)$$

kabi belgilanadi.

Masalan, $y = signx$ funksiyani qaraylik

$$signx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Bu funksiya uchun $f(-0) = -1$, $f(+0) = 1$ tengliklar o‘rinli.

23.7-ta’rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ uchun

$$\exists\delta > 0, \qquad \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \to f(x) \in (A, A+\varepsilon)$$

munosabat bajarilsa, u holda f funksiya $x \to a$ da A soniga o‘ngdan intiladi ya’ni A soni f funksiyaning o‘ng limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to a} f(x) = A + 0$$

kabi yoziladi. Xususiy holda, $A = 0$ bo‘lsa, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +0$ kabi yoziladi.

Shunga o‘xshash

$$\left\{\lim_{x\to a} f(x) = A - 0\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \to f(x) \in (A-\varepsilon, A)\right\}$$

bo‘ladi.

Masalan, quyidagi

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ \dfrac{3}{2}, & x = 1 \\ (x-1)^2 + 2, & x < 1 \end{cases}$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 + 0$$

bo‘ladi.

Xuddi yuqoridagilarga o‘xshash

1) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A + 0,$ 2) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A + 0,$

3) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A - 0,$ 4) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A - 0$

yozuvlarga ma’no berish mumkin.

Masalan, $\left\{\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A - 0\right\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in (a-\delta, a) \to f(x) \in (A-\varepsilon, A).$

23.1-mashq. 1) 2) 3) tasdiqlarni logik belgilardan foydalanib yozing.

23.2-mashq. f funksiyaning a nuqtada limitga ega bo‘lishi uchun uning shu nuqtada chap va o‘ng limitlari mavjud bo‘lib, $f(a-0)=f(a+0)$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarli ekanligini ko‘rsating.

b) ***Nuqtadagi cheksiz limitlar.*** f funksiya a nuqtaning biror o‘yilgan atrofida aniqlangan bo‘lsin,

23.8-ta’rif. Agar

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\quad \forall x\in \mathring{U}_\delta(a)\rightarrow |f(x)|>\varepsilon \tag{23.7}$$

bo‘lsa, f funksiya a nuqtada cheksiz limitga ega deyiladi va

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

shaklida yoziladi.

Bu holda f funksiya $x\to a$ da cheksiz katta funksiya ham deyiladi. (23.7) shartga asosan funksiyaning limiti cheksiz bo‘lsa, uning grafigi $\forall x\in \mathring{U}_\delta(a),\ |y|\le\varepsilon\ \ (-\varepsilon\le y\le\varepsilon)$ polosaning tashqarisida yotar ekan.

$$U_\varepsilon(\infty)=\ \{y{:}\,|y|>\varepsilon\}=(-\infty,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,+\infty)$$

belgilashni kiritamiz.

$U_\varepsilon(\infty)$ to‘plamni cheksizlikning ε atrofi deb ataymiz. Agarda cheksizlikning ε atrofi uchun a nuqtaning shunday o‘yilgan δ atrofi topilsaki, bu atrofga qarashli ixtiyoriy x larga mos funksiyaning qiymatlari $f(x)\in U_\varepsilon(\infty)$ bo‘lsa f funksiya a nuqtada cheksiz limitga ega deyilar ekan.

23.9-ta’rif. Agar

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\quad \forall x\in \mathring{U}_\delta(a)\rightarrow f(x)>\varepsilon \tag{23.8}$$

munosabat bajarilsa f funksiya a nuqtada $+\infty$ cheksiz limitga ega deyiladi va

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

shaklida yoziladi. $U_\varepsilon(+\infty)=(\varepsilon,+\infty)=\{x\in R{:}\,x>\varepsilon\}$ to‘plamga $+\infty$ cheksizlikning ε atrofi deyiladi. Bu holda (23.8) yozuvni

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in \mathring{U}_\delta(a)\rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(+\infty)$$

shakldа ham yozish mumkin.

Yuqoridagiga o‘xshash

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$

tasdiqni ham atrof tushunchasidan foydalanib yozish mumkin. $\forall\varepsilon>0$ son uchun $U_\varepsilon(-\infty)=(-\infty,\varepsilon)=\{x\in R : x<-\varepsilon\}$ belgilashni kiritamiz. Bu to‘plamga $-\infty$ cheksizlikning ε atrofi deyiladi.

23.10-ta’rif. $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in \mathring{U}_\delta(a)\rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(-\infty)$ bo‘lsa, f funksiya a nuqtada $-\infty$ limitga ega deyiladi va $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ kabi yoziladi.

Xuddi shunga o‘xshash

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty, \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty, \lim_{x\to a-0} f(x) = \infty$$

yozuvlarga ma’no berishimiz mumkin, shuningdek

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A$$

tasdiqlarni ham kiritish mumkin.

23.11-ta’rif. Agar $\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0, \quad \forall x \in U_\delta(-\infty) \to f(x) \in U_\varepsilon(+\infty)$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x argument $-\infty$ ga intilganda $+\infty$ limitga ega deyiladi va

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

kabi yoziladi.

5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Atrof tushunchasini ayting.
2.Funksiyaning nuqtadagi limitining Koshi ta’rifini ayting.
3.Funksiyaning nuqtadagi limitining Geyne ta’rifini ayting.
4.Qismiy limit ta’rifini ayting.
5.Funksiyaning nuqtadagi chap limiti ta’rifini ayting.
6.Funksiyaning nuqtadagi o‘ng limiti ta’rifini ayting.
7.Funksiyaning nuqtadagi $+\infty$ limiti ta’rifini ayting.

6. Mustaqil yechish uchun misollar.

23.1. $|x-1| < 3$ va $|x-5| < 2$ tengsizliklarni bir vaqtda qanoatlantiruvchi nuqtalar to`plamini toping.

23.2. “x nuqtadan 2 gacha masofa 7 dan katta” mulohazasini modul va tengsizlik belgilari yordamida ifodalang.

23.3. -1 nuqtaning 4-atrofini modul va tengsizlik belgilari yordamida ifodalang.

23.4. f funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti b ga tengligining Koshi ta’rifini yozing.

23.5. f funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti b ga tengligini Geyne ta’rifi yordamida yozing.

23.6. Quyidagi tasdiqlarni logik simvollar yordamida yozing.

1. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. **2.** $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. **3.** $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

4. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. **5.** $\lim_{x\to a} f(x) = b - 0$. **6.** $\lim_{x\to a+0} f(x) = b$.

7. $\lim_{x\to a} f(x) = b$. **8.** $\lim_{x\to a+0} f(x) = b + 0$. **9.** $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

10. $\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty$. **11.** $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

12. $\lim_{x\to a+0} f(x) = b + 0$. **13.** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. **14.** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

15. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. **16.** $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. **17.** $\lim_{x\to a-0} f(x) = b + 0$.

18. $\lim_{x\to a-0} f(x) = b - 0$. **19.** $\lim_{x\to a+0} f(x) = b + 0$.

20. $\lim_{x\to a} f(x) = b + 0$. **21.** $\lim_{x\to a+0} f(x) = b - 0$.

22. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b - 0.$ **23.** $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b + 0.$

24. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b + 0.$

23.7. Quyidagi tengliklarni Koshi ta’rifi bo‘yicha isbotlang.

1. $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1.$ **2.** $\lim\limits_{x\to -1} x^2 = 1.$ **3.** $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2.$ **4.** $\lim\limits_{x\to 9} \sqrt{x} = 3.$

23.8. Quyida berilgan funksiyalarning bir tomonli limitlarini toping.

1. $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}},\ \ x \to 1 \pm 0.$ **2.** $f(x) = \dfrac{4}{(x-2)^3},\ \ x \to 2 \pm 0.$

24-§. Funksiya limitining xossalari

Reja:

1. **Funksiya limitining xossalari.**
2. **Funksiya limitining arifmetik amallarga bog‘liq xossalari.**
3. **O‘z-o‘zini tekshirish savollari.**
4. **Mustaqil yechish uchun misollar.**

1.Funksiyaning limitining xossalari. Biz quyida berilgan a nuqtada chekli limitga ega bo‘lgan funksiyaning ba’zi bir xossalarini o‘rganamiz, a nuqta sifatida son yoki $a + 0,\ a - 0,\ \infty, +\infty, -\infty$ simvollardan birortasini tushunish mumkin. Ammo biz aniqlik uchun a ni son deb faraz qilamiz va funksiyani a ning biror o‘yilgan atrofida aniqlangan deb hisoblaymiz.

a) Limitga ega bo‘lgan funksiyalarning lokal xossalari.

Berilgan nuqtada chekli limitga ega bo‘lgan funksiyaning lokal xossalari deganda bu funksiyaning berilgan nuqtaning atrofidagina o‘rinli bo‘lgan xossalari tushuniladi.

1^0. Agar f funksiya a nuqtada limitga ega bo‘lsa, u holda a nuqtaning shunday o‘yilgan atrofi topiladiki, bu atrofda f funksiya chegaralangan bo‘ladi.

2^0. Agar

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

va $A \neq 0$ bo‘lsa, u holda a nuqtaning shunday o‘yilgan atrofi topiladiki, qaysikim bu atrofda f funksiya qiymatlarining ishorasi A sonining ishorasi bilan bir xil bo‘ladi.

3^0. Agar

$$\lim_{x\to a} g(x) = B$$

va $B \neq 0$ bo‘lsa, u holda $\exists\delta > 0,\ \mathring{U}_\delta(a)$ to‘plamda $\frac{1}{g(x)}$ funksiya chegaralangan bo‘ladi.

3^0-xossaning isboti. Limit ta’rifiga ko‘ra $E = \frac{|B|}{2}$ soni uchun

$$\exists\delta > 0, \forall x \in \mathring{U}_\delta(a), |g(x) - B| < \frac{|B|}{2}$$

tengsizligi bajariladi. Bu munosabatdan va $|g(x) - B| \geq |B| - |g(x)|$ tengsizlikdan quyidagi munosabatni olamiz

$$|B| - |g(x)| < \frac{|B|}{2}.$$

Bundan esa $|g(x)| > \frac{|B|}{2}$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu yerdan $\left|\frac{1}{g(x)}\right| < \frac{1}{|B|}$ ekanligini olamiz. Bu esa $\frac{1}{g(x)}$ funksiyaning $\mathring{U}_\delta(a)$ to‘plamda chegaralangan ekanligini bildiradi. 3-xossa isbot bo‘ldi. Qolgan xossalarning isboti shunga o‘xshash bajariladi.

b) Limitning tengsizliklarga bog‘liq xossalari.

1^0. Agar f funksiya va g, h funksiyalar a nuqtaning biror δ atrofida aniqlangan bo‘lib, $\forall x \in \mathring{U}_\delta(a)$ uchun

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \tag{24.1}$$

$$\lim_{n\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$$

munsabatlar o‘rinli bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x\to a} g(x) = A \tag{24.2}$$

bo‘ladi.

2^0. Agar shuday $\delta > 0$ soni topilib, barcha $x \in \mathring{U}_\delta(a)$ lar uchun $f(x) \leq g(x)$ bo‘lib, $\lim_{x\to a} f(x) = A,$ $\lim_{x\to a} g(x) = B$ bo‘lsa, u holda $A \leq B$ bo‘ladi.

Isbot. Bu xossaning shartiga ko‘ra va limitning Geyne ta’rifiga asosan hadlari $\mathring{U}_\delta(a)$ to‘plamdan bo‘lgan va a soniga intiluvchi $\forall\{x_n\}$ ketma-ketlik olmaylik $f(x_n) \leq g(x_n)$ va $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ va $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$ bo‘ladi. Bu munosabatlardan va ketma-ketlikning limitining tengsizliklarga bog‘liq xossalariga ko‘ra $A \leq B$ ekanligi kelib chiqadi.

c) Cheksiz kichik funksiyalar.

24.1-ta’rif. Agar $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$ bo‘lsa, u holda $\alpha(x)$ funksiya $x \to a$ da cheksiz kichik funksiya deyiladi. Cheksiz kichik funksiyalar quyidagi xossalarga ega.

1^0. $x \to a$ da cheksiz kichik bo‘ladigan cheklita cheksiz kichik funksiyalarning yig‘indisi yana cheksiz kichik funksiyadir.

2^0.$x \to a$ da cheksiz kichik funksiyaning a ning biror o‘yilgan atrofida chegaralangan funksiyaga ko‘paytmasi yana cheksiz kichik funksiyadir.

24.1-natija. $x \to a$ da cheksiz kichik bo‘ladigan chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning ko‘paytmasi yana cheksiz kichikdir.

1^0-xossaning isboti. $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar $x \to a$ ga cheksiz kichik funksiyalar bo‘lsin, ya’ni:

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0 = \lim_{x\to a} \beta(x).$$

Limitning Geyne ta’rifiga asosan $\exists\delta > 0,\ \ \forall n \in N,\ \ x_n \in \mathring{U}_\delta(0)$ bo‘lgan va a ga intiluvchi $\forall\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\{\alpha(x_n)\}$ va $\{\beta(x_n)\}$ ketma-ketliklar 0 ga intiladi.

U holda cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossasiga asosan $\{\alpha(x_n) + \beta(x_n)\}$ ketma-ketlik ham 0 ga intiladi. Demak, $\alpha(x) + \beta(x)$ funksiya ham cheksiz kichik funksiya bo‘ladi (limitning Geyne ta’rifiga asosan).

2^0-xossaning isboti aynan shunga o‘xshash bajariladi.

24.1-misol. $y = xsin\frac{1}{x}$ funksiyani $x \to 0$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko‘rsating.

Yechish. Buning uchun

$$\lim_{x\to 0} xsin\frac{1}{x} = 0$$

ekanligini ko‘rsatishimiz kerak. Limit ta’rifiga asosan:

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0,\ \ \forall x \in \mathring{U}_\delta(0), \quad \left|xsin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$

ekanligini ko‘rsatishimiz kerak.

$$\left|xsin\frac{1}{x}\right| < |x|,$$

$$\left|xsin\frac{1}{x} - 0\right| = \left|xsin\frac{1}{x}\right| \le |x| = |x - 0|$$

munosabatlardan $\delta = \varepsilon$ deb tanlasak $\left|xsin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ ekanligi kelib chiqadi.

2. Funksiya limitining arifmetik amallarga bog‘liq xossalari.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x \to a$ da chekli limitga ega bo‘lsin, ya’ni

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \ \text{ va } \ \lim_{x\to a} g(x) = B.$$

U holda quyidagi munosabatlar o‘rinli:

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B.$
2. $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B.$
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}\ \big(B \ne 0;\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \to g(x) \ne 0\big).$

3-formulaning isboti. Limitning Geyne ta’rifidan foydalanamiz: $\exists\delta > 0,\ \forall n \in N,\ \ x_n \in \mathring{U}_\delta(a)$ bo‘lgan a ga intiluvchi $\forall\{x_n\}$ ketma-ketlik olmaylik, ularga mos funksiyaning qiymatlaridan tuzilgan ketma-ketliklar $\{f(x_n)\}$ va $\{g(x_n)\}$ mos ravishda A va B ga intiladi, ya’ni

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall n\in N,\quad \forall x_n\in \mathring{U}_\delta(a)$$

va $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Rightarrow f(x_n)\in \mathring{U}_\varepsilon(A),\ g(x_n)\in \mathring{U}_\varepsilon(B)$ shartlar bajariladi.

Bu yerdan va ketma-ketlik limitning xossalaridan yuqoridagi shartlar bajarilganda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{A}{B}$$

tenglik kelib chiqadi. Demak, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti Geyne ta'rifi bo'yicha $\frac{A}{B}$ ekan. Qolgan tengliklarning to'g'riligi ham shunga o'xshash isbotlanadi.

3. O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Limitga ega bo'lgan funksiyalarning lokal xossalarini ayting.
2. Limitning tengsizliklarga bog'liq xossalarini ayting.
3. Cheksiz kichik funksiya ta'rifini ayting.
4. Funksiya limitining arifmetik amallarga bog'liq xossalarini ayting.

4.Mustaqil yechish uchun misollar.

24.1. Quyidagi limitlarni hisoblang.

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; **2.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+1)(2x+1)(3x+1)-1}{x}$; **5.** $\lim_{x\to0}\frac{(x+1)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$;

6. $\lim_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$; (*m* va *n* natural sonlar).

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$; **8.** $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^5}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\dots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$; **10.** $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; **11.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$;

12. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$; **13.** $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$; **14.** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$;

15. $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$; **16.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}$; **17.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$;

18. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$; (*m* va *n* natural sonlar).

19. $\lim\limits_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$; (*n* natural son).

20. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$; (*n* natural son).

21. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$; (*m* va *n* natural sonlar).

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\dots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right]$;

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2a}{n}\right)^2+\dots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]$.

24.2. Quyidagi limitlarni hisoblang.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$; **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$; **3.** $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

4. $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; **5.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$; $(a>0)$;

6. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; **7.** $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$; **8.** $\lim\limits_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

9. $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$; **10.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$; ($n$-butun son).

11. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$; **12.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$;

13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$; **14.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

15. $\lim\limits_{x\to7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$; **16.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$;

17. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$; **18.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$; $(n,m\in Z)$.

19. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$; $(n,m\in Z)$.

24.3. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri cheksiz kichik bo‘ladi?

1. $f(x)=\frac{x^2-6x+9}{x^3-27},\quad x\to3.$

2. $f(x)=\frac{1}{1+4^x};\ a)\ x\to+\infty;\ b)\ x\to-\infty.$

3. $f(x)=\sqrt{x^4+4}-x^2;\ a)\ x\to+\infty,\ b)\ x\to-\infty.$

25-§. Monoton funksiyaning limiti. Funksiya limitining mavjudligi haqidagi Koshi kriteriyasi

1. **Monoton funksiyaning limiti.**
2. **Funksiya limitining mavjudligi haqidagi Koshi kriteriyasi.**
3. **O‘z-o‘zini tekshirish savollari.**
4. **Mustaqil bajarish uchun mashqlar.**

1.Monoton funksiyaning limiti. Monoton funksiyalar limiti haqida quyidagi teorema o‘rinli.

25.1-teorema. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da monoton bo‘lsin. U holda $f(x)$ funksiyaning $\forall x_0\in(a,b)$ nuqtada o‘ng va chap limitlari mavjud.

Isbot. f funksiya $[a,b]$ da o‘suvchi bo‘lsin. $x_0\in(a,b)$ nuqtani tanlab olamiz. U holda

$$\forall x\in[a,x_0]\to f(x)\le f(x_0) \qquad (25.1)$$

bo‘ladi. (25.1) dan f funksiyaning $[a, x_0]$ to‘plamda yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi.

Bizga ma’lumki, har qanday yuqoridan chegaralangan to‘plamning aniq yuqori chegarasi mavjud, shuning uchun

$$\sup_{a \le x < x_0} f(x) = M \le f(x_0). \qquad (25.2)$$

Aniq yuqori chegaraning ta’rifiga asosan

$$\text{a)} \quad \forall x \in [a, x_0) \rightarrow f(x) \le M. \qquad (25.3)$$

$$\text{b)} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in [a, x_0): M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \le M \qquad (25.4)$$

shartlar bajariladi. $\delta = x_0 - x_\varepsilon$ belgilash kiritamiz. (25.2), (25.3), (25.4) munosabatlardan funksiyaning o‘suvchi ekanligini hisobga olib va $\forall x \in (x_\varepsilon, x_0)$ ya’ni $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ uchun

$$f(x_\varepsilon) \le f(x) \le M \le f(x_0)$$

tengsizlikni olamiz. Bulardan quyidagi munosabatni olamiz.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \rightarrow f(x) \in (M - \varepsilon, M]$$

Bu esa $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = M$ ekanligini bildiradi.

Shunday qilib f funksiya o‘suvchi bo‘lsa $\forall x_0 \in (a, b]$ uchun

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \sup_{a \le x < x_0} f(x) \le f(x_0)$$

ekanligi isbotlandi.

Xuddi shunga o‘xshash $\forall x_0 \in [a, b)$ uchun

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \inf_{x_0 < x \le b} f(x) \ge f(x_0)$$

ekanligi isbotlanadi.

25.1-natija. Agar f funksiya $[a, b]$ segmentda o‘suvchi bo‘lsa, u holda $\forall x_0 \in (a, b)$ uchun

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \sup_{a \le x < x_0} f(x) \le f(x_0) \le \inf_{x_0 < x \le b} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \qquad (25.5)$$

shartlar bajariladi. Agar biz

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = f(x_0 \pm 0)$$

belgilashni eslasak, (25.5) munosabatni quyidagicha yozish mumkin

$$f(x_0 - 0) \le f(x_0) \le f(x_0 + 0).$$

Izoh. Monoton funksiyaning limiti haqidagi teorema ixtiyoriy chekli va cheksiz oraliqlar uchun ham o‘rinli.

Agar f funksiya (a, b) da o‘suvchi bo‘lib yuqoridan chegaralanmagan bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x \to b - 0} f(x) = +\infty$$

(agar $b = +\infty$ u holda $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ shaklda yoziladi) bo‘ladi.

Agar f funksiya kamayuvchi bo‘lib, quyidagi chegaralanmagan bo‘lsa, u holda $\lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty$ $\left(\text{agar } a=-\infty \text{ bo'lsa, u holda } \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\right)$ bo′ladi.

2.Funksiya limitining mavjudligi haqidagi Koshi kriteriyasi. f funksiya a nuqtaning biror o‘yilgan atrofida aniqlangan bo‘lsin. Agar

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall x',\ x''\in \mathring{U}_\delta(a)\to |f(x')-f(x''|)<\varepsilon. \qquad (25.6)$$

munosabat bajarilsa, u holda f funksiya a nuqtada Koshi shartini qanoatlantiradi deyiladi.

25.1-lemma. Shunday $\delta>0$ son topilib, f funksiya a nuqtaning biror o‘yilgan δ atrofida aniqlangan bo‘lsin. Agar a ga yaqinlashuvchi va $\forall n\in N,\ x_n\in \mathring{U}_\delta(a)$ shartni qanoatlantiruvchi $\forall\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\{f(x_n)\}$ chekli limitga ega bo‘lsa, u holda $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikning limiti $\{x_n\}$ ketma-ketlikning tanlanishiga bog‘liq emas.

Boshqacha aytganda a ga yaqinlashuvchi, $\forall n\in N$ da $x_n,\ \tilde{x}_n\in \mathring{U}_\delta(a)$ shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ va $\{\tilde{x}_n\}$ ketma-ketliklar uchun $f(x_n)\to A$ va $f(\tilde{x}_n)\to A'$ bo‘lsa, u holda $A=A'$ bo‘ldi.

Isbot. $x_n\to a$ va $\tilde{x}_n\to a$ bo‘lganligi uchun $x_1,\tilde{x}_1,x_2,\tilde{x}_2,x_3,\tilde{x}_3,\dots,x_n,\tilde{x}_n,\dots$ ketma-ketlik ham a ga intiladi. Bu ketma-ketlikning k chi hadini y_k deb belgilab olamiz va $y_k\to a$ bo‘ladi. Bundan esa lemma shartiga ko‘ra $\{f(y_k)\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega ekanligi kelib chiqadi, ya’ni $\lim_{x\to\infty} f(y_k)=B$ bo′ladi.

$\{f(x_n)\}$ va $\{f(\tilde{x}_n)\}$ ketma-ketliklar $\{f(y_k)\}$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi bo‘lganligi uchun

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=B \quad \text{va} \quad \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n)=B$$

(yaqinlashuvchi ketma-ketlikning qismiy limiti haqidagi tasdiqqa asosan). Bu esa $A=A'$ ekanligini bildiradi.

Koshi kriteriyasi.

25.2-teorema. f funksiya a nuqtada limitga ega bo‘lishi uchun uning shu a nuqtada Koshi shartini qanoatlantirishi zarur va yetarli.

Isbot. a) Zaruriyligi:

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\forall x',\ x''\in \mathring{U}_\delta(a)\to |f(x')-f(x'')|<\varepsilon \qquad (25.6)$$

shartning bajarilishini ko‘rsatamiz. f funksiya a nuqtada A limitga ega bo‘lsin. U holda

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

limit ta’rifiga ko‘ra

$$\forall\varepsilon>0,\ \ \exists\delta>0,\ \ \forall x\in \mathring{U}_\delta(a)\to |f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (25.7)$$

(25.7) ga asosan $\forall x',\ x''\in \mathring{U}_\delta(a)$

$$|f(x')-f(x'')|=|f(x')-A+A-f(x'')|\le|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Demak, $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x',x''\in\mathring{U}_\delta(a)\rightarrow|f(x)-f(x'')|<\varepsilon$.

b)Yetarligini isbotlash uchun limitning Geyne ta'rifidan foydalanamiz, ya'ni (25.6) shart bajarilganda a ga yaqinlashuvchi va $x_n\in\mathring{U}_\delta(a)$ bo'lgan $\forall\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun unga mos funksiyaning qiymatlaridan tuzilgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega ekanligini, bu limitning $\{x_n\}$ ketma-ketlikning tanlanishiga bog'liq emasligini ko'rsatamiz. Agar (25.6) shart bajarilsa har bir $\varepsilon>0$ soni uchun shunday $\delta=\delta_\varepsilon>0$ soni topiladiki

$$\forall x',\ x''\in\mathring{U}_\delta(a)\rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \qquad (25.8)$$

munosabat bajariladi.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

bo'lganligi uchun va (25.8) munosabatda δ soni uchun

$$\exists n_0:\forall n>N_0\rightarrow|x_n-a|<\delta$$

tengsizligi bajariladi.

Bu yerdan esa $\forall n>N_0$ va $\forall m>N_0$ uchun $|x_n-a|<\delta,\ |x_m-a|<\delta$ ekanligi kelib chiqadi, ya'ni $x_n,x_m\in\mathring{U}_\delta(a)$ ekanligi kelib chiqadi.

Bundan esa (25.8) ga asosan $\forall n,m>N_0\rightarrow|f(x_n)-f(x_n)|<\varepsilon$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa o'z navbatida $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikning fundamental ketma-ketlik ekanligini ko'ramiz.

Demak, $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik chekli limitga egaligiga va yuqoridagi lemmaga asosan a ga intiluvchi $\forall\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt bir xil limitga intiladi.

Demak, limitning Geyne ta'rifiga asosan $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli limitga ega ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Izoh. 25.2-teorema a nuqtani $a+0,a-0,\infty$ simvollar bilan almashtirsa ham o'rinli bo'ladi. Faqat bu holda (25.6) shartni bu simvollar atrofida bajarilishini talab qilish kerak bo'ladi.

3. O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Monoton funksiyaning limiti haqidagi teoremani ayting.
2. Funksiya limitining mavjudligi haqidagi Koshi kriteriyasini ayting.

4. Mustaqil bajarish uchun mashqlar.

25.1-mashq. $\lim\limits_{x\to t}f(x)=C$ tasdiqni t va C mos ravishda quyidagilarga teng bo'lgan holda logik simvollardan foydalanib yozing.

1) ∞,A; 2) $+\infty,A$; 3) $-\infty,A$; 4) $\infty,A+0$; 5) $\infty,A-0$; 6) $+\infty,A+0$; 7) $-\infty,A-0$; 8) $+\infty,A-0$; 9) $-\infty,A+0$; 10) ∞,∞; 11) $\infty,+\infty$; 12) $\infty,-\infty$; 13) $-\infty,\infty$; 14) $-\infty,+\infty$; 15) $-\infty,-\infty$; 16) $+\infty,\infty$; 17) $+\infty,-\infty$; 18) $+\infty,+\infty$.

$\mathbf{25.2-}$ ***mashq.*** A soni f funksiyaning a nuqtadagi limiti bo‘lishi uchun bu funksiyaning $f(x)=A+\alpha(x)$ shaklda tasvirlanishi zarur va yetarli. Bu yerda $\alpha(x)$ $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya. Shuni ko‘rsating.

$\mathbf{25.3-}$ ***mashq.*** $\exists\delta>0,\ \forall x\in \mathring{U}_{\delta}(a),\ \alpha(x)\neq 0$ bo‘lsin, $\alpha(x)$ funksiyaning $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya bo‘lishi uchun $\frac{1}{\alpha(x)}$ funksiyaning $x\to a$ da cheksiz katta funksiya bo‘lishi zarur va yetarli. Shuni ko‘rsating.

$\mathbf{25.4-}$ ***mashq.*** $y=sin\frac{1}{x}$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi qismiy limitlar to‘plami $[-1,1]$ segmentdan iborat ekanligini isbotlang.

$\mathbf{25.5-}$ ***mashq.*** Agar f funksiya a nuqtada limitga ega bo‘lsa, u holda bu limitning yagonaligini ko‘rsating.

26-§. Ajoyib va muhim limitlar. Funksiyalarni taqqoslash

Reja:

1. Birinchi ajoyib limit.
2. Ikkinchi ajoyib limit.
3. Funksiyalarni taqqoslash.
4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.
5. Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Birinchi ajoyib limit.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{Sin} x}{x}=1$ limitga birinchi ajoyib limit deyiladi. Bu tenglikni isbotlaymiz. Ma’lumki, agar $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ va $x\neq 0$ bo‘lsa, u holda

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \qquad (26.1)$$

tengsizlik o‘rinli.

Endi (26.1) tengsizlikni isbotlaymiz. Buning uchun koordinatalar tekisligida markazi O nuqtada bo‘lgan birlik aylanani qaraymiz (26.1-chizma). $\angle AOB=x, 0<x<\frac{\pi}{2}$ bo‘lsin. C – B nuqtaning Ox o‘qiga proyeksiyasi, D nuqta esa OB nur bilan A nuqtadan Ox o‘qqa tushirilgan perpendikulyar to‘g’ri chiziqning kesishish nuqtasi bo‘lsin. U holda $BC=sinx, DA=tgx$ bo‘ladi. S_1,S_2,S_3 lar bilan mos ravishda AOB uchburchak, AOB sektor va AOD uchburchaklarning yuzlarini belgilaymiz. Ravshanki,

$$S_1=\frac{1}{2}(OA)^2 sinx=\frac{1}{2}sinx,\quad S_2=\frac{1}{2}(OA)^2x=\frac{1}{2}x,\quad S_3=\frac{1}{2}OA\cdot DA=\frac{1}{2}tgx$$

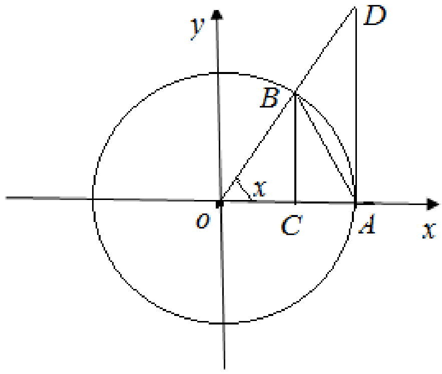
bo‘ladi. $S_1<\ S_2<\ S_3$ bo‘lganligi uchun

$$\frac{1}{2}sinx<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}tgx \qquad (26.2)$$

tengsizliklarga ega bo‘lamiz. $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ lar uchun $sinx > 0$ va $1 < \frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx}$ tengsizliklar o’rinli. $\frac{x}{sinx}$ va $cosx$ lar juft funksiyalar bo’lganligi uchun (26.1) tengsizlik $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ lar uchun ham o’rinli bo’ladi. $1 < \frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx}$ tengsizlikdan hamda $\lim\limits_{x\to 0} cosx = 1$ va $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ tengliklardan

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$$

ekanligi kelib chiqadi.



26.1-chizma.

2. Ikkinchi ajoyib limit.

26.1-teorema. $\varphi(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ funksiyaning $x \to 0$ dagi limiti e ga teng, ya’ni

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \qquad (26.3)$$

Isbot. Bizga ma’lumki, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ tenglik o‘rinli.

Natural sonlar ketma-ketligidan $\forall\{n_k\}$ qismiy ketma-ketlik ajratib olamiz. Bu qismiy ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$ bo‘lsin. Bu $\{n_k\}$ qismiy ketma-ketlik uchun $= \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k} = e$ ekanligini ko‘rsatamiz. Ketma-ketlik limitining ta’rifiga ko‘ra

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n > N_\varepsilon \ \to |x_n - e| < \varepsilon. \qquad (26.4)$$

Bizga ma’lumki,

$$\forall M > 0, \exists K = K(M) \in N,\ \forall k > K(M),\ n_k > M \qquad (26.5)$$

kelib chiqadi. Agar $M = N_\varepsilon$, deb olsak $\exists K,\ \forall k > K,\ \ n_k > N_\varepsilon$ bo‘lar ekan.
Bu yerdan va (26.5) dan

$$\forall\varepsilon > 0,\quad \exists N_\varepsilon,\quad \forall k > K(N_\varepsilon),\ \left|x_{n_k} - e\right| < \varepsilon \qquad (26.6)$$

munosabatni olamiz. Bu esa $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k} = e$ ekanligi kelib chiqadi. (26.3) tenglikni isbotlash uchun

$$\lim_{x\to+0}\varphi(x)=\lim_{x\to-0}\varphi(x)=e$$

tenglik to‘g’ri ekanligini isbotlash yetarli. Dastlab, $\lim_{x\to+0}\varphi(x)=e$ ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun hadlari musbat bo‘lib, $\lim_{k\to\infty}x_k=0$ bo‘lgan $\forall\{x_k\}$ ketma-ketlikni qaraymiz. $x_k\to 0$ bo‘lanligi uchun, umumiylikka zarar keltirmasdan $\forall k\epsilon N$ uchun $0<x_k<1$ deb faraz qilishimiz mumkin. $n_k=\left[\frac{1}{x_k}\right]$ belgilashni kiritamiz va $n_k\le\frac{1}{x_k}<n_k+1$, bundan esa $\frac{1}{n_k+1}<x_k\le\frac{1}{n_k}$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa o‘z navbatida

$$1+\frac{1}{n_k+1}<x_k+1\le\frac{1}{n_k}+1$$

tengsizlikni hisobga olsak

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{1+n_k} \qquad (26.7)$$

tengsizliklarni olamiz. Bu yerdan quyidagi

$$x_{n_k}=(1+\frac{1}{n_k+1})^{n_k+1},(1+\frac{1}{n_k+1})^{n_k}=(1+\frac{1}{n_k+1})^{n_k+1}(1+\frac{1}{n_k+1})^{-1}\to e,n\to\infty,\ \ y_{n_k}=\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{1+n_k}=\left(1+\frac{1}{n_k}\right)(1+\frac{1}{n_k})^{n_k}\to e,n\to\infty$$

munosabatlardan $\lim_{x\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=e$ tenglikni olamiz. Bu esa funksiya limitining Geyne ta’rifiga ko‘ra $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ekanligini bildiradi. Endi $\lim_{x\to-0}\varphi(x)=e$ ekanligini isbotlaymiz. Endi $x_k<0$, $\lim_{k\to\infty}x_k=0$ bo‘lgan $\forall\{x_k\}$ ketma-ketlikni qaraylik. $y_k=-x_k$ belgilashni kiritamiz. $y_k>0$ va $\lim_{k\to\infty}y_k=+0$ bo‘ladi. Agar

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=(1-y_k)^{-\frac{1}{x_k}}=(\frac{1}{1-y_k})^{\frac{1}{y_k}}=(1+\frac{y_k}{1-y_k})^{\frac{1}{y_k}}$$

belgilashni kiritsak, u holda

$z_k=\frac{y_k}{1-y_k}>0$ ($0<y_k<1$ bo‘lganligi uchun) $z_k\to 0$ bo‘ladi hamda

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=\lim_{k\to\infty}(1+z_k)^{1+\frac{1}{z_k}}=e$$

tenglikni olamiz.

Bu yerdan ham limitning Geyne ta’rifidan foydalansak $\lim_{x\to-0}\varphi(x)=e$ ekanligini olamiz .

26.1-natija. Agar x_0 nuqtaning $\exists U_\delta(x_0)$ topilib, $\forall x\epsilon U_\delta(x_0)$ uchun $a(x_0)\neq 0$ bo‘lib, $\lim_{x\to x_0}a(x)=0$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x\to x_0}(1+a(x))^{\frac{1}{a(x)}}=e$$

bo‘ladi. Xususiy holda, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ bo‘ladi.

3. Funksiyalarni taqqoslash.

Ekvivalent funksiyalar.

Agar x_0 nuqtaning biror o‘yilgan atrofida aniqlangan f, g, h funksiyalar uchun $f(x) = g(x)h(x)$ va $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 1$ munosabatlar bajarilsa, u holda f va g funksiyalar $x \to x_0$ da ekvivalent deyiladi.

Masalan: $f(x) = \sin x$ va $g(x) = x$ funksiyalar $x \to 0$ da ekvivalentdir. $f(x) = \sin x = x\,\frac{\sin x}{x}$ bo‘lganligidan va $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ekanligidan bu funksiyalarning ekvivalentligi kelib chiqadi.

Ekvivalent funksiyalarning ta’rifini quyidagicha ham berish mumkin. Agar x_0 nuqtaning shunday $\mathring{U}_\delta(x_0)$ atrofi topilib, bu atrofga qarashli barcha x lar uchun $g(x) \neq 0$, ya’ni

$$\exists \mathring{U}_\delta(x_0), \quad \forall x \epsilon \mathring{U}_\delta(x_0), \quad g(x) \neq 0$$

bo‘lib,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\,(x)}{g(x)} = 1$$

bo‘lsa, u holda $f\,(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ekvivalent funksiyalar deyiladi.

Agar f va g funksiyalar ekvivalent bo‘lsa, $f \sim g$ kabi beldilanadi.

26.1-mashq. $x \to 0$ da $\sin x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $tgx \sim x$, shx$\sim x$, $arc\sin x \sim x$,

$$\ln(1+x) \sim x,\ arctgx \sim x,\ (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

munosabatlar o‘rinli ekanligini isbotlang.

Agar $x \to x_0$ da $\alpha(x) \to 0$ bo‘lsa, u holda yuqoridagi ekvivalent fuksiyalarni quyidagicha yozamiz:

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x),\ tg\alpha(x) \sim \alpha(x),\ arc\sin\alpha(x) \sim \alpha(x),\ arctg\alpha(x) \sim \alpha(x)$$
$$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x).$$

Masalan: $\ln(1+x^3) \sim x^3,\ x \to 0.$

26.2-teorema. Agar $x \to x_0, f \sim f_1$ va $g \sim g_1$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1\,(x)}{g_1(x)}$$

mavjudligidan, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f\,(x)}{g(x)}$ mavjudligi kelib chiqadi va

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\,(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f_1\,(x)}{g_1(x)}$$

tenglik to‘g’ri.

Masalan, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1.$

”o” va “O” belgilari.

26.1-ta'rif. Agar a nuqtaning biror o'yilgan atrofida aniqlangan f, g va α funksiyalar uchun

$$f(x) = g(x)\alpha(x), \text{ bu yerda } \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0 \qquad (26.8)$$

munosabatlar bajarilsa, u holda f funksiya $x \to a$ da $g(x)$ funksiyaga nisbatan cheksiz kichik deyiladi va $x \to a$ da

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \qquad (26.9)$$

yoki qisqacha $x \to a$ da $f = o(g)$ kabi yoziladi.

26.1-misol. $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ funksiyalar berilgan. $x \to a$ da f funksiya g funksiyaga nisbatan cheksiz kichikligini ko'rsating.

Yechish. Haqiqtan ham, $f(x) = x^2 = g(x) \cdot x$ tenglikka ko'ra $\alpha(x) = x$ deb olsak (26.8) munosabat bajariladi. 26.1-ta'rifga ko'ra $x \to 0$ da f funksiya g funksiyaga nisbatan cheksiz kichik bo'ladi.

26.2-misol. $f(x) = x + x^4$, $g(x) = x^5$ funksiyalar berilgan. $x \to \infty$ da f funksiya g funksiyaga nisbatan cheksiz kichikligini isbotlang.

Yechish. Haqiqtan ham,

$$f(x) = x + x^4 = x^5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}\right) = g(x) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}\right)$$

tenglik o'rinli bo'lganligi $\alpha(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}$ deb belgilab olsak, (26.8) munosabatning bajarilishi ko'rinadi. 26.1-ta'rifga ko'ra $x \to \infty$ da f funksiya g funksiyaga nisbatan cheksiz kichik bo'ladi.

Agar a nuqtaning biror o'yilgan atrofida $g(x) \neq 0$ va $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ bo'lsa, u holda (26.9) ni $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ yoki qisqacha $\lim\limits_{x \to a} \frac{o(g)}{g} = 0$ kabi yozish mumkin.

Xususiy holda, $x \to a$ da $f = o(1)$ yozuv f funksiyaning $x \to a$ da cheksiz kichikligini bildiradi. Bu yerda shuni ta'kidlash lozimki, (26.9) tenglikdagi $o(g)$ yozuv $x \to a$ da g funksiyaga nisbatan cheksiz kichik bo'lgan funksiyalar to'plamini bildiradi. Shuning uchun $x \to a$ da $f = o(g)$ yozuvi o'rniga $f \in o(g)$ shaklda yozish to'g'ri bo'lar edi. Ammo bu yozuv funksiyalar ustida amallar bajarganda, amaliyotda qo'llashda noqulay bo'lganligi uchun (26.9) yozuv qo'llaniladi.

$o(g)$ belgi (simvol) quyidagi xossalarga ega:

1^0. $o(Cg) = o(g)$, C – o'zgarmas son.

2^0. $Co(g) = o(g)$, C – o'zgarmas son.

3^0. $o(g) + o(g) = o(g)$. 4^0. $o\big(o(g)\big) = o(g)$.

5^0. $o(g) + o(g) = o(g)$. 6^0. $o(g^n) + o(g^m) = o(g^{n-m})$.

7^0. $g^{n-1}o(g) = o(g^n)$. 8^0. $(o(g))^m = o(g^n)$.

9^0. $\frac{o(g^n)}{g}$ =o$(g^{n-1}), g \neq 0, \ \ m,n \in N$.

26.3-teorema. f funksiya $x \to a$ da $f \sim g$ bo‘lishi uchun $f = g + o(g)$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. $f \sim g$ bo‘lsin. U holda, $x \to a$ da

$$\exists h(x), f(x) = g(x)h(x), h(x) \to 1$$

bo‘ladi. Ravshanki, $f(x) - g(x) = g(x)(h(x) - 1) = g(x)\alpha(x)$ tenglik o‘rinli, bunda $\alpha(x) = h(x) - 1$ va $x \to a$ da $\alpha(x) \to 0$. Bu yerdan $o(g)$ simvolning ta’rifiga ko‘ra $x \to a$ da $f - g = o(g)$ tenglik, ya’ni $f = g + o(g)$ munosabatni olamiz.

Yetarliligi. $f = g + o(g)$, ya’ni $f - g = o(g)$ bo‘lsin. Bundan

$$f(x) - g(x) = g(x)\ \alpha(x) \text{ bu yerda } \alpha(x) \to 0,$$

$$f(x) = g(x) + g(x)\alpha(x) = g(x)\big(1 + \alpha(x)\big)$$

munosabatlarni yoza olamiz. Agar $h(x) = 1 + \alpha(x)$ deb olsak, $x \to a$ da $h(x) \to 1$, ya’ni $x \to a$ da $f(x) \sim g(x)$ bo‘lar ekan.

26.2-ta’rif. a nuqtaning biror o‘yilgan atrofida aniqlangan f, g, φ funksiyalar uchun $f(x) = g(x)\varphi(x)$ munosabatlar bajarilsa va $\varphi(x)$ funksiya a nuqtaning shu atrofida chegaralangan bo‘lsa, u holda f funksiya $x \to a$ da g funksiyaga nisbatan chegaralangan deyiladi va $x \to a$ da $f(x) = O\big(g(x)\big)$ kabi yoziladi.

26.2-ta’rifni quyidagicha ham yozish mumkin.

26.3-ta’rif. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun shunday $\delta > 0, C > 0$ sonlar topilsaki, $\forall x \in U_\delta(a)$ lar uchun $|f(x)| \leq C|g(x)|$ tengsizlik bajarilsa, u holda $x \to a$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga nisbatan chegaralangan deyiladi.

Agar $f(x) = g(x)\varphi(x)$ tenglik biror E to‘plamda bajarilsa, u holda f funksiya E to‘plamda g ga nisbatan chegaralangan bo‘ladi.

$O(g)$ belgi quyidagi xossalarga ega:

1^0. $O\big(o(f)\big) = o(f)$. $\quad$ 2^0. $o\big(O(f)\big) = o(f)$.

3^0. $O\big(O(f)\big) = O(f)$. $\quad$ 4^0. $O\big(f + o(f)\big) = O(f)$.

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Ekvivalent funksiyalarning ta’rifini keltiring.

2. $f(x) = o(g(x))$ munosabatni qanoatlantiruvchi funksiyalarga misollar keltiring.

3. $f(x) = O(g(x))$ munosabatni qanoatlantiruvchi funksiyalarga misollar keltiring.

5. Mustaqil yechish uchun misollar.

Birinchi ajoyib limitga doir quyidagi misollarni yeching.

26.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 20x}{x}$. **26.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\sin 6x}$. **26.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x^2}$. **26.4.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$.

26.5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg8x}{3x}$. **26.6.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$. **26.7.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}$

26.8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 4x}$. **26.9.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}$. **26.10.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8^x-1}{5^x-1}$.

26.11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+\sin x}-\sqrt{4-\sin x}}{3x}$. **26.12.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sin x}-\sqrt[3]{1-\sin x}}{x}$.

26.13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+\cos x}-\sqrt{5}}{2x^2}$. **26.14.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin x+\sin 7x}$. **26.15.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{tgx}$.

26.16. Isbotlang:

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0\ \left(a>1,\ n>0\right).\ b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0\ \left(a>1,\ \varepsilon>0\right).$

26.17. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}\right)$. **26.18.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)\ \left(m,n\in N\right)$.

26.19. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin 2x)^{\frac{1}{tg5x}}$.

26.20. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

26.21. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

26.22. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{4x}$.

26.23. (26.1) tengsizlikni isbotlang.

26.24. $x\to 0$ va $n>0$ bo‘lsin. Quyidagi munosabatlarni isbotlang.

1) $CO(x^n)=O(x^n),\ C\neq 0$ - o‘zgarmas son.

2) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^m),\ m<n$.

3) $O(x^n)\cdot O(x^m)=O(x^{m+n})$.

26.25. Quyidagi tengliklarni isbotlang.

1) $sinx=x+o(x), x\to 0.$ 2) $tgx=x+o(x), x\to 0.$

3) $arcsinx=x+o(x), x\to 0.$ 4) $e^x-1=x+o(x), x\to 0.$

5) $\ln(1+x)=x+o(x), x\to 0.$ 6) $(1+x)^\alpha=\alpha x+o(x), x\to 0.$

IV bobni takrorlash uchun test savollari

1. $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta = \delta(\varepsilon),\ 0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $f(x) < -\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda quyidagi munosabatlarning qaysi biri to'g'ri?

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ limitni toping.

a) 0 b) -1 c) 1 d) 6

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg8x}{x}$ limitni toping.

a) 0 b) 8 c) -8 d) 5

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1 + x)}{4x}$ limitni toping.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $-\dfrac{1}{4}$ d) e

5. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$ $(x > 0)$ limit nimaga teng?

a) e^x b) $\log x$ c) lnx d) 1

6. Quyidagi tasdiqlarning qaysi biri to'g'ri?

a) $\sin x = O(x^2),\quad x \to 0$ b) $5x - 2x^2 = O(x^2),\quad x \to 0$

c) $x^2 - x = O(x),\quad x \to 0$ d) $\cos x = O(x),\quad x \to 0$

7. $\lim\limits_{x\to +0} x^x$ limitni toping.

a) 0 b) ∞ c) 1 d) -1

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$ limitni hisoblang.

a) 2 b) 8 c) 9 d) 10

9. $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta = \delta(\varepsilon),\ 0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $0 < b - f(x) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda quyidagi munosabatlarning qaysi biri to'g'ri?

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b - 0$ b) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$

c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ d) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b + 0$

10. $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta = \delta(\varepsilon),\ 0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $f(x) > \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda quyidagi munosabatlarning qaysi biri to'g'ri?

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ d) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b + 0$

11. $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta = \delta(\varepsilon),\ x < -\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $f(x) < -\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda quyidagi munosabatlarning qaysi biri to‘g’ri?

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

12. $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta = \delta(\varepsilon)\ 0 < a - x < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $0 < f(x) - b < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda quyidagi munosabatlarning qaysi biri to‘g’ri?

a) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b + 0$ b) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b - 0$

c) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b + 0$ d) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b + 0$

13. Hisoblang: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 3x} - e^{\sin x}}{5x}$

a) $\dfrac{5}{3}$ b) $-\dfrac{3}{5}$; c) $\dfrac{2}{5}$ d) $\dfrac{3}{5}$

14. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x + 7^x}{2^x + 7^{x-1}}$

a) ∞ b) 0 c) 7 d) 2

15. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \sqrt{x(x-1)})$

a) ∞ b) 0 c) $\dfrac{1}{2}$ d) 2

16. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$

a) $\dfrac{1}{4}$ b) 0 c) ∞ d) 4

17. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 + x}$ funksiya uchun quyidagi tasdiqlardan qaysi biri noto`g`ri?

a) $x \to 0$ da $f(x)$ cheksiz kichik

b) $x \to 0$ da $f(x)$ cheksiz katta

c) $x \to 1$ da $f(x)$ cheksiz kichik

d) $x \to -1$ da $f(x)$ cheksiz katta.

18. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$

a) $2,4$ b) $-1,2$ c) 0 d) 1,2

19. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{(x-3)^2}}$

a) 0 b) 3 c) ∞ d) 1

20. $x \to 2$ da $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2}$ funksiyaning limitini toping.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $-\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

21. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^4 - 1}$

a) 0,25 b) 0 c) ∞ d) 1

22. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(2\sin x + 1)}{e^{2tgx} - 1}$

a) 0,5 b) 1 c) 0 d) 2

23. $x \to -2$ da $f(x) = x + 2$ funksiyaga ekvivalent bo`lgan funksiyani toping.

a) $x^2 - 2x + 2$ b) $\sin(x+2)$ c) $\sqrt{2x+8}$ d) $\frac{1}{x+2}$

24. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 6} + |x|}{\sqrt[6]{x^4 + 2} - |x|}$

a) -2 b) 0,5 c) 1 d) 0

25. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

a) 0 b) sin1 c) 1 d) ∞

26. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 8x}$

a) 1 b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{5}{8}$ d) mavjud emas

27. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \arcsin 2x)^{\frac{1}{tg5x}}$

a) $e^{\frac{2}{5}}$ b) e^5 c) e^2 d) $e^{\frac{5}{2}}$

28. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

a) e^6 b) $e^{\frac{2}{3}}$ c) e^2 d) e^5

29. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

a) e^{-2} b) -2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

30. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{tgx}\right)$

a) 0 b) 1 c) -1 d) mavjud emas

31. $f(x) = \frac{|x|}{x}$ funksiya uchun noto`g`ri tasdiqni toping.

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ b) $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 1$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ mavjud emas d) $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -1$

32. $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ funksiyaning $x\to 0$ da limitini hisoblang.

a) 0 b) 1 c) ∞ d) mavjud emas

33. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{acr\,\sin(x^2-x^3)}{1-\cos^3 x}$

a) 2 b) 0 c) ∞ d) $\frac{2}{3}$

34. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+5}\right)^{\frac{1}{|x|}}$

a) 5 b) 1 c) ∞ d) 0

35. $x\to 1$ da cheksiz kichik bo`lgan quyidagi funksiyalar orasidan $f(x)=\ln x$ funksiya bilan bir xil tartibga ega bo`lganini aniqlang.

a) $7(x-1)$ b) $\sqrt{x}$ c) $x^{\frac{1}{3}}$ d) $\sqrt[3]{x-1}$

36. $x\to 0$ da cheksiz kichik bo`lgan $\alpha(x)=\frac{x}{x+1}$ va $\beta(x)=x+\sin x$ funksiyalar uchun quyidagi mulohazalardan qaysi biri o`rinli?

a) ekvivalent b) $\beta(x)=o(\alpha(x))$ c) $\alpha(x)=o(\beta(x))$ d) ekvivalent emas, lekin bir xil tartibga ega

37. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x}, & x\le 3,\\ x^2, & x>3\end{cases}$ funksiya uchun $f(3+0)$ o`ng limitni hisoblang

a) 9 b) 0 c) 1 d) mavjud emas

38. $f(x)$ uchun $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=1$ va $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=3$ munosabatlar bajarilsa, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ limit uchun quyidagilardan qaysi biri to`g`ri?

a) mavjud emas b) 2 c) 1 d) 3

39. Lopital qoidasi bo‘yicha hisoblang: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-e^x}{tgx-x}$

a) 8 b) 7 c) 1 d) 2

40. f funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti b ga teng deyiladi agar:

a) $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon),\ 0<|x-a|=\delta, |f(x)-b|<\varepsilon$ bo‘lsa

b) $\exists\varepsilon>0,\ \forall\delta=\delta(\varepsilon),\ 0<|x-a|=\delta, 0<|f(x)-b|<\varepsilon$ bo‘lsa

c) $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon),\ 0<|x-a|=\delta, 0<f(x)-b<\varepsilon$ bo‘lsa

d) $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon),\ 0<|x-a|=\delta, f(x)+b<\varepsilon$ bo‘lsa

41. f funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti b ga teng deyiladi agar:

a) $\forall x_n\to a\ (x_n\ne a)$ uchun $f(x_n)\to b\ (n\to\infty)$ bo‘lsa

b) $\exists x_n\to a\ (x_n\ne a)$, $f(x_n)\to b\ (n\to\infty)$ bo‘lsa

c) $\forall x_n\to a\ (x_n\ne a)$ uchun $f(x_n)\to b$

d) $\forall x_n \to a \ (x_n \neq a)$ uchun $\exists \ (x_{n_k}) \ \ f(x_{n_k}) \to b \ \ (k \to \infty)$ bo‘lsa

42. $f(x)$ uchun $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = 1$ va $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = 3$ munosabatlar bajarilsa, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ limit uchun quyidagilardan qaysi biri to`g`ri?

a) mavjud emas b) 2 c) 1 d) 3

43. $|x-1| < 4$ va $|x-5| < 2$ tengsizliklarni bir vaqtda qanoatlantiruvchi nuqtalar to`plamini toping.

a) $(2,5)$ b) $(3,5)$ c) $(2,3)$ d) $(3,4)$

44. Quyidagi to`plamlardan qaysi biri uchun $x = -10, x = 0, x = 2, x = 2{,}05$ sonlari limitik nuqta bo`ladi?

a) $[-10,2]$ b) $[-10,1) \cup (2,3)$ c) $[-10,0) \cup (0,3)$ d) $[-10,0) \cup (0,2]$

45. $x \to 1$ da cheksiz kichik bo`lgan quyidagi funksiyalar orasidan $f(x) = \ln x$ funksiya bilan bir xil tartibga ega bo`lganini aniqlang.

a) $(x-1)^2$ b) $x - 1$ c) $y = e^x - e + 3$ d) $\sqrt[3]{x-1}$

46. $\lim\limits_{x \to +0} \sin \dfrac{1}{x}$ limitni hisoblang.

a) 1 b) mavjud emas c) ∞ d) 0

47. Chegaralangan, lekin limiti mavjud bo‘lmagan funksiyani toping (x=0 nuqtada nuqtada)

a) $f(x) = \sin(1/x)$ b) $f(x) = x\sin(1/x)$ c) $f(x) = x\cos(1/x)$ d) $f(x) = \sin x$

48. $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta = \delta(\varepsilon), 0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $0 < f(x) - b < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda quyidagi munosabatlarning qaysi biri to‘g’ri?

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b + 0$ b) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$

c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b - 0$ d) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b + 0$

49. $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta = \delta(\varepsilon), \ 0 < x - a < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $0 < f(x) - b < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda quyidagi munosabatlarning qaysi biri to‘g’ri?

a) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b + 0$ *b*) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b - 0$

c) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b + 0$ d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b + 0$

50. $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta = \delta(\varepsilon), \ x < -\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $0 < f(x) - b < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda quyidagi munosabatlarning qaysi biri to‘g’ri?

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b + 0$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b - 0$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b + 0$

V Bob. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

27-§. Funksiya uzluksizligining ta'riflari. Funksiyaning uzilishi. Uzilishning turlari. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar

Reja:

1. Funksiya uzluksizligining ta'riflari.
2. Funksiyaning uzilishi. Uzilishning turlari.
3. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar.

4. Mustaqil yechish uchun misollar.

5. O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Funksiya uzluksizligining ta'riflari.

$f(x)$ funksiya a nuqtaning $U_{\delta_0}(a)$ atrofida aniqlangan bo'lsin.

27.1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x \to a$ da limiti mavjud bo'lib

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad (27.1)$$

bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo'lsa quyidagi shartlar bajarilar ekan.

a) f funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan, ya'ni shunday $\delta_0 > 0$ topilib $U_{\delta_0}(a) \subset D(f)$ bo'lishi,

b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ – mavjud bo'lishi,

c) $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ tenglik o'rinili bo'lishi kerak ekan.

Funksiyaning a nuqtadagi limiti ta'riflaridan foydalanib, funksiyaning a nuqtadagi uzluksizligining ta'rifini ($\varepsilon - \delta$) tilida, atroflar yordamida, ketma-ketliklar yordamida va orttirmalar tilida ham berish mumkin.

27.2-ta'rif. (Koshi) Agar

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \quad (\delta \in (0, \delta_0])\, |x - a| < \delta,\ \ \forall x \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

munosabat bajarilsa, f funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

27.3-ta'rif. (Geyne) Agar

$$\forall \{x_n\}(x_n \in U_{\delta_0}(a)) : \lim_{n\to\infty} x_n = a \to \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

munosabat bajarilsa, f funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

27.4-ta'rif. Agar

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \ (\delta \in (0, \delta_0]),\ \forall x \subset U_\delta(a) \to f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$$

munosabat bajarilsa, f funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

1-Izoh. 27.2-ta'rifni berishda funksiya limitining Koshi ta'rifidagi $0 < |x - a| < \delta$ qo'sh tengsizlik, ya'ni x argument a nuqtaga teng bo'lmaslik sharti o'rniga $|x - a| < \delta$ tengsizlik ishlatildi. $x=a$ bo'lganda $f(x) - f(a)$ ayirma nolga teng bo‘lganligidan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Shuning uchun 27.2-ta’rifda $0 < |x-a| < \delta$ tengsizlik o‘rnida $|x-a| < \delta$ tengsizlik ishlatilishi mumkin bo‘ldi.

2-Izoh. 27.3-ta’rifni berishda funksiya limitining Geyne ta’rifidagi $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlikning hadlari a sonidan farqli bo‘lishlik shartini tushirib qoldirdik. Bu ishni *f(a)* ga yaqinlashuvchi $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlik hadlariga *f(a)* da teng bo‘lgan elementlarni qo‘shish, bu ketma-ketlikning *f(a)* soniga yaqinlashuvchiligiga ta’sir qilmaganligi uchun, qilish mumkin bo‘ldi.

Funksiya limitining Koshi va Geyne ta’riflari ekvivalent bo‘lganligi uchun funksiyaning nuqtadagi uzluksizligining Koshi va Geyne ta’riflari ekvivalent bo‘ladi.

x-a ayirmani argumentning orttirmasi deyiladi va Δx kabi belgilanadi. *f(x)-f(a)* ayirmani funksiyaning argumentning Δx orttirmasiga mos orttirmasi deyiladi va Δy kabi belgilanadi. Demak $\Delta x = x - a$ ga teng bo‘lganda $\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ bo‘lar ekan. Bu belgilashlardan keyin (27.1) tenglikni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ shaklda yozish mumkin.

Demak, funksiyaning a nuqtadagi uzluksizligi ta’rifini argumentning *a* nuqtadagi cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning cheksiz kichik orttirmasi mos kelishi sifatida ham berish mumkin ekan.

27.1-misol. $f(x) = x^2$ funksiyani *x=a*, $a \in R$ nuqtada uzluksizligini ko‘rsating $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$ va *f(a)=a*^{2} bo‘lganligi uchun bu funksiya ixtiyoriy *x=a* nuqtada uzluksizdir.

27.2-misol. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ funksiyani $x = a,\ \ a \neq 0$ nuqtada uzluksizligini ko‘rsating. Limitning xossalaridan foydalanib, $a \neq 0$ da

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \text{ va } \lim_{x \to a} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} = f(a)$$

bo‘lganligi uchun $\frac{1}{x^2}$ funksiya $x = a\ (a \neq 0)$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

27.3-misol. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyaning $x = a\ (a \neq 0)$ nuqtada uzluksizligini ko‘rsating.

Yechish. $\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$ bo‘lganligi uchun *a>0* bo‘lganda $0 \leq |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$ tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlikdan agar *a>0* bo‘lsa $x \to a$ da $\sqrt{x} - \sqrt{a} \to 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $\sqrt{x}$ funksiyaning $x = a$ nuqtada uzluksizligini bildiradi.

27.4-misol. $f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ funksiyani $x=0$ nuqtada uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Bu funksiya R - sonlar o‘qida aniqlangan va $\forall x\in R,\ x\neq 0$ da $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leq 1$ tengsizlik bajarilganligi uchun $0\leq |f(x)-f(0)|=|f(x)|\leq |x|$ munosabat bajariladi. Bu munosabatdan

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$$

ekanligini olamiz. Demak, qaralayotgan funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz ekan.

Chap (o‘ng) limitlarga o‘xshash chapdan (o‘ngdan) uzluksizlik tushunchasini kiritish mumkin. f funksiya biror $(a-\delta, a]$ yarim intervalda aniqlangan bo‘lsin. Agar

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)$$

ya’ni $f(a-0)=f(a)$ bo‘lsa, u holda f funksiya a nuqtada chapdan uzluksiz deyiladi.

Shunga o‘xshash, agar f funksiya a nuqtaning biror o‘ng $[a, a+\delta)$ $(\delta>0)$ atrofida aniqlangan bo‘lsa va $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$ ya’ni $f(a+0)=f(a)$ bo‘lsa, f funksiya $x=a$ nuqtada o‘ngdan uzluksiz deyiladi.

Funksiyaning nuqtadagi chap (o‘ng) limitining Koshi va Geyne ta’rifidan foydalanib funksiyaning nuqtada chapdan (o‘ngdan) uzluksizligining Koshi va Geyne ta’riflarini berishimiz mumkin.

27.5- ta’rif. (Koshi ta’rifi). Agar

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ \left(\delta\in(0,\delta_0]\right),\ \forall x\in(a-\delta, a]\left(\forall x\in[a, a+\delta)\right)\to |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

munosabat bajarilsa f funksiya a nuqtada chapdan (o‘ngdan) uzluksiz deyiladi.

27.6-ta’rif. (Geyne). Elementlari $\forall n\in N,\ x_n\leq a\ (x_n\geq a)$ tengsizligini qanoatlantiruvchi va a nuqtaga y aqinlashuvchi $\forall\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik $f(a)$ soniga yaqinlashsa, f funksiya a nuqtada chapdan (o‘ngdan) uzluksiz deyiladi.

Bu ikki ta’rifning ekvivalentligi ularga mos funksiya limiti ta’riflarining ekvivalentligidan kelib chiqadi. Yuqorida keltirilgan ta’riflardan ko‘rinadiki, agar f funksiya a nuqtada chapdan va o‘ngdan uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Aksincha, agar f funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya a nuqtada chapdan va o‘ngdan uzluksiz bo‘ladi.

27.5-misol. $f(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$ funksiya $x=0$ nuqtada o‘ngdan uzluksiz bo‘ladimi?

Yechish. $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$ va $f(0)=1$ bo‘lganligi uchun, o‘ngdan uzluksizlik ta’rifiga ko‘ra funksiya *x=0* nuqtada o‘ngdan uzluksiz bo‘ladi.

2.Funksiyaning uzilishi. Uzilishning turlari.

f(x) funksiya a nuqtaning biror $U_\delta(a)$ atrofida yoki o’yilgan atrofida aniqlangan bo’lsin.

27.7-ta’rif. Agar *f(x)* funksiya uchun $a\notin D(f)$ yoki *a* nuqtada bu funksiya uzluksiz bo‘lmasa, ya’ni

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

munosabat bajarilmasa, u holda *a* nuqta *f* funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

27.7-ta’rif quyidagi munosabatlarning birining bajarilishiga teng kuchli

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ – mavjud emas va $a\in D(f)$.
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ – mavjud emas va $a\notin D(f)$.
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ – mavjud va $a\notin D(f)$.
4. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ – mavjud va $a\in D(f)$ lekin $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mavjud emasligi quyidagi shartlardan birining bajarilmasligiga teng kuchli

a) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ va $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ mavjud, lekin $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ va $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ limitlarning aqalli biri mavjud emas.

Agar 3 va 4 munosabatlar bajarilsa, u holda *a* nuqta *f* funksiyaning tuzatilishi mumkin bo‘lgan uzulish nuqtasi deyiladi

Agar 1) va a) yoki 2) va a) shartlar bajarilsa, u holda *a* nuqta *f* funksiyaning 1-tur uzulish nuqtasi deyiladi.

Agar 1) va b) yoki 2) va b) shartlar bajarilsa, u holda *a* nuqta *f* funksiyaning 2-tur uzulish nuqtasi deyiladi.

Bunday nuqtalarda bir tomonli limitlarning aqalli bittasi cheksiz bo‘lishi ham mumkin. Bu holda, ba’zan *a* nuqtani *f* funksiyaning cheksiz uzilish nuqtasi ham deyiladi.

Agar *a* nuqta *f* funksiyaning uzulish nuqtasi bo‘lsa, u holda bu funksiya *a* nuqtada uzulishga ega deyiladi.

3-Izoh. Agar *x=a* nuqta *f* funksiyaning birinchi tur uzulish nuqtasi bo‘lsa, u holda *f(a+0)-f(a-0)* ayirmaga *f* funksiyaning *a* nuqtadagi sakrashi deyiladi.

Nuqtada uzulishga ega funksiyalarga misollar qaraymiz.

27.6-misol. $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $D(f)=R\setminus\{0\}$ funksiyaning *x=0* nuqtadagi uzulish turini aniqlang.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ bo'lganligi uchun *x=0* nuqta bu funksiyaning tuzatilishi mumkin bo'lgan uzilish nuqtasi bo'ladi. *f(0)=0* deb aniqlab olsak bu funksiya *x=0* nuqtada uzluksiz bo'lib qoladi.

27.7-misol. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $D(f)=R\setminus\{0\}$ funksiyaning *x=0* nuqtadagi uzulish turini aniqlang.

Yechish. Bizga (23.3-misolga qarang) ma'lumki bu funksiyaning *x=0* nuqtada limiti mavjud emas. Demak, bu funksiya uchun *x=0* nuqta 2-tur uzulish nuqtasi bo'ladi.

27.8-misol. $signx=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ funksiyani *x=0* nuqtada uzliksizlikka tekshiring.

Yechish. $\lim\limits_{x\to+0} signx=1$, $\lim\limits_{x\to-0} signx=-1$ bo'lganligi uchun *x=0* nuqta bu funksiya uchun 1-tur uzulish nuqta bo'ladi.

27.9-misol. $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyaning uzulish nuqtalarini toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty$ va $\lim\limits_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$ bo'lganligi uchun *x=0* nuqta bu funksiya uchun 2-tur uzulish nuqtasi bo'ladi. $a\neq 0$ nuqtalarda bu funksiyaning uzluksizligi yuqorida ko'rsatilgan edi.

27.10-misol. $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in I\end{cases}$ funksiyaning uzulish nuqtalarini toping.

Yechish. x_0 - ixtiyoriy nuqta bo'lsin. x_0 ga yaqinlashuvchi barcha hadlari rasional son bo'lgan $\{x_n\}$ va barcha hadlari irratsional son bo'lgan $\{x'_n\}$ ketma-ketliklarni qurib olamiz, ya'ni

$$\lim_{x\to\infty} x_n=\lim_{x\to\infty} x'_n=x_0$$

bo'lsin. $D(x_n)=1$ bo'lganligi uchun $\lim\limits_{x\to\infty} D(x_n)=1$ bo'ladi. $D(x'_n)=0$ bo'lganligi uchun esa $\lim\limits_{x\to\infty} D(x'_n)=0$ bo'ladi. Bu esa funksiya limitining Geyne ta'rifiga ko'ra $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ – limitning mavjud emasligini bildiradi. Demak qaralayotgan funksiya $\forall x_0\in R$ nuqtada 2-tur uzulishga ega ekan.

27.11-misol. *f(x)=xD(x), (D(x))* – 27.10-misoldagi funksiya) funksiyaning uzulish nuqtalarini toping.

Yechish. $x_0 \neq 0$ bo‘lsin. x_0 ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ rasional sonlar ketma-ketligi uchun $f(x_n)=x_n \to x_0$ bo‘ladi x_0 ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy irratsional sonlar $\{x_n'\}$ ketma-ketligi uchun $f(x_n)=0 \to 0$ bo‘ladi. Demak $x_0 \neq 0$ bo‘lsa, qaralayotgan funksiya bu nuqtada uzulishga ega ekan.

$x_0=0$ bo‘lsin, u holda $f(x_n)=x_n \to 0$ va $f(x_n')=0 \to 0$ bo‘lganligi uchun va *f(0)=0* ekanligidan ikkita nolga intiluvchi ketma-ketliklarning hadlaridan ixtiyoriy tartibda tanlab tuzilgan ketma-ketlikning ham nolga intilishi ma’lum bo‘lganligi uchun, funksiya uzluksizligining Geyne ta’rifiga ko‘ra, qaralayotgan funksiya *x=0* nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Bu funksiya bitta nuqtada uzluksiz, aniqlanish sohasining qolgan nuqtalarida uzulishga ega bo‘lgan funksiyaga misol bo‘la oladi.

3. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar.

Uzluksiz funksiyalar yig‘indisining, ko‘paytmasining va bo‘linmasining uzluksizligi.

27.1-teorema. Agar *f* va *g* funksiyalar *a* nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $f + g$, fg va $\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$ shartida) funksiyalar *a* nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Isbot. Funksiyalar yig‘indisining, ko‘paytmasining va bo‘linmasining limiti haqidagi teoremaga hamda *f*, va *g* funksiyalarning *a* nuqtada uzluksizligiga asosan

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a)+g(a),$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = f(a)\cdot g(a),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \qquad (g(a)\neq 0)$$

munosabatlar kelib chiqadi. Bu munosabatlardan $f+g$, fg va $\frac{f}{g}$ $(g(a)\neq 0)$ funksiyalarning *a* nuqtada uzluksizligi kelib chiqadi.

27.1-eslatma. Ikkita funksiya yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va nisbati uzluksiz bo‘lishidan, bu funksiyalardan har birining uzluksiz bo‘lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Funksiya uzluksizligining Geyne ma’nosidagi ta’rifini ayting.
2. Funksiya uzluksizligining Koshi ma’nosidagi ta’rifini ayting.
3. Funksiya uzluksizligining orttirmalar orqali ta’rifini ayting.

4. Funksiya uzilishining turlarini ayting va ularga misollar keltiring.
5. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallarni ayting.

6. Mustaqil yechish uchun misollar.

27.1. "$\varepsilon-\delta$" tilida quyidagi funksiyalarning uzluksizligini isbotlang.

1. $f(x)=kx+b$; **2.** $f(x)=x^2$; **3.** $f(x)=x^3$; **4.** $f(x)=\sqrt{x}$;
5. $f(x)=\sqrt[3]{x}$; **6.** $f(x)=sinx$; **7.** $f(x)=cosx$; **8.** $f(x)=arctgx$;

27.2. a ning qanday qiymatlarida quyidagi funksiyalar uzluksiz bo‘ladi?

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ a, & x=1.\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ a, & x=2.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2}, & x\neq 2\\ a, & x=2.\end{cases}$ **4.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 1\\ a, & x=1.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0.\end{cases}$ **6.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+x)^{\beta}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0.\end{cases}$

27.3. Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang.

1. $y=\dfrac{x}{4-x^2}$. **2.** $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$. **3.** $y=\dfrac{1}{x^2-4}$. **4.** $y=e^{\frac{1}{x}}$.

5. $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+1}$. **6.** $y=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$. **7.** $y=\dfrac{|x|-x}{x^2}$. **8.** $y=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.

9. $y=\dfrac{x}{\sin x}$. **10.** $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases}$

28-§. Uzluksiz funksiyalarning xossalari

Reja:

1. Nuqtada uzluksiz bo‘lgan funksiyaning lokal xossalari.
2. Kesmada uzluksiz bo’lgan funksiyalarning xossalari (global xossalar).
3. Mustaqil yechish uchun misollar.
4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Nuqtada uzluksiz bo‘lgan funksiyaning lokal xossalari

1-xossa. Agar f funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya a nuqtaning biror atrofida chegaralangan bo‘ladi, ya’ni

$$\exists\delta>0,\ \exists C>0,\ \forall x\in U_\delta(a)\to|f(x)|\le C.$$

2- xossa. Agar f funksiya a nuqtada uzluksiz va $f(a)\neq 0$ bo‘lsa, u holda a nuqtaning biror atrofida f funksiyaning ishorasi *f(a)* sonining ishorasi bilan bir xil bo‘ladi, ya’ni

$$\exists\delta>0,\ \forall x\in U_\delta(a)\to signf(x)=signf(a).$$

Isbot. 1-xossaning isboti. $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ bo‘lganligidan funksiya limitining Koshi ta’rifiga ko‘ra $\varepsilon=1$ soni uchun shunday $\delta>0$ soni topiladiki, $\forall x\in U_\delta(a),\ |f(x)-f(a)|<1$ yoki *f(a)*-1<*f(x)*<*f(a)*+1 tengsizligi bajariladi. Bu tengsizlikdan *f(x)* funksiyaning $U_\delta(a)$ to‘plamda (*a* nuqtaning δ -atrofida) chegaralanganligi kelib chiqadi.

2-xossaning isboti. Limit ta’rifiga ko‘ra $\varepsilon=\frac{|f(a)|}{2}>0$ soni uchun shunday $\delta>0$ soni topiladiki $\forall x\in U_\delta(a)\quad |f(x)-f(a)|<\frac{|f(a)|}{2}$

yoki

$$f(a)-\frac{|f(a)|}{2}<f(x)<f(a)+\frac{|f(a)|}{2} \tag{28.1}$$

tengsizlik bajariladi. Agar *f(a)>0* bo‘lsa, u holda (28.1) tengsizlikning chap qismidan $\forall x\in U_\delta(a)\quad f(x)>\frac{f(a)}{2}>0$ munosabat kelib chiqadi. Agar *f(a)<0* bo‘lsa, u holda (28.1) tengsizlikning o‘ng qismidan $\forall x\in U_\delta(a)\quad f(x)<\frac{f(a)}{2}<0$ munosabat kelib chiqadi. Demak $U_\delta(a)$ to‘plamda (*a* nuqtaning δ atrofida) *f(x)* funksiyaning ishorasi *f(a)* sonining ishorasi bilan bir xil bo‘lar ekan.

2.Kesmada uzluksiz bo’lgan funksiyalarning xossalari (global xossalar).

Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir nuqtasida hamda a nuqtada o‘ngdan va *b* nuqtada chapdan uzluksiz bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz deyiladi.

28.1-teorema (Veyershtrassning birinchi teoremasi).

Agar f funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya $[a,b]$ kesmada chegaralangan bo‘ladi, ya’ni

$$\exists C>0,\forall x\in[a,b]\to|f(x)|\le C. \tag{28.2}$$

Isbot. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada chegaralanmagan bo‘lsin. U holda

$$\forall C>0,\exists x_C\epsilon[a,b]\to|f(x)|>C \tag{28.3}$$

munosabat bajariladi.

(28.3) shartda C ni 1,2 ... , n .... natural sonlar deb olib

$$\forall n \in N, \exists x_n \in [a,b] \rightarrow |f(x_n)| > n \tag{28.4}$$

tengsizlikni olamiz, $\forall n \in N, x_n \in [a,b]$ bo‘lganligi uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladi. Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko‘ra har qanday chegaralangan ketma-ketliklardan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinligidan, shunday $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik va ξ nuqta topilib

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \tag{28.5}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. (28.5) ga asosan

$$\forall k \in N, \ \ a \leq x_{n_k} \leq b \tag{28.6}$$

munosabat bajariladi. (28.5) va (28.6) dan ketma-ketlik limitining tengsizlikka bog’liq xossalaridan $\xi \epsilon [a,b]$ ekanligini olamiz. (28.5) dan va $f(x)$ funksiyaning uzluksizligidan

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(\xi) \tag{28.7}$$

tenglikni olamiz.

Ikkinchi tomondan (28.4) tasdiq barcha $n \in N$ uchun bajarilganligi uchun, xususiy holda $n = n_k$ $(k = 1,2,3 \dots)$ bo‘lganda ham bajariladi, ya’ni

$$|f\left(x_{n_k}\right)| > n_k$$

Bundan esa $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = +\infty$ ekanligini olamiz. Bu tenglik (28.7) tasdiqqa qarama-qarshidir. Shuning uchun (28.3) shart bajarilmaydi. Demak, (28.2) tasdiq o‘rinli ekan.

1-Izoh. 28.1-teorema $(a;b)$ intervalda o‘rinli emas. Masalan $f(x) = \frac{1}{x-1}$ funksiya $(1,2)$ intervalda chegaralanmagan. $f(x) = 3x^3$ funksiya R da uzluksiz, lekin R da chegaralanmagan.

28.2-teorema. **(Veyershtrassning ikkinchi teoremasi).** Agar f funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya o‘zining aniq quyi va aniq yuqori chegarasiga erishadi, ya’ni

$$\exists \xi \in [a,b], \ f(\xi) = \sup_{x \epsilon [a,b]} f(x), \tag{28.8}$$

$$\exists \xi^1 \in [a,b], \ f(\xi^1) = \inf_{x \epsilon [a,b]} f(x). \tag{28.9}$$

Isbot. Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko‘ra $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda chegaralangan. Shuning uchun bu funksiyaning aniq yuqori chegarasi va aniq quyi chegarasi mavjud.

Endi (28.8) tenglikni isbotlaylik. $M = \sup\limits_{x \epsilon [a,b]} f(x)$ bo‘lsin. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya aniq yuqori chegarasiga erishmasin, ya’ni $[a,b]$ segmentning barcha nuqtalarida M dan qat’iy kichik qiymat qabul qilsin. U holda

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz va qat'iy musbat funksiya bo'ladi Veyershtrassning birinchi teoremasiga asosan bu funksiya $[a, b]$ segmentda chegaralangan bo'ladi, ya'ni

$$\exists A > 0, \forall x \in [a, b] \to F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq A \tag{28.10}$$

shart bajariladi. $M - f(x)$ funksiya qat'iy musbat funksiya bo'lganligi uchun (28.10) dan

$$\forall x \epsilon [a, b] \quad f(x) \leq M - \frac{1}{A} \tag{28.11}$$

tasdiqni olamiz. (28.11) tengsizlik M sonining $f(x)$ funksiya uchun aniq yuqori chegara bo'la olmasligini ko'rsatadi.Bu qarama-qarshilik funksiya o'zining aniq yuqori chegarasiga erisha olmaydi degan farazimizning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi. Demak, (28.8) munosabat o'rinli ekan. (28.9) tenglik ham shunga o'xshash isbotlanadi.

2-Izoh. $[a, b]$ segmentda uzluksiz funksiya o'zining aniq yuqori va aniq quyi chegaralariga erishganligi uchun, M aniq yuqori chegarani funksiyaning maksimal qiymati, aniq quyi chegarani funksiyaning minimal qiymati deb ataymiz. Veyershtrassning ikkinchi teoremasini bu mulohazalardan keyin quyidagicha ham ifodalash mumkin.

28.3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya maksimal va minimal qiymatlarga ega bo'ladi.

$f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ segmentdagi maksimal va minimal qiymatlari mos ravishda $\max\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$, $\min\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ kabi belgilanadi.

Funksiyaning oraliq qiymatlari haqidagi teoremalar.

28.4-teorema. (Funksiyaning nollari haqidagi Bolsano-Koshi teoremasi) Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va uning chetki nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni $f(a) \cdot f(b) < 0$ bo'lsa, u holda

$$\exists c \in [a, b], \ f(c) = 0 \tag{28.12}$$

shart bajariladi.

Isbot. Umumiylikka zarar keltirmasdan, $f(a) < 0, f(b) > 0$ deb olamiz. $f(x) < 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x lar to'plami A_{-} bo'sh emas va yuqoridan chegaralangan (Bu to'plamga hech bo'lmaganda a nuqta qarashli va uning elementlari b dan kichik). Xuddi shunday, $f(x) > 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x nuqtalar to'plami A_{+} ham bo'sh emas va quyidan chegaralangan. Bu to'plamlar, $\forall x \epsilon A_{-}$ va $\forall y \epsilon A_{+}$ uchun

$$x \leq supA_{-} \leq infA_{+} \leq y$$

munosabatni qanoatlantiradi. $c = supA_{-}$ belgilashni kiritamiz va $f(c) = 0$ tenglik o'rinli bo'lishini isbotlaymiz. Bu yerda c nuqta $[a, b]$ kesmaning ichki nuqtasi bo‘ladi. Haqiqatdan, c nuqta a nuqtaga teng bo‘la olmaydi, chunki funksiya a nuqtada o‘ngdan uzluksiz bo‘lganligidan a nuqtaning shunday o‘ng $(a; a+\delta_0)$ atrofi topiladiki, $\forall x \epsilon (a; a+\delta_0)$ uchun $f(x) < 0$ bo‘ladi. Shunga o‘xshash c nuqta b nuqtaga teng bo‘la olmaydi. Chunki $f(b) > 0$ bo‘lganligi va $f(x)$ funksiyani b nuqtada chapdan uzluksizligidan, b nuqtaning shunday chap $(b-\delta_1; b)$ atrofi topilib, $\forall x \epsilon (b-\delta_1; b)$ $f(x) > 0$ bo‘ladi. Agar $f(c) = 0$ tenglik bajarilmasa c ichki nuqta bo‘lganligi uchun uning shunday $(c-\delta, c+\delta)$ atrofi toplib, $\forall x \epsilon (c-\delta; c+\delta)$ $f(x)$ bir xil ishorali bo‘lib qoladi. Bu esa aniq yuqori chegaraning tarifiga ko‘ra $(c-\delta; c)$ atrofda aqalli bitta x_0 nuqta topilib, $f(x_0) < 0$ bo‘lishi; $(c; c+\delta)$ atrofda ham aqalli bitta x^1 nuqta topilib, $f(x^1) > 0$ bo‘lishiga qarama-qarshi bo‘ladi. Bu qarama-qarshilik $f(c) = 0$ ekanligini isbotlaydi.

28.5-teorema.(Funksiyaning oraliq qiymatlari haqidagi Bolsano-Koshi teoremasi). Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va $f(a) \neq f(b)$ bo‘lsa, u holda $f(a)$ va $f(b)$ sonlar orasida ixtiyoriy C soni uchun shunday $\xi \epsilon [a, b]$ nuqta topilib, $f(\xi) = C$ tenglik bajariladi.

Isbot. $f(a) = A$ va$f(b) = B$ belgilashlarni kiritamiz. Shartga ko‘ra $A \neq B$. Aniqlik uchun $A < B$ bo‘lsin. Biz

$$\forall C \in [A, B],\ \exists \xi \in [a, b] \rightarrow f(\xi) = C \qquad (28.13)$$

munosabatning bajarilishni ko‘rsatamiz

Agar $C = A$ bo‘lsa, u holda (28.13) tenglik $\xi = a$ bo‘lganda; $C = B$ bo‘lsa, u holda (28.13) tenglik $\xi = b$ bo‘lganda bajariladi.

Endi $A < C < B$ bo‘lsin. $\varphi(x) = f(x) - C$ belgilashni kiritib, $\varphi(a) = A - C < 0$, $\varphi(b) = B - C > 0$ ekanligini ko‘ramiz. $\varphi(x)$ funksiya 28.4-teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun $\exists \xi \in [a, b]$ $\varphi(\xi) = 0$ bo‘ladi. Bu esa $f(\xi) - C = 0$, ya’ni $f(\xi) = C$ tenglik bajariishini ko‘rsatadi.

3. Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Agar f funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va $m = \inf\limits_{x \epsilon [a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \epsilon [a,b]} f(x)$ bo‘lsa, u holda f funksiyaning $[a, b]$ segmentdagi qiymatlari to‘plami $[m; M]$ kesmadan iborat bo‘lishini isbotlang

2. Veyershtrassning birinchi teoremasi (a, b) interval uchun o‘rinlimi? Tasdig’ingizni misollar yordamida asoslang .

3. 3-teoremada uzluksizlik sharti olib tashlansa, teorema o‘rinli bo‘lmasligini misollar yordamida tushuntiring.

4. Veyershtrassning birinchi va ikkinchi teoremalarida $[a, b]$ kesma o‘rniga (a, b) oraliq olinsa, bu teorema o‘rinli bo‘lmasligini misollar orqali tasdiqlang.

5. Veyershtrassning birinchi va ikkinchi teoremalarida uzluksizlik sharti olib tashlansa, teorema o‘rinli bo‘lmasligini misollar yordamida tushuntiring.

4.O’z-o’zini tekshirish savollari.

1. Uzluksiz funksiyaning lokal (nuqtada uzluksiz bo‘lgan funksiyalarning xossalari) xossalarini ayting.
2. Bolsano – Koshining birinchi teoremasini ayting va uni isbot qiling.
3. Bolsano – Koshining ikkinchi teoremasini ayting va uniisbot qiling.
4. Veyershtrassning birinchi teoremasini ayting va uni isbot qiling.
5. Veyershtrassning ikkinchi teoremasini ayting va uni isbot qiling.

29-§. Murakkab funksiyaning uzluksizligi, monoton funksiyalarning uzluksizligi

Reja:

1. Murakkab funksiyaning uzluksizligi.
1. Monoton funksiyalarning uzluksizligi.
3. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.
4. Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Murakkab funksiyaning uzluksizligi. $y=f(x)$ funksiya X to‘plamda, $z=\varphi(y)$ funksiya esa Y to‘plamda aniqlangan va $E(f)\subseteq Y$ bo‘lsin, u holda ular yordamida $z=\varphi(f(x))$ murakkab funksiya tuzish mumkin bo‘ladi.

29.1-teorema. $y=f(x)$ funksiya $a\in X$ nuqtada, $z=\varphi(y)$ funksiya esa a nuqtaga mos kelgan $y_a=f(a)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, $z=\varphi(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Isboti. $\varphi(y)$ funksiya $y_a=f(a)$ nuqtada uzliksiz bo‘lganligi uchun $\forall\varepsilon>0$ shunday $\sigma>0$ soni topiladiki $|\mathrm{y}-y_a|<\sigma$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy y lar uchun $|\varphi(y)-\varphi(y_a)|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

Ikkinchi tomondan *f(x)* funksiya $a\epsilon X$ nuqtada uzluksiz bo’lganligidan $\forall\sigma>0$ uchun shunday $\delta>0$ soni topiladiki $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x lar uchun $|f(x)-f(a)|=|y-y_a|<\sigma$ tengsizlik bajariladi.

Bu mulohazalardan $\sigma>0$ soni uchun

$$|\varphi(f(x))-\varphi(y_a)|=|\varphi(f(x))-\varphi(f(a))|<\varepsilon$$

munosabatning bajarilishi kelib chiqadi.

Demak, $\varphi(f(x))$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘lar ekan.

29.1-misol. Ushbu

1) $y=\sin x^n \quad (n\in N)$; 2) $y=\sin(\log 4x)$;

funksiyalarni uzluksizlikka tekshiring.

Yechilishi. 1) $u = x^n$ deb, $y = \sin u$ funksiyaga ega bo‘lamiz. Ma’lumki, $y = \sin u$ funksiya, $\forall u \in R$ uchun uzluksiz. $u = x^n$ funksiya esa, darajali funksiya sifatida $\forall x \in R$ da uzluksiz. Demak, $y = \sin x^n$ murakkab funksiya 29.1-teoremaga asosan R da uzluksiz bo‘ladi.

2) Ma’lumki, $u = \log_3 4x$ funksiya $(0;\infty)$ da uzluksiz, $y = \sin u$ funksiya esa, R da uzluksiz. Demak, murakkab funksiyalarning uzluksizligi haqidagi 29.1-teoremaga ko‘ra, $y = sin(\log_3 4x)$ murakkab funksiya $(0;\infty)$ oraliqda uzluksizdir.

2. Monoton funksiyalarning uzluksizligi.

29.2-teorema. Agar f funksiya *[a,b]* kesmada aniqlangan va monoton bo‘lsa, u holda bu funksiya *(a,b)* intervalning nuqtalarida faqat birinchi tur uzulishga ega bo‘lishi mumkin.

Isbot. $x_0 \in (a,b)$ – ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. Monoton funksiyaning limiti haqidagi teoremaga ko‘ra f funksiya x_0 nuqtada chap va o‘ng limitlarga ega. Agar masalan f – o‘suvchi funksiya bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Agar $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \ne \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ bo‘lsa, u holda x_0 nuqta f funksiyaning 1-tur uzulish nuqtasi bo‘ladi. Agar $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ bo‘lsa, u holda x_0 nuqtada f funksiya uzluksiz bo‘ladi. Shunga o‘xshash tasdiqni f funksiya kamayuvchi bo‘lgan holda ham isbotlash mumkin.

29.3- teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda monoton bo‘lsa, u shu to‘plamda sanoqli sondagi nuqtalarda uzilishga ega.

Isboti. Aniqlik uchun $f(x)$ funksiya X to‘plamda kamayuvchi deb faraz qilaylik. $a \in X$ nuqta $f(x)$ ning uzilish nuqtasi bo‘lsin. Ma’lumki, monoton funksiya aniqlanish sohasining har bir nuqtasida o‘ng va chap elimitlarga ega va $f(a-0) < f(a+0)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Haqiqiy sonlarning zichlik xossasiga asosan, shunday ratsional $r = r(a) = \frac{p}{q}$ son mavjudki, $f(a-0) < r(a) < f(a+0)$ o‘rinli bo‘ladi.

Agar a_1 va a_2 nuqtalar f funksiyaning uzilish nuqtalari bo‘lib, $a_2 > a_1$ bo‘lsa, u holda $r(a_2) > r(a_1)$ bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$r(a_2) > f(a_2 - 0) \ge f(a_1 + 0) > r(a_1)$$

munosabatga ko‘ra yuqoridagi tengsizlik o‘rinli. Shunday qilib, har bir uzilish nuqtasiga bitta ratsional sonni mos qo‘yish mumkin ekan. Ratsional sonlar to‘plami sanoqli bo‘lgani uchun monoton funksiyaning uzilish nuqtalari ham sanoqli ekan degan xulosa kelib chiqadi.

29.4- teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lib, uning qiymatlari Y oraliqni tutash to‘ldirsa (ya’ni har bir $y \in Y$ qiymatini funksiya hech bo‘lmaganda bir marta qabul etsa), u holda bu funksiya X da uzluksiz bo‘ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni $f(x)$ funksiya teoremaning shartini qanoatlantirsa ham, u biror $a \in X$ nuqtada uzilishga ega bo‘lsin. Masalan, chapdan uzilishga ega bo‘lsin. Yuqorida ko‘rdikki, $x < x_0$ bo‘lsa, $f(x) < f(x_0 - 0)$, $x > x_0$ bo‘lganda esa $f(x) \geq f(x_0)$ bo‘ladi. Shuning uchun $f(x_0 - 0)$ va $f(x_0)$ sonlari orasidagi y ni funksiya qabul qila olmaydi (x_0 nuqtada chapdan uzilishga ega bo‘lgani uchun $f(x_0 - 0) < f(x_0)$ qat’iy tengsizlik o‘rinli). Bu esa teorema shartiga qarama-qarshi. Demak f funksiya uzilishga ega emas.

3.O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremani ayting va uni isbotlang.
2.Monoton funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremani ayting va uni isbotlang.
3.Monoton funksiyaning uzilish nuqtalarining soni qancha bo‘lishi mumkin?

4. Mustaqil yechish uchun misollar.

29.1. $f(x)$ funksiya (a,b) intervada monoton bo‘lsin. $f(x)$ funksiyaning uzluksiz nuqtalari to‘plami ko‘pi bilan sanoqli bo‘lishini isbotlang.

29.2. Agar f(x) funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va qat’iy kamayuvchi bo‘lsa, u holda unga teskari g funksiya $[f(b), f(a)]$ kesmada uzluksiz va qat’iy kamayuvchi bo‘ladi.

29.3. Agar f funksiya $(a.b)$ intervalda qat’iy o‘suvchi va uzluksiz bo‘lsa, u holda unga teskari g funksiya (A,B) oraliqda qat’iy o‘suvchi va uzluksiz bo‘ladimi? Bu yerda $A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x), B = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

29.4. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan bo‘lib, monoton bo‘lsa, u holda bu funksiya $[a,b]$ segmentda faqat birinchi tur uzulishga ega bo‘lishi mumkunligini isbotlang.

29.5. $[a,b]$ segmentda aniqlagan monoton funksiyaning uzulish nuqtalari to‘plami ko‘pi bilan sanoqli bo‘lishini isbotlang.

29.6. $\varphi(t)$ funksiya $[a,b]$ segmentda o‘suvchi, $f(x)$ funksiya $[A,B]$ segmentda monoton bo‘lsa $\big(A = \varphi(a), B = \varphi(b)\big), f(\varphi(t))$ funksiya monoton bo‘ladimi?

29.7. $\varphi(t)$ va $f(x)$ oldingi misoldagi funksiyalar bo‘lsin. $\varphi(t)$ funksiya $t_0(a < t_0 < b)$ nuqtada uzulishga ega bo‘lsa, $f(\varphi(t))$ funksiya ham bu nuqtada uzulishga ega bo‘ladimi?

30-§. Teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi, elementar funksiyalarning uzluksizligi

Reja:

1. Teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi.
2. Elementar funksiyalarning uzluksizligi.
3. Limitlarni hisoblashda funksiyaning uzluksizligidan foydalanish.
4. Mustaqil yechish uchun misollar.
5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi. Teskari funksiya tushunchasi 13-§ da kiritilgan edi. Endi teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqidagi teoremani isbotlaymiz.

30.1-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va qat’iy o‘suvchi bo‘lsa, u holda $[f(a), f(b)]$ kesmada $y = f(x)$ funksiyaga teskari $x = g(y)$ funksiya aniqlangan va u uzluksiz hamda qat’iy o‘suvchi bo‘ladi.

Isbot. Teskari funksiyaning mavjudligi. $A=f(a)$, $B=f(b)$ belgilashlarni kiritamiz. $f(x)$ funksiya o‘suvchi bo‘lganligi sababli barcha $x \in [a,b]$ lar uchun $A \le f(x) \le B$ tengsizlik bajariladi, bu yerda $A = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), B = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. $f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lganligi sababli uning qiymatlari to‘plami $E(f) = [A,B]$ bo‘ladi. Teskari funksiyaning ta'rifiga ko‘ra har bir $y_0 \in [A,B]$ uchun

$$f(x) = y_0 \qquad (30.1)$$

tenglama $[a,b]$ kesmada yagona $x = x_0$ $(x_0 \in [a,b])$ yechimga ega bo‘lishini isbotlashimiz kerak. Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasiga ko‘ra (30.1) tenglama hech bo‘lmaganda bitta ildizga ega bo‘ladi. (30.1) tenglama $[a,b]$ kesmada yagona ildizga ega bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Faraz qilamiz, (30.1) tenglama $x = x_0$ ildiz bilan birga yana bitta $x = \tilde{x}_0$ ildizga ega bo‘lsin, bu yerda $\tilde{x}_0 \neq x_0$. U holda $f(\tilde{x}_0) = y_0, \tilde{x}_0 \in [a,b]$ bo‘ladi.

Endi $\tilde{x}_0 > x_0$ bo‘lsin deb olamiz. U holda f funksiyani $[a,b]$ kesmada qat’iy o‘suvchiligidan $f(\tilde{x}_0) > f(x_0)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Boshqa tomondan $f(\tilde{x}_0) = f(x_0) = y_0$. Bu yerdan $\tilde{x}_0 > x_0$ tengsizlikning bajarilmasligi kelib chiqadi. Demak $\tilde{x}_0 = x_0$ ekan. Teskari funksiyaning mavjudligi isbotlandi, ya’ni $[A, B]$ kesmada f funksiyaga teskari $x = f^{-1}(y) = g(y)$ funksiya aniqlangan va $E(g) = [a,b]$) ,

$$g(f(x)) = x, x \in [a,b], f(g(y)) = y, y \in [A,B]. \qquad (30.2)$$

Teskari funksiyaning monotonligi. $g(y)$ funksiyaning $[A, B]$ kesmada qat’iy o‘suvchi ekanligini , ya’ni

$$\forall y_1,\ y_2 \in [A,B], y_1 < y_2 \to g(y_1) < g(y_2) \qquad (30.3)$$

bo‘lishini isbotlaymiz.

Teskaridan faraz qilamiz , (30.3) shart bajarilmasin, ya’ni

$$\forall \tilde{y}_1,\ \tilde{y}_2 \in [A, B]: \tilde{y}_1 < \tilde{y}_2 \to g(\tilde{y}_1) \geq g(\tilde{y}_2) \qquad (30.4)$$

shart bajarilsin. $\tilde{x}_1 = g(\tilde{y}_1), \tilde{x}_2 = g(\tilde{y}_2)$ belgilashlarni kiritsak, u holda (30.4) shartga ko‘ra $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in [a, b], \tilde{x}_1 \geq \tilde{x}_2$ va (30.2) shartga ko‘ra $f(\tilde{x}_1) = \tilde{y}_1, f(\tilde{x}_2) = \tilde{y}_2$ bo‘ladi. f funksiya qat’iy o‘suvchi bo‘lganligi uchun $\tilde{x}_1 \geq \tilde{x}_2$ tengsizlikdan $f(\tilde{x}_1) > f(\tilde{x}_2)$ tengsizlik kelib chiqadi, ya’ni $\tilde{y}_1 \geq \tilde{y}_2$ bo‘lishi kelib chiqadi. Bunday bo‘lishi mumkin emas, (30.4) shartga ko‘ra $\tilde{y}_1 < \tilde{y}_2$. Shunday qilib, (30.4) tasdiq bajarilmas ekan. Shuning uchun $g(y)$ qat’iy o‘suvchi funksiya.

Teskari funksiyaning uzluksizligi. (A, B) intervalning ixtiyoriy y_0 nuqtasini olamiz. g funksiyaning y_0 nuqtada uzluksizligini isbotlaymiz. Buning uchun quyidagi

$$g(y_0 - 0) = g(y_0),\ g(y_0 + 0) = g(y_0) \qquad (30.5)$$

tengliklarning bajarilishini ko‘rsatishimiz yetarli, bu yerda $g(y_0 - 0)$, $g(y_0 + 0)$ lar mos ravishda g funksiyaning y_0 nuqtadagi mos ravishda chap va o‘ng limitlari.

Monoton funksiyaning limiti haqidagi teoremaga asosan y_0 nuqtada g funksiyaning chap va o‘ng limitlari mavjud va

$$g(y_0 - 0) \leq g(y_0) \leq g(y_0 + 0) \qquad (30.6)$$

tengsizliklar bajariladi. (30.5) tengliklardan hech bo‘lmaganda bittasi bajarilmasin, masalan, $g(y_0 - 0) \neq g(y_0)$, u holda

$$g(y_0 - 0) < g(y_0). \qquad (30.7)$$

Barcha $y \in [A, y_0]$ lar uchun $a \leq g(y) \leq g(y_0 - 0)$ tengsizlik bajariladi, bunda $g(y_0 - 0) = \sup\limits_{a \leq y < y_0} g(y)$, barcha $y \in [y_0, B]$ lar uchun $g(y_0) \leq g(y) \leq b$ tengsizlik o‘rinli, u holda (30.7) tengsizlikdan $\Delta = \big(g(y_0 - 0), g(y_0)\big)$ interval g funksiyaning qiymatlar to‘plamiga tegishli emasligi kelib chiqadi. Bu $[a, b]$ kesmaning hamma nuqtalari, shu jumladan Δ intervalning nuqtalari ham $\mathrm{E(g)}$ to‘plamga tegishlilgiga qarama-qarshi. Xuddi shunday, (30.5) munosabatning ikkinchi, ya’ni $g(y_0 + 0) = g(y_0)$ tenglikning o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish mumkin. Shunday usul bilan g funksiyaning A nuqtada o‘ngdan va B nuqtada chapdan uzluksizligini ko‘rsatish mumkin. Teorema isbot bo‘ldi.

30.1-eslatma. Agar f funksiya [a,b] kesmada uzluksiz va qat’iy kamayuvchi bo‘lsa, u holda unga teskari g funksiya [*f(b)*, *f*(*a)*] kesmada uzluksiz va qat’iy kamayuvchi bo‘ladi.

30.2-eslatma. Agar f funksiya intervalda (chekli yoki cheksiz) va yarim intervalda aniqlangan bo‘lsa, unga teskari g funksiya haqidagi 30.1-teoremaga o‘xshash teorema ham isbotlanadi.

Agar f funksiya (a,b) intervalda aniqlangan, qat'iy o'suvchi va uzluksiz bo'lsa, u holda unga teskari g funksiya (A,B) intervalda aniqlangan, qat'iy o'suvchi va uzluksiz bo'ladi, bu yerda

$$A = \lim_{x \to a+0} f(x), B = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

2.Elementar funksiyalarning uzluksizligi. n - chi darajali quyidagi

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

ko'phadni qaraymiz. Bu funksiya R da uzluksiz funksiya.

Haqiqatdan ham, y=C (C-o'zgarmas son) R da uzluksiz, demak, $\forall x$ da $\Delta y = 0$. $y=x$ funksiya R da uzluksiz, demak, $\Delta x \to 0$ da $\Delta y = \Delta x \to 0$. Shuning uchun $y = a_k x^k$ ($k \in N$) funksiya uzluksiz funksiyalarning ko'paytmasi sifatida R da uzluksiz funksiya. Ravshanki, $P_n(x)$ ko'phad $a_k x^k$, $(k = 0,1,2, \dots, n)$ ko'rinishdagi uzluksiz funksiyalarning yig'indisi bo'lganligi uchun u R da uzluksiz funksiya.

Rasional funksiya, ya'ni $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ funksiya $Q_m(x)$ ko'phadning ildizlaridan boshqa hamma nuqtalarda uzluksiz funksiya, chunki agar $Q_m(x_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ ko'phadlarning uzluksizligidan $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi kelib chiqadi, bunda $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ lar mos ravishda n - chi va m - chi darajali ko'phadlar.

30.1-tasdiq. $y=sinx$ va $y=cosx$ R da uzluksiz funksiyalar.

Isbot. x_0 R dagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin. U holda

$$sinx - sinx_0 = 2sin\frac{x - x_0}{2} cos\frac{x + x_0}{2}.$$

$\forall x \in R$ uchun $|sinx| \leq |x|$ bo'lganligi uchun

$$\left|sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq \left|\frac{x-x_0}{2}\right| \text{ va } \left|cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leq 1.$$

U holda $|sinx - sinx_0| \leq |x - x_0|$ bo'lganligi uchun $y=sinx$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz.

Xuddi shunday $cosx - cosx_0 = -2sin\frac{x-x_0}{2} sin\frac{x+}{2}$ formuladan $|cosx - cosx_0| \leq |x - x_0|$ tengsizlik kelib chiqadi, shuning uchun $y=cosx$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Tasdiq isbot bo'ldi.

$y=sinx$ va $y=cosx$ funksiyalarning uzluksizligidan $tgx = \frac{sinx}{cosx}$ funksiyaning $cosx \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, (n \in Z)$ bo'lganda uzluksizligi, $ctgx = \frac{cosx}{sinx}$ funksiyaning esa $\sin x \neq 0, x \neq \pi n, (n \in Z)$ bo'lganda uzluksizligi kelib chiqadi.

Teskari funksiyaning uzluksizligi haqidagi 30.1-teoremaga asosan. $y = \arcsin x$ funksiya $[-1,1]$ da uzluksiz va monoton bo'ladi. Qolgan teskari trigonometrik funksiyalarning ham aniqlanish sohasida uzluksizligi yuqoridagi singari ko‘rsatiladi.

$y = a_k x^k$ $(k \in N)$ funksiya uzluksiz shu sababli darajali $y = x^n$ ($n -$ manfiy bo’lmagan butun son) funksiya butun sonlar o‘qida uzluksiz.

Agar $n -$ butun manfiy son bo‘lsa, u holda $y = x^n$ funksiya R\{0} da uzluksiz bo‘ladi. $x = 0$ nuqtada funksiya aniqlanmagan. $y(x)$ funksiyaning $x \to 0$ dagi limiti mavjud emas.

$y = x^{\alpha}$ (darajasi ixtiyoriy haqiqiy son) funksiya $(0, \infty)$ intervalda uzluksiz. Agar $\alpha > 0$ bo‘lsa, u holda $0^{\alpha} = 0$ deb olsak, u holda

$$x^{\alpha} = \begin{cases} \alpha \geq 0 \ \text{ bo'lganda, } [0; +\infty) \text{ da uzluksiz} \\ \alpha < 0 \ \text{ bo'lganda, } (0; +\infty) \text{ da uzluksiz.} \end{cases}$$

Agar $y = x^{\alpha}$ funksiya $x < 0$ da aniqlangan bo‘lsa, u holda xuddi yuqoridagi singari ($\alpha = \frac{p}{q}$, q juft emas), uning shu sohada uzluksizligini ko‘rsatish mumkin.

$y = a^x$ $(a > 0)$ ko‘rsatkichli funksiya $(-\infty, +\infty)$ da aniqlangan. Bu funksiyaning $(-\infty, +\infty)$ da uzluksiz ekanligini ko‘rsatish qiyin emas.

$y = \log_a x$ funksiya, $x = a^y$ $(a > 0)$ funksiyaga teskari funksiya. $x = a^y$ funksiya $-\infty < y < \infty$ intervalda monoton va uzluksiz. $a > 1$ bulganda a^y funksiyaning qiymatlar to‘plami $(0; +\infty)$ dan iborat bo‘ladi, chunki $y \to -\infty$ da $a^y \to 0$, $y \to +\infty$ da esa $a^y \to +\infty$. Teskari funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremaga asosan $y = \log_a x$ funksiya $(0; +\infty)$ intervalda aniqlangan, monoton va uzluksiz bo‘ladi.

a>0 bo‘lganda a^x funksiya R da uzluksiz, xususiy holda e^x funksiya $(-\infty, \infty)$ intervalda uzluksiz bo‘lgani uchun,

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad thx = \frac{shx}{chx}$$

funksiyalar R da uzluksiz bo‘ladi. $cthx = \frac{chx}{shx}$ funksiya esa $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ da uzluksiz.

3. Limitlarni hisoblashda funksiyaning uzluksizligidan foydalanish.

$f\colon X \to Y, a \epsilon X$ nuqta X ning limit nuqtasi bo‘lsin. $z = \varphi(y)$ funksiya $Y \subset R$ to‘plamda aniqlangan bo‘lsin. Bu funksiyalar yordamida $z = \varphi\big(f(x)\big)$ murakkab funksiya tuzilgan bo‘lsin.

Agar $\lim\limits_{x \to a} f(x) = y_a$ mavjud bo‘lib, $z = \varphi(y)$ funksiya y_a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x \to a} \varphi\big(f(x)\big)$ limit mavjud va $\lim\limits_{x \to a} \varphi\big(f(x)\big) = \varphi(y_a)$ tenglik o‘rinli.

Haqiqatdan ham, $x \to a$ da $f(x) \to y_a$ va $\varphi(y)$ funksiya y_a nuqtada uzluksiz, ya'ni $y \to y_a$ da $\varphi(y) \to \varphi(y_a)$. U holda murakkab funksiyaning limiti haqidagi teoremaga asosan $x \to a$ da $\varphi\big(f(x)\big)$ funksiya limitga ega va

$$\lim_{x\to a}\varphi\big(f(x)\big) = \lim_{y\to y_a}\varphi\big(f(x)\big) = \varphi(y_a)$$

tengliklar o'rinli. Bu tengliklardan uzluksiz funksiyalar uchun funksiya ishorasi ostida limitga o'tish qoidasi kelib chiqadi: $\lim\limits_{x\to a}\varphi\big(f(x)\big) = \varphi\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$.

Xususan, $f(x) = x$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \varphi\left(\lim\limits_{x\to a} x\right) = \varphi(a)$.

Quyidagi muhim limitlarni hisoblaymiz:

1^0. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$. **$2^0$**. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = lna$. **$3^0$**. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{((1+x)^\alpha-1)}{x} = \alpha$.

1^0. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$.

2^0. $a^x - 1 = t$ almashtirish olsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a e} = lna.$$

3^0. Bunda $(1+x)^\alpha - 1 = t$ deb, so'ngra $\alpha = \frac{ln(1+t)}{ln(1+x)}$ va $x \to 0$ da $t \to 0$ bo'lishini hisobga olsak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{t}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{t}{ln(1+t)}\cdot\frac{ln(1+t)}{ln(1+x)}\cdot\frac{ln(1+x)}{x}\right] = \alpha$$

kelib chiqadi.

4^0. Ikkita $g: X \to R$ va $f: X \to R$ funksiyalar berilgan, a nuqta X ning limit nuqtasi bo'lsin. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b\ (b>0)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = b^c$ munosabat o'rinli.

Isboti. $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalarning uzluksizligidan $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}[g(x)lnf(x)]} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\lim\limits_{x\to a} lnf(x)} = b^c$ munosabat kelib chiqadi.

4. Mustaqil yechish uchun misollar.

30.1. $f(x) = 2x + \sin x$ funksiya uchun teskari funksiya mavjudmi?

30.2. $f(x) = \ln^2 x$ funksiya uchun teskari funksiya mavjudmi?

30.3. Agra $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo'lsin. $f(x)$ funksyaga teskari funksiyaning mavjud bo'lishi uchun uning qat'iy monoton bo'lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

30.4. $f(x) = x^2, x \in [0,2]$ funksiyaga teskari funksiyani toping va uning uzluksiz ekanligini tekshiring.

30.5. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{agar } x - \text{ratsional va } [0,1] \text{ } s\text{egmentga qarashli} \\ 1, \text{agar } x - \text{irratsional va } [0,1] \text{ segmentga qarashli} \end{cases}$
funksiyaga teskari funksiya mavjudmi? Bu funksiyani uzuksizlikka tekhiring.
30.6. $f(x) = signx$ funksiyaga teskari funksiya mavjudmi?
30.7. Quyidagi elementar funksiyalarni uzluksizlikka tekshiring.

1) $y = x^n, x\epsilon[0, +\infty)$.
2) $y = a^x, a > 0, a \neq 1$.
3) $y = \log_a x\,, x\epsilon(0; +\infty), a > 0, a \neq 1$.
4) $y = sinx\,, y = cosx$.

30.8. Quydagi teskari trigonometrik funksiyalarni uzluksizlikka tekshiring.

1) $y = arccosx, x \in [-1; 1]$.
2) $y = arcsinx, x \in [-1; 1]$.
3) $y = arctgx,\ \ y = arcctgx$.

5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Teskari funksiyaning uzluksizligi va mavjudligi haqidagi teoremalarni ayting va ularni isbotlang.
2.Elementlar funksiyaning uzluksizlik sohasini ayting.
3.Muhim limitlarni isbotlang.

31-§. Funksiyaning tekis uzluksizligi

Reja:

1. Funksiyaning tekis uzluksizligi.
2. Kompakt to‘plamda uzluksiz bo‘lgan funksiyalarning xossalari.
3. Mustaqil yechish uchun misollar.
4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Funksiyaning tekis uzluksizligi. $f(x)$ **f**unksiya X to‘plamda aniqlangan bo‘lsin. X to‘plamning har bir nuqtasi uning limitik nuqtasi bo‘lsin.

31.1-ta’rif. f funksiya X to‘plamda aniqlangan bo‘lsin. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son uchun $\exists\delta > 0$, $|x' - x''| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall x',\ x'' \in X$ lar uchun $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, f funksiya X to‘plamda tekis uzluksiz deyiladi.

Bu ta’rifning inkorini quyidagicha yozish mumkin:

$$\exists\varepsilon > 0,\ \forall\delta(\varepsilon) > 0,\ \exists x', x'' \in X,\ |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon.$$

31.1-misol. $y = \sqrt[3]{x}$ funksiyaning [1,2] segmentda tekis uzluksizlikka tekshiring. Agar $|\,f(x') - f(x'')|$ ayirmani baholasak

$$|\,f(x') - f(x'')| = \left|\sqrt[3]{x'} - \sqrt[3]{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt[3]{x''^2} + \sqrt[3]{x''x'} + \sqrt[3]{x'^2}} \leq \frac{|x' - x''|}{3} < \frac{\delta}{3}$$

kelib chiqadi. Agar $\delta = 3\varepsilon$ deb olsak, $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ bo‘ladi. Demak, 31.1-ta’rifga ko‘ra $y = \sqrt[3]{x}$ funksiya [1,2] segmentda tekis uzluksiz ekan.

31.2-misol. $y = \sin x^2$, $x \in R$ funksiyani tekis uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Agar $x_n' = \sqrt{2\pi n}$ va $x_n'' = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ deb olsak, u holda x_n' va x_n'' nuqtalar orasidagi $|x_n' - x_n''|$ masofa nolga intiladi, chunki

$$|x_n' - x_n''| = \left|\sqrt{2\pi n} - \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}}$$

tenglik o‘rinli va $n \to \infty$ da $\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2\pi n}+\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}} \to 0.$

Ikkinchi tomondan $|f(x_n') - f(x_n'')| = \left|\sin 2\pi n - \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)\right| = 1$ tenglik o‘rinli. Demak, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ deb olsak n natural sonini yetarlicha katta tanlab $|x_n' - x_n''|$ masofani ixtiyoriy δ dan kichik qilib olganimizda ham $|f(x_n') - f(x_n'')| > \frac{1}{2}$ bo‘lar ekan. Bu esa 31.1-ta’rifning inkorini bajarilishini bildiradi. Bu esa qaralayotgan funksiyaning tekis uzliksiz emasligini bildiradi.

31.1-teorema (Kantor teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, u shu segmentda tekis uzluksiz bo‘ladi.

Isboti. *f(x)* funksiya [*a;*b] oraliqda uzluksiz bo‘lsin. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni bu funksiyda [*a;*b] oraliqda tekis uzluksiz bo‘lmasin. Demak, bu holda biror $\varepsilon > 0$ son uchun ixtiyoriy kichik $\delta > 0$ sonini olmaylik, $[a,b]$ segmentda shunday x', x'' nuqtalar topiladiki, $|x' - x''| < \delta$ tengsizlik bajarilsa ham $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Nolga intiluvchi musbat sonlar ketma-ketligi $\{\delta_n\}, (\delta_n > 0,\ \delta_n \to 0, n = 1,2,3, \dots)$ ni qaraylik. Farazimizga ko‘ra, $\varepsilon > 0$ son va $\delta_n > 0$ son uchun $[a,b]$ segmentda shunday x_n', x_n'' nuqtalar topiladiki, quyidagi munosabatlar o‘rinli bo‘ladi:

$$\begin{array}{c}
|x_1' - x_1''| < \delta_1 \Rightarrow |f(x_1') - f(x_1'')| \geq \varepsilon, \\
|x_2' - x_2''| < \delta_2 \Rightarrow |f(x_2') - f(x_2'')| \geq \varepsilon, \\
\dots \qquad \dots \qquad \dots \\
|x_n' - x_n''| < \delta_n \Rightarrow |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon, \\
\dots \qquad \dots \qquad \dots
\end{array}$$

$\{x_n''\}$ ketma-ketlik chegaralangan. Bu ketma-ketlikdan Bolsano-Veyershtrass lemmasiga asosan chekli songa intiluvchi qismiy $\{x_{n_k}''\}$ ketma-ketlik ajratish mumkin: $x_{n_k}'' \to x_0$ va $x_0 \in [a, b]$. U holda $|x_n' - x_n''| < \delta_n, \delta_n \to$

0 bo‘lgani uchun $\{x'_{n_k}\}$ ketma-ketlik ham x_0 ga intiladi $x'_{n_k} \to x_0$ $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lishidan:

$k \to +\infty$ da $f(x''_{n_k}) \to f(x_0), f(x'_{n_k}) \to f(x_0)$.

Ulardan esa $k \to +\infty$ da $f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \to 0$ kelib chiqadi. Bu esa $\forall n \in N$ uchun $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$ deyilgan yuqoridagi tasdiqqa zid. Bu ziddiyat teoremani isbotlaydi.

31.2–ta’rif. $\sup\limits_{x\in X}\{f(x)\} - \inf\{f(x)\}$ ayirma $f(x)$ ning X to‘plamdagi tebranishi deyiladi va

$w = w(f;X) = \sup\{f(x)\} - \inf\{f(x)\}$ yoki $w = \sup \{f(x'') - f(x')\}$ $x', x'' \in X$

kabi belgilanadi.

31.1–natija. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lsa, u holda $\forall\varepsilon > 0$ uchun $\exists\delta > 0$ $[a,b]$ ni uzunliklari δ dan kichik qilib bo‘laklarga bo‘lganimizda, har bir bo‘lakdagi funksiyaning tebranishi ε dan kichik bo‘ladi.

$f(x)$ funksiya X to‘plamda aniqlangan bo‘lib, δ ixtiyoriy musbat son bo‘lsin.

31.3-ta’rif. Ushbu

$$\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{|x'-x''|<\delta \\ \forall x',x''\in X}} \{|f(x') - f(x'')|\}$$

Ifodaga $f(x)$ funksiyaning X to‘plamdagi uzluksizlik moduli deyiladi.

31.4-ta’rif. Agar $\exists K > 0, \exists\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ sonlar mavjud bo‘lib, $\forall x_1, x_2 \in X$ lar uchun

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|^{\alpha} \tag{31.1}$$

shart bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya X to‘plamda *Gyolder shartini* qanoatlantiradi deyiladi ($\alpha = 1$ bo‘lsa, (31.1) shart *Lipshits sharti* deyiladi)

31.2-teorema. $f(x)$ funksiya X to‘plamda tekis uzluksiz bo‘lishi uchun $\lim\limits_{\delta\to 0+o} \omega(f;\delta) = 0$ shartning bajarilishi zarur va yetarli.

31.3-misol. $f(x) = e^x \sin\dfrac{1}{x}$ funksiyani $X = (0, 1)$ da tekis uzluksizlikka tekshiring.

Yechilishi. $X = (0, 1)$ to‘plamdan $x'_n = \dfrac{2}{(4n-1)\pi}$, $x''_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$ nuqtalarni olamiz.

$$|x'_n - x''_n| = \left|\frac{2}{(4n-1)\pi} - \frac{2}{(4n+1)\pi}\right| = \frac{2}{\pi}\left|\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1}\right| = \frac{1}{\frac{\pi}{4}(16n^2 - 1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

munosabatga ko‘ra $n \to \infty$ da, $|x'_n - x''_n| \to 0$.

Ikkinchi tomondan, $\varepsilon = 2$ deb olsak

$$\left|f(x_n^{'}) - f(x_n^{''})\right| = \left|e^{\frac{2}{\pi(4n-1)}} \sin(4n-1)\frac{\pi}{2} - e^{\frac{2}{\pi(4n+1)}} \sin(4n+1)\frac{\pi}{2}\right| =$$

$$= \left|-e^{\frac{2}{\pi(4n-1)}} - e^{\frac{2}{\pi(4n+1)}}\right| = \left|e^{\frac{2}{\pi(4n-1)}} + e^{\frac{2}{\pi(4n+1)}}\right| \geq 2 = \varepsilon.$$

tengsizlik bajariladi. Demak, berilgan funksiya $(0;\,1)$ da tekis uzluksiz emas.

31.4-misol. 1) $f(x) = ax + b\ (a,b = const)$ funksiyaning $X = [\alpha, \beta]$ dagi uzluksizlik modulini topamiz. $|x' - x''| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x', x'' \epsilon [\alpha; \beta]$ nuqtalar uchun

$$w(\delta) = \sup_{|x''-x'| \leq \delta} |ax''+b - ax'-b| = \sup_{|x''-x'| \leq \delta} |a(x''-x')| = |a|\delta.$$

2) $f(x) = x^2 + 1$ funksiyaning $X = [0,1]$ dagi uzluksizlik moduli topilsin.

Yechish. $\forall x' \in [0,1]$ olamiz. x'' ni esa $x'' = x' - \delta$ deb olamiz $(0 < \delta < 1)$. U holda $2\delta - \delta^2 > 0$ ekanligini e’tiborga olib,

$$|f(x') - f(x'')| = \left|(x'^2+1) - (x''^2+1)\right| = \left|x'^2 - (x'-\delta)^2\right| = \left|x'^2 - x'^2 + 2\delta x' - \delta^2\right| =$$

$$= \left|2\delta x' - \delta^2\right| \leq 2\delta - \delta^2 \Rightarrow w(\delta) = \sup_{|x''-x'| \leq \delta} |f(x') - f(x'')| \leq 2\delta - \delta^2$$

$x' = 1,\ x'' = 1 - \delta$ nuqtalar uchun $|x' - x''| = \delta$

$$|f(x') - f(x'')| = \left|(x'^2+1) - (x''^2+1)\right| = \left|2\delta - \delta^2\right| = 2\delta - \delta^2 \Rightarrow w(\delta) = 2\delta - \delta^2$$

bo‘lishini olamiz. Demak, $\omega(f;\delta) = 2\delta - \delta^2$.

31.3–teorema. $f(x)$ funksiya X to‘plamda tekis uzluksiz bo‘lishi uchun $\lim\limits_{\delta \to +0} w(\delta) = 0$ bo‘lishi zarur va yetarli.

2. Kompakt to‘plamda uzluksiz bo‘lgan funksiyalarning xossalari.

Ochiq va yopiq to‘plamlar. $X \subset R$ berilgan, $a \in X$ bo‘lsin.

31.6 – ta’rif. Agar $a \in X$ va

$$\exists \cup_\delta(a) = \{x : x \in R,\ a - \delta < x < a + \delta\}\ (\delta > 0)\ \cup_\delta(a) \subset X$$

bo‘lsa, a nuqta X to’plamning ichki nuqtasi deyiladi.

31.5-misol. $x = 1/3$ nuqta $X = [0,1]$ ning ichki nuqtasi, $x = 0,\ x = 1$ nuqtalar esa, $X = [0,1]$ to‘plamning ichki nuqtasi emas.

31.6-misol. $X = [0,1]$ yopiq to‘plam.

Barcha limitik nuqtalarini o‘zida saqlagan to‘plamga yopiq to‘plam deyiladi.

Eslatma. Limit nuqtaga ega bo‘lmagan to‘plamni ham yopiq to‘plam deb qaraladi.

31.6-misol. Chekli to‘plam yopiq to‘plam bo‘ladi.

$X \subset R$ bo‘lsin.

31.7–ta’rif. Agar X to‘plamning elementlaridan tuzilgan har qanday $\{x_n\}$ $(x_n \in X, n = 1,2,...)$ ketma – ketlikdan shu to‘plamning nuqtasiga yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma – ketlik ajratish mumkin bo‘lsa, X to‘plam kompakt to‘plam deyiladi.

31.4–teorema. X to‘plam kompakt to‘plam bo‘lishi uchun uning chegaralangan va yopiq to‘plam bo‘lishi zarur va yetarli.

Isboti. Zaruriyligi. X to‘plam kompakt bo‘lsin. Uning chegaralanganligini isbot qilamiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni X to‘plam kompakt bo‘lsa ham, u chegaralanmagan bo‘lsin. U holda $\exists x_1 \in X$ nuqta mavjudki, $|x_1| > 1$ va $\exists x_2 \in X, |x_2| > 1, \dots, \exists x_n \in X, |x_n| > n$ $(n = 1,2, \dots)$ tengsizliklar bajariladi.

Bu $\{x_n\}$ ketma – ketlikdan yaqinlashuvchi ketma – ketlik ajratib bo‘lmaydi. Bu esa X ning kompaktligiga zid. Demak, X to‘plam chegaralangan. Endi X ning yopiqligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik a nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin. U holda X da a ga intiluvchi $\{x_n\}$ ketma – ketlik topiladi. Ma’lumki, $\{x_n\}$ ning har qanday $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma – ketligi uchun $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$ bo‘ladi. X to‘plam komkpakt bo‘lganligi uchun, $a \in X$ bo‘ladi. Bu esa X ning yopiqligini bildiradi.

Yetarliligi. X chegaralangan va yopiq bo‘lsin. Bu holda Bolsano – Veyershtrass lemmasiga ko‘ra har qanday chegaralangan $\{x_n\}$ ketma – ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma – ketlik ajratish mumkin: $x_{n_k} \to a$. Ravshanki bu a nuqta X ning limit nuqtasi bo‘ladi. X yopiq bo‘lgani uchun, $a \in X$. Demak, X to‘plam kompakt bo‘ladi.

1. **Mustaqil yechish uchun misollar.**

31.1. Chegaralanmagan $f(x) = x + sinx$ funksiyani $(-\infty, +\infty)$ oraliqda tekis uzluksizligini ko‘rsating.

31.2. $f(x) = x^2$ funksiya $(-l, +l)$ (l –yetarlicha katta musbat son) oraliqda tekis uzluksizmi?

31.3. $f(x) = x^2$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda tekis uzluksizmi?

31.4. Quyidagi funksiyalarni tekis uzluksizlikka tekshiring.

1. $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}, \quad -1 \le x \le 1.$ **2.** $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \; 0 < x < \pi.$

3. $f(x) = x\sin x, \quad 0 \le x < +\infty.$ **4.** $f(x) = \ln x, \quad 0 < x < 1.$

5. $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x},\quad 0<x<1.$ **6.** $f(x)=e^x,\quad -\infty<x<+\infty$.

7. $f(x)=x\sin\frac{1}{x},\ 0<x\le\pi.$ **8.** $f(x)=\sin\sqrt{x},\quad 1\le x<+\infty.$

9. $f(x)=e^{-\arcsin x},\quad -1\le x\le 1.$ **10.** $f(x)=x^2,\ -e\le x\le e.$

4. O'z-o'zini tekshirish savollari.

1.Funksiyaning tekis uzluksizligi ta'rifini ayting va unga misollar keltiring.
2.Kantor teoremasini ayting va uni isbotlang.
3.Kantor teoremasidan kelib chiqadigan natijani ayting.
4.Funksiyaning uzluksizlik moduli ta'rifini ayting.
5.Kompakt to'plamning ta'rifini ayting va misollar keltiring.
6.Kompakt to'plam bo'lishning zaruriy va yetarli shartlarini ayting va uni isbot qiling.

32-§. Vektor funksiyaning limiti va uzluksizligi

Reja:

1. **Vektor funksiya tushunchasi.**
2. **Vektor funksiyaning limiti.**
3. **Vektor funksiyaning uzluksizligi.**
4. **O'z-o'zini tekshirish savollari.**
5. **Mustaqil yechish uchun misollar.**

1.Vektor funksiya tushunchasi. Agar $t\in E\subset R$ o'zgaruvchinining har bir qiymatiga uch o'lchovli fazodagi biror $r(t)$ vektor mos qo'yilgan bo'lsa, u holda E to'plamda t skalyar argumentning $r(t)$ vektor funksiyasi berilgan deyiladi.

Uch o'lchovli fazoda $Oxyz$ dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. U holda $r(t), t\in E$ vektor funksiyaning berilishi, uning $x(t), y(t), z(t)\ \ t\in E$ koordinatalarining (ya'ni skalyar funksiyalar) berilishini bildiradi. Agar i, j, k lar koordinata o'qlaridagi birlik vektorlar bo'lsa, u holda
$r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k, t\in E$ yoki $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$
munosabatlarni yoza olamiz. Agar barcha $t\in E, z(t)=0$ bo'lsa u holda $r(t)$ vektor funksiya ikki o'lchovli vektor funksiya deyiladi.
Agar har bir $r(t)$ vektorning boshi koordinata boshi bilan ustma-ust tushsa, u holda, u vektorlar radius vektorlar deyiladi. Bu vektorlarning oxirgi nuqtalari to'plamini, agar t ni vaqt deb hisoblasak $M(t)$ nuqtaning trayektoriyasi deb hisoblashimiz mumkin.

2.Vektor funksiyaning limiti. a biror vektor va $r(t)$ vektor t_0 nuqtaning biror o'yilgan atrofida aniqlanga bo'lsin. Agar

$$\lim_{t\to t_0}|r(t)-a|=0 \qquad (32.1)$$

munosabat bajarilsa, ya'ni $r(t)-a$ vektorning uzunligi $t\to t_0$ da nolga intilsa, u holda a vektor $r(t)$ vektor funksiyaning t_0 nuqtadagi limiti deyiladi va $\lim_{t\to t_0} r(t)=a$ yoki $t\to t_0$ da $r(t)\to a$ kabi yoziladi.

32.1-lemma. Agar $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ va $a=(a_{1,}a_2,a_3)$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{t\to t_0} r(t)=a \qquad (32.2)$$

bo‘lishi uchun

$$\lim_{t\to t_0} x(t)=a_1,\ \lim_{t\to t_0} y(t)=a_2, \lim_{t\to t_0} z(t)=a_3 \qquad (32.3)$$

tengliklarning bajarilishi zarur va yetarli.

Haqiqatdan ham

$$|r(t)-a|=\sqrt{[x(t)-a_1]^2+[y(t)-a_2]^2+[z(t)-a_3]^2} \qquad (32.4)$$

tenglikdan

$$|r(t)-\mathrm{a}|\geq|x(t)-a_1|, |r(t)-\mathrm{a}|\geq|y(t)-a_2|, |r(t)-a|\geq|z(t)-a_3|$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Shuning uchun $t\to t_0$ da $|r(t)-a|\to 0$ shartdan (32.3) munosabatning bajarilishi kelib chiqadi. Aksincha (32.3) munosabat bajarilsa, u holda (32.4) dan (32.1) ning bajarilishi kelib chiqadi.

Vektor funksiya limitining ba'zi bir xossalarini keltirib o‘tamiz. Dastlab (32.2) shartning bajarilishi uchun $t\to t_0$ da $\alpha(t)\to 0$ munosabatni qanoatlantiruvchi, ya'ni $t\to t_0$ da cheksiz kichik vektor funksiya topilib

$$r(t)=a+\alpha(t)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli ekanligini ta'kidlab o‘tamiz.

1^0. Agar $\lim_{t\to t_0} r(t)=a$ bo‘lsa, u holda $\lim_{t\to t_0}|r(t)|=|a|$ bo‘ladi.

2^0. Agar $r(t)$ vektor va $f(t)$ skayar funksiyalar uchun $\lim_{t\to t_0} r(t)=a$ va $\lim_{t\to t_0} f(t)=A$ munosabatlar bajarilsa, u holda

$$\lim_{t\to t_0} f(t)r(t)=\lim_{t\to t_0} f(t)\cdot\lim_{t\to t_0} r(t) \qquad (32.5)$$

bo‘ladi.

Isbot: Skalyar va vektor funksiyalar limitining ta'rifidan $t\to t_0$ da shunday skalyar cheksiz kichik $\beta(t)$ va cheksiz kichik vektor $\alpha(t)$ funksiyalar topilib $f(t)=A+\beta(t), r(t)=a+\alpha(t)$ tengliklar bajariladi. Shuning uchun $f(t)r(t)=Aa+\gamma(t)$ tengik bajariladi. Bu yerda $\gamma(t)=A\alpha(t)+\beta(t)a+\beta(t)\alpha(t)$ bo‘lib, $\lim_{t\to t_0}\gamma(t)=0$ bo‘ladi. Bu yerdan (32.5) tenglik kelib chiqadi.

3^0. Agar $\lim_{t\to t_0} r_1(t)=a_{1,}\ \lim_{t\to t_0} r_2(t)=a_2$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{t\to t_0}(r_1(t)+r_2(t)) = \lim_{t\to t_0} r_1(t) + \lim_{t\to t_0} r_2(t), \tag{32.6}$$

$$\lim_{t\to t_0}\big(r_1(t), r_2(t)\big) = (\lim_{t\to t_0} r_1(t), \lim_{t\to t_0} r_2(t)), \tag{32.7}$$

$$\lim_{t\to t_0}[r_1(t), r_2(t)] = \left[(\lim_{t\to t_0} r_1(t), \lim_{t\to t_0} r_2(t))\right] \tag{32.8}$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Dastlab (32.6) tenglikni isbotlaymiz. Shartga ko‘ra shunday $\alpha_1(t)$ va $\alpha_2(t)$ funksiyalar topilib $\lim\limits_{t\to t_0}\alpha_i(t) = 0,\ i = 1{,}2$ tenglik va $r_i(t) = a_i + \alpha_i(t), i = 1{,}2$ munosabat bajariladi. Shuning uchun $r_1(t) + r_2(t) = a_1 + a_2 + \beta(t)$, bu yerdan $\beta(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)$. Bu yerdan $\lim\limits_{t\to t_0}\beta(t) = 0$ tenglik bajarilganligi uchun (32.6) ning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Endi (32.7) tenglikni isbotlaymiz. Skalyar ko‘paytmaning xossalariga ko‘ra

$$(r_1(t), r_2(t)) - (a_1, a_2) = (\alpha_1(t), a_1) + (\alpha_2(t), a_2) + \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big)$$

tenglik o‘rinli. Bu tenglikning o‘ng tomonida turgan ifoda, $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ funksiyalar$t \to t_0$ da cheksiz kichik funksiya bo‘lganligi uchun va $|(p,q)| \le |p||q|$ tengsizlikka ko‘ra, cheksiz kichik funksiya bo‘ladi. Bu mulohazalardan (32.7) tenglikning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Vektor ko‘paytmaning xossalaridan va $|(p,q)| \le |p||q|$ tengsizlikdan foydalanib (32.8) formula ham shunga o‘xshash isbotlanadi.

3.Vektor funksiyaning uzluksizligi. Vektor funksiyaning uzluksizlik ta’rifini beramiz. Agar t_0 nuqtada

$$\lim_{t\to t_0} r(t) = r(t_0) \tag{32.9}$$

tenglik bajarilsa $r(t)$ vektor funksiya t_0 nuqtada uzluksiz diyiladi. (32.2), (32.3) munosabatlarning ekvivalentligidan $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ vektor funksiyaning t_0 nuqtada uzluksizligi, $x(t), y(t), z(t)$ skalyar funksiyalarning t_0 nuqtada uzluksizligiga ekvivalent bo‘ladi.

Vektor funksiya uzluksizligi ta’rifidan va limitining xossalaridan, agar $r_1(t)$ va $r_2(t)$ vektor funksiyalar t_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, ualrning yig’indisi, skalyar va vektor ko‘paytmalarning ham t_0 nuqtada uzluksizligi kelib chiqadi. $\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)$ vektor funksiya $r(t)$ vektor funksiyaning t_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi. U holda (32.9) shart

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta r = 0 \tag{32.10}$$

shartga ekvivalent bo‘ladi.

Har bir $r(t)$ vektor boshi koordinata boshida bo‘lsa, u holda bu vektorlar radius vektorlarning oxirgi nuqtalari to‘plami $r(t), t \in E$ vektor funksiyaning godografi deyiladi. Fazodagi har qanday chiziqni biror vektor funksiyaning godografi sifatida qarash mumkun. Godografning parametrik tenglamalari $x = x(t), y = y(t),\ z = z(t)$ ko‘rinishda yoziladi.

32.1-misol. $r(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}i + \frac{2t}{1+t^2}j + k,\ t\epsilon R$ vektor funksiyaning godografini toping.

Yechish. Godografning parametrik tenglamasi

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}, \quad z = 1$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu munosabatlardan $r(t)$ vektor funksiyaning godografi

$$x^2 + y^2 = 1, z = 1$$

aylanadan iboratligi kelib chiqadi.

32.2-misol. $r = (2t-1)\boldsymbol{i} + (-3t+2)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k},\ t \in R$ vektor funksiyaning godografini toping.

Yechish. Godografning parametrik tenglamasi $x = 2t-1,\ y = -3t+2,\ z = 4t,\ t \in R$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu munosabatlardan

$$t = \frac{x+1}{2}, t = \frac{y-2}{-3}, t = \frac{z}{4}$$

tenglamalarni olamiz. Demak, godograf

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{4}$$

to‘g’ri chiziqdan iborat ekan.

32.3-misol. $r = 4cht \cdot \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3sht \cdot \boldsymbol{k},\ t \in [0,1]$ vektor funksiyaning godografini toping.

Yechish. $x = 4cht, y = -1, z = 3sht$ tengliklardan $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{3} = 1, y = -1$ munosabatlarni olamiz. Demak, $r(t)$ vektor funksiyaning godografi $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{3} = 1, y = -1$ giperboladan iborat ekan.

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Qanday funksiyaga vektor funksiya deyiladi?
2. Vektor funksiyaning limiti deb nimaga aytiladi?
3. Vektor funksiyaning uzluksizligini tushuntirib bering.

5. Mustaqil yechish uchun misollar.

Quyidagi funksiyalarning godograflarini toping.

32.1. $r = \sqrt{1-t^2}\boldsymbol{i} + \sqrt{1+t^2}\boldsymbol{j},\quad t \in [0,1].$
32.2. $r = 3t\boldsymbol{i} + (2t-t^2)\boldsymbol{j},\ t \in R.$
32.3. $r = cost \cdot \boldsymbol{i} + sint \cdot \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ t \in R.$
32.4. $r = 2cos^2t \cdot \boldsymbol{i} + 2sin^2t \cdot \boldsymbol{j},\ t \in [0,2\pi].$
32.5. $r = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k},\ t \in R.$

32.6. $r = 5cost \cdot \boldsymbol{i} + 4sint \cdot \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},\ t \in [0,2\pi].$

V bobni takrorlash uchun test savollari

1. Qaysi holda $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi uzilishi bartaraf qilish mumkin bo‘lgan uzilish deyiladi.
   a) $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$
   b) $f(a-0) > f(a+0)$
   c) $f(a+0)$ va $f(a-0)$ larning bittasi mavjud emas
   d) $f(a+0) \neq f(a-0)$
2. To‘g’ri javobni belgilang. <u>Teorema.</u> Agar $y = f(x)$ funksiya a nuqtada, $z = \varphi(y)$ funksiya $y_a = f(a)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa … murakkab funksiya … nuqtada uzluksiz bo‘ladi.
   a) $Z = \varphi(f(x)),\ a$ b) $Z = f(\varphi(x)),\ y_a = f(a)$
   c) $Z = \varphi(f(x)),\ \varphi(a)$ d) $Z = f(\varphi(x)),\ a$
3. Nuqtalar o‘rniga qo’yiladigan to‘g’ri javobni belgilang. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lib, $f(x_0) \neq 0$, $f(x_0)...0$ bo‘lganda x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofidan olingan x nuqtalarda $f(x)...0$ bo‘ladi.
   a) $>, >$ b) $>, <$ c) $>, =$ d) $>, \neq$
4. a ning qaysi qiymatlarida $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4}, & x \neq 4 \\ a, & x = 4 \end{cases}$ funksiya uzluksiz bo‘ladi.
   a) *a=16* b) *a=8* c) *a=5* d) *a=4*
5. Quyidagi funksiyalarning qaysi biri ikkinchi tur uzilishga ega.
   a) $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, & агар \quad x \neq 0 \\ 1, & агар \quad x = 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ c) $f(x) = x,\quad x \in R$
   d) $f(x) = 6,\quad x \in R$
6. Quyidagi funksiyalarning qaysi biri tekis uzluksiz bo‘ladi.
   a) $f(x) = 3x+1,\quad x \in R$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x},\quad x \in (0,\ 1)$
   c) $f(x) = \sin x^2,\quad x \in R$ d) $f(x) = x^3,\quad x \in R$

7. a va b ning $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\le 0\\ ax+b, & 0<x<1\\ \sqrt{x}, & x\ge 1\end{cases}$ funksiya uzluksiz bo‘ladigan qiymatlarini toping.

a) a=0, b=1 b) a=2, b=1 c) a=-2, b=-1 d) *a=-2, b=1*

8. a ning $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2}, & x\ne 2\\ a, & x=2\end{cases}$ funksiya uzluksiz bo‘ladigan qiymatini toping.

a) *a=8* b) *a=3* c) *a=12* d) *a=10*

9. Funksiyaning uzilish nuqtalarini toping: $y=\dfrac{x-3}{x^3-9x}$

a) 0; -1; 3 b) 0; -3; 3 c) 1; -3; 3 d) 0; 3; 5

10. Funksiyaning sakrashini toping: $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 1\\ 3x^2+7, & x>1\end{cases}$

a) 20 b) 10 c) 6 d) 7

11. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{2x-8}$ funksiya *x=4* nuqtada aniqlanmagan. Bu funksiya uzluksiz bo‘lishi uchun *f(4)* nimaga teng bo‘lishi kerak.

a) $f(4)=\dfrac{1}{5}$ b) $f(4)=\dfrac{1}{3}$ c) $f(4)=0$ d) $f(4)=\dfrac{1}{4}$

12. Funksiyaning nuqtada lokal chegaralanganligi uning uzluksiz bo`lishi uchun qanday shart bo`ladi?

a) yetarli b) zaruriy c) zarur va yetarli d) muhim.

13. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-9}$ funksiyaning barcha uzluksizlik nuqtalari to`plamini toping.

a) $[2,+\infty)$ b) $(3,+\infty)$ c) $[2,3)\cup(3,\infty)$ d) $(-\infty,3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$

14. Agar $f:X\to R,\ x_0\in X$ bo`lib $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$ shart bajarilsa, $x_0$ nuqta $f(x)$ funksiya uchun qanday nuqta bo`ladi?

a) 1-tur uzilish b) 2-tur uzilish c) uzluksizlik d) tuzatib bo`ladigan uzilish.

15. Agar $f:X\to R$ funksiya berilgan. x_0 nuqta X to`plamning limitik nuqtasi bo`lib, $f(x_0+0)\ne f(x_0-0)$ shart bajarilsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiya uchun qanday nuqta bo`ladi?

a) 2-tur uzilish b) 1-tur uzilish c) uzluksizlik d) tuzatib bo`ladigan uzilish.

16. Agar $f: X \to R$, $x_0 \in R$ nuqta X to`plamning limitik nuqtasibo`lib $f(x_0+0)=f(x_0-0) \neq f(x_0)$ shart bajarilsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiya uchun qanday nuqta bo`ladi?
 a) tuzatib bo`ladigan uzilish b) 2-tur uzilish c) uzluksizlik d) 1-tur uzilish

17. Javoblar orasidan funksiyaning uzilish nuqtasi turi noto`g`ri ko`rsatilganini aniqlang.
a) 3-tur uzulish b) 2-tur uzilish c) 1-tur uzilish d) tuzatib bo`ladigan uzilish.

18. $f(x)=\operatorname{sgn}^2 x$ funksiya nechta nuqtada 1-tur uzilish nuqtaga ega bo`ladi?
a) 1 b) 2 c) 3 d) birorta ham

19. Quyidagi to`plamlardan qaysi biri uchun $x=-10, x=0, x=2, x=2,05$ sonlari limitik nuqta bo`ladi?
a) $[-10,2]$ b) $[-10,1)\cup(2,3)$ c) $[-10,0)\cup(0,3)$ d) $[-10,0)\cup(0,2]$

20. Agar $f: X \to R,\ x_0 \in X$ bo`lib $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$ shart bajarilsa, $x_0$ nuqta $f(x)$ funksiya uchun qanday nuqta bo`ladi?
a) uzluksizlik b) 1-tur uzilish c) 2-tur uzilish d) tuzatib bo`ladigan uzilish

21. Agar $f: X \to R$, x_0 nuqta X to`plamning limitik nuqtasi bo`lib, $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$ shart bajarilsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiya uchun qanday nuqta bo`ladi?
a) 1-tur uzilish b) 2-tur uzilish c) tuzatib bo`ladigan uzilish d) uzluksizlik

22. Agar $f: X \to R$, x_0 nuqta X to`plamning limitik nuqtasi bo`lib, $f(x_0+0)=f(x_0-0) \neq f(x_0)$ shart bajarilsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiya uchun qanday nuqta bo`ladi?
a) tuzatib bo`ladigan uzilish b) 1-tur uzilish c) 2-tur uzilish d) uzluksizlik

23. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-9}$ funksiyaning barcha uzluksizlik nuqtalari to`plamini toping.
a) $[2,3)\cup(3,\infty)$ b) $[2,+\infty)$ c) $(3,+\infty)$ d) $(-\infty,3)\cup(-3,3)$

24. Agar $f: X \to R,\ x_0 \in X$ bo`lib, $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$ shart bajarilsa, $x_0$ nuqta $f(x)$ funksiya uchun qanday nuqta bo`ladi?
a) 2-tur uzilish b) 1-tur uzilish c) uzluksizlik d) tuzatib bo`ladigan uzilish

25. Agar $f: X \to R$, $x_0 \in R$ nuqta X to`plamning limitik nuqtasi bo`lib $f(x_0+0)=f(x_0-0) \neq f(x_0)$ shart bajarilsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiya uchun qanday nuqta bo`ladi?

a) 2-tur uzilish b) 1-tur uzilish c) uzluksizlik d) tuzatib bo`ladigan uzilish.

26. Agar $f: X \to R$, x_0 nuqta X to`plamning limitik nuqtasi bo`lib, $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$ shart bajarilsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiya uchun qanday nuqta bo`ladi?

a) 2-tur uzilish b) 1-tur uzilish c) uzluksizlik d) tuzatib bo`ladigan uzilish.

27. Javoblar orasidan funksiyaning uzilish nuqtasi turi noto`g`ri ko`rsatilganini aniqlang.

a) 2-tur uzulish b) 3-tur uzilish c) 1-tur uzilish d) tuzatib bo`ladigan uzilish.

VI BOB. FUNKSIYANING HOSILASI VA UNING TADBIQLARI

33-§. Hosila va differensial. Hosilaning geometrik ma'nosi

Reja:

1. Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar.
2. Hosila tushunchasi.
3. Hosilaning geometrik ma'nosi.
4. Bir tomonli va cheksiz hosilalar.
5. Funksiya differensiali.
6. Mustaqil yechish uchun misollar.
7. O'z-o'zini tekshirish savollari.

1.Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar.

a) Tezlik haqidagi masala. Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilyotgan va $S(t) -$ uning t vaqt davomida bosib o'tgan yo'li bo'lsin. t va $t+\Delta t$ vaqt oralig'ida nuqta $S(t+\Delta t)-S(t)$ yo'lni bosib o'tadi. Bu vaqt oralig'idagi nuqtaning o'rtacha tezligi $v_{o'r}$ quyidagi formula yordamida aniqlansin

$$v_{o'r} = \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}.$$

Agar harakat notekis bo'lsa, t o'zgarmay Δt o'zgarganda $v_{o'r}$ tezlik ham Δt ga bo'g'liq holda o'zgarib turadi. Δt qanchalik kichik bo'lsa, $v_{o'r}$ tezlik nuqtaning t momentidagi harakatini shunchalik yaxshi xarakterlaydi.

$v_{o'r}$ tezlikning $\Delta t \to 0$ dagi limitiga, ya'ni

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$$

ga nuqtaning t momentidagi tezligi, ya'ni oniy tezligi deyiladi.
Demak, nuqtaning t momentdagi oniy tezligi deb t va $t+\Delta t$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'li o'zgarishining (orttirmasining) vaqtning Δt o'zgarishiga (orttirmasiga) nisbatining $\Delta t \to 0$ dagi limitiga aytilar ekan.

Masalan, material nuqta $S = \frac{gt^2}{2}$ (erkin tushish qonuni) qonun bo'yicha o'zgarsa, u holda o'rtacha tezlik

$$v_{o'r} = \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = \frac{g}{2}\left((t+\Delta t)^2 - t^2\right) = gt + \frac{g\Delta t}{2}$$

tenglik orqali aniqlanadi. Bu yerdan

$$\lim_{\Delta t\to 0} v_{o'r} = gt$$

ya'ni, oniy tezlik $v = gt$ formula orqali ifodalanar ekan.

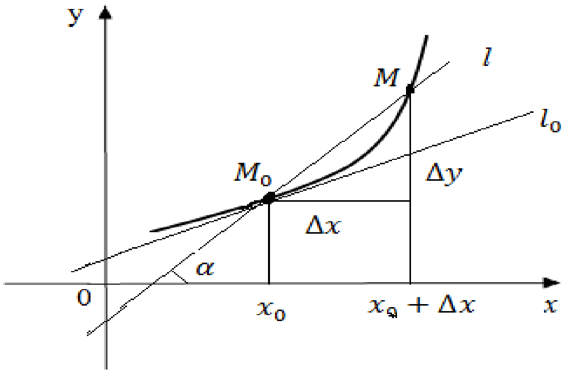
b) Urinma haqidagi masala. f funksiya x_0 nuqtaning biror $U_\delta\ (x_0)$ atrofida aniqlangan va x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin. Agar argumentning x_0

nuqtadagi $\Delta x = x - x_0$ orrtirmasi $0 < \Delta x < \delta$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $M_0(x_0, y_0)$ va $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ nuqtalardan o‘tuvchi l to‘g’ri chiziqning tenglamasi

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) \tag{33.1}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. (33.1-chizma). Bu yerda

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha.$$



33.1-chzma.

Bu to‘g’ri chiziq kesuvchi to‘g’ri chiziq, $tg\alpha = k$ soni l to‘g’ri chiziqning burchak koeffisiyenti deyiladi. α burchak Δx orttirmaga bog’liq bo‘lib, *Ox* o‘qining musbat yo‘nalishidan soat strelkasi yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda olingan.

Argumentning M_0 nuqtadagi Δx orttirmasi nolga intilsin. U holda f funksiyaning x_0 nuqtadagi $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ orttirmasi ham, funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligidan, nolga intiladi. Shuning uchun

$$MM_0 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0 \qquad (\Delta x \to 0 \;\; da)$$

bo‘ladi.

f funksiya girafigiga M_0 nuqtada o‘tgazilgan l kesuvchi to‘g’ri chiziqning $\Delta x \to 0$ dagi limitik holatiga $y = f(x)$ chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi urinmasi deyiladi.

Agar

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_0 \tag{33.2}$$

mavjud bo‘lsa, u holda l kesuvchi to‘g’ri chiziqning (33.1) ga asosan limitik holati mavjud bo‘ladi va urinma tenglamasi

$$y - y_0 = k_0(x - x_0) \tag{33.3}$$

ko‘rinishda bo‘adi.

Shunday qilib, agar (33.2) limit mavjud bo‘lsa, u holda M_0 nuqtadan o‘tuvchi va burchak koeffisiyenti k_0 bo‘lgan to‘g’ri chiziq, ya’ni $y = f(x)$ funksiya grafigiga M_0 nuqtada o‘tkazilgan urinma mavjud bo‘lar ekan.

Bu yuqorida qaralgan ikkita masala, ya'ni funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining limiti mavjudligi haqidagi masalalar hosila tushunchasiga olib keladi.

2.Hosila tushunchasi. f funksiya x_0 nuqtaning biror $U_\delta\ (x_0)-$ atrofida aniqlangan, bu argument x_0 nuqtada Δx orttirma $(0<|\Delta x|<\delta)$ olganda funksiya $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ orttirma olsin.

33.1-ta'rif. Agar $\Delta x\to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti mavjud bo'lsa, u holda bu limitga f funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(x_0)$, $f'_x(x_0)$, $y'(x_0)$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (33.4)$$

Funksiyaning hosilasini hisoblash amali differensiallash (funksiyani) deyiladi.

33.1-Misol. $y=C$ ($C-$o'zgarmas son) funksiyaning $\forall x\in R$ nuqtadagi hosilasini toping.

Yechish. $\Delta y=C-C=0$ bo'lganligidan

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

bo'ladi, ya'ni

$$y'=C'=0. \qquad (33.5)$$

33.2-Misol. $y=sinx$ funksiyaning $\forall x\in R$ nuqtadagi hosilasini toping.

Yechish. $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-sinx=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot sin\frac{\Delta x}{2}$ tenglikka asosan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

munosabatni olamiz. Bu yerda $\Delta x\to 0$ da $cosx$ funksiyaning uzluksizligidan $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\to cosx$ ekanligi va birinchi ajoyib limitga asosan $\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\to\frac{1}{2}$ munosabatlarni hisobga olib

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=cosx \qquad (33.6)$$

tenglikni olamiz. Demak $(sinx)'=cosx$ bo'lar ekan.

Shunga o'xshash barcha asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini hisoblash formulalarni keltirib chiqarishimiz mumkun.

33.1-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda u x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, (33.4) tenglikdan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)=\varepsilon(\Delta x)$$

munosabat kelib chiqadi. Bu yerda $\Delta x \to 0$ da $\varepsilon(\Delta x) \to 0.$ Bu yerdan

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x \qquad (33.7)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikning o‘ng tomonida turgan ifoda $\Delta x \to 0$ da nolga intiladi. $\Delta x \to 0$ da $\Delta y \to 0$ va funksiya uzluksizligining orttirmalar tilidagi ta’rifiga ko‘ra funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi kelib chiqadi.

3.Hosilaning geometrik ma’nosi. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, ya’ni

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

hosila mavjud bo‘lsa, u holda (33.1) tenglama bilan berilgan l kesuvchi (33.1-chizma) to‘g’ri chiziqning limitik holati mavjud bo‘ladi. Bu esa $y = f(x)$ funksiya grafigining $M_0(x_0\,, f(x_0\,))$ nuqtasida l_0 urinma mavjudligini bildiradi. Bundan tashqari (33.2) formulaga ko‘ra $k_0 = f'(x_0\,)$ ($k_0 - l_0$ to‘g’ri chiziqning burchak koeffisiyenti). Urinmaning OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil qilgan burchagi α_0 orqali belgilanganligi uchun va (33.2) formulaga asosan $k_0 = f'(x_0)$ bo‘lganligidan

$$f'(x_0) = tg\alpha \qquad (33.8)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Shunday qilib, berilgan nuqtadagi hosilaning geometrik ma’nosi uning girafigiga shu nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffisiyentiga tengligi bilan aniqlanadi.

$y = f(x)$ funksiya grafigiga $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning tenglamasi (33.1) formuladagi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ifodani $f'(x_0)$ bilan alamshtirish orqali hosil bo‘ladi va

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (33.9)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

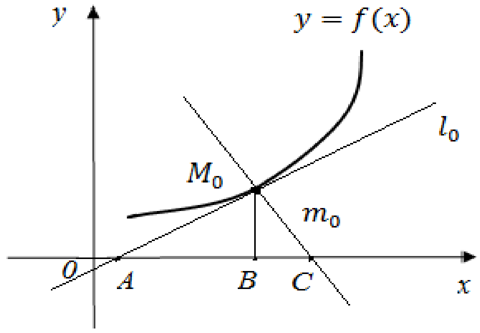
33.3-misol $y = sinx$ funksiya grafigi Ox o‘qini qanday burchak ostida kesib o‘tadi?

Yechish $y = sinx$ funksiya grafigi Ox o‘qini α_k $(k \in Z)$ nuqtalarda kesib o‘tsin. (33.8) formulaga ko‘ra

$$tg\alpha_k = f'(\alpha_k) = cosk\pi = (-1)^k$$

tenglikni olamiz. Demak, $x'_k = 2k\pi(k \in Z)$ nuqtalarda sinusoida Ox o‘qini $\frac{\pi}{4}$ burchak ostida kesib o‘tadi, $x''_k = (2k+1)\pi$ nuqtalarda esa $\frac{3\pi}{4}$ burchak ostida kesib o‘tadi.

$y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilasi mavjud bo‘lsin. $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada l_0 urinmaga m_0 perpendukilyar o‘tkazamiz. Bu perpendukilyar $y = f(x)$ funsiya grafigiga M_0 nuqtada o‘tkazilgan normal deyiladi (33.2-chizma).



33.2-chizma.

l_0 urinma, m_0 normal va M_0 nuqta orqali Ox o‘qiga perpendukilyar qilib o‘tkazilgan to‘g’ri chiziqlarning Ox o‘qi bilan kesishish nuqtalarini mos ravishda A,C,B orqali belgilab olamiz. AB kesma urinma osti kesmasi, BC kesma esa normal osti kesmasi deyiladi.

33.1-Mashq. Agar $f'(x_0) \neq 0$ bo‘lsa, u holda

a) m_0 normal tenglamasi

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

ko‘rinishda bo‘lishini;

b) $|AB| = \left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|, |AC| = |f(x_0)f'(x_0)|$

munosbatning o‘rinli ekanligini isbotlang.

4. Bir tomonli va cheksiz hosilalar. Bir tomonlama limitlarga o‘xshash bir tomonli hosila tushunchasini ham kiritishimiz mumkun. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chapdan uzluksiz va $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (bu yerda $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$) limit mavjud bo‘lsa, u holda bu limit f funksiyaning x_0 nuqtadagi chap hosilasi deyiladi va $f'_-(x_0)$ kabi belgilanadi. Shunga o‘xshash, agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o‘ngdan uzluksiz bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ga f funksiyaning x_0 nuqtadagi o‘ng hosilasi deyiladi va $f'_+(x_0)$ kabi belgilanadi.

$M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtadan o‘tuvchi va burchak koeffisiyentlari $f'_-(x_0)$ va $f'_+(x_0)$ bo‘lgan to‘g’ri chiziqlar mos ravishda $y = f(x)$ funksiya girafigiga M_0 nuqtadan o‘tuvchi chap va o‘ng urinmalari deyiladi. $f'(x_0)$ hosilaning mavjudligidan $f'_-(x_0)$ va $f'_+(x_0)$ hosilalarning mavjudligi kelib chiqadi va

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0) \qquad (33.10)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu holda $y = f(x)$ funksiya grafigiga M_0 nuqtada o‘tkazilgan chap va o‘ng urinmalar shu nuqtadagi urinma bilan ustma-ust tushadi.

Aksincha, agar f funksiyaning x_0 nuqtadagi o‘ng va chap hosilalari mavjud bo‘lib, $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $f'(x_0)$ mavjud va (33.9) tenglik o‘rinli bo‘ladi.

33.4-misol. $f(x) = |x|$ funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi chap va o‘ng hosilalarini toping.

Yechish. Bu yerda $\Delta y = |\Delta x|$ bo‘lganligi uchun

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta y} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$$

tengliklar o‘rinli. Demak $f'_-(0) = -1$ va $f'_+(0) = 1$ bo‘lar ekan. $y = -x$ va $y = x$ to‘g’ri chiziqlar mos ravishda $y = |x|$ funksiyaning grafigiga $x = 0$ nuqtadagi chap va o‘ng urinmalari bo‘ladi.

33.1-Izoh. $f(x) = |x|$ funksiya uchun $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ bo‘lganligidan bu funksiya $x_0 = 0$ nuqtada uzliksiz bo‘lsa ham $x_0 = 0$ nuqtada hosilasi mavjud emas. Bu misoldan ko‘rinib turibdiki, 33.1-teoremaga teskari teorema o‘rinli emas ekan, ya’ni funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligidan uning shu nuqtada hosilaga ega ekanligi kelib chiqavermas ekan.

Cheksiz hosila tushunchasini ham kiritish mumkun. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz va

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty \qquad (33.11)$$

bo‘lsin. U holda $x = x_0$ to‘g’ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigiga $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada o‘tgazilgan urinma deyiladi. Bu to‘g’ri chiziqni, agarda l kesuvchi to‘g’ri chiziqning (33.1) tenglamasini

$$x - x_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(y - y_0)$$

ko‘rinishda yozib olib va $\Delta x \to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 0$ ekanligini hisobga olsak, $x = x_0$ urinma tenglamasini l kesuvchi to‘g’ri chiziqning $\Delta x \to 0$ dagi limitik holati deb ham qarash mumkun.

Agar $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ bo‘lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $+\infty$ ga teng hosilaga ega deyiladi va $f'(x_0) = +\infty$ kabi yoziladi. Bu holda bir tomonli $\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ va $\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limitlar mos ravishda $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o‘ng hosilalari deyiladi va $f'_-(x_0) = +\infty$, $f'_+(x_0) = +\infty$ kabi belgilanadi. Masalan, $f(x) = \sqrt[5]{x}$ funksiyaning $x_0 = 0$

nuqtadagi chap va o‘ng hosilalari $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[5]{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[5]{(\Delta x)^4}}=+\infty$ bo‘lganligi uchun mos ravishda $f'_-(x_0)=+\infty$ bo‘ladi. Bu holda $f'_+(0)=+\infty$ tenglik ham o‘rinli. Funksiya grafigiga (0,0) nuqtada o‘tkazilgan urinma tenglamasi $x=0$ to‘g’ri chizig’i bo‘ladi.

Shunga o‘xshash, agar $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$ bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $-\infty$ ga teng hosilaga ega deyiladi.

Agar $f'(x_0)=+\infty$ yoki $f'(x_0)=-\infty$ bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada cheksiz hosilaga ega deyiladi (ba’zan ishorasi hisobga olinib $-\infty$ yoki $+\infty$ hosilaga ega deyiladi).

Agar $\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$ va $\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada ∞ hosilaga ega deyiladi (aniq ishoraga ega bo‘lmagan ∞ hosilaga ega ham deyiladi). Masalan $y=\sqrt{|x|}$ funksiya $x_0=0$ nuqtada aniq ishoraga ega bo‘lmagan cheksiz hosilaga ega bo‘ladi, chunki $f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x}=+\infty$ va $f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=-\infty$ munosabatlar bajariladi.

5.Funksiya differensiali.

33.2-ta’rif. $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror δ atrofida aniqlangan bo‘lsin. Agar bu funksiyaning x_0 nuqtadagi Δy orttirmasini

$$\Delta y=A\Delta x+\Delta x\cdot\varepsilon(\Delta x) \tag{33.12}$$

ko‘rinishda tasvirlash mumkun bo‘lsa, u holda f funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi. Bu yerda $A\Delta x$ ko‘paytma uning x_0 nuqtadagi diffirensiali deyiladi va $df(x_0)$ yoki dy kabi belgilanadi. Bu yerda $A=A(x_0)$ son Δx ga bo‘liq bo‘lmagan faqat x_0 nuqtaga bog’liq son, $\varepsilon(\Delta x)$ esa $\Delta x\to 0$ da nolga intiladi.

Shunday qilib, $\Delta x\to 0$ da

$$\Delta y=dy+o(\Delta x) \tag{33.13}$$

tenglik o‘rinli ekan. Bu yerda

$$dy=A\Delta x. \tag{33.14}$$

33.2-teorema. $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi uchun uning shu nuqtada hosilaga ega bo‘lishi zarur va yetarli. Hamda funksiya differensiali va hosilasi

$$dy=f'(x_0)\Delta x \tag{33.15}$$

tenglik orqali bog’langan bo‘ladi.

Isbot. Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda (33.12) shart bajariladi va shuning uchun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon(\Delta x)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda $\varepsilon(\Delta x) \to 0$. Bu yerdan $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$, ya’ni $f'(x_0)$ mavjud va $f'(x_0) = A$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar $f'(x_0)$ hosila mavjud bo‘lsa, u holda (33.7) formula o‘rinli, demak (33.12) formula o‘rinli. Bu esa f funksiyaning $x = x_0$ nuqtada differensiallanuvchi ekanligi va (33.12) hamda (33.14) formuladagi A koeffisiyent $f'(x_0)$ ga teng bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, funksiya differensialini (33.15) formula ko‘rinishida yozish mumkin ekan.

Shunday qilib, funksiyaning x_0 nuqtada hosilasi mavjudligi uning shu nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishligiga teng kuchli ekan. Agar f funksiya (a, b) intervalning har bir nuqtasida hosilaga ega bo‘lsa, u holda f funksiya (a, b) intervalda differensiallanuvchi deyiladi.

Agar f funksiya (a, b) intervalda differensiallanuvchi hamda $f'_+(a)$ va $f'_-(b)$ bir tomonli hosilalar mavjud bo‘lsa, u holda f funksiya $[a, b]$ kesmada differensiallanuvchi deyiladi.

33.2-Izoh. Δx orttirma dx belgi orqali belgilanadi va erkli o‘zgaruvchining differensiali deyiladi. Demak, (33.15) formulani

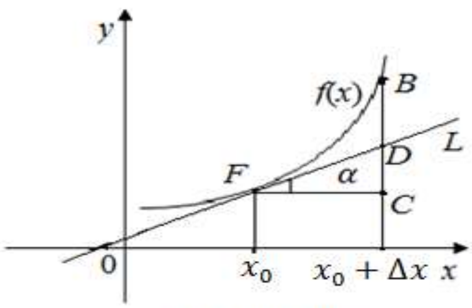
$$dy = f'(x_0)dx \tag{33.16}$$

ko‘rinishda yozish mumkun. (33.16) formuladan

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} \tag{33.17}$$

tenglik kelib chiqadi. (33.17) formuladan hosilani funksiya differensialining erkli o‘zgaruvchi differensialiga nisbati shaklida yozish mumkinligi kelib chiqadi.

$f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda aniqlangan bo‘lib, $x_0 \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin, ya’ni $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsin. $f(x)$ funksiyaning grafigi 33.3-chizmada ko‘rsatilgan chiziqni ifodalasin deylik. Bu chiziqning $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + \Delta x,\ f(x_0 + \Delta x))$ nuqtalarini mos ravishda F va B bilan belgilaylik. Unda $FC = \Delta x, BC = \Delta y$ bo‘ladi. $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘gani uchun u bu nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega. Demak, $f(x)$ funksiya grafigiga $F(x_0, f(x_0))$ nuqtasida o‘tkazilgan FL urinma mavjud va bu urinmaning burchak koeffisiyenti $f'(x_0) = tg\alpha$ ga teng bo‘ladi. Shu FL urinmaning BC bilan kesishgan nuqtasini D bilan belgilaylik. Ravshanki, ΔFDC dan $\frac{DC}{FC} = tg\alpha$ va undan $DC = FC \cdot tg\alpha$ ekanligi kelib chiqadi.



33.3-chizma.

Demak, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi differensiali $dy = f'(x_0)dx$ funksiya grafigiga $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning orttirmasi DC ni $(DC = dy)$ ifodalar ekan.

Agar $y = f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda

$$dy = f'(x_0)dx \tag{33.18}$$

ekanligini ko‘rish qiyin emas. Ma’lumki, differensiallanuvchi funksiyalar uchun dy bilan dx lar proporsional o‘zgarib, $f'(x)$ proporsionallik koeffitsiyentini ifodalaydi.

6. Mustaqil yechish uchun misollar.

33.1. Hosila ta’rifidan foydalanib quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping.

1. $f(x) = x^2 + x + 1$. **2.** $f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in R)$. **3.** $f(x) = \frac{1}{x}$. **4.** $f(x) = sinx$.
5. $f(x) = cosx$. **6.** $f(x) = tgx$. **7.** $f(x) = log_a x$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$.
8. $f(x) = arcsinx$. **9.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$. **10.** $f(x) = \sqrt{x}$.
11. $f(x) = a^x$. **12.** $f(x) = x\sqrt[3]{x}$. **13.** $f(x) = 3^{x+2}$.

33.2. $f(x) = \begin{cases} xsin\frac{1}{x}, agar\ x \neq 0 \\ 0, agar\ x = 0 \end{cases}$ funksiyani $x = 0$ nuqtada bir tomonli hosilalarga ega emasligini ko‘rsating.

33.3. $y = \sqrt[3]{x}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi hosilasini toping.

33.4. $y = \sqrt{|x|}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi hosilasin toping.

33.5. $y = x^2 + 1$ funksiya grafigiga $y = 2x - 1$ to‘g’ri chiziqqa parallel bo‘lgan urinma tenglamasini yozing.

33.6. $y = x^2 - x - 2$ funksiya grafigi OX o‘qini qanday burchak ostida kesib o‘tadi.

33.7. $f(x) = \begin{cases} x^2, x > 0 \\ x, x \leq 0 \end{cases}$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap hosilasini toping.

33.8. $y = \begin{cases} x + 1, x > 0 \\ x - 1, x \leq 0 \end{cases}$ funksiyaning bir tomonli hosilalari mavjudmi?

33.9. Berilgan funksiyaning quyida ko‘rsatilgan nuqtada chekli hosilaga ega emasligini ko‘rsating.

1. $f(x)=\sqrt[5]{x^3},\ \ x_0=0.$ **2.** $f(x)=\sqrt[3]{x-1},\ x_0=0.$

33.10. Berilgan egri chiziqqa quyida ko‘rsatilgan x_0 nuqtada o‘tkazilgan urinma chiziq va normal tenglamalarini tuzing.

1. $y=2x^2+3,\ \ x_0=-1.$ **2.** $y=\dfrac{x^{29}+6}{x^4+1},\ x_0=1.$

3. $y=2x+\dfrac{1}{x},\ \ x_0=1.$ **4.** $y=\dfrac{-2(x^8+2)}{3(x^4+1)},\ x_0=1.$

7. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Funksiya hosilasining ta’riflarini ayting.
2. Funksiyaning chap va o‘ng hosilalari ta’riflarini ayting.
3. Cheksiz hosilalar ta’riflarini ayting.
4. Hosilaning geometrik ma’nosini tushuntiring.
5. Differensialning geometrik ma’nosini tushuntiring.

34-§. Differensiallash qoidalari

Reja:

1. Funksiyalar yig’indisi, ko‘paytmasi, bo‘linmasi hosilalari va teskari funksiya hosilasini topish.
2. Murakkab funksiyaning hosilasi.
3. Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash.
4. Mustaqil yechish uchun misollar.
5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Funksiyalar yig’indisi, ko‘paytmasi, bo‘linmasi hosilalari va teskari funksiya hosilasini topish. f va g funksiyalar biror E to‘plamda aniqlangan bo‘lsin.

34.1-teorema. Agar f va g funksiyalar $x\in E$ nuqtada differensallanuvchi bo‘lsa, u holda bu nuqtada $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ $(g(x)\neq 0)$ funksiyalar ham differensiallanuvchi bo‘ladi va

$$\big(f(x)+g(x)\big)'=f'(x)+g'(x) \tag{34.1}$$

$$\big(f(x)g(x)\big)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \tag{34.2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2},\ g(x)\neq 0 \tag{34.3}$$

tengliklar o‘rinli.

Isbot. x argumentga Δx orttirma beramiz. U holda f va g funksiyalar mos ravishda $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ va $\Delta g=g(x+\Delta x)-g(x)$ orttirmalarni oladi. f va g funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lganligi uchun $\Delta x \to 0$ da $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x)$ va $\frac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x)$ bo‘ladi. Differensiallanuvchi funksiyalarning uzluksizligidan esa $\Delta x \to 0$ da $\Delta f \to 0, \Delta g \to 0$.

Dastlab (34.1) munosabatni isbotlaymiz. $y = f(x) + g(x)$ bo‘lsin. U holda $\Delta y = f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x) = \Delta f + \Delta g$ bo‘ladi.
Bu yerdan esa

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

munosabatni olamiz. Bu tenglikning o‘ng tomonida turgan ifoda $\Delta x \to 0$ da $f'(x) + g'(x)$ ga teng limitga ega. Shuning uchun ham bu tenglikning chap tomonida turgan ifodaning ham limiti mavjud, bu limit $y = f(x) + g(x)$ funksiyaning $y' = (f(x) + g(x))'$ hosilasini beradi. Demak (34.1) tenglik o‘rinli ekan.

Endi (34.2) tenglikni isbotlaymiz. $y = f(x)g(x)$ belgilashni kiritib, $\Delta y = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) = (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x) =$

$$f(x)\Delta g + +g(x)\Delta f + \Delta f \Delta g$$

munosabatni olamiz. Bu yerdan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikning ikkala tomonidan ham $\Delta x \to 0$ da limitga o‘tsak (34.2) formulaning o‘rinli ekanligini olamiz.

(34.3) formulani ham shu tarzda isbotlaymiz. $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$ bo‘lsin. U holda yuqoridagidek

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\right]$$

munosabatga ega bo‘lamiz. Bu tenglikda $\Delta x \to 0$ da limitga o‘tish bilan (34.3) formulani hosil qilamiz.

34.1-natija. Agar $f_k(k = \overline{1,n})$ funksiyalar x nuqtada differasiallanuvchi va $C_k(k = \overline{1,n})$ lar o‘zgarmas sonlar bo‘lsa, u holda

$$\left(\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{n} C_k f'_k(x)$$

tenglik o‘rinli.

34.1-misol. $y = 4cosx - x^2 + 4e^x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. 34.1-natijaga ko‘ra
$y' = 4(cosx)' - (x^2)' + 4(e^x)' = 4sinx - 2x + 4e^x$ tenglikni yoza olamiz.

34.2-misol. $y = tgx$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Bo‘linmaning hosilasini topish qoidasi (34.3) formulaga asosan

$$(tgx)' = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{(sinx)'cosx - sinx(cosx)'}{cos^2x} = \frac{cosx\, cosx + sinx\, sinx}{cos^2x} =$$
$$= \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}.$$

Demak, $(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$ bo‘lar ekan.

Agar f va g funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda funksiya differensiali ta’rifidan foydalanib va (34.1)-(34.3) tengliklarni hisobga olib funksiyalar yig’indisi, ko‘paytmasi va bo‘linmasi differensiallari uchun quyidagi tengliklarni isbotlash qiyin emas

$$d(f+g) = df + dg,$$
$$d(fg) = gdf + fdg,$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}\ , g \neq 0.$$

Isbot. Bu tengliklarning ikkinchisini isbotlaymiz. $d(fg) = (fg)'dx$ ekanligidan va $(fg)' = f'g + fg'$ tenglikdan $d(fg) = gf'dx + fg'dx = gdf + fdg$ munosabat kelib chiqadi.

Qolgan ikkita tenglikni mustaqil ravishda isbotlash uchun qoldiramiz.

34.2-teorema. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror $U_\delta(x_0) = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ yopiq atrofida aniqlangan qat’iy o‘suvchi (kamayuvchi) va uzluksiz funksiya bo‘lsin. Agar $f'(x_0) \neq 0$ hosila mavjud bo‘lsa, u holda unga teskari $x = \varphi(y)$ funksiya $y_0 = f(x_0)$ nuqtada differensiallanuvchi hamda

$$\varphi(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{34.4}$$

tenglik o‘rinli.

Isbot. f qat’iy o‘suvchi funksiya bo’lsin. $\alpha = f(x_0 - \delta)$, $\beta = f(x_0 + \delta)$ belgilashlarni kiritib, teskari funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremaga asosan $[\alpha, \beta]$ kesmada f funksiyaga teskari $x = \varphi(y)$ funksiya aniqlangan, uzluksiz va qat’iy o‘suvchi bo‘ladi. Bundan tashqari $y_0 = f(x_0) \in (\alpha, \beta)$ munosabat ham o‘rinli.

y erkli o‘zgaruvchining y_0 nuqtada shunday Δy orttirmasini olamizki, $y_0 + \Delta y \in (\alpha, \beta)$ bo‘lsin. $\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta x) - \varphi(y_0)$ orttirmaning Δy ortirmaga nisbatining, ya’ni $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ nisbatning $\Delta y \to 0$ dagi limitining mavjudligi va uning $\frac{1}{f'(x_0)}$ ga tengligini ko‘rsatishimiz kerak.

Agar $\Delta y \neq 0$ bo‘lsa, u holda $\Delta x \neq 0$ bo‘ladi. Aks holda, ya’ni $\Delta y \neq 0$ bo‘lganda $\varphi(y_0 + \Delta x) = \varphi(y_0)$ tenglik bajarilsa, φ funksiya argumentining har xil qiymatlarida bir xil qiymat qabul qilayotgan bo‘ladi. Bu esa φ funksiyaning qat’iy o‘suvchi ekanligiga ziddir. Shuning uchun $\Delta y \neq 0$ bo‘lganda

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\Delta y/\Delta x} \qquad (34.5)$$

tenglik o‘rinli.

$x=\varphi(y)$ funksiya y_0 nuqtada uzluksiz bo‘lganligi uchun $\Delta y\to 0$ da $\Delta x\to 0$. $\Delta x\to 0$ da $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=f'(x_0)$ mavjud bo‘lganligi uchun (34.5) dan (34.4) tenglik kelib chiqadi.

(34.4) formuladagi x_0 ni y bilan, y_0 ni x bilan almashtirib

$$\varphi'(x)=\frac{1}{f'(\varphi(x))} \qquad (34.6)$$

munosabatni olamiz. Agar $x=\varphi(y)$ teskari funksiyani $x=f^{-1}(y)$ orqali belgilasak u holda (34.4) tenglikni

$$f^{-1}(y_0)'=\frac{1}{f'(x_0)}$$

yoki yuqoridagiga o‘xshash x_0 ni y bilan, y_0 ni x bilan almashtirsak

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{f'(\varphi(x))} \qquad (34.7)$$

formulani olamiz.

34.3-misol. Quyidagi formulalarni isbotlang.

a) $(arcsin\,x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$; (34.8)

b) $(arccosx)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$; (34.9)

c) $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in R$; (34.10)

d) $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$, $x\in R$. (34.11)

Yechish. a) $y=\varphi(x)=arcsinx,\ x\in[-1,1]$ funksiya uchun $x=f(y)=siny, y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ funksiya teskari funksiya bo‘lganligi uchun (34.6) formuladan

$$(arcsinx)'=\frac{1}{(siny)'}=\frac{1}{cosy} \qquad (34.12)$$

formulani olamiz.

$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ bo‘lganda $siny=x$ bo‘lganligi uchun, $cosy=\sqrt{1-sin^2y}=\sqrt{1-x^2}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Demak (34.12) formuladan

$$(arcsinx)'=\frac{1}{cosy}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

tenglikni olamiz, ya’ni (34.8) formulaning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

(34.9)-(34.11) tengliklar ham shunga o‘xshash isbotlanadi.

2. Murakkab funksiyaning hosilasi.

34.3-teorema. $y=\varphi(x), x\in D(\text{f})$ funksiya $x_0\in D(f)$ nuqtada differensiallanuvchi $z=f(y)$, $y\in E(\varphi)\subset D(f)$ funksiya esa $y_0\in E(\varphi)\subset$

$D(f)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda murakkab $z=f(\varphi(x))$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi va

$$z'(x_0)=f'(y_0)\varphi'(x_0)=f'\big(\varphi(x_0)\big)\varphi'(x_0) \qquad (34.13)$$

munosabat o‘rinli.

Isbot. f va g funksiyalarning mos ravishda y_0 va x_0 nuqtada differensiallanuvchanligidan ularning shu nuqtalarda uzluksizligi kelib chiqadi. U holda murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremaga ko‘ra murakkab $z(x)$ funksiyaning ham x_0 nuqtada uzluksizligi kelib chiqadi. Shuning uchun $z(x)$ funksiya biror $U_\delta(x_0)$ $(\delta>0)$ da aniqlangan.

x erkli o‘zgaruvchiga $\Delta x\neq 0$ orttirma bersak, $y=\varphi(x)$ funksiyaning orttirmasi $\Delta y=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)$, $z=f(y)$ funksiyaning orttirmasi $\Delta z=z(x_0+\Delta x)-z(x_0)=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(y_0)$ $(y_0=\varphi(x_0))$ bo‘ladi.

f funksiya y_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lganligidan

$$\Delta z=\Delta f=f'(y_0)\Delta y+\Delta y\alpha(\Delta y) \qquad (34.14)$$

munosabat o‘rinli. Bu yerda $\Delta y\to 0$ da $\alpha(\Delta y)\to 0$.

$\alpha(\Delta y)$ funksiya $\Delta y=0$ da aniqlanmagan. Lekin $\alpha(\Delta y)$ orttirma $\Delta x\neq 0$ bo‘lganda ham nolga teng bo‘lishi mumkun. Shuning uchun $\alpha(\Delta y)$ funksiyani $\Delta y=0$ bo‘lganda $\alpha(0)=0$ kabi aniqlab olsak, u holda (34.14) formula $\Delta y=0$ bo‘lganda ham aniqlangan bo‘ladi.

(34.14) tenglikning ikkala tomonini ham $\Delta x\neq 0$ ga bo‘lib

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=f'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta y}{\Delta x}\alpha(\Delta y) \qquad (34.15)$$

munosabatni olamiz. (34.15) tenglikning chap tomonidagi Δz orttirmani $z=f(\varphi(x))$ murakkab funksiyaning argumentining Δx orttirmasiga mos orttirmasi deb qarash mumkun.

$y=\varphi(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligidan $\Delta x\to 0$ da $\Delta y\to 0$. Shuning uchun $\alpha(\Delta y)\to 0$. Bundan tashqari φ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lganligi uchun $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\varphi'(x_0)$ tenglik o‘rinli. Demak, (34.15) ning o‘ng tomonidagi ifoda $\Delta x\to 0$ da $f'(y_0)\varphi'(x_0)$ limitga ega bo‘lar ekan. Shuning uchun chap tomonidagi ifodaning ham $\Delta x\to 0$ dagi limiti mavjud va u $f'(y_0)\varphi'(x_0)$ ga teng. Bu esa murakkab $z=f(\varphi(x))$ funksiyaning x_0 nuqtada differensiallanuvchi ekanligini va (34.13) formulaning orinli bo‘lishini bildiradi.

$y=\varphi(x)$ funksiyaning x erkli o‘zgaruvchi bo‘lgandagi differensiali

$$dy=f'(x)dx \qquad (34.16)$$

ko‘rinishda bo‘lar edi. Agar x erkli o‘zgaruvchi bo‘lmasdan t o‘zgaruvchining $x=\varphi(t)$ funksiyasi bo‘lsa, u holda murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga asosan $y=f\big(\varphi(t)\big)=z(t)$ funksiyaning hosilasi uchun

$$z'(t) = f'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$$
tenglik o‘rinli. Bu funksiyaning differensiali
$$dy = z'(t) = f'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$
ko‘rinishda bo‘ladi. $dx = \varphi'(t)dt$ bo‘lganligi uchun $dy = f'\big(\varphi(t)\big)d\varphi(t) = f'(x)dx$ tenglik o‘rinli. Demak, (34.16) formula x ni $\varphi(t)$ ga almashtirganda ham o‘rinli bo‘lar ekan. Differensialning bu xossai birinchi tartibli differensialning invariantligi deyiladi.

34.4-misol. $(shx)' = chx, (chx)' = shx$ formulalarni isbotlang.

Yechish. Bizga ma’lumki $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ va $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ formulalar mavjud. Bu yerdan 34.1 va 34.3- teoremalarni qo‘llab $(shx)' = \frac{1}{2}\big(e^x - e^{-x}(-1)\big) = chx$ va $(chx)' = \frac{1}{2}\big(e^x + e^{-x}(-1)\big) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = shx$ munosabatlarni olamiz. Bu esa yuqoridagi tengliklar o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

Elementar funksiyalarning hosilalarini hisoblashning jadvalini keltiramiz.

1) $(C)' = 0,\ C = const.$
2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R, x > 0.$
3) $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in N, x \in R.$
4) $(a^x)' = a^x lna, a > 0, a \neq 0, x \in R.$
5) $(e^x)' = e^x, x \in R.$
6) $(\log_a x)' = \frac{1}{xlna}, a > 0, a \neq 1, x > 1.$
7) $(\log_a|x|)' = \frac{1}{xlna}, a > 0, a \neq 1, x \neq 1.$
8) $(lnx)' = \frac{1}{x}, x \neq 0.$
9) $(sinx)' = cosx, x \in R.$
10) $(cosx)' = -sinx, x \in R.$
11) $(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z.$
12) $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2x}, x \neq n\pi, n \in Z.$
13) $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1.$
14) $(arccos)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1.$
15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in R.$
16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in R.$
17) $(shx)' = chx, x \in R.$
18) $(chx)' = shx, x \in R.$
19) $(thx)' = \frac{1}{ch^2x}, x \in R.$

20) $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2x}, x \neq 0.$

34.5-misol. Agar φ funksiya x nuqtada differensiallanuchi va $\varphi(x) \neq 0$ bo‘lsa, u holda

$$(ln|\varphi(x)|)' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \tag{34.17}$$

tenglikni isbotlang.

Yechish. $\varphi(x) \neq 0$ bo‘lganligi uchun f va φ funksiyaning x nuqtada uzluksizligidan (diferensiallanuvchi funksiya uzluksiz bo‘ladi) $\exists\delta > 0, \forall t \in U_\delta(x)$ yoki $\varphi(t) > 0$ yoki $\varphi(t) < 0$ bo‘ladi. Agar $\forall t \in U_\delta(x)$, $\varphi(t) > 0$ bo‘lsa, u holda

$$(ln|\varphi(x)|)' = \left(ln\varphi(x)\right)' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \tag{34.18}$$

tenglik o‘rinli. Agar $\forall t \in U_\delta(x)$ $\varphi(t) < 0$ bo‘lsa, u holda

$$(ln|\varphi(x)|)' = (ln(-\varphi(x)))' = \frac{-\varphi'(x)}{-\varphi(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \tag{34.19}$$

formulani hosil qilamiz. (34.18) va (34.19) dan (34.17) formulaning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

34.6-misol. Agar u va v funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi, hamda $u(x) > 0$ bo‘lsa, $z = u(x)^{v(x)}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $z = u(x)^{v(x)}$ munosabatdan z funksiyaning differensiallanuvchi funksiyalarning superpozitsiyasi sifatida differensiallanuvchi ekanligini olamiz. Yuqoridagi munosabatdan

$$lnz = v(x)lnu(x)$$

tenglikni olamiz. Bu yerdan esa

$$\frac{z'}{z} = v'lnu(x) + v\frac{u'}{u}$$

tenglikni yoki $z' = z(v'lnu + \frac{vu'}{u})$ tengllikni olamiz. Demak

$$(u^v)' = u^v v'lnu + vu^{v-1}u' \tag{34.20}$$

munosabat o‘rinli ekan.

34.7-misol. $f(x) = x^x$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasini toping.

Yechish. (34.20) formulaga asosan $f'(x) = x^x lnx + xx^{x-1} = x^x(lnx + 1)$ tenglikni olamiz.

3. Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash.

Bizga $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ kesmada $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar berilgan bo‘lib, $x(t)$ funksiya uzluksiz va qat’iy monoton (masalan qat’iy o‘suvchi) bo‘lsin. $\alpha = x(t_0 - \delta)$, $\beta = x(\mathrm{t}_0 + \delta)$ belgilashlarni kiritamiz. $[\alpha, \beta]$ kesmada $x = x(t)$ funksiyaga teskari $t = t(x)$ funksiya ham uzluksiz va qat’iy o‘suvchi bo‘ladi.

Agar $x'(t_0)$ va $y'(t_0)$ hosilalar mavjut bo‘lib $x'(t_0) \neq 0$ bo‘lsa, u holda $y = y(t) = y(t(x))$ murakkab funksiya x o‘zgaruvchi bo‘yicha $x_0 = x(t_0)$ nuqtada differensiallanuvchi va

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} \tag{34.21}$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Haqiqatdan ham murakkab $y = y(t(x))$ funksiyani differensiallash qoidasiga asosan

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = y'_t t'_x$$

tenglik o‘rinli. Bu tenglikdan teskari funksiyani differensiallash qoidasiga asosan $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ tenglik o‘rinli ekanligini hisobga olib (34.21) munosabatning o‘rinli ekanligini olamiz.

34.8-misol. $x = cost, y = sint, t \in [0, \pi]$ ko‘rinishda (parametrik) berilgan funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $x'_t = -sint, y'_t = cost$ bo‘lganligidan (34.21) formulaga ko‘ra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cost}{sint} = ctgt$$

tenglik o‘rinli.

4. Mustaqil yechish uchun misollar.

34.1. Agar $f(x) = (x+1)(x-1)^2$ bo‘lsa $f'(-1), f'(1)$ ni toping.

34.2. Hosila olish jadvalidan foydalanib quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping.

a) $y = (x-3)(x-4)^2(x+1)^3$; b) $y = (1+x)^8(3-2x)^{12}$;

c) $y = \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^4}$; d) $y = \frac{(1-x)^3}{(1+x)^4}$;

e) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$; f) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

g) $y = cos^3 x^3$; l) $y = sin(cos^2 x)\, co\,s(sin^2 x)$;

m) $y = \sqrt{ctg^3 x}$; n) $y = l\,n(ln^2 x)$;

o) $y = \sqrt{x+1} - ln(1 + \sqrt{x+1})$; p) $y = lntg\,\frac{x}{2}$;

q) $y = x + x^x + x^{x^x}, x > 0$; r) $y = (sinx)^{cosx}$.

34.3. Quyidagi berilgan funksiyalarning hosilalarining ko‘rsatilgan nuqtadagi xususiy qiymatlarini aniqlang.

1. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2} + \frac{16}{x}, \ x_0 = -8.$ **2.** $y = \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{x}, \ x_0 = 0{,}01.$

3. $y = \frac{\cos t}{1-\sin t}, \ t_0 = \frac{\pi}{6}.$ **4.** $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4), \ x_0 = -3.$

5. $y=(x-a)(x-b)(x-c),\ x_0=a.$ **6.** $y=\dfrac{x-a}{x-b},\ a\neq b,\ x_0=a.$

7. $y=(1+ax^b)(1+bx^a),\ x_0=1.$

8. $y=x(x-1)(x-2).....(x-1984)\cdot(x-1985),\ x_0=0.$

9. $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x,\ x_0=0.$ **10.** $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x+x\sin x},\ x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

34.4. Quyidagi funksiyalarga teskari funksiyalarning hosilalarini hisoblang.

1. $y=x+\ln x,\ x>0.$ **2.** $y=x+e^x.$

3. $y=shx;$ **4.** $y=thx.$

5. $y=\frac{x^2}{1+x^2}.$ **6.** $y=chx,\ x>0.$

34.5. Quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping.

1. $y=\sin\cos^2 x\cdot\cos\sin^2 x.$ **2.** $y=\frac{sin^2x}{sinx^2}.$

3. $y=\dfrac{x}{2}(\sin\ln x+\cos\ln x).$ **4.** $y=arctg(thx).$

34.6. Quyidagi funksiyalarning differensiallarini toping.

1. $y=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}\ \ (a\neq 0).$ **2.** $y=ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|.$

3. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$ **4.** $y=arcsin\frac{x}{a}\ \ (a\neq 0).$

34.7. Parametrik ko‘rinishda berilgan quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping.

a) $x=sin^2t, y=cos^2t.$

b) $x=acost, y=bsint.$

c) $x=a(t-sint), y=a(1-cost).$

d) $x=arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y=arcco\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$

34.8. $y=x^2+1$ chiziqga a) $A(0,1); b)\ B(1,2); c)\ C(-1,2)$ nuqtalarda o‘tkazilgan urinma va normal tenglamasini yozing.

34.9. $y=2+x-x^2$ chiziqqa o‘tkazilgan urinma qanday nuqtadalarda Ox o‘qiga parallel bo‘ladi.

34.10. $f(x)=\begin{cases}x^2, agar\ x-ratsional\\ 0, agar\ x\ irratsional\end{cases}$ funksiya faqat $x=0$ nuqtada hosilaga ega ekanligini isbotlang.

34.11. $f(x)=\begin{cases}x^2sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ funksiyaning hosilasi uzilishga ega ekanligini isbotlang.

34.12. Qanday shartlarda $y=\begin{cases}x^2sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ funksiya

a) $x = 0$ da uzluksiz;
b) $x = 0$ da defferensiallanuvchi;
c) $x = 0$ da uzluksiz hosilaga ega.

34.13. $f(x) = \begin{cases} x, x < 0 \\ \ln(1+x), x \geq 0 \end{cases}$ funksiyaning hosilasini toping.

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Hosilani hisoblashning sodda qoidalarini ayting va keltirib chiqaring.
2. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari jadvalini yozing.
3. Teskari funksiyaning hosilaga ega bo‘lishi haqidagi teoremani ayting va uni isbotlang.
4. Murakkab funksiyaning hosilaga ega bo‘lish haqidagi teoremani ayting va uni isbotlang.

35-§. Yuqori tartibli hosila va diferensiallar

Reja:

1. n-tartibli hosila.
2. Leybnis formulasi.
3. n-tartibli differensial.
4. Mustaqil yechish uchun misollar.
5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. n-tartibli hosila.

a) Ikkinchi tartibli hosila. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalning barcha nuqtalarida hosilaga ega bo‘lsin. Agar $f'(x)$ hosila $x_0 \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda bu hosila funksiyadan olingan hosila $f(x)$ funksiyadan x_0 nuqtada olingan ikkinchi tartibli hosila deyiladi va $f''(x_0)$, $f^{(2)}(x_0)$, $\frac{d^2 f(x_0)}{d\,x^2}$, $f''_{xx}(x_0)$ kabi belgilanadi.

Demak

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

$f(x)$ hosila ko‘pincha birinchi tartibli hosila, ya’ni $f(x)$ funksiyadan olingan birinchi tartibli hosila deyiladi. Nolinchi tartibli $f^{(0)}(x)$ hosila deb funksiyaning o‘ziga aytiladi,
ya’ni $f^{(0)}(x) = f(x)$.

35.1-misol. Agar a) $f(x) = sin^2 x$, b) $f(x) = e^{-x}$ bo‘lsa, $f''(x)$ ni toping.

Yechish. a) $f'(x) = 2sinx \cdot cosx = sin2x$ bo‘lganligi uchun $f''(x) = 2cos2x$ bo‘ladi.

b) $f'(x) = -e^{-x}$ bo‘lganligi uchun $f''(x) = e^{-x}$ bo‘ladi.

35.2-misol. $f(x)=|x^3|$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $x\neq 0$ bo‘lsin. Bu holda

$$f'(x)=\begin{cases} x^3 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x^3 & x<0 \end{cases}$$

bo‘lganligi uchun

$$f'(0)=f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x>0 \\ -3x^2 & x<0. \end{cases} \tag{35.1}$$

$x=0$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|^3}{x}=0. \tag{35.2}$$

(35.1) tenglikdan agar $x\neq 0$ bo‘lsa

$$f''(x)=\begin{cases} 6x, & x>0 \\ -6x, & x<0 \end{cases}$$

munosabatni olamiz. Agar $x=0$ bo‘lsa, $f'(0)=0$ ekanligidan foydalanib

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{signx\cdot 3x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{signx\cdot 6x}{1}=0$$

munosabatni olamiz. Demak, $f(x)=6|x|$ bo‘lar ekan.

Ikkinchi tartibli hosilaning fizik talqinini ham berish mumkin. Faraz qilaylik material nuqta to‘g’ri chiziq bo‘ylab $s=s(t)$ qonuniyat (t vaqtga bog’liq bosib o‘tilgan yo‘lni aniqlash qonuniyati) bo‘yicha harakatlanayotgan bo‘lsin. U holda bizga ma’lumki material nuqtaning t vaqtdagi oniy tezligi $v=s'(t)$ tenglik orqali aniqlanadi. Ma’lumki,

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{s'(t+\Delta t)-s'(t)}{\Delta t}$$

nisbat nuqtaning t va $t+\Delta t$ vaqt oralig’idagi o‘rtacha tezlanishini beradi. Bu nisbatning limiti ($\Delta x\to 0$ dagi) nuqtaning t vaqtdagi tezlanishini beradi va u $s''(t)$ ga teng bo‘ladi.

Demak, $s(t)$ yo‘lning t vaqt bo‘yicha ikkinchi hosilasi nuqtaning t vaqtdagi tezlanishini berar ekan.

Faraz qilaylik, funksiya $x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in(\alpha,\beta)$ parametrik ko‘rinishda berilgan va t_0 nuqtada $x''(t_0)$, $y''(t_0)$ ikkinchi tartibli hosilalarga ega bo‘lsin. U holda $y=\psi(t)=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)=f(x)$ funksiya ikkinchi tartibli hosilaga ega va bu hosila

$$y''_{xx}=\left(\frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right)'_t\cdot\frac{1}{\varphi'_t} \tag{35.3}$$

$$y''_{xx}=\frac{\psi''_{tt}\cdot\varphi'_t-\psi'_t\cdot\varphi''_{tt}}{\left(\varphi'_t\right)^3} \tag{35.4}$$

formulalar orqali topiladi.

Haqiqatdan ham, murakkab funksiyani diferensiallash qoidasiga asosan

$$y''_{xx} = (y'_x)'_t \cdot t'_x = (y'_x)'_t \cdot \left(\varphi^{-1}(x)\right)'_x = (\psi'_x)'_t \cdot \frac{1}{\varphi'_t}$$

tenglik o‘rinli. Bu yerdan $\psi'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}$ ((34.21) formulaga asosan) tenglikni hisobga olib

$$(\psi'_x)_t = \left(\frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right)'_t = \frac{\psi''_{tt} \cdot \varphi'_t - \psi'_t \cdot \varphi''_{tt}}{\varphi'^2_t}$$

munosabatni olamiz. Bu yerdan yuqoridagi oxirgi tenglikka asosan (35.4) formulaning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

35.3-misol. Agar $x = \varphi(t) = cost,\ y = \psi(t) = tgt - t, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ bo‘lsa, y''_{xx} ni toping.

Yechish. $\varphi'_x = -sint,\quad y'_t = \frac{1}{cos^2t} - 1 = \frac{sin^2t}{cos^2t}$ tengliklar o‘rinli bo‘lganligi uchun $y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = -\frac{sint}{cos^2t}$ va y''_{xx} uchun (35.3) formulaga asosan

$$y''_{xx} = \left(-\frac{sint}{cos^2t}\right)'_t \cdot \frac{1}{\varphi'_t} = -\frac{cos^3t + sin2t \cdot sint}{cos^4t} \cdot \frac{1}{-sint}$$
$$= \frac{cos^3t + sin2t \cdot sint}{sint \cdot cos^4t}.$$

ekanligini olamiz.

b) n-tartibli hosila. $f(x)$ funksiyaning ikkinchi taribli hosilasidan olingan hosila $f(x)$ funksiyadan olingan uchinchi tartibli hosila deyiladi va $f'''(x)$ yoki $f^{(3)}(x)$ kabi belgilanadi. Shunga o‘xshash, $f(x)$ funksiya uchun ixtiyoriy tartibli hosila tushunchasini kiritish mumkin.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. Agar $x \in (a, b)$ nuqtada $f^{(n-1)}(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo‘lsa, u holda bu hosila $f(x)$ funksiyadan olingan $n -$ tartibli hosila, ya’ni $n -$ hosila deyiladi va $f^{(n)}(x)$ kabi belgilanadi.

Demak, agar $f(x)$ funksiya $n -$ tartibgacha ($n -$hosilasi ham mavjud) hosilaga ega bo‘lsa, u holda

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))',$$

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

bo‘ladi. Agar funksiya E to‘plamda $n -$ tartibgacha hosilaga ($n -$hosilasi ham mavjud) ega bo‘lsa u holda funksiya E to‘plamda n marta diferensiallanuvchi funksiya deyiladi. Agar funksiya E to‘plamda barcha tartibli hosilalarga (ixtiyoriy tartibli hosilaga) ega bo‘lsa u holda bu funksiyani E to‘plamda cheksiz tartibli differensiallanuvchi deyiladi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x nuqtada $n-$ tartibli hosilaga ega bo‘lsa, u holda A va B o‘zgarmas sonlari uchun $Af(x)+Bg(x)$ funksiya ham $n-$tartibli hosilaga ega bo‘ladi va

$$(Af(x)+Bg(x))^n = Af^{(n)}(x)+Bg^{(n)}(x) \tag{35.5}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Ba’zi bir funksiyalarning $n-$ tartibli hosilalarini hisoblash uchun quyidagi formulalarni keltiramiz.

$$1)\ (x^l)^{(n)} = l(l-1)\ldots.(l-(n-1))x^{l-n}. \tag{35.6}$$

Xususiy holda, $l=m$ bo‘lsa $(m\in N)$ u holda

$$(x^m)^{(n)} = \begin{Bmatrix} m! & n=m \\ 0, & n>m \end{Bmatrix}. \tag{35.7}$$

$$2)\ (a^x)^{(n)} = a^x\cdot ln^n a,\ a>0,\ a\neq 1.$$

Xususiy holda

$$(e^x)^{(n)} = e^x. \tag{35.8}$$

$$3)\ \left(\frac{1}{x+l}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+l)^{n+1}}. \tag{35.9}$$

$$4)\ (ln(x+a))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)}{(x+a)^n}. \tag{35.10}$$

$$5)\ (sinx)^{(n)} = sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \tag{35.11}$$

$$6)\ (cosx)^{(n)} = cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \tag{35.12}$$

(35.6)-(35.10) formulalarning o‘rinli ekanligini osongina ko‘rsatish mumkin. (35.11) formulani isbotlaymiz. $(sinx)'=cosx$ bo‘lganligi uchun $cosx = sin(x+\frac{\pi}{2})$ tenglikdan (35.11) formulaning $n=1$ da o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. (35.11) formulani isbotlash uchun matematik induksiya usulidan foydalanamiz. $n=k$ da (35.11) formula o‘rinli deb olib, uning to‘g’ri ekanligini $n=k+1$ da ko‘rsatamiz.

$$(sinx)^{k+1} = \left((sinx)^{(k)}\right)' = \left(sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)' = cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = sin\left(x+(k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

munosabatlardan (35.11) formulaning $n=k+1$ da o‘rinli ekanligini olamiz. Demak matematik induksiya usuliga ko‘ra (35.11) formula ixtiyoriy $n\in N$ da o‘rinli. (35.12) formula ham shunga o‘xshash isbotlanadi.

(35.11), (35.12) formulalarning quyidagi ko‘rinishlarini ham yozish mumkin:

$$(sinax)^{(n)} = a^n sin\left(ax+n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad (cosax)^{(n)} =$$

$$= a^n cos\left(ax + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ a,b \in R. \qquad (35.13)$$

35.4-misol. a) $f(x) = sin^3x$; b) $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ funksiyalarning n-tartibli hosilalarini toping.

Yechish. a) $sin^3x = 3sinx - 4sin3x$ tenglikdan $sin3x = \frac{3}{4}sinx - \frac{1}{4}sin3x$ munosabatni olamiz. (35.5) va (35.13) formulalarni qo‘llab,

$$(sin3x)^n = \frac{3}{4}sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}sin\left(3x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

munosabatni olamiz.

b) $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$ tenglikni inobatga olib, (35.9) formuladan

$$\left(\frac{1}{x^2-5x+6}\right)^{(n)} = (-1)n\cdot n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$$

tenglikni hosil qilamiz.

2.Leybnis formulasi.

35.1-teorema: Agar u va v funksiyalar x nuqtada n - tartibli hosilalarga ega bo‘lsa, u holda $u\cdot v$ funksiya ham x nuqtada nuqtada n - tartibli hosilaga ega, hamda

$$(u\cdot v)^{(n)} = uv^{(n)} + C_n^1u^{(1)}v^{(n-1)} + C_n^2u^{(2)}v^{(n-2)} + \cdots + C_n^{n-1}u^{(n-1)}v^{(1)} + \\ +u^{(n)}v \qquad (35.14)$$

tenglik o‘rinli, bu yerda $C_n^k = \frac{n(n-1)....(n-(k-1))}{k!}$, $1 \le k \le n$.

Bu formula Leybnis formulasi deyiladi va u quyidagi ko‘rinishda ham yozilishi mumkin:

$$(u\cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}\, v^{(n-k)}, \qquad (35.15)$$

bu yerda $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v, C_n^0 = 1.$

Isbot. (35.14) formulani matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz. $n = 1$ da bu formula $(u\cdot v)' = u\cdot v' + v\cdot u'$ tengsizlikka asosan o‘rinli. (35.14) formulani o‘rinli deb uni $n + 1$ hol uchun isbotlaymiz. $u^{(n+1)}$ va $v^{(n+1)}$ hosilalarni mavjud deb faraz qilib, (35.15) tenglikni x nuqtada differensiallab va

$$\left(u^{(k)}v^{(n-k)}\right)' = u^{(k+1)}v^{(n-k)} + u^{(k)}v^{(n+1-k)}$$

tenglikni hisobga olib

$$(u\cdot v)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k+1)}\, v^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}\, v^{(n+1-k)} \qquad (35.16)$$

munosabni olamiz. (35.16) ning o‘ng tomonidagi yig’indilarning birinchisining oxirgi hadini va ikkinchi yig’indining birinchi hadini ajratib olamiz. Hamda birinchi yig’indidagi ajratib olingan oxirgi hadidan, qolgan qismining yig’ish indeksini bittaga siljitib quyidagi munosabatni olamiz

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k+1)} \cdot v^{(n-k)} = u^{(n+1)} \cdot v + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(k)}\, v^{(n+1-k)},$$
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} \cdot v^{(n+1-k)} = u \cdot v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(k)}\, v^{(n+1-k)}.$$
Bu tengliklardan
$$(u \cdot v)^{(n+1)} = uv^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) u^{(k)}\, v^{(n+1-k)} + u^{(n+1)} \cdot v$$
munosabat kelib chiqadi. $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$ tenglikdan foydalanib
$$(u \cdot v)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k u^{(k)}\, v^{(n+1-k)}$$
formulani olamiz. Bu esa Leybnis formulasining $(n+1)$ hol uchun to‘g’ri ekanligini bildiradi.

35.5-misol. a) $f(x) = x^2 sin2x \cdot sin(2x-1)$; b) $f(x) = x^2 ln(2x+1)$ funksiyalarninng *n*-tartibli $(n > 2)$ hosilalarini toping.

Yechish. a) $sin2x \cdot sin(2x-1) = \frac{1}{2}(cos1 - \cos(4x-1))$ tenglikdan va (35.14) Leybnis formulasidan hamda (35.13) formuladan foydalangan holda $k > 2$ da $(x^2)^{(k)} = 0$ ekanligini hisobga olib
$$f^{(n)}(x) = -x^2 \cdot \frac{4^n}{2} cos\left((4x-1) + \frac{n\pi}{2}\right) - nx$$
$$\cdot 4^{n-1} cos\left(4x - 1 + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) -$$
$$-\frac{n(n-1)}{2} \cdot 4^{n-2} cos\left(4x - 1 + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)$$
formulani, yani $f(x) = x^2 sin2x \cdot sin(2x-1)$ funksiyaning *n*-tartibli hosilasini topish formulasini olamiz.

b)(35.14) Leybnis formulasini va (35.10) ni hisobga olib $(n > 2)$
$$f^{(n)}(x) = x^2 \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2x+1)^n} \cdot 2^n + 2xn \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(2x+1)^{n-1}} \cdot 2^{n-1} +$$
$$+ n(n-1) \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(2x+1)^{n-2}} \cdot 2^{n-2}$$
munosabatni olamiz.

3. n- tartibli differensial.

$f(x)$ funksiya (a, b) itervalda differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda uning
$$dy = f'(x)dx$$

differensiali ikkita x va dx o‘zgaruvchiga bog’liq bo‘ladi. Funksiyaning bu differensiali f funksiyaning birinchi (yoki birinchi tartibli) differensiali deyiladi.

Agar argumentning Δx orttirmasi bilan ustma-ust tushuvchi dx differensialni tayinlab olsak, u holda dy differensial faqat x ga bog’liq funksiya bo‘ladi. Bu funksiyadan olingan, ya’ni $f'(x)\,dx$ funksiyadan olingan differensial (bu yerda dx-o‘zgarmas) ikkinchi differensial yoki $y = f(x)$ funksiyadan x nuqtada olingan ikkinchi tartibli differensial deyiladi va d^2y yoki d^2f kabi belgilanadi. Bu yerda $d(dy) = d^2y$ differensialni hisoblashda erkli o‘zgaruvchining dx orttirmasini birinchi tartibli differensialdagi kabi olingan deb faraz qilinadi.

f funksiya x nuqtada ikkinchi tartibli hosilaga ega bo‘lsin. U holda

$$dg = g'(x)dx \quad \text{va} \quad d(Cg) = cdg$$

(C-o‘zgarmas) tengliklardan foydalanib,

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = dxd(f'(x)) = dxf''(x)dx = f'(x)dx^2$$

munosabatni olamiz. Shunday qilib, yuqorida keltirilgan shartlarda $y = f(x)$ funksiyadan x nuqtada ikkinchi differensial mavjud va

$$d^2y = f''(x)dx^2 = y''dx^2 \qquad (35.17)$$

tenglik o‘rinli ekan. Bu yerda $dx^2 = (dx)^2$.

Shunga o‘xshash, $y = f(x)$ funksiya x nuqtaqda $n -$ tartibli hosilaga ega bo‘lsa, $n -$ differensialni $d^{n-1}y$ funksiyadan olingan differensial sifatida aniqlash mumkin, ya’ni

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Erkli o‘zgaruvchining $\Delta\, x$ orttirmasi birinchi va keyingi tartibdagi barcha differensiallarda bir xil olingan deb faraz qilib matematik induksiya usuli yordamida osonlik bilan ko‘rsatish mumkinki

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (35.18)$$

(35.18) formuladan

$$y^n = \frac{d^ny}{dx^n}$$

tenglikning, ya’ni $y = f(x)$ funksiyadan olingan $n -$tartibli hoisla bu funksiyadan olingan $n -$ tartibli differensialning erkli o‘zgaruvchi differensialining $n -$darajasiga nisbatiga teng bo‘lishini olish mumkin.

(35.18) formuladan $n > 1$ da $d^nx = 0$ ekanligi, ya’ni erkli o‘zgaruvchining $n -$tartibli differensiali $n \geq 2$ bo‘lganda nolga teng bo‘lishi kelib chiqadi.

Agar u va v funksiyalarning $n-$ tartibli $u^{(n)}$ va $v^{(n)}$ hosilalari mavjud bo‘lsa, u holda A va B o‘zgarmas sonlar bo‘lganda $n-$ tartibli differensial quyidagi ko‘rinishlarga ega:

1) $d^n(Au+Bv)=Ad^nu+Bd^nv$;

2) $d^n(uv)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k d^k u\cdot d^{n-k}v$.

1) tenglikning isboti (35.18) va (35.5) dan kelib chiqadi. 2) tenglikning isboti (35.18) va (35.15) dan kelib chiqadi.

4. Mustaqil yechish uchun misollar.

35.1. Quyidagi funksiyalarning berilgan nuqtalardagi ko‘rsatilgan tartibdagi hosilalarini toping.

1. $y=x^6-4x^3+4,\quad y^{(IV)}(1)=?$

2. $y=\dfrac{x^5}{(x-1)^4},\quad y^{(//)}(5)=?$

3. $y=\dfrac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}},\ y''(0)=?$

4. $y=\operatorname{arctg}x,\quad y^{(//)}(1)=?$

5. $y=e^{\sqrt{x}},\quad y^{(//)}(4)=?$

6. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}},\quad y^{(100)}(x)=?$

35.2. Quyidagi funksiyalarning ko‘rsatilgan tartibdagi hosilalarini toping.

1. $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x,\quad y''=?$

2. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad y''=?$

3. $y=\sqrt[5]{x^3},\quad y'''=?$

4. $y=x^5\ln x,\quad y'''=?$

5. $y=x^2\sin 2x,\quad y^{(50)}=?$

6. $y=\dfrac{e^x}{x},\quad y^{(10)}=?$

7. $y=\sin x\sin 2x\sin 3x,\quad y^{(10)}=?$

8. $y=\sin^2 x\ln x,\quad y^{(6)}=?$

9. $y=x^2e^{2x},\ y^{(20)}=?$

10. $y=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\quad y^{(n)}=?$

35.3. Quyidagi funksiyalarning ko‘rsatilgan tartibdagi differensiallarini toping.

1. $y=\frac{1}{\sqrt{x}},\ d^3y=?$

2. $y=xcos2x,\ d^{10}y=?$

3. $y=e^x lnx,\ d^4y=?$

4. $y=cosxchx,\ d^6y=?$

5. $y=x^ne^x,\ d^ny=?$

6. $y=\frac{lnx}{x},\ d^ny=?$

35.4.Quyidagi funksiyalarning ko‘rsatilgan tenglamalarni qanoatlantirishini isbotlang.

1. $y=e^x\sin x,\quad y^{//}-2y^{/}+2y=0;$

2. $y=e^{-x}\sin x,\quad y^{//}+2y^{/}+2y=0;$

35.5. Quyidagi parametrik shaklda berilgan $y=y(x)$ funksiyalarning ko‘rsatilgan tartibdagi hosilalarini toping:

1. $x=at^2,\quad y=bt^3;\quad x_{yy}^{//}=?$

2. $x=t^3+3t+1,\quad y=t^3-3t+1;\quad y_{xx}^{//}=?$

3. $x = e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad y = e^{\alpha t}\sin\beta t;\quad y''_{xx} = ?$

5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. n –tartibli hosila ta’rifini ayting.
2. n –tartibli differensial ta’rifini ayting.
3. Leybnis formulasini isbotlang.

36-§. Differensiallanuvchi funksiyalar haqidagi asosiy teoremalar

Reja:

1. Lokal ekstremumlar va Ferma teoremasi.
2. Hosilaning nollari haqidagi Roll teoremasi.
3. Chekli orttirmalar haqidagi Lagranj teoremasi.
4. Lagranj teoremasidan kelib chiqadigan ba'zi bir natijalar.
5. Chekli orttirmalar haqidagi Koshi formulasi.
6. Mustaqil yechish uchun misollar.
7. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Lokal ekstremumlar va Ferma teoremasi. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror δ atrofida, ya’ni $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ to‘plamda aniqlangan bo‘lsin. Barcha $x \in U_\delta(x_0)$ larda

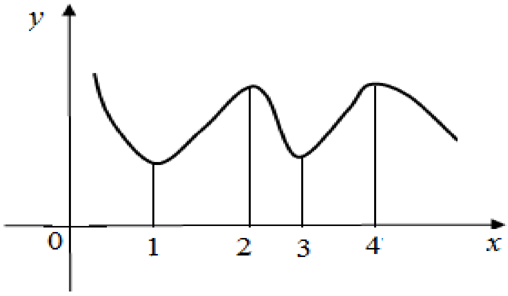
$$f(x) \geq f(x_0) \tag{36.1}$$

tengszlik bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal minimumga ega deyiladi. Shunga o‘xshash, barcha $x \in U_\delta(x_0)$ larda

$$f(x) \leq f(x_0) \tag{35.2}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuatada lokal maksimumga ega deyiladi. Lokal maksimum va lokal minimum terminlari umumiy nom bilan lokal ekstremumlar deyiladi.

Masalan, grafigi 36.1-chizmada tasvirlangan $y = f(x)$ funksiya $x_1 = 1,\ \ x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$ nuqtalarda lokal ekstremumga ega $x_1 = 1, x_3 = 3$ nuqtalar lokal minimum nuqtalar, $x_2 = 2, x_4 = 4$ nuqtalar lokal maksimum nuqtalar bo‘ladi.



36.1-chizma.

36.1-teorema (Ferma teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal ekstremumga ega bo‘lsa va bu nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda

$$f'(x_0) = 0 \tag{36.3}$$

bo‘ladi.

Isbot. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal minimumga ega bo‘lsin. U holda (36.1) ga asosan barcha $x \in U_\delta(x_0)$ lar uchun

$$f(x) - f(x_0) \geq 0 \tag{36.4}$$

tengszlik bajariladi. Agar $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ bo‘lsa, u holda $x - x_0 < 0$ va (36.4) ga ko‘ra

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \tag{36.5}$$

tengszlik bajariladi, agar $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ bo‘lsa, u holda

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \tag{36.6}$$

tengszlik bajariladi. f funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lganligidan (36.5) tengszlikning chap tomonida turgan ifodaning $x \to x_0$ dagi limiti mavjud va $f'_-(x_0) = f'(x_0)$ bo‘ladi. Ikkinchi tomondan limitlarning tengsizliklarga bog’liq xossalaridan (36.5) dan

$$f'(x_0) \leq 0 \tag{36.7}$$

tengszlikni olamz.

Shunga o‘xshash, (36.6) tengszlikda limitga o‘tib

$$f'(x_0) \geq 0 \tag{36.8}$$

tengszlikni olamiz. (36.7) va (36.8) dan $f'(x_0) = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

36.1-Izoh. Ferma teoremasi sodda geometrik ma’noga ega. Lokal ekstremum nuqtalarda $y = f(x)$ funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma abssissa o‘qiga parallel bo‘ladi.

2. Hosilaning nollari haqidagi Roll teoremasi.

36.2-teorema (Roll teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalarida teng qiymatlar qabul qilsa, ya’ni

$$f(a) = f(b) \tag{36.9}$$

hamda bu funksiya (a, b) intervalda differensilallanuchi bo‘lsa, u holda shunday $\xi \in (a, b)$ nuqta topilib

$$f'(\xi) = 0 \tag{36.10}$$

bo‘ladi.

Isbot. $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x),\ \ m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ belgilashlarni kiritamiz. Veyershtrass teoremasiga ko‘ra $c_1, c_2 \in [a, b]$ nuqtalar topiladiki, $f(c_1) = m,\quad f(c_2) = M$ tengliklar bajariladi.

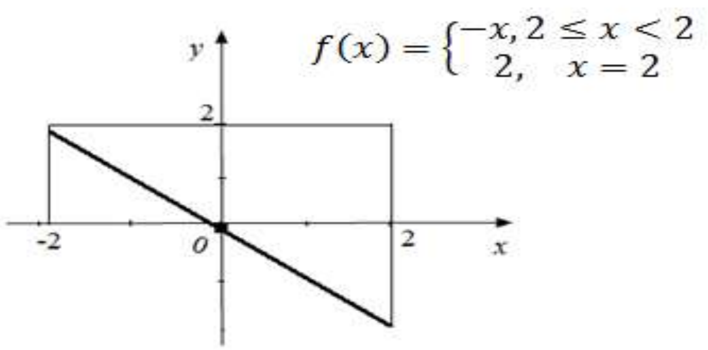
Agar $m = M$ bo‘lsa, u holda $f(x) = const$ bo‘ladi va ξ sifatida (a, b) intervalning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin.

Agar $m \neq M$ bo‘lsa, u holda $m < M$ bo‘ladi va shuning uchun $f(c_1) < f(c_2)$ tengszlik bajariladi. (36.9) shartga ko‘ra c_1 va c_2 nuqtalarning aqalli bittasi $[a, b]$ kesmaning ichki nuqtasi bo‘ladi. Masalan, $c_1 \in (a, b)$ bo‘lsin. c_1 ichki nuqta bo‘lganligidan $\exists\delta > 0$, $U_\delta(c_1) \subset (a, b)$ bo‘ladi. Barcha $x \in U_\delta(c_1)$ lar uchun $f(x) \geq f(c_1) = m$ bo‘lganligidan Ferma teoremasiga ko‘ra $f'(c_1) = 0$ bo‘ladi, ya’ni (36.10) shart $\xi = c_1$ bo‘lganda bajariladi. Shunga o‘xshash $c_2 \in (a, b)$ bo‘lgan hol qaraladi.

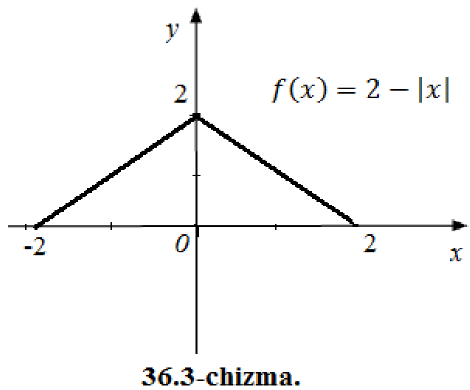
Roll teoremasini qisqacha quyidagicha ham berish mumkin: Differensiallanuvchi funksiyaning teng qiymatlar qabul qiluvchi ikkita nuqtasi orasida hosila nolga teng bo‘lgan aqalli bitta nuqta topiladi. $f(a) = f(b) = 0$ hol uchun Roll toremasini yanada qisqaroq quyidagicha aytish mumkin: Differensiallanuvchi funksiyaning ikkita noli orasida, uning hosilasining aqalli bitta noli yotadi.

36.2-Izoh. Roll teoremasining geometrik ma’nosi:
36.2-teorema shartlarida shunday $\xi \in (a, b)$ topilib, funksiya grafigiga $(\xi, f(\xi))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma *Ox* o‘qiga parallel bo‘ladi.

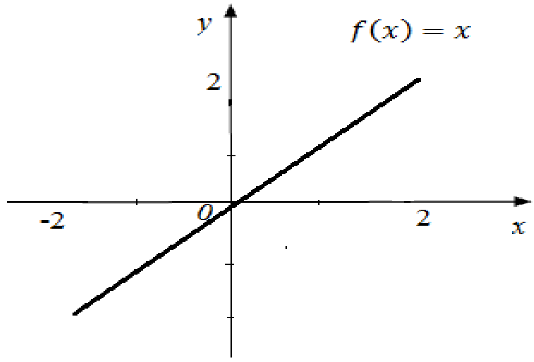
36.3-Izoh. Roll teoremasining hamma shartlari muhimidir, 36.2, 36.3, 36.4-chizmalarda shunday funksiyalarning



36.2-chizma.



36.3-chizma.



36.4-chizma.

grafiklari chizilganki, bu funksiyalar Roll teoremasining bitta shartidan boshqa barcha shartlarini qanoatlantiradi. Bu funksiyalar uchun (-2,2) intervalda hosila nolga teng bo‘lgan bironta ham nuqta topilmaydi. (Roll teoremasining qaysi sharti buzilayotganligini ko‘rsatishni mustaqil bajarish uchun qoldiramiz).

3. Chekli orttirmalar haqidagi Lagranj teoremasi.

36.3-teorema (Lagranj teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) intervalda differensiallanuvhi bo‘lsa, u holda bu intervalda shunday bitta ξ nuqta topiladiki

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (36.11)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Shartga ko‘ra $f(x)$ funjsiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lib, uning ichki nuqtlarida chekli $f'(x)$ hosilaga ega. Bu funksiya yordamida

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

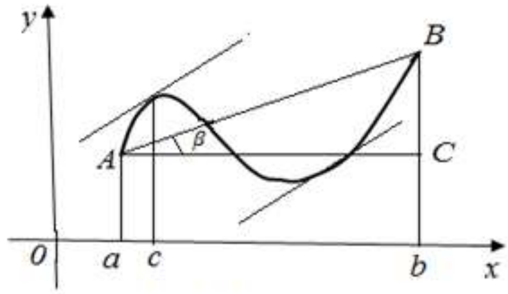
yordamchi funksiyani tuzaylik. Ravshanki, bu $F(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, (a,b) intervalda esa $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ hosilaga ega. $F(x)$ funksiyaning $x=a$ va $x=b$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: $F(a)=F(b)=0$. Demak, $F(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. U holda a va b orasida shunday ξ $(a<\xi<b)$ nuqta topiladiki, $F'(\xi)=0$ bo‘ladi. Shunday qilib,

$$0=F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

va bundan (36.11) formula kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Lagranj teoremasining geometrik ma’nosi quyidagicha: faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantirsin. $f(x)$ funksiya grafigining $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ nuqtalarini to‘g‘ri chiziq bilan tutashtiramiz. $f'(x)$ - bu $f(x)$ funksiya grafigining $(x,f(x))$ nuqtasidan o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffisiyentidir, ya’ni $tg\alpha=f'(x)$. Shunday

ξ $(a < \xi < b)$ nuqta topiladiki, $f(x)$ funksiya grafigiga $(\xi, f(\xi))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma AB to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi (36.5-chizma).



36.5-chizma.

(36.11) formulani boshqacha ham yozish mumkin: $\forall x_0 \in [a;b]$ nuqtani olib, unga ixtiyoriy Δx orttirma beramiz $(x_0 + \Delta x \epsilon [a;b])$. $[x_0, x_0 + \Delta x]$ segment uchun (36.11) Lagranj formulasini yozamiz:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(\xi), \tag{36.12}$$

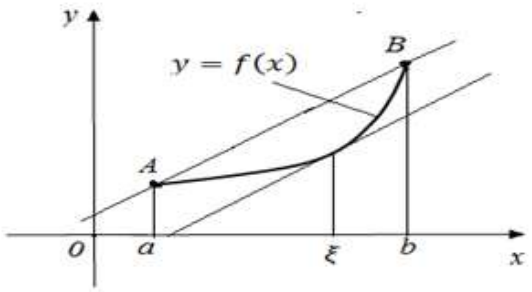
bunda $\forall \xi \in (x_0, x_0 + \Delta x)$. $\xi = x_0 + \theta \Delta x,\ 0 < \theta < 1$ deb belgilasak

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0 + \theta \Delta x) \tag{36.13}$$

formulani hosil qilamiz.

Odatda (36.12) yoki (36.13) formula chekli orttirmalar haqidagi *Lagranj formulasi deb yuritiladi.*

36.1-eslatma. Agar (36.11) formulada $f(a) = f(b)$ deb olinsa, u holda $f'(\xi) = 0$ $(a < \xi < b)$ bo‘lib, Lagranj teoremasidan Roll teoremasining kelib chiqishini ko‘ramiz.



36.6-chizma.

4.Lagranj teoremasidan kelib chiqadigan ba’zi bir natijalar.

36.1-natija. Agar $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi va $\forall x \in (a;b)$ da $f'(x) = 0$ bo‘lsa, u holda $f(x) = C = const$, $x \in (a;b)$ bo‘ladi.

Isbot. x_0 $(a;b)$ intervalga qarashli ixtiyoriy nuqta bo‘lsa, Lagranj teoremasini chetki nuqtalari x va x_0 bo‘lgan kesmada $f(x)$ funksiya uchun qo‘llab $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(\xi)$ tenglikni olamiz. Bu yerda $\xi \in (a;b)$, $f'(\xi) = 0$ bo‘lganligi uchun $f(x) = f(x_0) = C$ ekanligi kelib chiqadi.

36.2-natija. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz, $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi va barcha $x \in (a;b)$ larda $f(x) = k$ (k-o‘zgarmas) tenglik bajarilsa, u holda

$$f(x) = kx + B,\ x \in [a;b],$$

yani $f(x)$ chiziqli funksiya bo‘ladi.

Isbot. $x \in [a,b]$ bo‘sin $[a,x]$ kesmada f funksiya uchun Lagranj teoremasini qo‘llab $f(x) - f(a) = k(x-a)$ tenglikni olamiz. Bu yerdan $f(x) = kx + B, B = f(a) - ka$ ekanligi kelib chiqadi.

36.3-natija. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar biror $(a;b)$ oraliqda uzluksiz, bu oraliqda differensiallanuvchi bo‘lib, $f^{/}(x) = g^{/}(x)$, $x \in (a;b)$ bo‘lsa, u holda bu funksiyalarning biri ikkinchisidan o‘zgarmas songa farq qiladi, ya’ni $f(x) = g(x) + c$.

36.1-misol. $x > 0$ bo‘lganda quyidagi tengsizlikni isbotlang

$$ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}. \tag{36.14}$$

Isbot. $\varphi(x) = ln(1+x),\ \psi(x) = x - \frac{x^2}{2}$ bo‘lsin. $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x},\ \psi'(x) = 1 - x$ tengliklardan va $\xi > 0$ bo‘lganda $\frac{1}{1+\xi} > 1 - \xi$ tengsizlik o‘rinli bo‘lganligidan $[0;x]$ kesmada $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarga Lagranj teoremasini qo‘llasak, shunday bir $\xi \in [0;x]$ nuqta topilib, $ln(1+x) = \frac{1}{1+\xi} \cdot x,\quad x - \frac{x^2}{2} = (1-\xi)x$ tengliklar o‘rinli bo‘lishini ko‘ramiz. Bu yerdan (36.14) tengsizlikning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

5.Chekli orttirmalar haqidagi Koshi formulasi.

36.4-teorema (Koshi teoremasi). Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada uzluksiz, $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi bo‘lib, bu intervalning barcha nuqtalarida $g'(x) \neq 0$ bo‘lsa, u holda aqalli bitta $\xi \in (a;b)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f\prime(\xi)}{g\prime(\xi)} \tag{36.15}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. $\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x),\ \lambda \in R$ funksiyani qaraylik. λ ni shunday tanlaylikki, $\varphi(a) = \varphi(b)$ bo‘lsin. Bu tenglik

$$f(b) - f(a) + \lambda\big(g(b) - g(a)\big) = 0 \tag{36.16}$$

tenglikka teng kuchli. $\forall\xi(a;b)$ uchun $g'(\xi) \neq 0$ bo‘lganligidan $g(a) \neq g(b)$ munosabat kelib chiqadi. Aks holda Roll formulasiga ko‘ra $\exists c \in (a,b)\ g'(c) = 0$ bo‘lar edi. Demak $g(b) - g(a) \neq 0$ bo‘lar ekan. Bu holda (36.16) dan

$$\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \tag{36.17}$$

ekanligi kelib chiqadi.

φ funksiya ixtiyoriy λ lar uchun $[a, b]$ kesmada uzluksiz va $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi hamda λ ning (36.17) formula bilan berilgan qiymatida a va b nuqtalarda teng qiymatlar qabul qiladi. Demak bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Roll teoremasiga ko'ra $\exists\, \xi \in (a, b)\ \varphi'(\xi) = 0,$ ya'ni $f'(\xi) + \lambda g'(\xi) = 0$ bo'ladi. Bu yerdan $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = -\lambda$ ekanligini olamiz. Bu tenglikdan va (36.17) dan (36.15) kelib chiqadi.

6. Mustaqil yechish uchun misollar.

36.1. Ushbu $f(x) = 2x^2 - 1$ funksiya uchun $[1; 2]$ kesmada Ferma teoremasining shartlari bajariladimi?

36.2. Ushbu $f(x) = 5\sqrt{2x+1} - x$ funksiya uchun $[4;\, 40]$ kesmada Ferma teoremasining shartlari bajariladimi?

36.3. Ushbu $f(x) = x\ln 5 - x\ln x$ funksiya uchun $\left[\frac{5}{3};\, 2{,}5\right]$ kesmada Ferma teoremasining shartlari bajariladimi?

36.4. Ushbu $f(x) = \ln\sin x$ funksiya uchun $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ kesmada Roll teoremasining shartlari bajariladimi?

36.5.Ushbu

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$, $[1;2]$; 2) $f(x) = 4^{\sin x}$, $[0; \pi]$

funksiyalarning ko'rsatilgan kesmada Roll teoremasining shartlarini qanoatlantirishini tekshiring.

36.6. Ushbu $f(x) = \sin x$ funksiya uchun $[1;2]$ kesmada Roll teoremasining shartlari bajariladimi?

36.7. Quyidagi 1) $f(x) = x^3 - x,\ x \in [0;\, 1]$; 2) $f(x) = \sin 2x,\ x \in [0;\, 2\pi]$ funksiyalar ko'rsatilgan oraliqda Roll teoremasining shartlarini qanoatlantirishini ko'rsating va $f'(c) = 0$ ni qanoatlantiruvchi c sonlarni toping.

36.8. Quyidagi

1) $f(x) = x^2\ x \in [1;\, 2]$; 2) $f(x) = x^3,\ x \in [1;3]$; 3) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\ x \in [0;1]$

funksiyalar uchun ko'rsatilgan oraliqda o'rta qiymat haqidagi teoremaning shartlarini tekshiring va teorema tasdig'ini qanoatlantiruvchi barcha c sonlarni toping.

36.9. Ushbu $f(x) = 3x^2 - 5$ funksiya $[-2;\, 0]$ kesmada Lagranj teoremasining shartlarini qanoatlantiradimi? Agar qanoatlantirsa, $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ Lagranj formulasidagi ξ nuqtani toping.

36.10. $f(x)=\ln x$ funksiyaga $[1;\ e]$ kesmada Lagranj formulasini qo‘llang va unda qatnashadigan c ning qiymatini toping.

36.11. $f(x)=\sin 3x$ funksiya uchun $[x_1;x_2]$ kesmada Lagranj formulasini yozing.

36.12. $f(x)=\arcsin(2x)$ funksiya uchun $[x_0;\ x_0+\Delta x]$ kesmada Lagranj formulasini yozing.

36.13. $f(x)=x^n$ funksiyaning $[0;\ a\ ]$ kesmada $(n>0;\ \ a>0)$ Lagranj teoremasining shartlarini qanoatlantirishini ko‘rsating.

36.14. $y=|x|$ funksiya uchun $[0;a]$ kesmada Roll teoremasi o‘rinli emasligini ko‘rsating.

36.15. $x^3-3x+c=0$ tenglamaning (0;1) oraliqda ikkita har xil ildizga ega bo‘lmasligini isbotlang.

36.16. $y=x^3$ chiziqda shunday nuqtani topingki, unga o‘tkazilgan urinma $A(-1;1)$ va $B(2;8)$ nuqtalarni birlashtiruvchi vatarga parallel bo‘lsin.

7. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Ferma teoremasini ayting va uni isbotlang.
2. Roll teoremasini ayting va uni isbotlang.
3. Langranj teoremasini ayting va uni isbotlang.
4. Koshi teoremasini ayting va uni isbotlang.

37-§. Teylor formulasi

Reja:

1. Lagranj ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi.
2. Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi.
3. Elementar funksiyalar uchun Makloren formulalari.
4. Mustaqil yechish uchun misollar.
5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Lagranj ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi. Tabiatda ko‘pgina masalalar funksiyaning berilgan nuqtadagi qiymatini topishga bog‘liq bo‘ladi. Funksiya murakkab bo‘lgan hollarda funksiyaning berilgan nuqtadagi qiymatini hisoblash har doim ham yengil bo‘lavermaydi. Bunday hollarda, nuqtadagi qiymatini hisoblash noqulay bo‘lgan funksiyani, o‘ziga qaraganda sodda va hisoblash uchun qulay bo‘lgan funksiyaga yaqinlashtirish-almashtirishga to‘g‘ri keladi. Berilgan $f(x)$ funksiyani biror $g(x)$ funksiyaga yaqinlashtirish-almashtirishda quyidagi ikki momentni e’tiborga olish muhimdir:

1) $f(x)$ ga yaqinlashadigan $g(x)$ funksiyaning tanlab olinishi va uning tuzilishi (soddaligi, hisoblash uchun qulayligi);

2) $f(x)$ ni $g(x)$ ga yaqinlashtirishdagi qo‘yilgan xatolikni aniqlash va uni hisoblash.

Odatda yaqinlashadigan $g(x)$ funksiya sifatida butun ratsional $P_n(x)$ ko‘phad olinadi.

1885 yilda buyuk nemis matematigi K.Veyershtrass $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan $f(x)$ funksiyani $P_n(x)$ ko‘phad bilan yaqinlashtirish mumkinligi haqidagi teoremani isbot qiladi, lekin bu teorema $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ ayirmani baholashni va uning nolga intilish tartibini aniqlab bermaydi. Keyingi yillardagi ilmiy izlanishlar $R_n(x)$ ning nolga intilish tartibi yaqinlashtiriladigan $f(x)$ funksiyaning hosilalarga ega bo‘lishiga bog‘liq ekanligini ko‘rsatdi.

$f(x)$ funksiya biror x_0 nuqtaning biror atrofida yuqori tartibli hosilalarga ega bo‘lsa, bu hosilalardan foydalanib, avvalo $P_n(x)$ ko‘phadni tuzish va $f(x)$ funksiyani bu ko‘phad bilan yaqinlashtirish masalasini qarash mumkin bo‘ladi. Bu masalani yechishda Teylor formulasi muhim rol o‘ynaydi.

37.1-lemma. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada n- tartibgacha hosilalarga ega bo‘lsa, darajasi n dan oshmaydigan shunday $P_n(x)$ ko‘phad topiladiki, quyidagi munosabatlar o‘rinli bo‘ladi:

$$P_n(x_0) = f(x_0),\ P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),\ \ k = 1, 2, \ldots,\ n. \qquad (37.1)$$

Bu ko‘phad quyidagi ko‘rinishda yoziladi

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (37.2)$$

yoki

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

kabi yoziladi.

Isbot: $\varphi(x) = (x - x_0)^m,\ \ m \in N$ bo‘lsin. Unda $\varphi(x_0) = 0$ bo‘ladi.

$$\varphi^{(k)}(x_0) = \begin{cases} 0, & agar\ k \neq m, \\ k!, & agar\ k = m, \end{cases} \qquad (37.3)$$

bo‘ladi. (37.3) dan (37.2) formula bilan berilgan $P_n(x)$ ko‘phad (37.1) shartlarni qanoatlantirishligi kelib chiqadi. Bu ko‘phad $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi n- tartibli Teylor ko‘phadi deyiladi.

37.1-mashq. Agar $Q_n(x)$ – darajasi n dan oshmaydigan ixtiyoriy ko‘phad bo‘lsa, u holda bu ko‘phadni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

37.2-lemma. $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar x_0 nuqtaning δ atrofida aniqlangan va quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) barcha $x \in U_\delta(x_0)$ lar uchun $\varphi^{(n+1)}(x)$ va $\psi^{(n+1)}(x)$ hosilalar mavjud;
2) $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \cdots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0,$
$$\psi(x_0) = \psi'(x_0) = \cdots = \psi^{(n)}(x_0) = 0; \tag{37.4}$$
3) $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ va $k = 1,2,\dots,n+1$ lar uchun $\psi(x) \neq 0,\ \psi^{(k)}(x) \neq 0.$

U holda har bir $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ uchun uchlari x_0 va x nuqtalarda bo‘lgan intervalda ξ nuqta topiladiki, quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}. \tag{37.5}$$

Isbot. Masalan, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ bo‘lsin. Unda, $[x_0, x]$ segmentda φ va ψ funksiyalarga Koshi teoremasini qo‘llab va $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = 0$ tengliklarni e’tiborga olib, (37.4) ga ko‘ra quyidagini olamiz:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)}, \qquad x_0 < \xi_1 < x. \tag{37.6}$$

Xuddi shunday, $[x_0; \xi_1]$ kesmada φ' va ψ' funksiyalarga Koshi teoremasini qo‘llab, quyidagini topamiz:

$$\frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(x_0)}{\psi'(\xi_1) - \psi'(x_0)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)},\ x_0 < \xi_2 < \xi_1. \tag{37.7}$$

(37.6) va (37.7) tengliklardan quyidagi munosabat kelib chiqadi

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)},\ x_0 < \xi_2 < \xi_1 < x < x_0 + \delta.$$

$\varphi'', \psi'', \varphi^{(3)}, \psi^{(3)}, \dots, \varphi^{(n)}, \psi^{(n)}$ funksiyalarga mos oraliqlarda ketma-ket Koshi teoremasini qo‘llab quyidagi tengliklarni hosil qilamiz

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \cdots = \frac{\varphi^{(n)}(\xi_n)}{\psi^{(n)}(\xi_n)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}, x_0 < \xi < \xi_n < \cdots < \xi_1 < x < x_0 + \delta.$$

$x \in (x_0, x_0 + \delta)$ bo‘lganda (37.5) tenglik isbotlandi. $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ bo‘lgan hol ham xuddi shunday qaraladi.

37.1-Теорема. Shunday $\delta > 0$ son mavjud bo‘lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning δ atrofida $n + 1$ – tartibligacha hosilalarga ega bo‘lsin. U holda $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ uchun uchlari x_0 va x nuqtalarda bo‘lgan Δ intervalda ξ nuqta topiladiki, quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + $$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (37.8)$$

yoki $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Isbot. $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ va $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n$ - $f(x)$ funksiyaning Teylor ko‘phadi bo‘lsin. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x). \qquad (37.9)$$

$P_n(x)$ ko‘phad 37.1-lemmadagi (37.1) shartni qanoatlantirganligi uchun (37.9) munosabatdan

$$r_n(x_0) = r'_n(x_0) = \cdots = r_n^{(n)}(x_0) = 0 \qquad (37.10)$$

tengliklar kelib chiqadi. $\varphi(x) = r_n(x)$, $\psi(x) = (x - x_0)^{n+1}$ funksiyalarni qaraymiz. Bu funksiyalar 37.2-lemmaning shartlarini qanoatlantiradi, shuning uchun ular uchun (37.5) tenglik bajariladi, ya’ni

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\ \xi \in \Delta \qquad (37.11)$$

bo‘ladi, chunki $P_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$, $\psi^{(n+1)}(x) = (n+1)!$. (37.11) va (37.9) tengliklardan (37.8) formula kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

37.1-eslatma. $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ funksiya Teylor formulasining Lagranj ko‘rinishidagi qoldiq hadi deyiladi. (37.8) formula $x = x_0$ bo‘lganda ham o‘rinli bo‘ladi.

37.1-natija. Agar φ va ψ funksiyalar $x \geq x_0$ bo‘lganda n marta differensiallanuvchi va $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0), k = 0,1,2, \ldots, n-1, x > x_0$ da $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda $x > x_0$ da $\varphi(x) > \psi(x)$ bo‘ladi.

Isbot: $n = 1$ da natijaning tasdig’i Lagranj teoremasining natijasidan kelib chiqadi. $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ belgilashni kiritamiz. U holda $k = 0,1,2, \ldots, n-1$ larda $f^{(k)}(x_0) = 0$ va (37.8) formula bo‘yicha quyidagi tenglik kelib chiqadi

$$f(x) = \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(\xi).$$

Agar $x > x_0$ bo‘lsa, u holda $\xi > x_0$, $f^{(n)}(\xi) = \varphi^{(n)}(\xi) - \psi^{(n)}(\xi)$ va shuning uchun $f(x) > 0$, ya’ni $x > x_0$ da $\varphi(x) > \psi(x)$ kelib chiqadi.

37.1-misol. Quyidagi tengsizliklarni isbotlang:

a) $|sint - t| \leq \frac{t^2}{2},\ t \in R;$

b) $x - \frac{x^3}{3!} < sinx < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},\ x > 0. \qquad (37.12)$

Yechish. a) $n = 2$ va $x_0 = 0$ da $f(t) = sint$ funksiyaga (37.8) formulani qo‘llasak, $sint = t - \frac{sin\xi}{2!} t^2$ tenglikni olamiz, bundan $|sint - t| \leq \frac{t^2}{2}$, $t \in R$ tengsizlik kelib chiqadi.

b) Agar $f(x) = sinx$ bo‘lsa, u holda $f(0) = f^{(2)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$,

$$f'(0) = 1, f^{(3)}(0) = -1,\ f^{(n)}(x) = (sinx)^{(n)} = sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

$n = 5$ va $x_0 = 0$ da (37.8) formulani qo‘llab

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} sin\left(\xi + 5 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

formulani olamiz. Bundan $x > 0$ da $\left|\frac{x^5}{5!} sin\left(\xi + 5 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{x^5}{5!}$ bo‘lganligi uchun (37.12) tengsizliklarning o‘ng tomoni kelib chiqadi. $n = 3$ va $x_0 = 0$ da $f(x) = sinx$ funksiyaga (37.8) formulani qo‘llab, (37.12) tengsizliklarning chap tomonini isbotlaymiz.

2.Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi.

37.2-teorema. Agar $f^{(n)}(x_0)$ hosila mavjud bo‘lsa, u holda quyidagi formula o‘rinli bo‘ladi:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o(x - x_0)^n, \qquad x \to x_0. \qquad (37.13)$$

Isbot: $f^{(n)}(x_0)$ hosilaning mavjudligidan $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ atrofda aniqlanganligi va $n - 1$ - chi tartibgacha hosilalarga ega bo‘lishligi kelib chiqadi. $\varphi(x) = r_n(x)$, $\psi(x) = (x - x_0)^{n+1}$ belgilashlarni kiritamiz, bu yerda $r_n(x)$ funksiya (37.9) formuladan aniqlanadi. Agar $n + 1$ nomerni $n - 1$ nomerga o‘zgartirsak, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar 37.2-lemmaning shartlarini qanoatlantiradi. $r_n^{(n)}(x_0) = 0$ ekanligini e’tiborga olib, 37.2-lemmani qo‘llasak, quyidagi formulani olamiz

$$\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{r_n^{(n-1)}(\xi) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi - x_0)}, \qquad (37.14)$$

bu yerda $\xi = \xi(x)$ va

$$x_0 < \xi < x < x_0 + \delta \text{ yoki } x_0 - \delta < x < \xi < x_0. \qquad (37.15)$$

$x \to x_0$ bo‘lganligi uchun (37.15) tengsizlikdan $\xi \to x_0$ kelib chiqadi. $f^{(n)}(x_0)$ hosilaning mavjudligidan va (37.10) munosabatning bajarilishidan quyidagi limitning mavjudligi kelib chiqadi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(\xi) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{\xi - x_0} = r_n^{(n)}(x_0).$$

Shunday qilib, $x \to x_0$ da (37.14) formulaning o‘ng tomonining limiti 0 ga teng bo‘ladi, shuning uchun bu formulaning chap tomonining limiti ham mavjud va

0 ga teng bo‘lishligi kelib chiqadi. Bu $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$, $x \to x_0$ yoki $f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n)$ ekanligini bildiradi, bundan (37.13) formula kelib chiqadi.

37.2-eslatma. (37.13) formula Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi yoki Teylorning lokal formulasi deyiladi.

3. Elementar funksiyalar uchun Makloren formulalari.

Agar $x_0 = 0$ va $f^{(n)}(0)$ hosila mavjud bo‘lsa, u holda (37.13) formula quyidagi ko‘rinishni oladi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k + o(x^n), \qquad x \to 0. \qquad (*)$$

(*) formulaga $f(x)$ funksiyaning Makloren formulasi deyiladi.

Ushbu

$$f(x) = e^x, \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = shx, \quad f(x) = chx,$$

$$f(x) = (1+x)^m, \qquad f(x) = \ln(1+x)$$

funksiyalar uchun Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli Makloren formulalari quyidagicha bo‘ladi:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \qquad (37.16)$$

$$sinx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots +$$

$$+ \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \qquad (37.17)$$

$$cosx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \qquad (37.18)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}x^n + o(x^n), \qquad (37.19)$$

bu yerda $C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n), \qquad (37.20)$$

xususiy holda,

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n). \qquad (37.21)$$

$$shx = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} +$$

$$+o(x^{2n+2}) \qquad (37.22)$$

$$chx = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \qquad (37.23)$$

$$a^x = 1 + (\ln a)x + \frac{1}{2!}(\ln a)^2 x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(\ln a)^n x^n + o\left(x^{n+1}\right), \ a > 0, \ a \neq 1. \qquad (37.24)$$

Agar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

bo‘lsa,

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k + o((x - x_0)^n), \qquad (37.25)$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \qquad (37.26)$$

bunda $\qquad C_k = \sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p}.$

37.2-misol. Ushbu $f(x) = sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ funksiyani $o\left(x^n\right)$ hadgacha Makloren formulasiga yoying.

Yechilishi. Ma’lumki, $f^{(k)}(x) = 2^k sin\left(2x + \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)$ va $f^{(k)}(0) = 2^k sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)$ bo‘lganligi sababli $f(x)$ funksiya uchun Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli Makloren formulasi (*) dan quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} sin\frac{\pi}{4}(2k+1)x^k + o(x^n).$$

37.3-misol. Ushbu $f(x) = arctgx$ funksiyani $o\left(x^n\right)$ hadgacha Makloren formulasiga yoying.

Yechilishi. Ma’lumki,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \cdot sin\left[n\left(arctgx + \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & n \text{ juft bo'lganda}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n \text{ toq bo'lganda}. \end{cases}$$

Demak, Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli (*) Makloren formulasiga asosan,

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

bo‘ladi.

4. Mustaqil yechish uchun misollar.

37.1. Quyidagi funksiyalarning $o(x^n)$ hadgacha Makloren formulalarini yozing.

1. $f(x) = e^{\frac{x}{2}+2}$. **2.** $f(x) = \sqrt{1+x}$. **3.** $f(x) = \frac{1}{2x+3}$.

4. $f(x) = ln(5-4x)$. **5.** $f(x) = (x+5)e^{2x}$. **6.** $f(x) = ln\frac{3+x}{2-x}$.

7. $f(x) = e^x ln(1+x), n = 4$.

37.2. Teylor formulasidan foydalanib, quyidagi limitlarni hisoblang.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cosx-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)-x}{x^2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{sinx-x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx-arcsinx}{tgx-sinx}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

37.3. Quyidagi funksiyalarning ko’rsatilgan hadgacha Makloren formulalarini yozing.

1. $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ funksiyani x^4 hadgacha, $f^{(4)}(0) =$?

2. $f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{20}(1+2x)^{60}}$ funksiyani x^2 hadgacha.

3. $f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}$ $(a > 0)$ funksiyani x^2 hadgacha.

4. $f(x) = e^{2x-x^2}$ funksiyani x^5 hadgacha.

5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Lagranj ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasini yozing.
2. Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasini yozing.
3. Elementar funksiyalar uchun Makloren formulalarini yozing.

38-§. Lopital qoidalari

Reja:

1. Lopitalning birinchi qoidasi.
2. Lopitalning ikkinchi qoidasi.
3. Mustaqil yechish uchun misollar.
4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Lopitalning birinchi qoidasi ($\frac{0}{0}$ ko‘rinishidagi aniqmaslik). $x \to a$ da f va g funksiyalar bir vaqtda cheksiz kichik yoki cheksiz katta funksiyalar bo‘lganda $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbatning limitini hisoblashda “Lopital qoidalari” ni qo‘llash qulay bo‘ladi. Bu qoidalar f va g funksiyalarning hosilalari nisbati $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ning limiti yordamida $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbatning limitini hisoblash imkonini beradi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada differensiallanuvchi va $f(a) = g(a) = 0, g'(a) \neq 0$ bo‘lsa, u holda f va g funksiyalarga $n = 1$ bo‘lganda Teylorning lokal formulasini qo‘llab, quyidagilarni olamiz:

$$f(x) = f'(a)(x-a) + o(x-a),$$
$$g(x) = g'(a)(x-a) + o(x-a).$$

Bundan

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{38.1}$$

tenglik kelib chiqadi.

Xuddi shunday, agar

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n-1)}(a) = 0,\ \ g^{(n)}(a) \neq 0$$

munosabatlar bajarilsa, u holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

bo‘ladi.

38.1-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^{10}-2x^5-1}{x^3-4x^2+3}$ limitni toping.

Yechish. Belgilash olamiz $f(x) = 3x^{10} - 2x^5 - 1,\ g(x) = x^3 - 4x^2 + 3.$ Unda $f'(x) = 30x^9 - 10x^4,\ g'(x) = 3x^2 - 8x,\ \ f(1) = g(1) = 0,$ $f'(1) = 20, g'(1) = -5$ va (38.1) formula bo‘yicha izlanayotgan limit -4 ga teng bo‘lishini topamiz.

38.1- teorema (**Lopitalning birinchi qoidasi**). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) oraliqda differensiallanuvchi,

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a+0} g(x) = 0, \tag{38.2}$$

$$\forall x \in (a,b) \text{ lar uchun } g'(x) \neq 0, \tag{38.3}$$

chekli yoki cheksiz

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \tag{38.4}$$

limit mavjud bo‘lsin. U holda $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$ limit ham mavjud va A ga teng, ya’ni

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \tag{38.5}$$

Isbot. $x \in (a, b)$ bo‘lsin.

$$f(a) = g(a) = 0 \tag{38.6}$$

deb olib, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarni a nuqtada aniqlaymiz. U holda bundan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning $[a,x]$ kesmada uzluksizligi kelib chiqadi. Koshi teoremasiga ko‘ra, shunday $\xi \in (a,x)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{38.7}$$

munosabat bajariladi.

$x \to a+0$ da $\xi \to a+0$ va (38.4) shartga ko‘ra $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$ limit mavjud bo‘ladi. Shuning uchun (38.7) tenglikdan (38.5) tenglikning to‘g’riligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

38.1-eslatma. 38.1-teoremani (mos ravishda uning shartlarini o‘zgartirish bilan) $x \to a-0$ va $x \to a$ (a – chekli son) to‘g’ri bo‘lishini ko‘rsatish mumkin.

$a = +\infty$ (yoki $a = -\infty$) bo‘lganda, agar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, $x > x_0$ da $g'(x) \neq 0$ va $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ limit mavjud bo‘lsa ham bu teorema o‘z kuchida qoladi. Bu tasdiq 38.1-teoremada $x = \frac{1}{t}$ almashtirish olish bilan isbotlanadi.

2. Lopitalning ikkinchi qoidasi ($\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishidagi aniqmaslik).

38.2- teorema (**Lopitalning ikkinchi qoidasi**). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x > a$ oraliqda differensiallanuvchi, $x > a$ da $g'(x) \neq 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \infty, \tag{38.8}$$

va chekli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \tag{38.9}$$

limit mavjud bo‘lsin. U holda A ga teng bo‘lgan $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ limit ham mavjud, ya’ni

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \tag{38.10}$$

Isbot. (38.8) formuladan

$$\exists \alpha_1 > a\colon\ \forall x > \alpha_1 \to |f(x)| > 1,\ |g(x)| > 1, \tag{38.11}$$

munosabat kelib chiqadi va $x > \alpha_1$ da $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ bo‘ladi. (38.9) limit uchun limit ta’rifiga ko‘ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \geq \alpha_1$ son topiladiki, barcha $t > \delta_1$ lar uchun

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(t)}{g'(t)} < A + \frac{\varepsilon}{2} \tag{38.12}$$

tengsizlik bajariladi. $x_0 > \alpha_1$ ni tayinlab, (38.8) dan foydalanib, $\delta_2 > x_0$ sonni shunday tanlaymizki, $\forall x > \delta_2$ larda

$$\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}, \ \left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2} \tag{38.13}$$

tengsizliklar bajariladi.

(38.10) formulani isbotlash uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, barcha $x > \delta$ larda

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < A + \frac{\varepsilon}{2} \tag{38.14}$$

tengsizlikning bajarilishini ko‘rsatish kerak. δ son quyida tanlanadi. $x > \delta$ deb hisoblab, f va g funksiyalarga $[x_0, x]$ kesmada Koshi teoremasini qo‘llaymiz. Bu teoremaga ko‘ra shunday $\xi \in (x_0, x)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{38.15}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. (38.11) va (38.13) munosabatlarni qo‘llab, (38.15) tenglikning chap tomonini quyidagicha almashtiramiz:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}\big(\varphi(x)\big)^{-1}, \tag{38.16}$$

$$\text{bu yerda } \varphi(x) = \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1 + \beta(x). \tag{38.17}$$

Ravshanki, (38.8) shartga asosan $x \to +\infty$ da $\beta(x) \to 0$.
Shuning uchun

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta \geq \delta_2 \colon \ \forall x > \delta \to |\beta(x)| < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{|A| + \frac{\varepsilon}{2}}. \tag{38.18}$$

$\xi > x_0 > \delta_1$ bo‘lganligi uchun (38.16) va (38.17) munosabatlarga ko‘ra (38.12) shartdan barcha $x > \delta_2$ lar uchun

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)}{g(x)}\big(\varphi(x)\big)^{-1} < A + \frac{\varepsilon}{2} \tag{38.19}$$

tengsizliklar bajariladi. Agar $x > \delta$ bo‘lsa, unda (38.17) va (38.18) munosabatlarga ko‘ra $\varphi(x) > 0$ va shuning uchun (38.19) tengsizlik quyidagi tengsizlikka teng kuchli:

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\big(1 + \beta(x)\big) < \frac{f(x)}{g(x)} < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)\big(1 + \beta(x)\big) \tag{38.20}$$

(38.18) tengsizlikni qo‘llab, quyidagini olamiz

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\big(1 + \beta(x)\big) = A - \frac{\varepsilon}{2} + \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\beta(x) \geq$$
$$\geq A - \frac{\varepsilon}{2} - \left(|A| + \frac{\varepsilon}{2}\right)|\beta(x)| > A - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = A - \varepsilon.$$

Xuddi shunga o‘xshash

$$\left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)\big(1 + \beta(x)\big) \leq A + \frac{\varepsilon}{2} + \left(|A| + \frac{\varepsilon}{2}\right)|\beta(x)| < A + \varepsilon.$$

Shunday qilib, barcha $x > \delta$ lar uchun (38.14) tengsizlik bajariladi. Bu (38.10) tasdiqning to‘g’riligini anglatadi. Teorema isbot bo‘ldi.

38.2-eslatma. Agar $A=+\infty$ yoki $A=-\infty$ bo‘lganda ham 38.2-teorema o‘rinli bo‘ladi. 38.2-teorema $x\to a$ $(x\to a-0, x\to a+0)$ (a – chekli son) hollar uchun ham o‘rinli bo‘ladi.

38.3-eslatma. Lopitalning 38.1 va 38.2-teoremalaridan foydalanib, $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishidagi aniqmasliklar ochiladi. Ko‘pincha har xil almashtirishlar yordamida $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ ko‘rinishidagi aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishidagi aniqmasliklarga keltiriladi.

38.4-eslatma. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bo‘lsa, $f(x)\cdot g(x)$ ifoda $0\cdot\infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Bu ko‘rinishdagi aniqmaslikni ochishda uni

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

kabi yozish orqali $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarga keltirilib, Lopital qoidalari qo‘llaniladi.

38.5-eslatma. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ bo‘lsa, $f(x)-g(x)$ ifoda $\infty-\infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ifoda qiladi, uni ham quyidagi

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

kabi yozish bilan $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslikka keltiriladi va Lopital qoidalari qo‘llaniladi.

38.6-eslatma. Agar $x\to a$ da $f(x)$ funksiya 1, 0 va ∞, $g(x)$ funksiya esa mos ravishda, ∞, 0 va 0 ga intilganda $(f(x))^{g(x)}$ – daraja – ko‘rsatkichli ifoda $1^\infty, 0^0, \infty^0$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ifoda qiladi. Bu ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochish uchun, avvalo berilgan ifoda logarifmlanadi: $\ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$, bu ifoda $x\to a$ da $0\cdot\infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi, ya’ni yuqorida o‘rganilgan holga keltiriladi.

Shunday qilib: 1) $0\cdot\infty$ yoki $\infty-\infty$ ko‘rinishdagi aniqmasliklar algebraik almashtirishlar natijasida $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarga keltiriladi va ularga Lopital qoidalari qo‘llaniladi.

2) $1^\infty, 0^0, \infty^0$ ko‘rinishdagi aniqmasliklar logarifmlash yoki $(f(x))^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$ shakl o‘zgartirishlar orqali $0\cdot\infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslikka keltiriladi, so‘ngra uni $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarga keltirib, Lopital qoidalari qo‘llaniladi.

38.2-misol. Agar $\alpha > 0$ bo‘lsa, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^\alpha} = 0$ tenglikni isbotlang.

Yechish. Lopital qoidasi (38.2-teorema) ni qo‘llab

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

munosabatni hosil qilamiz.

38.3-misol. Agar $\alpha > 0$ bo‘lsa, $\lim\limits_{x\to+0} x^\alpha lnx$ limitni hisoblang.

Yechish. $0\cdot\infty$ ko‘rinishidagi aniqmaslikni $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishidagi aniqmaslikga keltirib va Lopital qoidasini qo‘llab, quyidagini olamiz:

$$\lim_{x\to+0} x^\alpha lnx = \lim_{x\to+0} \frac{lnx}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to+0} \frac{1\backslash x}{-\alpha x^{-(\alpha+1)}} = \frac{-1}{\alpha} \lim_{x\to+0} x^\alpha = 0.$$

38.4-misol. Agar $r > 0, a > 1$ bo‘lsa, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^r}{a^x} = 0$ bo‘lishini isbotlang.

Yechish. $m = [r] + 1$ bo‘lsin. U holda $r - m < 0$. Lopital qoidasini m marta qo‘llab, quyidagini olamiz:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^r}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{rx^{r-1}}{a^x lna} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-m+1)x^{r-m}}{a^x ln^m a} = 0.$$

38.7-eslatma. 38.2 va 38.4-misollardan ko‘rinadiki, $x\to+\infty$ da logarifmik funksiya darajali x^r funksiyaga nisbatan sekinroq o‘sadi, darajali funksiya esa $a^x, a > 1$ ko‘rsatkichli funksiyaga nisbatan sekinroq o‘sar ekan.

38.5-misol. Agar $\alpha > 0, \beta > 0$ bo‘lsa, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln^\alpha x}{x^\beta} = 0$ bo‘lishini isbotlang.

Yechish. $lnx = \frac{t}{\beta}$ belgilash kiritib va 38.4-misoldan foydalanib, quyidagini olamiz:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln^\alpha x}{x^\beta} = 0.$$

38.6-misol. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$ limitni hisoblang.

Yechilishi. Ravshanki, $f(x) = \ln(x^2-3)$, $g(x) = x^2+3x-10$ funksiyalar $x\to 2$ da $f(x) = \ln(x^2-3)\to 0$, $g(x) = x^2+3x-10 \to 0$. $x=2$ nuqtaning $x = \pm\sqrt{3}$ nuqtalarni o‘z ichida saqlamaydigan ixtiyoriy kichik atrofida $f'(x) = \frac{2x}{x^2-3}$, $g'(x) = 2x+3$ hosilalar mavjud va $g'(x) = 2x+3 \neq 0$ $\left(x > -\frac{3}{2}\right)$,

$$\lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{x^2-3}}{2x+3} = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{(x^2-3)(2x+3)} = \frac{4}{7}$$ mavjud.

Demak, berilgan limitni hisoblashga Lopitalning birinchi qoidasini qo‘llash mumkin:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{(x^2-3)(2x+3)}=\frac{4}{7}.$$

38.7-misol. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{ax}}$ $\quad (a>0,\alpha>0)$ limitni hisoblang.

Yechilishi. Bu holda, $f(x)=x^\alpha, g(x)=e^{ax}$ bo‘lib, ular 38.2-teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun, Lopitalning ikkinchi qoidasiga ko‘ra,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha\,x^{\alpha-1}}{a\,e^{ax}}=0\ ,$$

chunki $x\to+\infty$ da asosi birdan katta ko‘rsatkichli funksiya darajali funksiyaga qaraganda tezroq o‘sadi. Bu limitni Lopital qoidasini $k\,(k=[\alpha]+1,\ \ \alpha-k<0)$ marta qo‘llab ham topish mumkin:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha\,x^{\alpha-1}}{a\,e^{ax}}=...=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)\,x^{\alpha-k}}{a^k e^{ax}}=0\ .$$

38.8-misol. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$ limitni hisoblang.

Yechilishi. Bu holda, $f(x)=x^x-x,\ g(x)=\ln x-x+1$ bo‘lib, ular 38.2-teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi, jumladan, $x=1$ nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofida $f'(x)=x^x(\ln x+1)-1$, $\quad g'(x)=\frac{1}{x}-1$ hosilalar mavjud bo‘lib, $g'(x)=\frac{1}{x}-1\neq0\ \ (x\neq1)$. Lekin, $f'(x)$ va $g'(x)$ funksiyalar ham o‘z navbatida $x=1$ nuqtaning kichik atrofida 38.2-teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun, berilgan limitni hisoblashga Lopitalning birinchi qoidasini ikki marta qo‘llaymiz:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}=\lim_{x\to1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}=\lim_{x\to1}\left[1-x^{x+1}(\ln x+1)\left(1+\frac{1}{x}+\ln x\right)-x^x\right]=-2.$$

38.9-misol. $\lim\limits_{x\to0+0}x^\alpha\ln^\beta\left(\frac{1}{x}\right)$ $\ (\alpha>0,\quad \beta>0)$ limitni hisoblang.

Yechilishi. Bu holda $\lim\limits_{x\to0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to0+0}x^\alpha=0,\quad \lim\limits_{x\to0+0}g(x)=\lim\limits_{x\to0+0}\ln^\beta\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

Demak, berilgan ifodaning $x\to0+0$ dagi limiti ($0\cdot\infty$) ko‘rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Bu aniqmaslikni ochish uchun, uni $\left(\frac{0}{0}\right)$ yoki $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ko‘rinishdagi aniqmaslikka keltirib, Lopitalning birinchi qoidasini qo‘llashda, soddalik uchun, $\ln\frac{1}{x}=t,\ x=e^{-t}$ almashtirishni bajarib, berilgan ifodaning limiti

$$\lim_{x\to 0+0} x^{\alpha}\cdot \ln^{\beta}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\beta}}{e^{\alpha t}} = 0$$

ni topamiz.

3.Mustaqil yechish uchun misollar.

38.1. Lopital qoidalaridan foydalanib, quyidagi funksiyalarning limitlarini hisoblang.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+5x-8}{4x^2+3x-7}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\ln(x^2-15)}{3x^2-10x-8}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$.

4. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinax}{sinbx}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{1/x^2}-1}{arctgx^2-\frac{\pi}{2}}$. **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cosax}{cosbx}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{a^{\ln x}-x}{\ln x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}$. **11.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xtgx-1}{x^2}$. **12.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax-\sin bx}{\operatorname{sh} ax-\operatorname{sh} bx}$.

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Aniqmasliklarning turlarini ayting.
2. $0/0$ ko‘rinishidagi aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasini ayting va uni isbotlang.
3. ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasini ayting va uni isbotlang.
4. $0\cdot\infty$ ko‘rinishidagi aniqmaslik qanday ochiladi?

39-§. Funksiyaning monotonlik oraliqlari

Reja:

1. Intervalda differensiallanuvchi funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlari.
2. Funksiyaning qat'iy o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lishining yetarli shartlari.
3. Funksiyaning nuqtada o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lishi ta’rifi.
4. Mustaqil yechish uchun misollar.
5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Intervalda differensiallanuvchi funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlari.

39.1-teorema. (a, b) intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning shu intervalda o‘suvchi bo‘lishi uchun

$$\forall x\in(a,b)\quad f'(x)\geq 0 \tag{39.1}$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli. Shunga o‘xshash

$$\forall x\in(a,b)\quad f'(x)\leq 0 \tag{39.2}$$

shartning bajarilishi bu $f(x)$ funksiyaning (a, b) intervalda kamayuvchi bo‘lishi uchun zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. x_0 nuqta (a, b) intervalning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. O‘suvchi funksiyaning ta’rifidan

$$\forall x \in (a,b), x > x_0 \ \rightarrow f(x) \geq f(x_0),$$
$$\forall x \in (a,b), x < x_0 \ \rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

munosabatlarning bajaralishi kelib chiqadi. Bu yerdan agar $x \in (a;b)$ va $x \neq x_0$ bo‘lsa, u holda

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad (39.3)$$

tengsizlikning o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. (39.3) ning chap tomoni $x \rightarrow x_0$ da $f'(x_0)$ limitga ega bo‘lganligi uchun, limitning tengsizlikka bo‘g’liq xossalaridan (39.3) ga asosan $\forall x_0 \in (a, b)$ uchun $f'(x_0) \geq 0$ tengsizlikni olamiz.

Yetarliligi. (39.1) shart bajarilgan bo‘lsin. $(a;b)$ intervalga qarashli va $x_1 < x_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olaylik. $[x_1, x_2]$ kesmada $f(x)$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo‘llab

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \ \ \xi \in (a,b)$$

tenglikni olamiz. Bu yerdan $f'(\xi) \geq 0$ bo‘lganligi uchun $x_2 > x_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x_1, x_2 \in (a, b)$ uchun

$$f(x_2) \geq f(x_1) \qquad (39.4)$$

tengsizlikni olamiz. Bu esa $f(x)$ funksiyaning (a, b) intervalda o‘suvchi ekanligini bildiradi.

2. Funksiyaning qat’iy o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lishining yetarli shartlari.

39.2-teorema. Agar barcha $x \in (a;b)$ uchun

$$f'(x) > 0 \qquad (39.5)$$

shart bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda qat’iy o‘suvchi bo‘ladi. Agar barcha $x \in (a;b)$ uchun

$$f'(x) < 0 \qquad (39.6)$$

shart bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda qat’iy kamayuvchi bo‘ladi.

Isbot. Teoremani (39.5) shart bajarilganda isbotlaymiz. x_1 va x_2 nuqtalarni (a, b) intervalga qarashli ixtiyoriy nuqtalar bo‘lib, $x_1 < x_2$ bo‘lsin. Lagranj teoremasiga asosan $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, $\xi \in (a, b)$ tenglikni olamiz. Bu yerdan (39.5) ga asosan $f(x_2) > f(x_1)$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning (a, b) intervalda qat’iy o‘suvchi ekanligini bildiradi.

1-izoh. 39.2-teoremaning (39.5) sharti $f(x)$ funksiyaning qat'iy o'suvchi bo'lishi uchun zaruriy shart bo'la olmaydi. Masalan, $f(x) = x^3$ funksiya R da qatiy o'suvchi lekin (39.5) shart bajarilmaydi, chunki $f'(0) = 0$.

39.3-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) intervalda differensiallaniuvchi va (39.6) shartni qanoatlantirsa, u holda bu funksiya (a,b) intervalda qat'iy kamayuvchi bo'ladi.

Bu teorema ham 39.2-teoremaga o'xshash isbotlanadi.

39.1-misol. Agar $0 < x < \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda

$$sinx > \frac{2}{\pi}x \qquad (39.7)$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot. $f(x) = \frac{sinx}{x},\ x \neq 0,\ f(0) = 1$ funksiyani qaraylik bu funksiya $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada uzluksiz va $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ intervalda differensiallanuvchi, hamda $f'(x) = \frac{cosx}{x^2}(x - tgx) < 0$ tengsizlik o'rinli ($\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ intervalda $cosx > 0$ va $tgx > x$ bo'lganligi uchun $f'(x) < 0$, $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ tengsizlik o'rinli). Demak, 39.3-teoremaga asosan $f(x)$ funksiya $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada qat'iy kamayuvchi. Shuning uchun $\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ uchun $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ munosabat o'rinli, yani $\frac{sinx}{x} > \frac{\pi}{2}$ tengsizlik o'rinli. Bu tengsizlikdan (39.7) munosabat kelib chiqadi.

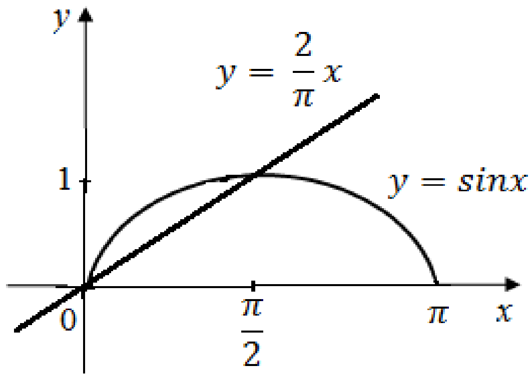
(39.7) tengsizlikning geometrik talqini:

$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ intervalda $y = sinx$ funksiya grafigi $y = \frac{2}{\pi}x$ funksiya grafigidan yuqoriga yotadi.

Ta'kidlash joizki, $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ uchun

$$\frac{sinx}{x} \geq \frac{2}{\pi}x \qquad (39.8)$$

munosabat ham o'rinli. (39.8) munosabat $x = 0$ va $x = \frac{2}{\pi}$ bo'lganda tenglikka aylanadi (39.1-chizma).



39.1-chizma.

3.Funksiyaning nuqtada o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lishi ta’rifi. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror $\mathring{U}_\delta(x_0)$ atrofida aniqlangan bo‘lsin.

Agar shunday $\delta > 0$ $(\delta < \delta_0)$ soni topilib

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \rightarrow f(x) < f(x_0), \forall x \in (x_0, x_0 + \delta\ ) \rightarrow f(x) > f(x_0)$ (39.9)

munosabatlar bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada qat’iy o‘suvchi deyiladi. (39.9) munosabat

$$\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0),\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \qquad (39.10)$$

munosabatning bajarilishiga ekvivalentdir.

Shunga o‘xshash, agar

$$\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0),\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 \qquad (39.11)$$

munosabat bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada qat’iy kamayuvchi deyiladi.

39.4-teorema. Agar $f'(x_0) > 0$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada qat’iy o‘suvchi bo‘ladi. Agar $f'(x_0) < 0$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada qat’iy kamayuvchi bo‘ladi.

Isbot. Masalan, $f'(x_0) > 0$ bo‘lsin. Hosila ta’rifida berilgan $\varepsilon = f'(x_0) > 0$ uchun $\exists\delta > 0, \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right| < f'(x_0)$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerdan (39.10) ning bajarilishi kelib chiqadi. $f'(x_0) < 0$ hol shunga o‘xshash isbotlanadi.

4. Mustaqil yechish uchun misollar.

39.1. Quyidagi funksiyalarni monotonlikka tekshiring.

1. $y = 3x - x^2$. **2.** $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100}\ (x \geq 0)$. **3.** $y = x + \sin x$.

4. $y = x^2 - \ln x^2$. **5.** $y = x^n e^{-x}\ (n > 0, x \geq 0)$. **6.** $y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.

7. $y = 2\sin x + \cos x,\ (0 \leq x \leq 2\pi)$. **8.** $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

39.2. Quyidagi funksiyalarning o‘suvchi va kamayuvchi bo‘lish oraliqlarini toping.

1. $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{1+|\cos x|}$. **2.** $y=(x-2)^5(2x+1)^4$.

3. $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$. **4.** $y=\dfrac{2x}{1+2x}$.

5. $y=x-e^x$. **6.** $y=x-2\sin x \ (0\le x\le 2\pi)$.

7. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ **.** **8.** $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x+50}$.

5. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Funksiyaning o‘zgarmaslik shartini ayting va uni isbotlang.
2. Agar (a,b) intervalda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar hosilalarga ega bo‘lib, $f'(x)=g'(x)$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar qanday munosabatda bo‘ladi?
3. Funksiyaning monotonlik shartini ayting va uni isbot qiling.

40-§. Funksiyaning ekstremum qiymatlari

Reja.

1. Ekstermumning zaruriy shartlari.
2. Ekstremumning yetarli shartlari.
3. Mustaqil yechish uchun misollar.
4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Ekstermumning zaruriy shartlari. Lokal ekstermum tushunchasi yuqoridagi paragraflarda kiritilgan edi. Ekstermumning zaruriy shartlarini Ferma teoremasidan osongina keltirib chiqarish mumkin. Ferma teoremasiga ko‘ra $f(x)$ funksiyaning lokal ekstermum nuqtalarini bu funksiya hosilasi nolga teng bo‘lgan nuqtalardan yoki hosila mavjud bo‘lmagan nuqtalardan izlash kerak.

Biz bundan keyin lokal ekstremum so‘zi o‘rniga lokal so‘zini tushirib qoldirib ekstremum so‘zini ishlatamiz.

Berilgan funksiyaning hosilasi nolga teng bo‘lgan nuqtalarni funksiyaning statsionar nuqtalari, funksiya uzluksiz bo‘lib, hosilasi nolga teng yoki hosilasi mavjud bo‘lmagan nuqtalarni funksiyaning kritik nuqtalari deb ataymiz. Shuning uchun funksiyaning ekstremum nuqtalari uning kritik nuqtalari to‘plami ichida yotadi (kritik nuqtalari to‘plamiga qarashli bo’ladi.)

$x=0$ nuqta $y=x^2,\ y=x^3,\ y=|x|,\ y=|x|^{\frac{1}{2}},\ y=\sqrt[3]{x}$ funksiyalarning har biri uchun kritik nuqta bo‘ladi. Lekin bu nuqta $y=x^2,\ y=$

$|x|,\ y=|x|^{\frac{1}{2}}$ fuksiyalar uchun ekstremum nuqta, $y=x^3,\ y=|x|^{\frac{1}{3}}$ funksiyalar uchun ekstremum nuqta bo‘la olmaydi.

Demak, har qanday kritik nuqta ekstremum nuqta bo‘la olmaydi.

2. Ekstremumning yetarli shartlari. Dastlab qat’iy ekstremum tushunchasini kiritamiz. Agar

$$\exists\delta>0\,,\forall x\in U_\delta(x_0)\longrightarrow f(x)<f(x_0) \qquad (40.1)$$

munosabat bajarilsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning qat’iy maksimum nuqtasi deyiladi. Shunga o‘xshash

$$\exists\delta>0\,,\forall x\in U_\delta(x_0)\longrightarrow f(x)>f(x_0) \qquad (40.2)$$

munasabat bajarilsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning qat’iy minimum nuqtasi deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofida aniqlangan bolib, $(x_0-\delta,x_0)$ oraligida qat’iy o‘suvchi, $(x_0,x_0+\delta)$ oraliqda esa qat’iy kamayuvchi bo‘lsa, u holda (40.1) shart bajariladi. Shuning uchun x_0 nuqtada qat’iy maksumum nuqtasi ($f(x)-$ funksiyaning) bo‘ladi.

Shunga o‘xshash qat’iy minumumning ham yetarli shartini berish mumkin.

Endi diffirensiallanuvchi funksiyalar uchun qat’iy ekstremumning yetarli shartlarni beramiz. Birinchi yetarli shartni berishda bizga “funksiya nuqtadan o‘tayotganda ishorasini o‘zgartiradi” tushunchasini kiritishimiz kerak bo‘ladi.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning o‘yilgan $\mathring{U}_\delta(x_0)$ atrofida aniqlangan bo‘lib, $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ uchun $f(x)<0$ va $\forall x\in(x_{0,}x_0+\delta)$ uchun $f(x)>0$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtadan o‘tayotganda o‘z ishorasini minusdan plusga o‘zgartiradi deymiz.

Shunga o‘xshash, x_0 nuqtadan o‘tayotganda ishorasini plusdan minusga o‘zgartirishi kiritiladi.

1-izoh. Agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning qat’iy ekstremum nuqtasi bo‘lsa, ya’ni (40.1), (40.2) shartlar bajarilsa, u holda $f(x)-f(\,x_0)$ ayirma x_0 nuqtaning o‘yilgan atrofida o‘z ishorasini saqlaydi. Aksincha, agar $f(x)-f(\,x_0)$ ayirma o‘z ishorasini $\mathring{U}_\delta(x_0)$ da saqlasa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning qat’iy ekstremum nuqtasi bo‘ladi.

Agar bu ayirma x_0 nuqtadan o‘tayotganda o‘z ishorasini o‘zgartirmasa, u holda x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya ekstremumga ega bo‘lmaydi.

40.1-teorema (Qat’iy ekstremumning birinchi yetarli sharti). $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida (x_0 nuqtaning o‘zida differensiallanuvchi bo‘lmasligi ham mumkin) differensiallanuvchi va x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda

a) agar $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o‘tayotganda ishorasini minusdan plusga o‘zgartirsa, ya’ni shunday $\delta > 0$ son topilib,

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \to f'(x) < 0, \ \forall x \in (x_0 + \delta, x_0) \ \to f'(x) > 0 \quad (40.3)$$

munosabat bajarilsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning qat’iy minimum nuqtasi bo‘ladi.

b) agar $f'(x)$ hosila ishorasini x_0 nuqtadan o‘tayotganda plusdan minusga o‘zgartisa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning qat’iy maksimum nuqtasi bo‘ladi.

Isbot. $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o‘tayotganda ishorasini minusdan plusga o‘zgartirsin. U holda (40.3) shart bajariladi.

Agar $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ bo‘lib, ixtiyoriy nuqta bo‘lsa, u holda $f'(x)$ funksiya $(x\,, x_0)$ intervalda diffirensiallanuvchi va $[x, x_0]$ kesmada uzluksiz bo‘ladi. Lagranj teoremasiga ko‘ra

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0), \qquad x_0 - \delta < x < \xi < x_0$$

munosabat bajariladi. $f'(\xi) < 0$ bo‘lganligidan va $x - x_0 < 0$ ekanligidan

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \to f'(x) > f(x_0) \quad (40.4)$$

munosabatni olamiz. Shunga o‘xshash $f(x)$ funksiyaga, $x \in (x_0 + \delta, x_0)$ bo‘lganda, $[x_0, x]$ kesmada Lagranj teoremasini qo‘llab

$$\forall x \in (x_0 + \delta, x_0) \to f'(x) > f(x_0) \quad (40.5)$$

munosabatni olamiz. (40.4), (40.5) shartlardan (40.2) tasdiqning bajarilishi kelib chiqadi. Bu esa x_0 nuqtaning $f(x)$ funksiyaning qat’iy minimum nuqtasi ekanligini bildiradi. Qat’iy maksimum bo‘lgan hol shunga o‘xshash isbotlanadi.

2-izoh. Agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning qat’iy ekstremum nuqtasi bo‘lsa, u holda bundan $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o‘tayotganda o‘z ishorasini o‘zgartishi kelib chiqmaydi. Masalan

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \frac{1}{cosx}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

funksiya $x = 0$ nuqtada qat’iy minimumga ega, lekin $(-\delta, 0)$ intervalda kamayuvchi emas, $(\delta, 0)$ intervalda o‘suvchi emas $(\delta > 0)$. Demak, $f'(x)$ bu nuqtadan o‘tayotganda o‘z ishorasini o‘zgartirmaydi.

40.2-teorema (Ikkinchi yetarli shart). x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bolsin, ya’ni

$$f'(x_0) = 0 \quad (40.6)$$

va $f''(x_0)$ hosila mavjud bolsin. U holda

a) agar $f''(x_0) > 0$ bo‘lsa, u holda x_0 nuqta f funksiyaning qat’iy minimum nuqtasi bo‘ladi.

b) agar $f''(x_0) < 0$ bo‘lsa, u holda x_0 nuqta funksiyaning qat’iy maksimum nuqtasi bo‘ladi.

Isbot. Agar $f''(x_0) > 0$ bo‘lsa, u holda 39.4-teoremaga ko‘ra $f'(x_0)$ funksiya x_0 nuqtada o‘suvchi bo‘ladi, ya’ni $\exists\delta > 0$,

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \to f'(x) < f'(x_0) = 0,$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \to f'(x) > f'(x_0) = 0$$

munosabatlar bajariladi. Bu yerdan $f'(x)$ funksiya x_0 nuqtadan o‘tayotganda ishorasini minusdan, plusga o‘zgartirishi kelib chiqadi.

Demak, 40.2-teoremaga ko‘ra x_0 nuqta $f(x)$ funksiya uchun qat’iy minimum nuqtasi bo‘lar ekan. Masalan, $f(x) = x^2$ funksiya uchun $f'(x) = 0$, $f''(x) = 2$ bo‘lganligi uchun $x_0 = 0$ nuqta bu funksiya uchun qat’iy minimum nuqta bo‘ladi.

3-izoh. Agar $f'(x_0) = 0$ va $f''(x_0) = 0$ bo‘lsa, u holda bu funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bolishi ham mumkin $(f(x) = x^4, x_0 = 0)$, ega bolmasligi ham mumkin $(f(x) = x^3, x_0 = 0)$.

40.3-teorema. $f(x)$ funksiyadan x_0 nuqtada $f^{(n)}(x_0)$, $n > 2$ hosila mavjud va

$$f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \tag{40.7}$$
$$f^{(n)}(x_0) \neq 0 \tag{40.8}$$

shartlar bajarilsin. U holda

a) agar n juft bo‘lsa, u holda x_0 nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘ladi: $f^{(n)}(x_0) < 0$ bo‘lsa, qat’iy maksimum, $f^{(n)}(x_0) > 0$ bo‘lsa, qat’iy minimum bo‘ladi.

b) agar n toq bo‘lsa, u holda x_0 nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘lmaydi.

Isbot. $f(x)$ funksiyaning Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasidan va (40.7) dan

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \tag{40.9}$$

tenglikni olamiz. Bu tenglikni (40.8) dan foydalanib

$$f(x) - f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n(1 + \alpha(x)) \tag{40.10}$$

ko‘rinishida yozishimiz mumkin. Bu yerda $x \to x_0$ da $\alpha(x) = 0(1) \to 0$, chunki $C \cdot 0((x - x_o)^n) = 0((x - x_o)^n)$, $C \neq 0$ va $C = const$. Shuning uchun $\exists\delta > 0, \forall x \in U_\delta(x_0) \to |\alpha(x)| < \frac{1}{2}$ tengsizlik o‘rinli. Bu yerdan $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$

$$1 + \alpha(x) > 0 \tag{40.11}$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu tengsizlikni hisobga olib (40.10) dan

$$\forall x \in U_\delta(x_0), sign(f(x) - f(x_0) = sign(f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n) \tag{40.12}$$

munosabatini olamiz.

a) n –juft bo‘lsin $(n = 2k)$. U holda

$\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \to (x-x_0)^n = (x-x_0)^{2k} > 0$ va (40.12) dan

$$sign(f(x) - f(x_0) = signf^{(n)}(x_0) \cdot (x-x_0)^n)$$

ekanligini olamiz. Agar $f^{(n)}(x_0) > 0$ bo‘lsa, u holda $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \to f(x) - f(x_0) > 0$ tengsizlik o‘rinli. Bu esa x_0 nuqtaning $f(x)$ funksiya uchun qat’iy minimum nuqta ekanligini bildiradi.

Shunga oxshash, agar $f^{(n)}(x) < 0$ bo‘lsa, u holda $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \to f(x) - f(x_0) < 0$ ekanligini olamiz. Bu esa x_0 nuqtaning $f(x)$ funksiya uchun qat’iy maksimum nuqta ekanligini anglatadi.

b) $n = (2k+1)$ bo‘lsin. U holda (40.12) dan $f(x) - f(x_0)$ ayirmaning x_0 nuqtadan o‘tayotganda ishorasini o‘zgartirishi kelib chiqadi, chunki $(x - x_0)^{(2k+1)}$ funksiya x_0 nuqtadan o‘tayotganda ishorasini o‘zgartiradi. Bu esa x_0 nuqtaning $f(x)$ funksiya uchun ekstremum nuqta bo‘la olmasligini bildiradi.

3. Mustaqil yechish uchun misollar.

Quyidagi funksiyalarni ekstremumga tekshiring.

40.1. $y = 2 + x - x^2.$ **40.2.** $y = (x-1)^3.$

40.3. $y = \frac{3}{4}x^4 + x^3 - 9x^2 + 7.$ **40.4.** $y = x^4 e^{-x^2}.$

40.5. $y = sinx + 0{,}5sin2x.$ **40.6.** $y = \frac{x^4}{(x+1)^3}.$

40.7. $y = sin^3x + cos^3x.$ **40.8.** $y = ln(x^2 - 1) - 2arctgx.$

Quyidagi funksiyalarning ko‘rsatilgan oraliqlarda eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

40.9. $y = x^4 - 8x^2 + 12.$ **40.10.** $y = x - 2\sqrt{x},\ x \in [0;5].$

40.11. $y = x - arctgx.$ **40.12.** $y = 2\sin x + \sin 2x,\ x \in \left[0; \frac{3}{2}\pi\right].$

40.13. $y = x - 2lnx,\ x \in \left[\frac{3}{2}; e\right].$

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Funksiyaning ekstremum qiymatlarini ta’rifini ayting

2.Funksiya ekstremum qiymatiga ega bo‘lishining zaruriy shartini ayting va uni isbot qiling.

3.Funksiya ekstremum qiymatiga ega bo‘lishining yetarli shartlarini ayting va uni isbot qiling.

4.Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini qanday topamiz?

41-§. Vektor funksiyaning hosilasi va differensiali

Reja:

1.Vektor funksiyaning hosilasi.

2.Vektor funksiyaning differensiali.
3. Mustaqil yechish uchun misollar.
4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Vektor funksiyaning hosilasi. Agar

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}$$

mavjud bo‘lsa, u holda bu limit $r(t)$ vektor funksiyaning t_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $r^{'}(t_0)$ yoki $\dot{r}(t_0)$ kabi belgilanadi. Demak

$$r^{'}(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}. \qquad (41.1)$$

Shunga o‘xshash ikkinchi tartibli hosila tushunchasini ham kiritish mumkun

$$r^{''}(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r'(t_0+\Delta t)-r'(t_0)}{\Delta t}.$$

Shunda o‘xshash yuqori tartibli hosila tushunchasini ham kiritish mumkin.
Agar vektor funksiya $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, u holda bu funksiyaning t_0 nuqtada hosilaga ega bo‘lishi uchun $x(t),y(t),z(t)$ funksiyalarning t_0 nuqtada hosilaga ega bo‘lishi zarur va yetarli. Bu holda

$$r'(t_0)=\big(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\big),$$
$$|r'(t_0)|=\sqrt{x'^2(t_0)+\ y'^2(t_0),+z'^2(t_0)}$$

tengliklar o‘rinli. Bu monosabatlarning o‘rinli ekanligidan, vektor funksiya limitining ta’rifidan

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}$$
$$=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t},\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t},\lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}\right)$$

tengliklar kelib chiqadi.

Agar $r^{''}(t_0)$ hosila mavjud bo‘lsa, u $r''(t)=(x''(t_0),y''(t_0),z''(t_0))$ tenglik orqali aniqlanadi. Vektor funksiya hosilasining ta’rifidan $\Delta r=r'(t_0)\Delta t+\alpha(t_0)\Delta t$ tenglik kelib chiqadi. Bu yerda $\alpha(\Delta t)$ funksiya $\Delta t\to 0$ da Δr ham nolga intiladi. Demak. (41.1) tenglik bajariladi. Bundan esa t_0 nuqtada hosilaga ega bo‘lgan funksiya shu nuqtada uzluksiz ham bo‘lishi kelib chiqadi.

41.1-lemma. Vektor funksiyani differinsiallashning quyidagi qoidalari o‘rinli:

$$(r_1+r_2)'=r_1{}'+r_2{}', \qquad (41.2)$$
$$(fr)'=f'r+fr', \qquad (41.3)$$
$$(r_1,r_2)'=(r_1{}'r_2)+(r_1r_2{}'), \qquad (41.4)$$
$$[r_1,r_2]'=[r_1{}'r_2]+[r_1r_2{}']. \qquad (41.5)$$

Bu formulalar $r_1{}', r_2{}', f'$ hosilalar mavjud bo‘lgan nuqtalarda o‘rinli. (f-skalyar funksiya). (41.2) va (41.3) lar bevosita hosila ta’rifidan kelib chqadi.

Endi (41.4) formulani isbotlaymiz. $r_k(t),\ k = 1,2$ funksiya argumentining Δt orttirmasiga mos keluvchi orttirmasini $\Delta r_k(t) = r_k(t + \Delta t) - r_k(t),\ \ k = 1,2$ orttirma berilgan va skalyar funksiyaning xossalaridan hamda $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r_i}{\Delta \mathrm{t}} = 0\ (i = 1,2),\ \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t_2 = 0$ tenglamadan

$$(r_1, r_2)' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\big(r_1(t + \Delta t), r_2(t + \Delta t)\big) - (r_1(t), r_2(t))}{\Delta \mathrm{t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\left(r_1(t), \frac{\Delta r_2(t)}{\Delta \mathrm{t}}\right) + \left(\frac{\Delta r_1(t)}{\Delta \mathrm{t}}, r_2(t)\right) + \left(\frac{\Delta r_1(t)}{\Delta \mathrm{t}}, \Delta r_2(t)\right)\right] =$$

$$= (r_1, r_2{}') + (r_1{}', r_2)$$

munosabatlarni olamiz. Bu munosabatlardan esa (41.4) tenglikning isboti kelib chiqadi.

Endi (41.5) tenglikni isbotlaymiz .

Vektor funksiya limitining $1^0 - 5^0$ xossalaridan foydalanib

$$[r_1(t), r_2(t)]'_{t=t_0} = \lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{[\mathrm{r}_1(\mathrm{t}_0 + \Delta \mathrm{t}) \times \mathrm{r}_2(\mathrm{t}_0 + \Delta \mathrm{t})] - [\mathrm{r}_1(\mathrm{t}_0), \mathrm{r}_2(\mathrm{t}_0)]}{\Delta \mathrm{t}} =$$

$$\lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{\big[\big(r_1(t_0 + \Delta t) - r_1(t_0)\big), r_2(t_0 + \Delta t)\big] + [r_1(t_0), r_2(t_0 + \Delta t)] - [\mathrm{r}_1(\mathrm{t}_0), \mathrm{r}_2(\mathrm{t}_0)]}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \left(\frac{[r_1(t_0 + \Delta t) - r_1(t_0)]}{\Delta t}, r_2(t_0 + \Delta t) + [\ \mathrm{r}_1(\mathrm{t}_0), \frac{\mathrm{r}_2(\mathrm{t}_0 + \Delta \mathrm{t}) - \mathrm{r}_2(\mathrm{t}_0)}{\Delta \mathrm{t}}\right) =$$

$$= [r_1'(t_0), r_2(t_0)] + [r_2'(t_0), r_1(t_0)]$$

munosabatni olamiz. Bu munosabat (41.5) tenglikning o‘rinli ekanligini isbotlaydi.

2.Vektor funksiyaning differensiali.

41.1-ta’rif. $r = r(t)$ vektor funksiyaning $t = t_0$ nuqtadagi $\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)$ orttirmasini

$$\Delta r = ar + \varepsilon(\Delta t)\Delta t \tag{41.6}$$

ko‘rinishda tasvirlash mumkin bo‘lsa, u holda bu vektor funksiyani t_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi, bu yerda $\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$. (41.6) dagi $a(\Delta t)$ vektor funksiya $r(t)$ vektor funksiyaning t_0 nuqtadagi differensiali deyiladi va $dr = a\Delta t$ kabi belgilanadi.

Demak, (41.6) munosabatni

$$\Delta r = dr + \varepsilon(\Delta t)\Delta t \tag{41.7}$$

ko‘rinishda ham yozishimiz mumkin.

Ko‘rinib turibdiki, agar vektor funksiya t_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda u bu nuqtada uzluksiz ham bo‘ladi.

Skalyar funksiyalarga o‘xshash, vektor funksiyaning differensiallanuvchiligidan uning $r'(t)$ hosilasining mavjudligi va uning a vektorga tengligi kelib chiqadi, haqiqatdan ham (41.6) dan

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}[a+\varepsilon(\Delta t)]=a$$

kelib chiqadi. Bu esa yuqoridagi tasdiqni isbotlaydi.

Aksincha, agar $r'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta t}$ hosila mavjud bo‘lsa, u holda $\varepsilon(\Delta t)=\frac{\Delta r}{\Delta t}-r'(t)$ belgilashni olib, t_0 nuqtada differensiyallanuvchi ekaniligi va $dr=r'(t)\Delta t$ tenglikning o‘rinli ekanligi ko‘rsatiladi. t erkli o‘zgaruvchi uchun ta’rif bo‘yicha $dt=\Delta t$ deb olsak, u holda

$$dr=r'dt,\qquad r'=\frac{dr}{dt}\,,\qquad dr(t)=r'(t)dt$$

bo‘ladi. Bu tenglikdan va (41.7) dan

$$\Delta r=r'\Delta t+\varepsilon(\Delta t)\Delta t$$

yoki $$\Delta r=r'\Delta t+\alpha(\Delta t)\qquad \Delta t\to 0\ da \tag{41.8}$$

munosabatni olamiz. Bu yerdan $\Delta t\to 0$ da $\alpha(\Delta t)=\varepsilon(\Delta t)\Delta t=0$ va $(\Delta t),\alpha(0)=0.$

Faraz qilaylik t erkli o‘zgaruvchi bo‘lmasdan τ o‘zgaruvchiga bog’liq bo‘lib, $t=t(\tau)$ funksiya ham τ_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. $t_0=t(\tau)$ nuqtada $r(t)$ vektor funksiya, τ_0 nuqtada $t=t(\tau)$ funksiya differensiallanuvchi bo‘lsin. Ochiq ko‘rinib turishi uchun r' ni r_t' orqali belgilab va $\Delta\tau=\tau-\tau_0$ belgilashni kiritib, (41.8) formuladan

$$\frac{\Delta r}{\Delta\tau}=r_t'\frac{\Delta t}{\Delta\tau}+\frac{\alpha(\Delta t)}{\Delta\tau}$$

tenglikni olamiz. $\alpha(\Delta t)=\varepsilon(\Delta t)\Delta t=o(\Delta t)$ $(\Delta t\to 0)$ tenglikka ko‘ra va $\Delta\tau\to 0$ da $\Delta t\to 0$ bo‘lgani uchun $\varepsilon(o)=0$ deb olsak,

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\alpha(\Delta t)}{\Delta\tau}=\lim_{\Delta t\to 0}\varepsilon(\Delta t)\frac{\Delta t}{\Delta\tau}=0$$

bo‘ladi. Shuning uchun $r_t'=r_t't_\tau'$ bo‘ladi. Bu yerdan skalyar funksiyalarga o‘xshash, vektor funksiya differensialining invariantligi kelib chiqadi, ya’ni

$$dr=r_t't_\tau'd\tau=r_t'dt.$$

Skalyar funksiya uchun o‘rnatilgan ko‘pgina faktlar vektor funksiya uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Ammo bu faktlarning barchasi doimo o‘rinli bo‘lavermaydi.

Masalan, $r(t)=(\cos t,\sin t\,)$, $0\le t\le 2\pi$ vektor funksiyanig hosilasi $r'(t)=(-\sin t,\cos t)$ ga, uning moduli esa $|r'(t)|=\sqrt{(\sin t)^2+(\cos t)^2}=$

1 ga teng. Lagranjning chekli ortirmalar haqidagi teoremasini bu vektor funksiya uchun $[0,2\pi]$ kesmada qo‘llasak, $\exists\ \mu \in [0,2\pi]$

$$r(2\pi) - r(0) = 2\pi r'(\mu)$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak. Lekin bu tenglikning chap tomonida 0 vektor, o‘ng tomonida esa nolga teng bo‘lmagan vektor funksiya turibdi. Demak, vektor funksiya Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantirsa ham Lagranj teoremasining xulosa qismi o‘rinli bo‘lmas ekan.

Vektor funksiya uchun quyidagi tasdiq o‘rinli.

41.1-teorema. Vektor funksiya $r(t)$ quyidagi shartlarni qanoatlantirsin.

a) $[a,b]$ kesmada uzluksiz;

b) $(a,\ b)$ intervalda differensiallanuvchi.

U holda shunday $\mu \in (a,b)$ nuqta topilib,

$$|r(b) - r(a)| \leq (b-a)|r'(\mu)| \qquad (41.9)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Agar $r(a) = r(b)$, u holda (41.9) tengsizlikning chap tomonida 0 turganligi uchun bu tengsizlik $\forall\mu \in (a,b)$ da o‘rinli bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $r(a) \neq r(b)$ bo‘lsin. $|r(b) - r(a)|$ ifodani baholaymiz, agar biror c vektor uchun $|c| = (c,e)$ ($e -$ vektor c vektor yo‘nalishidagi birlik vektor) tengsizlik o‘rinliligi uchun $r(b) - r(a)$ vektor uchun quyidagi munosabat o‘rinli

$$|r(b) - r(a)| = (r(b) - r(a), e) = (r(b), e) - (r(a), e).$$

Bu yerda e vektor $r(b) - r(a)$ yo‘nalishidagi birlik vektor. Bu tengsizlik o‘ng tomonida

$$f(t) = (r(t), e) \qquad (41.10)$$

Sonli funksiyaning $[a,b]$ segmentning chetki nuqtalaridagi qiymatlarining ayirmasi turibdi, ya’ni

$$|r(b) - r(a)| = f(b) - f(a) \qquad (41.11)$$

tenglik o‘rinli.

Vektor funksiya $r(t)$ $[a,b]$ segmentda uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differensiallanuvchi bo‘lganligi uchun $f(t)$ funksiya ham $[a,b]$ segmentda uzluksiz va (a,b) da differensiallanuvchi bo‘ladi. Shuning uchun skalyar funksiyalar uchun Lagranjning chekli ortirmalar haqidagi teoremasiga ko‘ra $\exists\ \mu \in (a,b)$, $f(b) - f(a) = f'(\mu)(b-a)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerdan skalyar ko‘paytmani differensiallash qoidasiga ko‘ra

$$f'(t) = (r'(t), e)$$

tenglama va

$$f(b) - f(a) = (r'(\mu), e)(b-a), \quad a < \mu < b \qquad (41.12)$$

munosabatga ega bo‘lamiz.

Ixtiyoriy ikkita x va y vektorlarning ko‘paytmasi uchun o‘rinli bo‘lgan

$$|x,y| = |x| \cdot |y| \cdot |\cos xy| \leq |x| \cdot |y|$$

tengsizlikka ko‘ra o‘rinli bo‘lgan

$$|r'(\mu), e| \leq |r'(\mu)||e| = |r'(\mu)|$$

munosabatdan va (41.12) dan

$$f(b) - f(a) \leq |r'|(b-a), \qquad a < \mu < b$$

tengsizlikni olamiz.

Bu tengsizlikdan va (41.11) dan (41.9) munosabatning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Vektor funksiya $r(t)$ uchun uning t_0 nuqtada ixtiyoriy tartibili hosilasini mavjud deb hisoblasak Teylor formulasi ham o‘rinli:

$$r(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{r^k(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \varepsilon(t - t_0). \qquad (41.13)$$

Bu yerda $\varepsilon(t - t_0)$ shunday vektor funksiyaki, u $t \to t_0$ da $\varepsilon(t - t_0) = (t-t_0)^k \cdot \varepsilon_1(t-t_0)$, $\varepsilon_1(t-t_0) \to 0$ munosabatlarni qanoatlantiradi.

Bu (41.13) formulani isbotlash uchun t_0 nuqtada skalyar funksiyaning Teylor formulasini yozish yetarli.

3. Mustaqil yechish uchun misollar.

41.1. Moddiy nuqtaning harakat tenglamasi $r = 3t\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}$ ko‘rinishida bo‘lsa, harakat trayekyoriyasi va tezligini toping.

41.2. Harakat tenglamasi $r = 2(t - sint)\boldsymbol{i} + 2(1 - cost)\boldsymbol{j}$ ko‘rinishida bo‘lgan harakat trayektoriyasini va tezligini toping.

41.3. $r = (t^3 + t)\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}$ vektor funksiya godografida *t=-1* nuqtada o‘tkazilgan birlik urinmani toping.

41.4. $r = sint \cdot \boldsymbol{i} + cos^2 t \cdot \boldsymbol{j} + sintcost \cdot \boldsymbol{k}$ vektor funksiyaning hosilasini toping.

41.5. $r = (t + cost) \cdot \boldsymbol{i} + t \cdot \boldsymbol{j} + sint \cdot \boldsymbol{k}$ vektor funksiyaning hosilasini toping.

41.6. $\boldsymbol{a} = t \cdot \boldsymbol{i} + t^2 \cdot \boldsymbol{j} + t^3 \cdot \boldsymbol{k}$, $\quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + t \cdot \boldsymbol{j} + t^3 \cdot \boldsymbol{k}$ vektorlar berilgan bo‘lsin. $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$ ni toping.

41.7. $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}t^2$, $\boldsymbol{y} = \frac{1}{3}t^3$, $\quad \boldsymbol{z} = \frac{1}{3}t^3$ chiziqqa *t=2* bo‘lganda o‘tkazilgan urinma tenglamasini yozing.

41.8. $r = cost \cdot \boldsymbol{i} + e^t \cdot \boldsymbol{j} + (t^2 + 1) \cdot \boldsymbol{k}$ vektor funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

41.9. Harakat tenglamasi $r = 2(t - sint) \cdot \boldsymbol{i} + 2(1 - cost) \cdot \boldsymbol{j}$ bo‘lgan harakatning tezlanishini toping. $t = \frac{\pi}{2}$ bo‘lganda tezlanish vektorini toping.

41.10. $\boldsymbol{a} = t \cdot \boldsymbol{i} + t^2 \cdot \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + t \cdot \boldsymbol{j}$ bo‘lsa, $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ni toping.

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1.Vektor funksiya hosilasining ta’rifini ayting.
2.Vektor funksiyaning differensialini tushuntiring.
3.Vektor funksiyaning uzluksizligini tushuntiring.

42-§. Funksiya grafigining qavariqligi. Funksiyalarni to‘liq tekshirish va ularning grafiklarini chizish

Reja:

1. Funksiya grafigining qavariqligi.
2. Bukilish nuqtalari.
3. Funksiya grafigining asimptotalari.
4. Funksiyalarni to‘liq tekshirish va ularning grafiklarini chizish.
5. Mustaqil yechish uchun misollar.
6. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Funksiya grafigining qavariqligi. f funksiya biror (a,b) intervalda diferensiallanuvchi bo‘lsin. Ravshanki, (a,b) intervaldan olingan istalgan c uchun bu funksiya grafigining mos nuqtasini $(c,f(c))$ ko‘inishda yozish mumkin.

Bu funksiya differensiallanuvchi bo‘lgani uchun, uning grafigi har bir nuqtada urinmaga egadir. Ma’lumki, agar c nuqta (a,b) intervalning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsa, grafikning $(c,f(c))$ nuqtasidan o‘tkazilgan urinma tenglamasi

$$K(x) = f(c) + f'(c)(x-c) \tag{42.1}$$

ko‘rinishga ega.

Boshqacha aytganda, f funksiya grafigining $(c,f(c))$ nuqtasidan o‘tkazilgan urinma (42.1) funksiyaning grafigi bilan ustma-ust tushadi.

Agar (a,b) intervalning ixtiyoriy x nuqtasi uchun

$$f(x) \le f(c) + f'(c)(x-c), \quad a < x < b, \tag{42.2}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda f funksiya grafigi o‘zining $(c,f(c))$ nuqtasidan o‘tkazilgan urinmadan pastda yotadi deyiladi.

Agar (a,b) intervalning ixtiyoriy x nuqtasi uchun

$$f(x) \ge f(c) + f'(c)(x-c), \quad a < x < b$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda f funksiya grafigi o‘zining $(c,f(c))$ nuqtasidan o‘tkazilgan urinmadan yuqorida yotadi deyiladi.

42.1-ta’rif. Agar biror intervalda differensiallanuvchi funksiyaning grafigi har qanday urinmadan yuqorida yotsa, bu grafikning qavariqlik yo‘nalishi pastga qaragan deb ataladi (42.1-chizma).

42.2-ta’rif. Agar biror intervalda differensiallanuvchi funksiyaning grafigi har qanday urinmadan pastda yotsa, bu grafikning qavariqlik yo‘nalishi yuqoriga qaragan deyiladi (42.2-chizma).

Funksiya grafigining qavariqlik yo‘nalishi ikkinchi tartibli hosila ishorasi yordamida aniqlanadi.

42.1-teorema. Berilgan f funksiya (a,b) intervalda ikkinchi tartibli hosilaga ega bo‘lsin. U holda

1) agar $f''(x) \geq 0$ bo‘lsa, f funksiya grafigining qavariqlik yo‘nalishi pastga qaragan bo‘ladi;

2) agar $f''(x) \leq 0$ bo‘lsa, f funksiya grafigining qavariqlik yo‘nalishi yuqoriga qaragan bo‘jadi.

Isbot. Faraz qilaylik, c nuqta (a,b) intervalning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Teylor formulasiga ko‘ra,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2 \qquad (42.3)$$

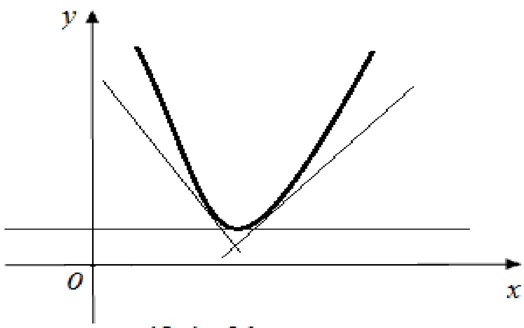
tenglik o‘rinli.

Agar $f''(x) \geq 0$ bo‘lsa, (42.3) dan

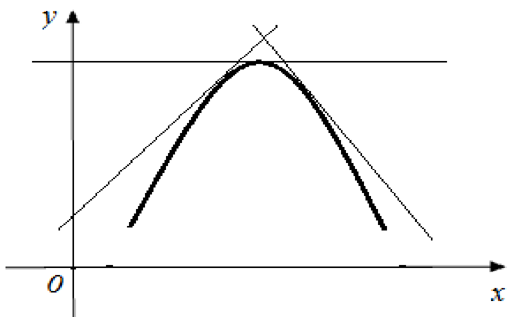
$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz.

Bu tengsizlik f funksiya grafigi urinmadan yuqorida yotishini anglatadi. Demak, ta’rifga asosan uning qavariqlik yo‘nalishi pastga qaragan ekan. Agarda $f''(x) \leq 0$ bo‘lsa, isbot xuddi yuqoridagidek bo‘ladi (42.1 va 42.2-chizmalarga qarang).



42.1-chizma.



42.2-chizma.

2. Bukilish nuqtalari. Funksiya grafigining qavariqligi funksiya aniqlanish sohasining turli intervallarida turli yo‘nalishlarga ega bo‘lishi mumkin. Berilgan funksiyaning grafigini chizishda qavariqlik yo‘nalishlari o‘zgaradigan nuqtalar muhim ahamiyatga egadir.

42.3-ta’rif. Agar shunday $\delta > 0$ mavjud bo‘lsaki, ikki $(c-\delta, c)$ va $(c,\ c+\delta)$ intervallardan birida f funksiya grafigining qavariqlik yo‘nalishi pastga va boshqasida yuqoriga qaragan bo‘lsa, grafikning $(cf(c))$ nuqtasi bukilish (egilish) nuqta deb ataladi.

42.2-teorema (Bukilish nuqta uchun zaruriylik sharti). Berilgan f funksiya c nuqtaning biror atrofida ikki marta differensiallanuvchi bo‘lib, ikkinchi tartibli $f"(x)$ hosila c nuqtada uzluksiz bo‘lsin. Agar $(c, f(c))$ nuqta bukilish nuqtasi bo‘lsa, $f"(c) = 0$ bo‘ladi.

Isbot. Teskarisini faraz qilish usuli bilan isbotlaymiz. Avval $f"(c) > 0$ bo‘lsin deylik. Shartga ko‘ra ikkinchi hosila c nuqtada uzluksiz. Shuning uchun, 28-§ dagi 2-xossaga asosan, c nuqtaning biror $\delta-$ atrofida u ishorasini saqlaydi:

$$f"(x) > 0, \quad c-\delta < x < c+\delta. \tag{42.4}$$

Shunday ekan, 42.1–teoremadan f funksiya grafigining qavariqlik yo‘nalishi c nuqtadan chapda ham, o‘ngda ham pastga qaraganligi kelib chiqadi. Bu esa $(c, f(c))$ ning bukilish nuqtaligiga ziddir.

Shunga o‘xshash, $f"(c) < 0$ tengsizlikdan f funksiya grafigi qavariqlik yo‘nalishining c nuqtadan o‘ngda ham va chapda ham yuqoriga qaraganligi kelib chiqadi. Bu ham $(c, f(c))$ ning bukilish nuqtaligiga ziddir. Demak, $f"(c) = 0$ ekan.

42.2- teorema bukilish nuqta uchun zaruriy shartni beradi. Lekin bu shart yetarlilik sharti bo‘la olmaydi. Misol sifatida $f(x) = x^4$ funksiyani olish mumkin. Bu funksiya uchun $f"(x) = 12\,x^2 \geq 0$. Demak, $f"(0) = 0$, lekin funksiya grafigining qavariqlik yo‘nalishi pastga qaragan.

42.3-teorema (Bukilish nuqta uchun birinchi yetarlilik sharti). Berilgan f funksiya c nuqtaning biror atrofida ikki marta differensiallanuvchi bo‘lib $f"(c) = 0$ bo‘lsin. Agar ikkinchi tartibli hosila c nuqtadan chapda va o‘ngda turli ishoralarga ega bo‘lsa, $(c, f(c))$ nuqta f funksiya grafigining bukilish nuqtasi bo‘ladi.

Isbot. Bevosita 42.1-teoremadan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, bu teoremaga ko‘ra f funksiya grafigining qavariqligi c nuqtaning chap va o‘ng tomonlarida turli yo‘nalishlarga ega. Shuning uchun, $\big(c, f(c)\big)-$ bukilish nuqtadir.

42.1-eslatma. Ravshanki, 42.3-teoremada ikkinchi tartibli hosilani c nuqtaning oʻzida mavjudligini talab qilish shart boʻlmasdan, bu hosilaning c nuqtadan chap va oʻng tomonda turgan nuqtalarda mavjud boʻlib, oʻsha c nuqtadan chap va oʻngda turli ishoralarga ega boʻlishini talab qilish yetarlidir.

42.1-misol. $f(x) = x\sqrt{|x|}$ funksiyani qaraymiz.

Bu funksiya butun sonlar oʻqida uzluksiz differensiallanuvchi boʻlib, uning hosilasi

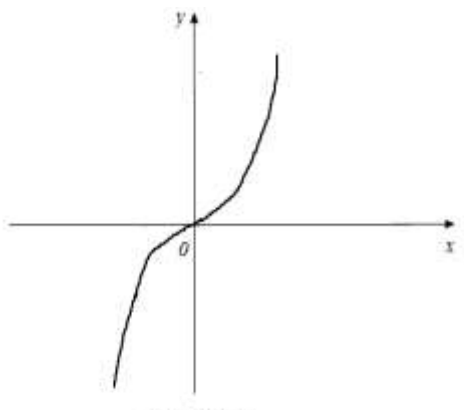
$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{|x|}.$$

Ravshanki, f funksiya $x = 0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda ikkinchi tartibli hosilaga ega. Bu hosila nol nuqtadan boshqa nuqtalarda

$$f''(x) = \frac{3\, sign\, x}{4\sqrt{|x|}}$$

ga teng.

Ikkinchi tartibli hosila $x = 0$ nuqtadan chapda va oʻngda har xil ishoralarga ega boʻlgani uchun, funksiya grafigining qavariqligi chap va oʻngda turli yoʻnalishlarga ega va shuning uchun, (0,0) nuqta bukilish nuqtadir (42.3-chizma).



42.3-chizma.

Navbatdagi yetarlilik shartini tekshirish oson boʻlsada, lekin u oʻrganilayotgan funksiyaga koʻproq shart qoʻyadi. Bu shartda funksiya uchinchi tartibli hosilasining bukilishlikka tekshirilayotgan nuqtada mavjudligi talab qilinadi.

42.4-teorema (Bukilish nuqta uchun ikkinchi yetarlilik sharti). Berilgan f funksiya c nuqtaning biror atrofida ikki marta differensiallanuvchi boʻlib, $f'(c) = 0$ boʻlsin. Agar c nuqtada uchinchi tartibli hosila mavjud boʻlib, $f^{(3)}(c) \neq 0$ boʻlsa, f funksiya grafigi $(c, f(c))$ nuqtada bukilishga ega boʻladi.

Isbot. Aniqlik uchun $f^{(3)}(c) > 0$ deylik. U holda, 39.4-teoremaga koʻra, ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosila c nuqtada oʻsadi, va $f''(c) = 0$ boʻlgani uchun, ikkinchi tartibli hosilasi c nuqtadan chapda manfiy va undan o‘ngda musbat bo‘ladi. Shuning uchun 42.3-teoremaga asosan f funksiya grafigi $(c, f(c))$ nuqtada bukilishga ega.

Agar $f'''(c) = 0$ bo‘lsa, 42.4-teorema f funksiyaning grafigi $(c, f(c))$ nuqtada bukilishga ega bo‘lishi haqida hech qanday ma’lumot bera olmaydi. Bu holda biror ijobiy natija olish uchun funksiyaning yuqoriroq tartibli hosilalarini tekshirish lozim.

42.5-teorema. Faraz qilaylik, $k \in N$ uchun f funksiya c nuqtaning biror atirofida $2k$-tartibli hosilalarga ega bo‘lib, c nuqtada

$$f''(c) = f'''(c) = \cdots = f^{(2k)}(c) = 0 \qquad (42.5)$$

bo‘lsin. Agar c nuqtada $f^{(2k+1)}(c) \neq 0$ bo‘lsin, $(c, f(c))$ nuqta f funksiya grafigining bukilish nuqtasi bo‘ladi.

Isbot. Ikkinchi tartibli hosila $f''(x)$ uchun Teylor formulasidan foydalanamiz. Bu formulaga asosan, c va x nuqtalar orasida shunday ξ topiladiki, u uchun

$$f''(x) = f''(c) + f^{(3)}(c)(x-c) + \frac{f^{(4)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{(5)}(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots +$$

$$+ \quad \frac{f^{(2k-1)}(c)}{(2k-1)!}(x-c)^{2k-3} + \frac{f^{(2k)}(\xi)}{(2k-2)!}(x-c)^{2k-2} \qquad (42.6)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Agar (42.5) munosabatni e’tiborga olsak, (42.6) dan

$$f''(x) = \frac{f^{(2k)}(\xi)}{(2k-2)!}(x-c)^{2k-2}, \quad 0 < \frac{\xi - c}{x - c} < 1 \qquad (42.7)$$

munosabatni olamiz.

Aniqlik uchun $2k+1-$tartibli hosila c nuqtada musbat bo‘lsin deb faraz qilamiz, ya’ni $f^{(2k+1)}(c) > 0$ bo‘lsin. Natijada, 39.4-teoremaga asosan, oldingi $f^{(2k)}(x)$ hosilasining c nuqtada o‘sishi kelib chiqadi. Boshqacha aytganda, bu hosila c nuqtadan chapda bu nuqtadagi qiymatdan kichik va undan o‘ngda esa, bu qiymatdan katta qiymat qabul qiladi. Bundan $f^{(2k)}(c)$=0 bo‘lgan va ξ nuqta c va x nuqtalar orasida yotgani uchun

$$x < c \quad \text{da} \quad f^{(2k)}(\xi) < 0 \quad \text{bo‘ladi va}$$

$$x > c \quad \text{da} \quad f^{(2k)}(\xi) > 0 \quad \text{bo‘ladi} \qquad (42.8)$$

degan shartning bajarilishi ma’lum bo‘ladi.

Demak, $x - c^{(2k-2)}$ funksiya juft bo‘lgani uchun ,

$$f^{(2k)}(\xi)(x-c)^{2k-2} \qquad (42.9)$$

ifoda c nuqtaning chap va o‘ng tomonlarida turli ishoralarga ega.

Shunday qilib, (42.7) tenglikdan ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosila ham xuddi shunday xossaga ega ekani kelib chiqadi. U holda 42.4-teoremaga ko‘ra f

funksiya grafigi $(c, f(c))$ bo‘lganda ham isbot xuddi shu yo‘l bilan amalga oshiriladi.

3.Funksiya grafigining asimptotalari. Funksiya grafigi o‘rganilayotganda ko‘pincha yaxshi ma’lum bo‘lgan shunday funksiya topishga harakat qilinadiki, uning grafigi qaralayotgan funksiya grafigiga iloji boricha yaqin bo‘lsin. Ko‘p hollarda ana shunday funksiya sifatida

$$y = kx + b \tag{42.10}$$

ko‘rinishga ega bo‘lgan chiziqli funksiya olinadi.

42.4-ta’rif. Agar f funksiya

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \tag{42.11}$$

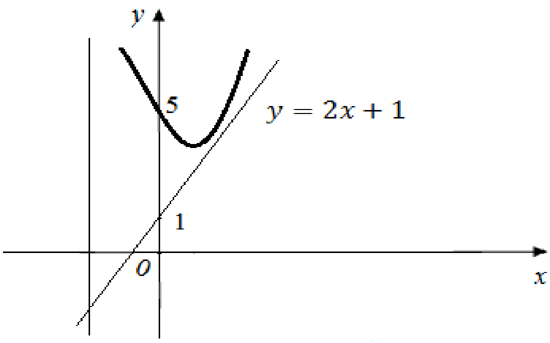
ko‘rinishga ega bo‘lib, bunda

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0 \tag{42.12}$$

bo‘lsa, (42.10) tenglik bilan aniqlagan funksiya f funksiyaning $x \to +\infty$ dagi asimptotasi deb ataladi.

Masalan, $f(x) = \frac{2x^2+3x+5}{x+1}$ funksiya grafigi $y = 2x + 1$ asimptotaga ega, chunki

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{4}{x+1} \quad \text{(42.4-chizma).}$$



42.4-chizma.

Funksiyaning $x \to -\infty$ dagi asimptotasi ham xuddi yuqoridagidek aniqlanadi.

42.6-teorema. Berilgan f funksiya grafigi $x \to +\infty$ da (42.10) asimptotaga ega bo‘lishi uchun quyidagi ikki

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \tag{42.13}$$

va

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = k \tag{42.14}$$

limitlarning mavjud bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. 1) Faraz qilaylik, (42.11) va (42.12) shartlar bajarilsin. (42.11) tenglikni

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \qquad (42.15)$$

kabi yozib olamiz. Agar (42.12) ni e’tiborga olsak, (42.15) tenglikdan (42.13) kelib chiqadi va (42.11) tenglikdan esa (42.14) ni olamiz.

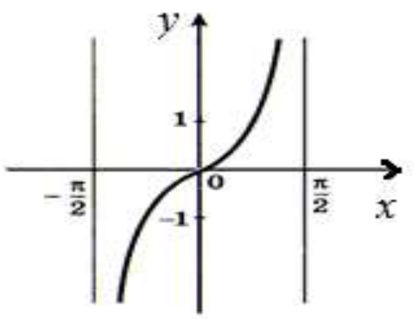
2) Endi (42.13) va (42.14) limtlar mavjud bo‘lsin deb faraz qilamiz. Limitga o‘tish amali chiziqli bo‘lgani uchun (42.14) tenglikni

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - kx - b| = 0$$

deb yozib olishimiz mumkin.

Ravshanki, bunda (42.12) asimptotik tenglikka ega bo‘lamiz.

42.5-ta’rif. Agar quyidagi ikki $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ yoki $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ bir tomonlama limitlardan kamida bittasi $+\infty$ yoki $-\infty$ ga teng bo‘lsa, f funksiya grafigi $x = a$ vertikal asimptotaga ega deyiladi (42.5-chizmaga qarang).



42.5-chizma.

4. Funksiyalarni to‘liq tekshirish va ularning grafiklarini chizish.

Funksiyani hosila yordamida o‘rganish funksiya grafigini aniqroq yasashda katta ahamiyatga ega. $y = f(x)$ funksiyani to‘liq tekshirish va uning grafigini yasashni quyidagi reja asosida olib borish mumkin.

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish. Funksiyaning juft, toqligi hamda davriyligini aniqlash.
2. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish va uzilish nuqtalarini topish.
3. Funksiya grafigining koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini topish va $f(x) > 0$ va $f(x) < 0$ bo‘ladigan oraliqlarni aniqlash.
4. Funksiya grafigining asimptotalarini topish.
5. Funksiya hosilasi $f'(x)$ ni hisoblash, monotonlik oraliqlarini topish va ekstremumga tekshirish.
6. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x)$ ni hisoblash, funksiya grafigining qavariqlik yo‘nalishlarini aniqlash, bukilish nuqtalarini topish.
7. Funksiyaning grafigini chizish.

42.8- misol. $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ funksiyani to‘liq tekshiring va grafigini chizing.

Yechilishi. Bu funksiyani to‘liq tekshirish va uning grafigini chizishni yuqoridagi reja asosida olib boramiz.

1. Berilgan funksiya R ning barcha $x \neq -1$ nuqtalarida aniqlangan, ya’ni uning aniqlanish sohasi $(-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$ oraliqdan iborat. $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x+1)^2} \neq \pm f(x)$ bo‘lganligi uchin funksiya juft ham, toq ham emas. $f(x+T) = \frac{(x+T)^3}{(x+T+1)^2} = f(x)$ tenglik biror $T \neq 0$ son uchun bajarilmaganligi uchun davriy funksiyaning ta’rifiga ko‘ra bu funksiya davriy emas.

2. Bu funksiya $(-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$ oraliqda uzluksiz, $x = -1$ nuqtada esa ikkinchi tur uzilishga ega.

3. Funksiyaning grafigi koordinata o‘qlarini (0,0) nuqtada kesib o‘tadi. $(0,+\infty)$ oraliqda $f(x) > 0$ va $(-\infty, 0)$ oraliqda $f(x) < 0$ bo‘ladi.

4. Endi funksiya grafigining asimptotalarini topamiz. Ravshanki, $\lim_{x \to -1 \pm 0} \frac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty$. Demak, $x = -1$ to‘g’ri chiziq funksiyaning vertikal asimptotasi bo‘ladi. Og’ma $y = kx + b$ asimtotani topish uchun quyidagi limitlarni hisoblash kerak:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x(x+1)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{(x+1)^2} - x \right) = -2.$$

Bundan ko‘rinadiki, $y = x - 2$ to‘g’ri chiziq funksiyaning og’ma asimptotasi ekan.

5. Funksiyaning hosilasi

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{(x+1)^2} \right)' = \frac{3x^2(x+1)^2 - 2x^3(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$$

ga teng bo‘ladi va hosilaning ishoralarini aniqlaymiz. Ravshanki, $x = 0, x = -3$ nuqtalar funksiyaning statsionar nuqtalari bo‘ladi. $x = 0$ nuqta ekstremum nuqta bo‘lmaydi chunki bu nuqtadan o‘tishda $f'(x)$ hosila o‘z ishorasini o‘zgartirmaydi. $x = -3$ nuqtadan o‘tishda $f'(x)$ o‘z ishorasini plusdan minusga o‘zgartirganligi uchun bu nuqta funksiyaning maksimum nuqtasi va $f(-3) = -\frac{27}{4}$ bo‘ladi.

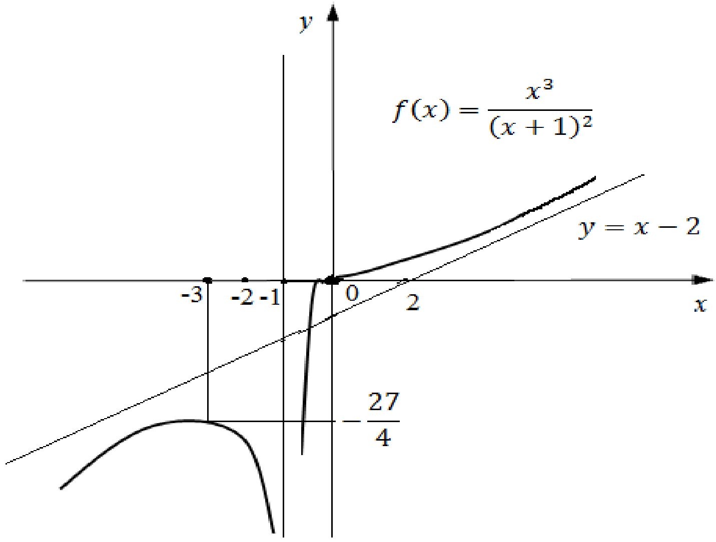
6. Endi funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblaymiz

$$f''(x) = \left(\frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3} \right)' = \frac{(3x^2 + 6x)(x+1)^3 - 3(x^3 + 3x^2)(x+1)^2}{(x+1)^6}$$

$$= \frac{6x}{(x+1)^4}.$$

Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasidan ko‘rinib turibdiki, $x < 0$ $(x \neq -1)$ larda $f''(x) < 0$ va $x > 0$ larda $f''(x) > 0$ bo‘ladi. Shuning uchun $(-\infty.-1)$ $(-1{,}0)$ oraliqlarda funksiya grafigining qavariqligi yuqoriga, $(0,+\infty)$ oraliqda esa funksiya grafigining qavariqligi pastga qaragan.

8. Aniqlangan ma’lumotlar asosida funksiyaning grafigini chizamiz:



42.6-chizma.

5. Mustaqil yechish uchun misollar.

Quyidagi funksiyalar grafigining yuqoriga va pastga qavariqlik oraliqlarini, egilish nuqtalarini toping.

42.1. $y = 2x^4 - 3x^2 + x - 1.$ **42.2.** $y = x + x^{5/3}.$

42.3. $y = x + \sin x.$ **42.4.** $y = e^{arctgx}.$

42.5. $y = xlnx.$ **42.6.** $y = x^5 - 10x^2 + 3x.$

Quyidagi funksiyalar grafigining egilish nuqtalarini toping.

42.7. $y = x^4 - 6x^2 + 5x.$ **42.8.** $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2.$

42.9. $y = \frac{lnx}{\sqrt{x}}.$ **42.10.** $y = x^2 lnx.$

Quyidagi funksiyalarni to‘liq tekshiring va ularning grafiklarini chizing.

42.11. $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}.$ **42.12.** $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 4}.$

42.13. $y = x^2 \ln(x+2).$ **42.14.** $y = x^3 e^{-4x}.$

42.15. $y = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + 4\sqrt{x}.$ **42.16.** $y = \frac{x^2\sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}.$

6.O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Funksiya grafigi qavariqligi yo‘nalishining ta’riflarini ayting.
2. Funksiya grafigi qavariqligi yo‘nalishining shartlarini ayting.
3. Funksiya grafigi egilishi nuqtasining ta’rifini ayting.

4. Egilish nuqtasi bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlarini ayting.
5. Funksiya grafigi asimptotalarining ta’riflarini ayting.
6. Funksiya grafigining og‘ma asimptotaga ega bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlarini ayting va uni isbotlang.

VI bobni takrorlash uchun test savollari

1. Funksiyaning hosilasini toping: $y = \sqrt[x]{x},\ (x > 0)$

a) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-2lnx)$ b) $x^{\frac{1}{x}-2}(1+lnx)$

c) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-lnx)$ d) $-x^{\frac{1}{x}-2}(1-lnx)$

2. Funksiyaning hosilasini toping: $y = lntg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$,

a) $\frac{1}{cosx}\left(|x-2k\pi| < \frac{\pi}{2},\ k \in Z\right)$ b) $-\frac{1}{cosx}\left(|x-2k\pi| < \frac{\pi}{2},\ k \in Z\right)$

c) $\frac{2}{cosx}\left(|x-2k\pi| < \frac{\pi}{2},\ k \in N\right)$ d) $-\frac{2}{cosx}\left(|x-2k\pi| < \frac{\pi}{2},\ \right)$

3. $d\left(arccos\frac{1}{|x|}\right) =?$

a) $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}(|x| > 1)$ b) $\frac{dx}{-x\sqrt{x^2-1}}(|x| > 1)$ c) $\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}(|x| > 1)$

d) $\frac{dx}{2x\sqrt{x^2-1}}(|x| > 1)$

4. $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) =?$

a) $\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}(|x| < 1)$ b) $\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}(|x| < 1)$

c) $\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}(|x| > 1)$ d) $\frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}}(|x| < 1)$

5. $y = e^{sinx}cos(sinx)$ funksiya berilgan $y''(0) =?$

a) 1 b) 0 c) 2 d) 3

6. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}},\quad y^{(100)}$ ni toping.

a) $\frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$ b) $\frac{197!!(399-x)}{2^{99}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$ c) $\frac{197!!(399+x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$

d) $\frac{197!!(398-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$

7. $y = \frac{x^2}{1-x},\quad y^{(8)} =?$

a) $\frac{8!}{(1-x)^9}$ b) $\frac{9!}{(1-x)^9}$ c) $\frac{8!}{(1-x)^8}$ d) $\frac{8!}{(1+x)^9}$

8. $y = e^x lnx, d^4y =?$

a) $e^x\left(lnx+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)dx^4$

b) $e^x\left(lnx-\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)dx^4$

c) $e^x\left(lnx+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}-\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)dx^4$

d) $e^x\left(lnx+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\frac{6}{x^4}\right)dx^4$

9. $y = xcos2x,\ d^{10}y$ ni toping.

a) $-1024(xcos2x+5sin2x)dx^{10}$ b) $-1024(xcos2x-5sin2x)dx^{10}$

c) $1024(xcos2x+5sin2x)dx^{10}$ d) $-1024(xcos2x-5sin2x)dx^{10}$

10. $y = e^{-x^2}$ funksiyaning quyiga qavariqlik va yuqoriga qavariqlik oraliqlarini toping.

a) $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}},\quad |x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}},\quad |x| > 1$

c) $|x| < 1,\quad |x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}},\quad |x| > \sqrt{2}$

11. $y = x + sinx$ funksiyaning egilish nuqtalarini toping

a) $x = 1 + k\pi,\ \ k \in Z$ b) $x = 2k\pi,\ \ k \in Z$

c) $x = 3k\pi,\ \ k \in Z$ d) $x = k\pi,\ \ k \in Z$

12. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$ funksiyaning quyiga qavariqlik va yuqoriga qavariqlik oraliqlarini toping.

a) $x>1,\ x<-1$ b) $x>0,\ x<-1$ c) $x>0,\ x<0$ d) $x>2,\ x<-1$

13. $y = xsin(lnx), x > 0$ funksiyaning egilish nuqtalarini toping.

a) $x = e^{k\pi+\frac{\pi}{2}};\ \ k \in Z$ b) $x = e^{k\pi+\frac{\pi}{4}};\ \ k \in Z$

c) $x = e^{k\pi+\frac{\pi}{3}};\ \ k \in Z$ d) $x = e^{k\pi+\frac{\pi}{6}};\ \ k \in Z$

14. To‘g’ri javobni belgilang. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $f'(x)$ va $g'(x)$ chekli hosilalarga ega bo‘lsa, u holda … funksiya ham hosilaga ega va … $= f'(x)+g'(x)$ bo‘ladi.

a) $f(x)+g(x),\ [f(x)+g(x)]'$ b) $f(x)+g(x),\ \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$

c) $f(x)+g(x),\ [f(x)\cdot g(x)]'$ d) $f(x)\cdot g(x),\ [f(x)\cdot g(x)]'$

15. $y = \sin x$ funksiyaning hosilasi uchun to‘g’ri javobni belgilang.

a) $y' = \sin x$ b) $y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$ c) $y' = \cos x$ d) $y' = -\cos x$

16. Quyidagi javoblarning qaysi biri $y = \arcsin x$ funksiyaning differensialidan iborat.

a) $dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $dy = -\frac{dx}{1+x^2}$ c) $dy = \frac{dx}{1+x^2}$ d) $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

17. $y = x^{\mu}(x>0,\ \ \mu \in R)$ funksiyaning n - tartibli hosilasini toping.

a) $y^{(n)} = \mu(\mu-1)...(\mu-n-1)x^{\mu-n-1}$ b) $y^{(n)} = \mu(\mu-1)...(\mu-n)x^{\mu-n-1}$

c) $y^{(n)} = \mu(\mu-1)...(\mu-n)x^{\mu-n+1}$ d) $y^{(n)} = \mu(\mu-1)...(\mu-n+1)x^{\mu-n}$

18. $y = \cos x$ funksiyaning n - tartibli differensiali nimaga teng?

a) $d^n y = \cos x\, d^n x$ b) $d^n y = \sin^n x\, d^n x$

c) $d^n y = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) dx^n$ d) $d^n y = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) dx^n$

19. Quyidagi funksiyalarning qaysi biri uchun Roll teoremasining shartlari bajariladi?

a) $f(x) = x^3,\ -1 \le x \le 1$ b) $f(x) = x,\ 0 \le x \le 1$

c) $f(x) = x(1-x),\ 0 \le x \le 1$ d) $f(x) = x - [x],\ 0 \le x \le 1$

20. $y = \log_a x(a...0,\ a...1,\ x...0)$ nuqtalar o‘rniga tegishli belgilarni qo’yib funksiyaning hosilasi uchun to‘g’ri javobni belgilang.

a) $(>,\ \ne,\ >),\ y' = \frac{1}{x}\log_a e$ b) $(>,\ \ne,\ >),\ y' = \frac{1}{x}$

c) $(\ne,\ \ne,\ \ne),\ y' = \frac{1}{x}\log_a e$ d) $(>,\ =,\ >),\ y' = \frac{1}{x}\log_a e$

21. Quyidagi tasdiqlarning qaysi biri to‘g’ri?

a) $5x - 2x^2 = O(x^2),\ x \to 0$ b) $x^2 - x = O(x),\ x \to 0$

c) $\sin x = O(x^2),\ x \to 0$ d) $\cos x = O(x),\ x \to 0$

22. $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x}$ funksiya hosilasining $x = 1$ qiymatini toping.

a) 3,6 b) 2,5 c) 4, 5 d) 4, 6

23. $f(x) = arctg(x^3 + 1)$ funksiya hosilasining $x = 0$ nuqtadagi qiymatini toping.

a) 1,5 b) 0 c) 1 d) –3

24. $y = 3^x$ funksiyaning $y^{(10)}$ toping.

a) $3^x \ln^9 3$ b) $3^x \ln 3$ c) $3^x \ln^{10} 3$ d) $\frac{3^x}{\ln^{10} 3}$

25. $y = 3x - x^3$ funksiyaning monoton o‘suvchi oralig'ini toping.

a) $1 \le x < +\infty$ b) $0 \le x \le 1$ c) $-1 \le x \le 1$ d) $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$

26. $y = x^2 - 4x + 6$ funksiyaning $[-3, 10]$ segmentdagi eng kichik qiymatini toping.

a) -4 b) 66 c) 2 d) 27

27. $y = x^2 - 4x + 6$ funksiyani $[-3,\ 10]$ segmentdagi eng katta qiymatini toping.

a) 16 b) 3 c) 66 d) 2

28. $y = 3x - x^3$ funksiyaning monoton kamayuvchi oralig'ini toping.

a) $1 \le x < +\infty$ b) $0 \le x \le 1$ c) $x < -1,\ x > 1$ d) $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$

29. $f(x)=|x^2-5x+6|$ funksiyaning $x=2$ nuqtadagi chap va o‘ng hosilalarini toping.

a) 2 va 5 b) –1 va 2 c) –1 va 1 d) –1 va 5

30. Qaysi funksiyaning $x=2$ nuqtada hosilasi mavjud emas?

a) $f(x)=|x-2|$ b) $f(x)=(x-2)^2$ c) $f(x)=(2-x)e^{x-2}$ d) $f(x)=e^{x-2}$

31. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-x}$ funksiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

a) $y=1$ b) $x=1$ c) $x=0$ d) b$y=0$

32. $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ funksiya grafigining $x\to+\infty$ da og`ma asimptotasini toping.

a) $y=x+1$ b) $y=x-1$ c) $y=1-x$ d) $y=-1-x$

33. $f(x)=e^x+x$ funksiya grafigining nechta og`ma asimptotasi bor?

a) 1 b) cheksiz ko‘p c) 0 d) 2

34. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-x}$ funksiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

a) $x=1$ b) $y=1$ c) $x=0$ d) $y=0$

35. $y=sinax$ funksiyaning n $-$tartibli hosilasini toping.

a) $y^{(n)}=a^n sin\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right)$. b) $y^{(n)}=sin\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right)$.

c) $y^{(n)}=a^n cos\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right)$. d) $y^{(n)}=a^n sin(ax+n\pi)$.

36. $f(x)=e^x+x$ funksiya grafigining nechta og`ma asimptotasi bor?

a) cheksiz ko‘p b) 1 c) 0 d) 2

37. $f(x)=acrtgx$ funksiya grafigining nechta og`ma asimptotasi bor?

a) cheksiz ko‘p b) 0 c) 1 d) 2

38. $f(x)=tgx, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$ funksiya grafigining nechta vertikal asimptotasi bor?

a) 0 b) cheksiz ko‘p c) 1 d) 2

39. $x\to1$ da cheksiz kichik bo`lgan quyidagi funksiyalar orasidan $f(x)=lnx$ funksiya bilan bir xil tartibga ega bo`lganini aniqlang.

a) $\sqrt{x}$ b) $7(x-1)$ c) $x^{\frac{1}{3}}$ d) $\sqrt[3]{x-1}$

40. $x\to0$ da cheksiz kichik bo`lgan $\alpha(x)=\dfrac{x}{x+1}$ va $\beta(x)=x+\sin x$ funksiyalar uchun quyidagi mulohazalardan qaysi biri o`rinli?

a) ekvivalent b) $\beta(x)=o(\alpha(x))$ c) $\alpha(x)=o(\beta(x))$ d) ekvivalent emas, lekin bir xil tartibga ega.

41. $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$ ko’phadni $x-4$ ning darajalari bo‘yicha yoying.

a) $(x-4)^4+11(x-4)^3+37(x-4)^2+21(x-4)-56$

b) $(x-4)^4+5(x-4)^3-10$

c) $8(x-4)^4-7(x-4)+8$

d) $3(x-4)^4+2(x-2)^2-7$

42. Lopital qoidasi bo‘yicha hisoblang: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-e^{x}}{tgx-x}$

a) 2 b) 7 c) 8 d) 1

43. $y=\frac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x\geq 0)$ ning o‘sish va kamayish oraliqlarini toping.

a) 0<x<10 da o‘suvchi, x≥10 da kamayuvchi

b) 0≤x≤100 da o‘suvchi, x>100 da kamayuvchi

c) 0<x<10da kamayuvchi, x≥10da o‘suvchi

d) 0<x<100 da kamayuvchi, x>100 da o‘suvchi

44. Qaysi funksiyaning differensiali $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ ga teng?

a) $f(x)=\arcsin\frac{x}{a}$ b) $f(x)=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}$

c) $f(x)=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$ d) $f(x)=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$

45. $f(x)=e^{2x-1}$ uchun $f''(0)$ ni toping.

a) $f''(0)=\frac{1}{e}$ b) $f''(0)=2$ c) $f''(0)=5$ d) $f''(0)=\frac{4}{e}$

46. $x\to 1$da cheksiz kichik bo`lgan quyidagi funksiyalar orasidan $f(x)=\ln x$ funksiya bilan bir xil tartibga ega bo`lganini aniqlang.

a) $x-1$ b) $(x-1)^2$ c) $y=e^{x}-e+3$ d) $\sqrt[3]{x-1}$

47. $x\to 0$ da cheksiz kichik bo`lgan $\alpha(x)=\frac{x}{x+1}$ va $\beta(x)=x+\sin x$ funksiyalar uchun quyidagi mulohazalardan qaysi biri o`rinli?

a) ekvivalent b) $\beta(x)=o(\alpha(x))$ c) $\alpha(x)=o(\beta(x))$

d) ekvivalent emas, lekin bir xil tartibga ega.

48. $f(x)=2^{2^x}$ funksiyaning hosilasini toping.

a) $f'(x)=2^{2^x+x}\ln^2 2$ b) $f'(x)=2^{2^x}\ln^2 2$ c) $f'(x)=2^{2^x}\ln 2$ d) $f'(x)=2^{2^x}$

49. $f(x)=\frac{\sin x}{x^2-x}$ funksiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

a) $y=1$ b) $x=0$ c) $x=1$ d) $y=0$

50. $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ funksiya grafigining $x\to+\infty$ da og`ma asimptotasini toping.

a) $y=x+1$ b) $y=x-1$ c) $y=1-x$ d) $y=-1-x$

VII BOB. ANIQMAS INTEGRAL

43-§. Aniqmas integralning ta'rifi, asosiy xossalari va integrallash jadvali

Reja:

1. Boshlang'ich funksiya tushunchasi.
2. Aniqmas integral tushunchasi.
3. Aniqmas integralning xossalari.
4. Elementar funksiyalarning aniqmas integrallari uchun jadval.
5. Mustaqil yechish uchun misollar.
6. O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Boshlang'ich funksiya tushunchasi.

Biz oldingi bobda moddiy nuqtaning harakat qonuni bo'yicha oniy tezligini topish masalasini qaragan edik. Agar $s = s(t)$ – moddiy nuqtaning harakat boshlangandan t vaqtda o'tgan yo'l bo'lsa, u holda t vaqtdagi oniy tezligi $s(t)$ funksiyaning hosilasiga teng, ya'ni $v = s'^{(t)}$.

Fizikada bu masalaga teskari masala ham uchraydi: ya'ni berilgan $v = v(t)$ tezlik bo'yicha harakat qonunini topish masalasi, boshqacha aytganda hosilasi $v(t)$ ga teng bo'lgan *s(t)* funksiyani topish masalasi qaraladi.

f(x) va *F(x)* funksiyalar biror (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin.

43.1-ta'rif. Agar *F(x)* funksiya (a,b) intervalda differensiallanuvchi bo'lib, barcha $x\in(a,b)$ lar uchun

$$F'(x)=f(x) \tag{43.1}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, *F(x)* funksiya (a,b) intervalda *f(x)* funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

43.1-eslatma. Boshlang'ich funksiya tushunchasini boshqa oraliqlar (chekli yoki cheksiz yarim intervallar, kesmalar) uchun ham kiritish mumkin.

Kesmada boshlang'ich funksiya ta'rifini beramiz.

Agar *f(x)* va *F(x)* funksiyalar $[a,b]$ segmentda aniqlangan va *F(x)* funksiya (a,b) intervalda differensiallanuvchi bo'lib, $[a,b]$ segmentda uzluksiz va hamma $x\in(a,b)$ lar uchun (43.1) tenglik bajarilsa, u holda *F(x)* funksiya $[a,b]$ segmentda *f(x)* funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

43.2-eslatma. Agar *F(x)* funksiya (a,b) intervalda *f(x)* funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $F(x)+C$ funksiya ham (C=const ning ixtiyoriy qiymatida) *f(x)* funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.

43.1-misol. 1) $f(x)=x^4$ bo'lsin. Bu funksiyaning R dagi boshlang'ich funksiyasi $F(x)=\frac{x^5}{5}$ bo'ladi, chunki $F'(x)=\frac{5x^4}{5}=x^4$.

2) $y=sinx$ funksiyaning R dagi boshlang'ich funksiyasi F(x)=-cosx bo'ladi.

Teskari tasdiq ham o'rinli.

43.1-teorema. $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda differensiallanuvchi va $f(x)$ funksiyaning shu intervalda ikkita boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, u holda barcha $x\in(a,b)$ lar uchun

$$F_2(x)=F_1(x)+C \quad (C=\text{const}) \tag{43.2}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $F_2(x)-F_1(x)=G(x)$ belgilashni kiritamiz. Boshlang'ich funksiya ta'rifiga va teorema shartiga ko'ra barcha $x\in(a,b)$ lar uchun $F_1'(x)=f(x)$, $F_2'(x)=f(x)$ tengliklar bajariladi. Bundan G(x) funksiyaning (a,b) intrervalda differensiallanuvchiligi kelib chiqadi va barcha $x\in(a,b)$ lar uchun $G'(x)=0$ bo'ladi. Lagranj teoremasining natijasiga ko'ra $\forall x\in(a,b)$ lar uchun $G(x)=C=const$ yoki $F_2(x)-F_1(x)=C$, ya'ni (43.2) tenglik o'rinli. Teorema isbot bo'ldi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning barcha boshlang`ich funksiyalari bir-biridan o`zgarmas songa farq qilar ekan va istalgan boshlang`ich funksiyasi $F(x)+C$ $(C=const)$ ko`rinishda ifodalanadi.

Demak, (a,b) intervalda berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi o'zgarmas son aniqligida bir qiymatli aniqlar ekan. Boshlang'ich funksiyalar ichidan biror $F_1(x)$ funksiyasini ajratish uchun $F_1(x)$ funksiyaning grafigiga tegishli bo'lgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtani ko'rsatish yetarli.

43.2-misol. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ funksiya uchun (1,2) nuqtadan o'tuvchi $F_1(x)$ boshlang'ich funksiyasini toping.

Yechish. Bu funksiyaning barcha boshlang'ich funksiyalari

$$F(x)=-\frac{1}{x}+C$$

ko'rinishda bo'ladi. Shartga ko'ra $F_1(1)=2,$ C=3. Demak, $F_1(x)=-\frac{1}{x}+3.$

2.Aniqmas integral tushunchasi.

43.2-ta'rif. $f(x)$ funksiyaning biror Δ oraliqdagi barcha boshlang`ich funksiyalarining to'plami $\{F(x)+C\}$ $(C=const)$ shu $f(x)$ funksiyaning *aniqmas integrali* deb ataladi va $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi. Bunda $\int$–integral belgisi, $f(x)$ –integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ esa integral ostidagi ifoda deyiladi.

Demak,

$$\int f(x)dx=F(x)+C \tag{43.3}$$

formula o'rinli bo'ladi.

Izoh. Ta'rifga ko'ra (43.3) ning o'ng tomonida $\{F(x)+C\}$ ifoda turishi kerak edi. Lekin bu yozuv noqulaylik tug'dirganligi uchun (43.3) shaklda yozishga kelishib olamiz.

Masalan: $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$ bo`ladi, chunki, $\left(\frac{3^x}{\ln 3} + C\right)' = 3^x$.

Integral ostidagi ifodani, ya'ni *f(x)dx* ni $F'(x)dx$ shaklida yoki

f(x)dx=F'(x)dx=dF(x)

ko'rinishda yozish mumkin.

Berilgan funksiyaning aniqmas integralini topish amali uni defferensiallash amaliga teskari amal bo'lib hisoblanadi.

3. Aniqmas integralning xossalari.

1-xossa. $d\int f(x)dx = f(x)dx$ (43.4)

tenglik o'rinli, ya'ni agar differensial belgisi integral belgisidan oldin kelsa ular o'zaro qisqarar ekan.

Isbot. (43.3) formuladan foyadalanib

$$d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = dF(x) = f(x)dx$$

tenglikka ega bo`lamiz.

2-xossa. $\int dF(x) = F(x) + C$ (43.5)

tenglik o'rinli, ya'ni agar integral belgisi differensial belgisidan oldin kelsa ular o'zaro qisqarar ekan (C o'zgarmasni hisobga olmagan holda).

Isbot. $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning biror boshlang`ich funksiyasi bo`lsin: $F'(x) = f(x)$. U holda

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (43.6)$$

tenglik o`rinli bo`ladi. Ikkinchi tomondan

$$\int f(x)dx = \int F'(x)\,dx = \int dF(x). \qquad (43.7)$$

(43.6) va (43.7) dan (43.5) kelib chiqadi.

Ayni paytda funksiya hosilasi hisoblanganda natija bitta funksiya bo'lsa ham uning aniqmas integrali cheksiz ko`p funksiya (ular bir-biridan o`zgarmas songa farq qiladi) bo`ladi. Aniqmas integral deb yuritilishining sababi ham shu.

3-xossa. Agar $f(x)$ funksiya biror Δ oraliqda boshlang`ich funksiyaga ega bo`lsa, u holda $kf(x)$ (k-o`zgarmas son ) ham shu oraliqda boshlang`ich funksiyaga ega va $k \neq 0$ da

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (43.8)$$

formula o`rinli bo`ladi.

Isbot. $f(x)$ funksiyaning boshlang`ich funksiyasi $F(x)$ bo`lsin. U holda $F'(x) = f(x)$ va $\int f(x)dx = F(x) + C$ bo`lib,

$$k\int f(x)dx = k(F(x) + C\ ) = kF(x) + kC \qquad (43.9)$$

bo`ladi. Bunda $C$-ixtiyoriy o`zgarmas son. Ushbu

$$\left(kF(x)\right)' = kF'(x) = kf(x)$$

tenglik o`rinli bo`lishidan $kf(x)$ funksiyaning boshlang`ich funksiyasi $kF(x)$ ekanini topamiz. Demak,

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C_1 \qquad (43.10)$$

Bunda $C_1 -$ ixtiyoriy o`zgarmas son. Endi (43.9) va (43.10) munosabatlardan $C$ va $C_1$ o`zgarmas sonlarning ixtiyoriyligi hamda $k \neq 0$ bo`lishidan (43.8) formulaning o`rinli ekani kelib chiqadi.

4-xossa. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar biror Δ oraliqda boshlang`ich funksiyalarga ega bo`lsa, $f(x) + g(x)$ ham shu oraliqda boshlangich funksiyaga ega va

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \qquad (43.11)$$

formula o`rinli. Bu xossaning isboti 3-xossaning isbotiga o`xshash bo‘ladi. Odatda bu xossa integralning *additivlik xossasi* deyiladi.

Elementar funksiyalarning hosilalarini topish formulasiga qarab, ularning aniqmas integrali uchun formulalarni yozish qiyin emas.

4.Elementar funksiyalarning aniqmas integrallari uchun jadval.

Boshlang`ich funksiya ta`rifidan hamda elementar funksiyalar hosilalari jadvalidan foydalanib elementar funksiyalar aniqmas integrallari jadvalini keltiramiz.

1) $\int 0dx = C;\ C - const;$ 2) $\int 1dx = \int dx = x + C;$

3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$ 4) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C \quad (x \neq 0);$

5) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg\ x + C;$ 6) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0);$ 8) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

9) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$; 10) $\int \frac{1}{sin^2 x}dx = -ctg\ x + C$;

11) $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\ x + C;$ 12) $\int sh\ xdx = ch\ x + C;$

13) $\int ch\ xdx = sh\ x + C;$ 14) $\int \frac{1}{sh^2 x}dx = -cth\ x + C;$

15) $\int \frac{1}{ch^2 x}dx = thx + C;$

16) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}arcctg\frac{x}{a} + C;$

17) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C = -arccos\frac{x}{a} + C,\ |x| < |a|.$;

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \qquad |x| < |a|.$

20) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -arccosx + C$;

21) $\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2} ln|a^2 \pm x^2| + C$;

22) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$;

23) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + C, (a > 0)$;

24) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

43.3-misol. Ushbu $\int tg^2xdx$ integralni toping.

Yechish: Integral ostidagi funksiyani

$$tg^2x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Endi integrallashning sodda qoidasidan foydalansak

$$\int tg^2xdx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = tgx - x + c$$

munosabatni hosil qilamiz.

43.4-misol. Ushbu

$$\int \frac{dx}{1 + cosx}$$

integralni toping.

Yechish: $1 + cosx = 2\cos^2\frac{x}{2}$ bo‘lib, $\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$ funksiyaning boshlang’ich funksiyasi $tg\frac{x}{2}$ funksiya bo‘lganligi uchun

$$\int \frac{dx}{1+cosx} = tg\frac{x}{2} + c$$ bo‘ladi.

5. Mustaqil yechish uchun misollar.

Quyidagi aniqmas integrallarni hisoblang.

43.1. $\int (3 - x^2)^3dx.$ **43.2.** $\int x^2(5 - x)^4dx.$

43.3. $\int x^3(6 - x)^2 dx.$ **43.4.** $\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x)dx.$

43.5. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$ **43.6.** $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right)dx.$

43.7. $\int \frac{x^2+2}{\sqrt[3]{x}}dx$ **43.8.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x^2}+3}{\sqrt[5]{x}}dx.$

439. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx.$ **43.10.** $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx.$

43.11. $\int \frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}dx.$ **43.12.** $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx.$

43.13. $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx.$ **43.14.** $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx.$ **43.15.** $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx.$

6. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Boshlang’ich funksiya ta’rifini ayting.
2. Aniqmas integral ta’rifini ayting .
3. Aniqmas integralning xossalarini aytib bering.
4. Elementar funksiyalarning aniqmas integrali jadvalini yozing.

44-§. O‘zgaruvchilarni almashtirish va bo‘laklab integrallash

Reja:

1. O‘zgaruvchini almashtirib integrallash.
2. Bo‘laklab integrallash usuli.
3. Mustaqil yechish uchun misollar.
4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. O‘zgaruvchini almashtirib integrallash.

$t=\varphi(x)$ funksiya Δ intervalda aniqlangan va differensiallanuvchi bo‘lsin. Bu funksiyaning qiymatlar to‘plami $\tilde{\Delta}=\varphi(\Delta)$ bo‘lsin.

Agar $U(t)$ funksiya $\tilde{\Delta}$ to‘plamda aniqlangan va differensiallanuvchi bo‘lib

$$U'(t)=u(t) \qquad (44.1)$$

bo‘lsin, u holda Δ to‘plamda $F(x)=U(\varphi(x))$ murakkab funksiya aniqlangan va u differensiallanuvchi va

$$F'(x)=\left[U(\varphi(x))\right]'=U'(\varphi(x))\varphi'(x)=u(\varphi(x))\varphi'(x) \qquad (44.2)$$

munosabat o‘rinli.

(44.1) va (44.2) dan, agar $U(t)$ funksiya $u(t)$ uchun boshlang’ich funksiya bo‘lsa, u holda $U(\varphi(x))$ funksiya $u(\varphi(x))\varphi'(x)$ funksiya uchun boshlang’ich funksiya bo‘lishi, ya’ni

$$\int u(t)\,dt=U(t)+C, \qquad (44.3)$$

$$\int u(\varphi(x))\varphi'(x)dx=U(\varphi(x))+C \qquad (44.4)$$

yoki

$$\int u(\varphi(x))d\varphi(x)=U(\varphi(x))+C \qquad (44.5)$$

tengliklarning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. (44.4) yoki (44.5) formulaga o`zgaruvchilarni almashtirish formulasi deyiladi. Bu formula (44.3) dan $t = \varphi(x)$ almashtirish natijasida kelib chiqadi.

44.1-eslatma. (44.5) yoki (44.4) formula, agar $f(x) = u\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$ shaklida tasvirlansa, $\int f(x)dx$ integralni hisoblashga imkon beradi.

44.1-misol. $\int \frac{xdx}{x^2+a^2}$ $(a = const)$ integralni hisoblang.

Yechish. $x^2 + a^2 = t$ almashtirish olamiz. Bunda $2xdx = dt$ bo‘lib,

$$\int \frac{xdx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2) + C.$$

44.2-misol. $\int e^{\sin x}\cos x\, dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin x = t$ almashtirish olamiz, bunda $\cos x\, dx = dt$ bo‘lib ,

$$\int e^{\sin x}\cos x\, dx = \int e^t\, dt = e^t + \mathrm{C} = e^{\sin x} + C$$

bo‘ladi.

44.3–misol. Ushbu $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ integralni toping.

Yechish: Integralda $\frac{1}{x} = t$ almashtirishni bajaramiz, bunda

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{d(-\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -ln\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right| + c =$$

$$-ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right| + c = -ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right| + c$$ bo‘ladi.

44.4-misol. $J = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx,\ a > o$ integral hisoblansin.

Yechish. Integral ostidagi funksiya kesmada aniqlangan. Agar

$$x = \varphi(t) = aSint,$$

$$t = \omega(x) = arcSin\frac{x}{a},$$

deb olsak, u holda

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2\cos^2 x} = a\cos t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\quad a > o$$

bo‘ladi. Natijada

$$J = \int a\cos t \cdot a\cos t dt = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + c$$

tenglikka ega bo‘ldik.

$$\sin t = \frac{x}{a},\ \cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a}}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sin 2t = \sin t \cdot \cos t = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}$$

tengliklar o‘rinli bo‘lganligidan

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + c$$

tenglikni olamiz.

2.Bo‘laklab integrallash usuli.

44.1-teorema. Agar *u(x)* va *v(x)* funksiyalar (a,b) intervalda aniqlangan va differensiallanuvchi bo‘lib, (a,b) intervalda $\int v du$ integral mavjud bo‘lsa, u holda shu intervalda $\int u dv$ integral ham mavjud bo‘ladi va

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{44.6}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. *u(x)* va *v(x)* funksiyalar (a,b) intervalda differensiallanuvchi bo‘lsa,

$$d(uv) = v du + u dv$$

tenglik ham o‘rinli bo‘ladi. Bundan $u dv = d(uv) - v du$. Bu tenglikning ikkala tomoni uchun ham integral mavjud. Shuning uchun aniqmas integralning 1^0 - xossasiga ko‘ra

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du \tag{*}$$

tenglik kelib chiqadi, bunda $\int d(u,v) = uv + C$, C – o‘zgarmas son $\int v du$ integral tarkibiga kiradi.

Quyidagi funksiyalar sinfi bo‘laklab integrallash usuli yordamida integrallanadi:

$$x^k \ln^m x,\ \ x^k Sinbx,\ \ x^k Cosbx,\ \ x^k e^{ax}.$$

44.5-misol.

1) $$\int x^2 \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x, & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2 dx, & v = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

2) $$J_n = \int \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^n} \quad (n \in N) \qquad u = \frac{1}{\left(a^2 + x^2\right)^n}, \quad du = -\frac{2nxdx}{\left(a^2 + x^2\right)^{n+1}}$$
$$dv = dx, \qquad v = x$$

$$J_n = \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} + 2n\int \frac{x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}}dx \tag{44.7}$$

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}}dx = \int \frac{\left(x^2 + a^2\right) - a^2}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}}dx = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} - a^2\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}} = J_n - a^2 J_{n+1},$$

buni (44.7) ga qo‘yib, quyidagi formulaga ega bo‘lamiz:

$$J_n = \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)_{n+1}} + \left(J_n - a^2 J_{n+1}\right)2n$$

bundan

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{a^2}J_n \qquad (44.8)$$

Ma'lumki, $J_1 = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}$, buni bilgan holda J_2 ni topish mumkin:

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a}$$

J_2 ni bilgan holda (44.8) dan J_3 topish mumkin va hokazo.

44.6-misol. Ushbu

$$I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx$$

integralni toping

Yechish: $u = \sqrt{x^2 + a^2},\ \ dv = dx$ deb belgilab, (*) formuladan foydalanib, berilgan integralni quyidagi holga keltiramiz:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \qquad (44.9)$$

(44.9) ning o'ng tomonidagi integralni hisoblashda integrallar jadvalining 19 – formulasidan foydalanamiz:

$$\int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} = I - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = I - a^2 ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| \qquad (44.10)$$

(44.10) ni (44.9) ga olib borib qo'yish natijasida,

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C \qquad (44.11)$$

ekanligini topamiz.

44.7– misol: Ushbu

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad (a = const, n = 1,2, \dots,)$$

integralni hisoblang.

Yechilishi: Bu integral yuqoridagi keltirilgan uch guruh integrallarning birortasiga ham kirmaydi. Bu ko'rinishdagi integrallarni hisoblash uchun *rekurrent* formula keltirib chiqaramiz: buning uchun $u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, dv = dx$ deb belgilasak,

$$du = -2nx(x^2 + a^2)^{-n-1}dx, v = x.$$

bo'ladi.

U holda, (*) bo'laklab integrallash formulasiga asosan,

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$
$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}.$$
bo‘ladi. Bundan I_{n+1} ni topamiz:
$$I_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n. \qquad (44.12)$$
Bu rekurrent formula I_{n+1} integralni hisoblashni I_n integralni hisoblashga, ya’ni indeksi bitta kam bo‘lgan integralni hisoblashga keltiradi. (44.12) rekurrent formula I_1 integral hisoblanganda I_2 integralni hisoblashda hech qanday qiyinchilik tug’dirmaydi. O‘z navbatida, I_2 berilganda (44.12) formulada $n=2$ deb I_3 integral topiladi va hokazo n ning qolgan boshqa istalgan qiymatiga to‘g’ri kelgan integralni hisoblash hech qanday qiyinchilik tug’dirmaydi. I_1 integral esa integrallar jadvalning 14 – formulasiga asosan hisoblanadi.

44.8-misol: Ushbu $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}, n > 2$

ko‘rinishdagi integralni hisoblash uchun rekurrent formula keltirib chiqaring.

Yechilishi: $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ integralni bo‘laklab integrallash usuli yordamida hisoblaymiz:
$$I_n = \int \frac{dx}{sin^n x} = \int \frac{dx}{sin^{n-2} x \, sin^2 x} =$$
$$= \left[u = \frac{1}{sin^{n-2} x}, dv = \frac{dx}{\sin^2 x}, du = (2-n)\sin^{1-n} x \, cosxdx, \atop v = -ctgx \right]$$
$$= -\frac{cosx}{\sin^{n-1} x} + (2-n)\int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} dx$$
$$= -\frac{cosx}{\sin^{n-1} x} + (2-n)\int \frac{dx}{\sin^n x} - (2-n)\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$
$$= -\frac{cosx}{\sin^{n-1} x} + (2-n)I_n - (2-n)I_{n-2}.$$
Bundan
$$I_n = -\frac{cosx}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \qquad (44.13)$$
rekurrent formulani olamiz.

3. Mustaqil yechish uchun misollar.

O‘zgaruvchilarni almashtirish usulidan foydalanib, quyidagi aniqmas integralni hisoblang.

44.1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$. **44.2.** $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$. **44.3.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$.

44.4. $\int \frac{shxchx}{\sqrt{sh^4x+ch^4x}}dx.$ **44.5.** $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}.$ **44.6.** $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}dx.$

44.7. $\int \sqrt[3]{1+3\sin x}\cos x dx.$ **44.8.** $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx.$

44.9. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx.$ **44.10.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$

Ko'rsatma: 44.10-misolda $x+a=(b-a)sh^2t$ belgilashdan foydalaning.

Bo'laklab integrallash usulidan foydalanib, quyidagi aniqmas integrallarni hisoblang.

44.11. $\int xcosxdx.$ **44.12.** $\int x\ln 3xdx.$ **44.13.** $\int xe^{-x}dx.$ **44.14.** $\int x3^x dx.$

44.15. $\int x^n \ln xdx(n\neq -1).$ **44.16.** $\int xarctgxdx.$ **44.17.** $\int \ln xdx.$

44.18. $\int x^3e^{-x^2}dx.$ **44.19.** $\int \sqrt{x}\ln^2 xdx.$ **44.20.** $\int arcsinxdx.$

Quyidagi I_n $(n \in N)$ integrallar uchun rekurrent formulalar keltirib chiqaring.

44.21. $I_n=\int sin^nxdx,\ n>2.$ **44.22.** $I_n=\int cos^nxdx,\ n>2.$

44.23. $I_n=\int \frac{1}{cos^nx}dx,\ n>2.$ **44.24.** $I_n=\int x^\alpha ln^nxdx,\ \alpha\neq -1.$

4. O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Elementar funksiyalarning aniqmas integrallar jadvalini ta'rif bo'yicha keltirib chiqaring.
2. Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish usulini sharhlang.
3. Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish haqidagi teoremani ayting.
4. Aniqmas integrallarni bo'llaklab integrallash haqidagi teoremani ayting.
5. Bo'laklab integrallash formulasini yozing.
6. Qanday funksiyalar sinfi bo'laklab integrallanadi?

45-§. Ratsional kasrlarni sodda kasrlarga yoyib integrallash

Reja:

1. Sodda kasrlarni integrallash.
2. To'g'ri kasrlarni sodda kasrlarga yoyib integrallash.
3. Mustaqil yechish uchun misollar.
4. O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Sodda kasrlarni integrallash. Ushbu

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^m},\int \frac{(Bx+D)dx}{(x^2+px+q)^m},m=1,2,... \qquad (45.1)$$

ko‘rinishidagi kasrlar sodda kasrlar deyiladi, bunda *A,B,D, a,p,q* lar o‘zgarmas sonlar, x^2+px+q kvadrat uchhad esa haqiqiy ildizga ega emas.

Endi (45.1) ko‘rinishdagi sodda kasrlarning integrallari qanday hisoblanishini ko‘rib chiqamiz.

Agar *m*=1 bo‘lsa, $\int \frac{Adx}{x-a} = Aln|x-a| + C.$

Agar *m*>1 bo‘lsa, $\int \frac{Adx}{(x-a)^m} = \frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C.$

Quyidagicha belgilashni kiritamiz:

$$I_m = \int \frac{(Bx+D)dx}{(x^2+px+q)^m}.$$

$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}, q-\frac{p^2}{4} > 0,\quad \sqrt{q-\frac{p^2}{4}} = a, x+\frac{p}{2} = t$ deb olsak, $I_m = \int \frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+D}{(t^2+a^2)^m}dt$ bo‘ladi. Bu yerda agar *m*=1 bo‘lsa, bu integralni hisoblab quyidagini olamiz:

$$\int \frac{(Bx+D)dx}{x^2+px+q} = \frac{B}{2}ln(x^2+px+q) + \frac{2D-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + D.$$

Agar *m*>1 bo‘lsa, bu integralni hisoblab quyidagini olamiz:

$$I_m = \int \frac{(Bx+D)dx}{(x^2+px+q)^m} = \frac{B}{2}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}} + \left(D-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

Bu tenglikning o‘ng tomonidagi integral (44.12) formula yordamida hisoblanadi.

2. To‘g’ri kasrlarni sodda kasrlarga yoyib integrallash.

Ushbu

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$$

($a_0,a_1,...,a_n,b_0,b_1,...,b_m$ o‘zgarmas sonlar $n\in N, m\in N$) nisbat kasr-ratsional funksiya deyiladi, *n=m*, *n>m* bo‘lganda noto‘g’ri kasr, *n<m* bo‘lsa to‘g’ri kasr deyiladi.

45.1-teorema. Har qanday to‘g’ri $\frac{P(x)}{Q(x)}$ kasrlarning integralini (45.1) shakldagi chekli sodda kasrlarning integrallari yig’indisi shaklida tasvirlash mumkin.

Bu yoyilma maxraj *Q(x)* ning sodda ko‘paytuvchilarga ajralishiga bog’liq. (Bu teorema algebra kursida batafsil isbot qilinadi).

Ma’lumki haqiqiy koeffisiyentli butun ko‘phad yagona ravishda haqiqiy *x-a* va x^2+rx+q (kvadrat uchhad ildizga ega emas deb faraz qilinadi) ko‘rinishidagi ko‘paytuvchilarga yoyiladi. Bunda soddalik uchun *Q(x)* ning b_m

koeffisiyentini 1 ga teng deb, bir xil ko‘paytuvchilarni (mavjud bo‘lsa) birlashtirib, uni sxematik ravishda

$$Q(x)=(x-a)^k\ldots(x^2+px+q)^m\ldots \tag{45.2}$$

ko‘rinishida tasvirlaymiz, bunda $k,\ldots,m$ lar natural sonlar.

Agar $Q(x)$ ko‘phadning darajasi n ga teng bo‘lsa, u holda

$$\sum k+2\sum m=n$$

Algebra kursidan ma’lumki, to‘g’ri kasrning yoyilmasida $(x\text{-}a)^k$ shakldagi ko‘paytuvchiga k ta sodda

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k} \tag{45.3}$$

kasrlar gruppasi, $(x^2+rx+q)^m$ shakldagi ko‘paytmaga esa m ta sodda

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m} \tag{45.4}$$

kasrlar gruppasi mos keladi, bunda A,M,N-noma’lum sonli koeffisiyentlar. Shunday qilib, (45.2) yoyilmani bilgan holda kasr (45.3) va (45.4) shakldagi sodda kasrlar yigindisi, ya’ni

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m} \tag{45.5}$$

shaklda tasvirlanadi, so‘ngra (45.5) ning o‘ng tomonida kasrlar yig’indisi umumiy maxrajga keltiriladi (ravshanki umumiy maxraj $Q(x)$ bo‘ladi). Undan keyin (45.5) ning ikki tomonidagi maxraj tashlanib $P(x)=R(x)$ tenglik hosil bo‘ladi. Bu yerda $R(x)$ (45.5) ning o‘ng tomonini umumiy maxrajga keltirilgandan keyin hosil bo‘lgan ratsional kasrning suratida turgan ko‘phad. Bu tenglikning har ikki tomonidagi x ning bir xil darajalari oldida turgan koeffisiyentlarni topish uchun algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilib, noma’lum koeffisiyentlar topiladi. Bu usul noma’lum koeffisiyentlar usuli deyiladi.

45.1-misol: Ushbu

$$\int\frac{dx}{x^3+1}$$

integralni toping.

Yechish: x^3+1 ni ko‘paytuvchiga ajratamiz: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$. U holda $\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$ tenglikdan foydalanib quyidagi munosabatni olamiz

$$1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$$
$$=(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C.$$

Bu yerdan

$$\begin{cases} A+b=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}$$

sistemaga ega bo‘lamiz. Sistemadan $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3}$ ekanligini topamiz. U holda

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bundan esa

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\int\frac{dx}{3(x+1)}+\int\frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}dx=$$

$$=\frac{1}{3}ln|x+1|+\frac{1}{3}\int\frac{-(x-\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=$$

$$=\frac{1}{3}ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{3}ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+C$$

tenglik kelib chiqadi.

45.2-misol: Ushbu

$$\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$$

integralni toping.

Yechish: Integral ostidagi funksiyani sodda kasrlar yig’indisiga yoyamiz

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}.$$

Noma’lum koeffitsiyentlarni topish uchun tenglikning o‘ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz va ushbu

$$2x+3=A(x+5)+B(x-2)=(A+B)x+5A-2B$$

tenglikka kelamiz. Ikki ko‘phadning tengligidan foydalanib A va B larga nisbatan ushbu

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 5A-2B=3 \end{cases}$$

sistemaga kelamiz. Bu sistemadan $A=1, B=1$ ekanligini olamiz. U holda

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+5}$$

bo‘ladi. Endi bu tenglikni integrallab

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+5} = ln|x-2| + ln|x+5| + C$$

munosabatni olamiz.

45.3-misol: Ushbu

$$\int \frac{xdx}{x^3-3x+2}$$

integralni hisoblang.

Yechish: $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$ bo‘lganligi uchun integral ostidagi funksiyani sodda kasrlar orqali quyidagicha ifodalaymiz:

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}.$$

A, B, C no‘malum koeffisiyentlarni topish uchun tenglikning o‘ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz va ushbu

$$\begin{aligned} x &= A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2 \\ &= A(x^2+x-2) + B(x+2) + C(x^2-2x+1) \\ &= (A+C)x^2 + (A+B-2C)x - 2A + 2B + C \end{aligned}$$

tenglikka kelamiz. Endi ikki ko‘phadning tengligidan foydalanib,

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B-2C=1 \\ -2A+2B+C=0 \end{cases}$$

sistemaga kelamiz. Bu sistemani yechib, $A=\frac{2}{9}, B=\frac{1}{3}, C=-\frac{2}{9}$ ekanligini topamiz. U holda

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{\frac{2}{9}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{2}{9}}{x+2}$$

tenglikka kelamiz. Endi bu tenglikni integrallab

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{x^3-3x+2} &= \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{2}{9}ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9}ln|x+2| + C \end{aligned}$$

munosabatni olamiz.

3. Mustaqil yechish uchun misollar.

Aniqmas koeffisiyentlar usulidan foydalanib, quyidagi aniqmas integrallarni hisoblang.

45.1. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

45.2. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$

45.3. $\int \frac{x^4}{(2+x)(x^2-1)}dx$.

45.4. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

45.5. $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$.

45.6. $\int \frac{x}{x^3+1}dx$.

45.7. $\int \frac{(x^2+x+1)dx}{(x+3)(x^2+4)} dx.$ **45.8.** $\int \frac{dx}{x^4-1}.$

45.9. $\int \frac{dx}{x^4+1}.$ **45.10.** $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Ratsional kasrning (ratsional funksiyaning) ta’rifini ayting ?
2. Qanday kasrga to‘g’ri (noto‘g’ri) kasr deyiladi ?
3. Ko‘phadning ildizlari deb nimaga aytiladi ?
4. Har qanday $Q_n(x)$ ko‘phadni ushbu $Q_n(x) = a_n(x-\alpha)(x-\beta)...(x-\nu)$ ko‘rinishda tasvirlash haqidagi (oily algebra kursidagi) teoremani ayting.
5. Qanday kasrlarga soda kasrlar deyiladi?
6. $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ to‘g’ri ratsional kasrni sodda kasrlar yig’indisi shaklida tasvirlang.

46-§. Ba’zi irrasional ifodalarni integrallash

Reja:

1. Kasr-chiziqli irratsionallarni integrallash.

2. $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ ko‘rinishdagi ifodalarni integrallash.

3. Mustaqil ishlash uchun misollar.

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Kasr-chiziqli irratsionallarni integrallash.

Kelgusida *R* orqali ratsional funksiyalarni belgilaymiz. Masalan, *R(u,v)* yozuv *u* va *v* o‘zgaruvchilarning ratsional funksiyasini bildiradi, ya’ni *R(u,v)* funksiya $R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ ko‘rinishda tasvirlanadi, bu yerda P va Q *u va v* o‘zgaruvchilarning ko‘phadi, bu ko‘phadlarning koeffisiyentlari esa *u* o‘zgaruvchilarning ko‘phadlaridir. Masalan, $R(u,v) = \frac{u^2-3uv+4v^2u^3-1}{u^4v+v-u^2v^2}$ funksiya *u* va *v* o‘zgaruvchilarning, $R(sinx, cosx) = \frac{sin^3x-3tgx+1}{cos^4x-2ctg^2x}$ esa *sinx* va *cosx* larning ratsional funksiyasidir.

Endi $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{dx+e}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{dx+e}\right)^{r_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{dx+e}\right)^{r_n}\right) dx$ ko‘rinishdagi integrallarni, ya’ni kasr-chiziqli irratsionallarni qanday hisoblanishini ko‘rib chiqamiz, bu yerda $r_k \in Q, k = 1,2, \dots, n,\ a, b, d, e \in \mathbb{R},\ ae - bd \neq 0.$

Bu xildagi integrallarda $\frac{ax+b}{dx+e} = t^p$ almashtirish olinadi va bu integral ratsional funksiyaning integraliga keltiriladi, bunda *p* soni $r_1, r_2, \dots, r_n$ ratsional sonlarning umumiy maxraji.

46.1-misol. $\int \frac{1+3\sqrt{x}+x^2}{5-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}}dx$ integral ratsional funksiyaning integraliga keltirilsin.

Yechish. Bu integralda $x = t^6$ almashtirish olsak, berilgan integral quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\int \frac{1+3\sqrt{x}+x^2}{5-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}}dx = 6\int \frac{t^5(1+3t^3+t^{12})}{5-t^4+t^5}dt.$$

Bu esa ratsional funksiyaning integralidir.

46.2-misol: Ushbu

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

integralni toping.

Yechish: Integralda $\sqrt{x} = t$ almashtirishni bajaramiz. Bunda $x = t^2, dx = 2tdt$ bo‘lib,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2+dt}{1+t} = 2\int \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2t - 2\ln(1+t) + 1$$
$$= 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + c$$

munosabatga kelamiz.

46.1-eslatma. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{dx+e}\right)^{r_1}\right)dx$ ko‘rinishdagi integrallarni hisoblashda $\frac{ax+b}{dx+e} = t^p$ almashtirish olinadi va bu integral ratsional funksiyaning integraliga keltiriladi, bunda p soni r_1 ratsional sonning maxraji.

2. $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ ko‘rinishdagi ifodalarni integrallash.

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\ a \neq 0,\ b^2-4ac \neq 0$ ko‘rinishdagi integrallar quyidagi Eyler almashtirishlari yordamida ratsional funksiyaning integraliga keltiriladi:

a) Agar a>0 bo‘lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$.
b) Agar c>0 bo‘lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$.
c) Agar $b^2-4ac > 0$ bo‘lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-x_1)$.

Bu yerda x_1 ax^2+bx+c kvadrat uchhadning ildizi.

46.3-misol: Ushbu $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$ integralni toping.

Yechish: Eyler almashtirishlarining biridan foydalanamiz. $\sqrt{1+x+x^2} = tx+1$ almashtirish olamiz. U holda quyidagiga kelamiz $1+x+x^2 = t^2x^2+2tx+1$. Bundan $x = \frac{2t-1}{1-t^2}$; $dx = 2\frac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}dt$ ni hosil qilamiz. Demak, $\sqrt{1+x+x^2} = \frac{1-t+t^2}{1-t^2}$, $t = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$ bo‘ladi.

Shunday qilib,

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx = \int \frac{-2tdt}{1-t^2} = ln|1-t^2| + C =$$

$$= ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\right| + C$$

tenglikni olamiz.

3. Mustaqil ishlash uchun misollar.

Quyidagi irratsional ifodalar qatnashgan aniqmas integrallarni hisoblang.

46.1. $\int \frac{x+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx.$ **46.2.** $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx.$ **46.3.** $\int \frac{(2x-3)^{1/2}}{(2x-3)^{1/3}}dx.$

46.4. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx.$ **46.5.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$ **46.6.** $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx.$

46.7. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$ **46.8.** $\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$

46.9. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}.$ **46.10.** $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx.$

Eyler almashtirishlaridan foydalanib, quyidagi aniqmas integrallarni hisoblang.

46.11. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{-x^2-2x+1}}.$ **46.12.** $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$

46.13. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}.$ **46.14.** $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{(-x^2+7x-10)^3}}.$

46.15. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx.$ **46.16.** $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx.$

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{dx+e}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{dx+e}\right)^{r_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{dx+e}\right)^{r_n}\right)dx$ ko‘rinishdagi integrallar qanday topiladi?
2. Eyler almashtirishlarini ayting.

47-§. Binomial differensiallarni integrallash

Reja:

1. Binomial differensiallarni integrallash.
2. Mustaqil yechish uchun misollar.
3. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Binomial differensiallarni integrallash.

$x^m(a+bx^n)^p dx$ shakldagi binomial defferensiallarni integrallaymiz, bunda a,b - haqiqiy sonlar, m,n,p - lar esa ratsional sonlar. Uning integrali

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx \qquad (47.1)$$

quyidagi uchta holda rasional funksiyani integrallashga keladi:

1) Agar p - butun son bo‘lsa, $x = t^k$ almashtirish olinadi, bu yerda k-m,n kasrlarning umumiy maxraji.

2) Agar $\frac{m+1}{n}$- butun son bo‘lsa, $a + bx^n = t^s$ almashtirish olinadi, bu yerda s soni p kasrning maxraji.

3) Agar $\frac{m+1}{n}+p$ - butun son bo‘lsa, $ax^{-n} + b = t^s$ almashtirish olinadi, bu yerda s soni p kasrning maxraji.

47.1-misol: Ushbu

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$$

integralni toping.

Yechish: Integral ostidagi funksiyani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2} = x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}$$

Bunda p=-2 butun son va $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$ bo‘lganligi uchun berilgan integralda $x = t^6$ almashtirishni bajaramiz. Bunda $x = t^6, dx = 6t^5dt$ bo‘lib,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx = \int \frac{t^3}{(1+t^2)^2}6t^5dt = 6\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2}dt$$

$$= 6\int \left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right)dt$$

$$= 6\frac{t^5}{5} - 4t^3 + 18t - 24\int \frac{dt}{1+t^2} - 6\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= 6\frac{t^5}{5} - 4t^3 + 18t - 24arctgt$$

$$- 6\left(\frac{t}{2(1+t^2)^2} + \frac{1}{2}arctgt\right)$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 21arctgt - \frac{3t}{1+t^2} + c\,,$$

munosabatni olamiz.

47.2-misol: Ushbu

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

integralni toping.

Yechish: Integral ostidagi ifodani

$$\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} = x^5(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Bunda $P = -\frac{1}{2}, m = 5, n = 2$ bo‘lganligi uchun, integralda $1 - x^2 = t^2$ almashtirishni bajaramiz. Bunda $x^2 = 1 - t^2, x = \sqrt{1-t^2}, dx = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}dt$ bo‘lib,

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{(1-t^2)^{\frac{5}{2}} \cdot (-t)}{t(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}dt = -\int (1-t^2)^2\, dt$$

$$= -\int (1 - 2t^2 + t^4)dt = -\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^3}{3} - t + c$$

$$= -\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + c$$

bo‘ladi.

47.3-misol: Ushbu

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$$

integralni toping.

Yechish: $m = -3, n = -1, p = -\frac{1}{5}$ bo‘lganligi uchun, integralda $\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} = t$ almashtirishni bajaramiz. Bunda $1 + \frac{1}{x} = t^5, x = \frac{1}{t^5-1}, dx = -\frac{5t^4}{(t^5-1)^2}dt$ bo‘lib,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}} = \int (t^5-1)^3\frac{1}{t}\cdot\frac{-5t^4}{(t^5-1)^2}dt = -5\int (t^5-1)t^3dt$$

$$= -5\int (t^8 - t^3)dt = -5\frac{t^9}{9} + 5\frac{t^4}{4} + c.$$

bo‘ladi. Bunda $t = \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$.

2. Mustaqil yechish uchun misollar.

Binomial differensiallarni integrallash usulidan foydalanib, quyidagi aniqmas integrallarni hisoblang.

47.1. $\int \sqrt{x^3+x^4}\, dx.$ **47.2.** $\int x^{-2/3}\left(1+x^{2/3}\right)^{-1}dx.$ **47.3.** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

47.4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$. **47.5.** $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **47.6.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

47.7. $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$. **47.8.** $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$. **47.9.** $\int \sqrt[3]{3x-x^3}dx$.

47.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

3. O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. $x^m\left(a+bx^n\right)^P dx$ (a,b -haqiqiy sonlar, $m,n,p-$ lar esa ratsional sonlar) ko'rinishdagi ifodalarni ratsionallashtirishda nechta hol bo'lishi mumkin.

2. P butun son bo'lganda (47.1) integral ostidagi ifoda qanday almashtirish bilan ratsionallashtiriladi.

3. $\frac{m+1}{n}$ butun son bo'lganda (47.1) integral ostidagi ifoda qanday almashtirish yordamida ratsionallashtiriladi.

4. $\frac{m+1}{n}+P$ butun son bo'lganda (47.1) integral ostidagi ifoda qanday almashtirish yordamida ratsionallashtiriladi.

48-§. Trigonometrik funksiyalarni integrallash

Reja:

1.*R(sinx, cosx)* ko'rinishdagi trigonometrik ifodalarni integrallash.

2.$sin^m x cos^n x$ $(m \in Z, n \in Z)$ ko'rinishdagi ifodalarni integrallash.

3. Mustaqil yechish uchun misollar.

4. O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. *R(sinx, cosx)* ko'rinishdagi trigonometrik ifodalarni integrallash.

R orqali rasional funksiyani belgilaymiz. *R(sinx,cosx)* – *sinx* va *cosx* larning rasional funksiyasi. Bu ko'rinishdagi ifodalar

$$t = tg\frac{x}{2} \quad \left(-\pi < x < \pi\right) \tag{48.1}$$

universial almashtirish natijasida t ga nisbatan rasional funksiyaning integralini hisoblashga keltiriladi. Haqiqatdan ham, quyidagi

$$Sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$Cosx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t}{1+t^2}$$

$$x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

munosabatlardan foydalansak, u holda *R(sinx,cosx)* ifodaning integrali

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

ko‘rinishga keladi. Bunda $R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}$ funksiya t o‘zgaruvchining ratsional funksiyasi va ratsional funksiyaning integralini hisoblasak R(sinx,cosx) ifodaning integralini topgan bo‘lamiz.

48.1-misol. $\int \frac{dx}{sinx}$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu integralni $\int \frac{dx}{sinx}=\int \frac{\left(1+tg^2\frac{x}{2}\right)dx}{2tg\frac{x}{2}}$ ko‘rinishda yozib olamiz va

$$t=tg\frac{x}{2}\ \ (-\pi<x<\pi)$$

almashtirishni qo‘llaymiz. U holda *dx* ni topish uchun $t=tg\frac{x}{2}$ tenglikning ikki tomonini differensiallaymiz:

$$dt=d\left(tg\frac{x}{2}\right)=\left(tg\frac{x}{2}\right)'dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{cos^2\frac{x}{2}}dx.$$

Bu yerdan $dx=2cos^2\frac{x}{2}dt=\frac{2}{1+tg^2\frac{x}{2}}dt=\frac{2}{1+t^2}dt$ tenglikka ega bo‘lamiz.

Shunday qilib, berilgan integralni quyidagicha hisoblaymiz:

$$\int\frac{dx}{sinx}=\int\frac{(1+t^2)}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=lnt+C=ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

R(sinx,cosx) ifodaning integrali quyidagi almashtirishlar yordamida ham hisoblanishi mumkin:

a) Agar $R(-sinx,cosx)=-R(sinx,cosx)$ bo‘lsa, u holda $t=cosx, x\in(0;\pi)$ almashtirish olinadi.

b) Agar $R(sinx,-cosx)=-R(sinx,cosx)$ bo‘lsa, u holda $t=sinx, x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ almashtirish olinadi.

c) Agar $R(-sinx,-cosx)=R(sinx,cosx)$ bo‘lsa, u holda $t=tgx, x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ almashtirish olinadi.

48.2-misol. $\int sin^5x\,cos^4xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bunda

$$R(sinx,cosx)=sin^5x\cdot cos^4x,\ \ R(-sinx,cosx)=-R(sinx,cosx)$$

bo‘lganligi uchun *t=cosx* almashtirishni bajaramiz. U holda quyidagini hosil qilamiz:

$$\int sin^5x\,cos^4xdx=-\int(1-cos^2x)^2cos^4xd(cosx)=-\int(1-t^2)^2t^4dt=$$

$$= -\int (t^4 - 2t^6 + t^8)dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{2t^7}{7} - \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= -\frac{cos^5x}{5} + \frac{2cos^7x}{7} - \frac{cos^9x}{9} + C.$$

2. $sin^m x cos^n x$ $(m \in Z, n \in Z)$ ko‘rinishdagi ifodalarni integrallash.

Bu xildagi ifodalarni integrallashda quyidagi qoidalardan foydalanamiz:

a) Agar $m+n$ juft son bo‘lsa, t=tgx yoki t=cosx almashtirish olinadi;

b) Agar $m+n$ toq son bo‘lsa, t=sinx yoki t=cosx almashtirish olinadi.

48.3-misol. $\int sin^{-1}x\, cos^{-3}x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bunda $m+n=-4$. Berilgan integralni quyidagicha yozamiz:

$$\int \frac{dx}{sinx cos^3x} = \int \frac{sinx}{cos^3x}dx + \int \frac{dx}{sinx cosx} = -\int \frac{d(cosx)}{cos^3x}dx + \int \frac{d(tgx)}{tgx}.$$

Endi birinchi integralda t=cosx, ikkinchi integralda t=tgx almashtirish olsak,

$$\int \frac{dx}{sinx cos^3x} == -\int \frac{dt}{t^3} + \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2cos^2x} + ln|tgx| + C.$$

3. Mustaqil yechish uchun misollar.

Trigonometrik funksiyalarni integrallash usulidan foydalanib, quyidagi aniqmas integralni hisoblang.

48.1. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$. **48.2.** $\int \frac{cos^3x}{sin^2x}dx.$ **48.3.** $\int \frac{sin^2x}{cos^6x}dx.$

48.4. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx$. **48.5.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. **48.6.** $\int \frac{sh^2x}{chx}dx.$

48.7. $\int tg^3x dx.$ **48.8.** $\int ctg^4x dx.$ **48.9.** $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$.

48.10. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}dx.$ **48.11.** $\int \frac{dx}{2sinx+3cosx+3}.$ **48.12.** $\int \frac{1}{cos^4x sinx}dx.$

4. O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Ushbu $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko‘rinishdagi integral ostidagi funksiya umumiy holda qanday almashtirish orqali ratsionallashtiriladi, bunda $R(\sin x, \cos x)$ - $sinx$ va $cosx$ larning ratsional funksiyasi.

2. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ bo‘lganda, qanday almashtirish orqali integral ostidagi ifoda ratsionallashtiriladi.

3. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ bo‘lganda, qanday almashtirish orqali integral ostidagi ifoda ratsionallashtiriladi.

4. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ bo‘lganda, qanday almashtirish orqali integral ostidagi ifoda ratsionallashadi.

VII bobni takrorlash uchun test savollari

1. Aniqmas integralni toping: $\int x\sqrt{x-5}dx.$

a) $\frac{2}{5}\sqrt{(x\text{-}5)^5}+\frac{10}{3}\sqrt{(x\text{-}5)^3}+C$ b) $\frac{3}{5}\sqrt{(x\text{-}5)^3}+\frac{5}{3}\sqrt{(x\text{-}5)^5}+C$

c) $\frac{4}{3}\sqrt{x\text{-}5}+\frac{5}{3}\sqrt{(x\text{-}5)^3}+C$ d) $\sqrt{(x\text{-}5)^5}+\sqrt{(x\text{-}5)^3}+C$

2. Aniqmas integralni toping: $\int \frac{dx}{1+e^x}.$

a) $x-\ln(1+e^x)+C$ b) $x^2-\ln(1+e^x)+C$

c) $x+\ln(1+e^x)+C$ d) $x+\ln(1-e^x)+C$

3. Aniqmas integralni toping: $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx.$

a) $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$ b) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$

c) $\frac{4}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$ d) $\frac{2}{3}\sqrt{x^2+1}+C$

4. Aniqmas integralni toping: $\int \frac{sinx}{\sqrt{cosx}}dx.$

a) $\sqrt{\cos x}+C$ b) $-2\sqrt{\cos x}+C$

c) $2\sqrt{\cos x}+C$ d) $-2\sqrt{\sin x}+C$

5. Aniqmas integralni toping: $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}dx.$

a) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3+3x+1}+C$ b) $\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}+C$

c) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}+C$ d) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}+C$

6. Aniqmas integralni toping: $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx.$

a) $\frac{5}{13}\sqrt[5]{(x^3+2)^4}+C$ b) $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+C$

c) $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^4}+C$ d) $\frac{5}{13}\sqrt[5]{(x^3+2)^3}+C$

7. Aniqmas integralni toping: $\int \frac{sinx}{cos^2x}dx.$

a) $\frac{1}{\cos x}+C$ b) $-\frac{1}{\cos x}+C$ c) $\frac{1}{\cos^2 x}+C$ d) $-\frac{1}{\cos^2 x}+C$

8. Aniqmas integralni toping: $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx.$

a) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+C$ b) $\frac{1}{6}\ln\left|x^3+1\right|+C$

c) $\frac{1}{3}\ln\left|x^2+1\right|+C$ d) $\frac{1}{4}\ln\left|x^6+1\right|+C$

9. Aniqmas integralni toping: $\int \frac{dx}{xlnx}$.

a) $\ln\left|\ln x\right|+C$ b) $\frac{1}{2}\ln\left|x\ln x\right|+C$ c) $\ln\left|\ln x^2\right|+C$ d) $\frac{1}{2}\ln\left|x\right|+C$

10. Aniqmas integralni toping: $\int lnxdx$.

a) $2x\ln x-2x$ b) $x^2\ln x-x^2$ c) $x\ln x+x$ d) $x\ln x-x$

11. Aniqmas integralni toping: $\int \frac{lntgx}{sinxcosx}dx$.

a) $-\frac{1}{2}\ln^2 tgx+\mathrm{C}$ b) $\frac{1}{2}\ln^2 tgx+\mathrm{C}$ c) $\frac{1}{3}\ln^3 tgx+\mathrm{C}$ d) $\frac{1}{2}\ln^2\sqrt{tgx}+\mathrm{C}$

12. Aniqmas integralni toping: $\int \frac{1}{e^x(3+e^{-x})}dx$.

a) $-\ln\left(3+e^x\right)+\mathrm{C}$ b) $\ln\left(3+e^{-x}\right)+\mathrm{C}$

c) $-\ln\left(3-e^{-x}\right)+\mathrm{C}$ d) $-\ln\left(3+e^{-x}\right)+\mathrm{C}$

13. Aniqmas integralni toping: $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$.

a) $\sqrt{4+x^2}$ b) $\frac{\sqrt{4+x^2}\left(x^2+2\right)}{24x^3}+\mathrm{C}$

c) $\frac{\sqrt{2+x^2}\left(x^2-2\right)}{24x^3}+\mathrm{C}$ d) $-\frac{\sqrt{4+x^2}\left(x^2-2\right)}{24x^3}+\mathrm{C}$

14. Aniqmas integralni toping: $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+4}}$.

a) $-\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+4}-\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+4}+C\right)$

b) $\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+4}+\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+4}+C\right)$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{x^4+4}$ d) $-\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+4}+\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+4}+C\right)$

15. Aniqmas integralni toping: $\int \frac{dx}{x^6+x^4}$.

a) $arctgx+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$ b) $arctgx-\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$

c) $arctgx-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+C$ d) $arctgx+\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+C$

16. Faqat to‘qri formulalar yozilgan javobni belgilang:

1) $d\int f(x)dx=f(x)dx$, 2) $d\int f(x)dx=f(x)$, $\int dF(x)=F(x)+c$ 4) $\int 0\cdot dx=C$,

5) $\int dx = x + c$, 6) $\int x^{\alpha} dx = \alpha x^{\alpha-1} + c$, 7) $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, 8) $\int a^x dx = a^x \cdot \ln a + c$,

9) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, 10) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, 11) $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + c$,

12) $\int u dv = u \cdot v - \int v du$, 13) $\int u dv = uv + \int v du$

a) 1,3,4,5,7,9,10,12 b) 1,3,4,5,7,11,13 c) 2,6,8,11,13 d) 3,4,9,13.

17. $\int \frac{2x+3}{3x+2} dx$ integralni hisoblang.

a) $\frac{3}{2}x - \frac{5}{9}\ln\left|x - \frac{2}{3}\right|$ b) $\frac{2}{3}x - \frac{5}{9}\ln\left|x + \frac{2}{3}\right|$ c) $\frac{3}{2}x + \frac{9}{5}\ln\left|x + \frac{2}{3}\right|$ d) $\frac{2}{3}x + \frac{5}{9}\ln\left|x + \frac{2}{3}\right|$

18. $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} =$ $\left(D = b^2 - 4ac, \quad a \neq 0\right)$ integral uchun qaysi javob to‘g’ri:

1) *D>0* bo‘lsa logarifmik funksiya
2) *D>0* bo‘lsa rasional funksiya
3) *D<0, a<0* bo‘lsa logarifmik funksiya
4) *D<0, a>0* bo‘lsa *arctg* funksiyasi
5) *D<0* bo‘lsa, aniqmas integral mavjud emas.

a) 1,2,3,4 b) 2,3,4,5 c) 1,2,3,5 d) 1,2,4

19. $\int \frac{xdx}{(x-2)(x+3)} = ?$

a) $\frac{1}{5} ln|x-2|^2|x+3|^3$ b) $arctg\frac{x-2}{3}$

c) $\ln|x-2| \cdot |x+3|$ d) $\frac{1}{2}\ln|x-2|^2 \cdot |x+3|^3$

20. Aniqmas integralni toping: $\int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx$

a) $\ln x - arctgx + C$ b) $\ln x + arctgx + C$

c) $2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$ d) $x + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

21. Aniqmas integralni toping: $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

a) $x + arctgx + C$ b) $x - arctgx + C$

c) $x - \arcsin x + C$ d) $x + arcctgx + C$

22. Aniqmas integralni toping: $\int \frac{1}{1-cosx} dx$

a) $-ctg\frac{x}{2} + C$ b) $2ctg\frac{x}{2} + C$ c) $-tg\frac{x}{2} + C$ d) $-2ctg\frac{x}{2} + C$

23. Aniqmas integralni toping: $\int \frac{x}{x^4+4} dx$

a) $\frac{1}{4}arctg\frac{x^2}{2}+C$ b) $\frac{1}{2}arctg\frac{x^2}{2}+C$ c) $\frac{1}{8}arctg\frac{x}{2}+C$ d) $2arctg\frac{x^2}{2}+C$

24. Aniqmas integralni toping: $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

a) $-arcsin\frac{1}{|x|}+C$ b) $\arcsin\frac{1}{|x|}+C$

c) $-2arcsin\frac{1}{|x|}+C$ d) $\arcsin\frac{1}{x}+C$

25. Aniqmas integralni toping: $\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

a) $2arcsin\sqrt{x}+C$ b) $\arcsin\sqrt{x}+C$

c) $2\arccos\sqrt{x}+C$ d) $-2arcsin\sqrt{x}+C$

26. Faqat noto‘qri formula yozilgan javobni belgilang.

a) $d\int f(x)dx=f(x)$ $b)$ $\int 0\cdot dx=C$

c) $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$ d) $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c$

27. $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(a\neq 0,\ D=b^2-4ac)$ bo‘lsa, to’g’ri javobni belgilang:

a) *D>0* bo‘lsa, logarifmik funksiya
b) *a<0* bo‘lsa, arksinus funksiya
c) *a>0* bo‘lsa, logarifmik funksiya
d) *D=0* bo‘lsa, logarifmik funksiya

28. $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ $(a\neq 0,\ D=b^2-4ac)$ integral uchun qaysi javob to‘g’ri:

a) *D>0* bo‘lsa, logarifmik funksiya
b) *D>0* bo‘lsa, rasional funksiya
c) *D<0*, *a<0* bo‘lsa, logarifmik funksiya
d) *D<0*, *a>0* bo‘lsa, *arctg* funksiyasi

29. Aniqmas integralni toping: $\int\left(\frac{lnx}{x}\right)^2dx$

a) $-\frac{1}{x}(ln^2x+2lnx+2)$ b) $\frac{1}{x}(ln^2x+2lnx+2)$

c) $2x(lnx-1)$ d) $2x(lnx+1)$

30. Aniqmas integralni toping: $\int xcosx\,dx$

a) $xsinx+cosx$ b) $xsinx-cosx$

c) $2xsinx+cosx$ d) $2xsinx-cosx$

Mustaqil yechish uchun berilgan misollarning javoblari

9-§.

9.6. 252. **9.7.** $C_{100}^{65} \cdot 7^5 \cdot 13^5$. **9.9.** 100^{101}.
9.10. a) $2^{n-1} \cdot n$. b) $2^{n-1} \cdot (n+2)$.

16-§.

16.7. $x = 2n+1, n \in Z.$ $x = \frac{18k}{7}, k \in Z.$ **16.8.** $x = k\pi, k \in Z.$

16.9. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$ $x = \pi k, k \in Z.$ **16.10.** $x = \frac{s\pi}{25}, s \neq 25m, m \in Z.$

17-§.

17.1. **1)** -1. **2)** $(-\sqrt{5}; -2] \cup [2; \sqrt{5})$. **3)** 0;1. **4)** $[0; \sqrt{2})$ **5)** 2;3. **6)** [0;1).
7) $[\frac{2}{3}; 1)$ **8)** $\left[\frac{1}{n}; \frac{1}{n-1}\right]$, $n \in N,\ n \geq 2$.

20-§.

20.8. **1.** 1. **2.** 1,5. **3.** 0,4. **4.** 0. **5.** 0,75. **6.** 2. **7.** 0. **8.** 0. **9.** 0.
10. -8. **11.** $\frac{1}{12}$. **12.** 0. **20.9.** **1.** 0. **2.** 0,25. **3.** $\frac{1}{18}$. **4.** 0,5. **5.** $\frac{1}{3}$.
20.10. **1.** $\frac{1}{3}$. **2.** $\frac{1}{3}$. **3.** $\frac{1}{4}$. **4.** $a > 1$ da 1; $a = 1$ da 0,5; $-1 < a < 1$ da 0; $a \leq 1$ da limit mavjud emas. **5.** 0. **6.** 0. **7.** $\frac{1}{3}$. **8.** $\frac{1-b}{1-a}$. **9.** $\frac{1}{2}$.
10. 0,5. **11.** $\frac{1}{3}$. **12.** $\frac{4}{3}$. **13.** 3. **14.** 2.

21-§.

21.2. **1.** e^2. **2.** e^{-1}. **3.** e^{-2}. **4.** e. **5.** $e^{-5,5}$. **6.** 0. **7.** 1 . **8.** $e^{-0,8}$. **9.** 0.
10. e^{-2}.

24-§.

24.1. **1.** 1. **2.** $\frac{2}{3}$. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** 6. **5.** 10. **6.** $\frac{1}{2}nm(n-m)$. **7.** 5^{-5}. **8.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$.
9. $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$. **10.** $-\frac{1}{2}$. **11.** $-\frac{1}{2}$. **12.** 1. **13.** $\frac{1}{4}$. **14.** $\frac{1}{3}$. **15.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$. **16.** $\frac{n(n+1)}{2}$.
17. $2\frac{1}{24}$. **18.** $\frac{m}{n}$. **19.** $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$. **20.** $\frac{n(n+1)}{2}$. **21.** $\frac{m-n}{2}$. **22.** $x + \frac{a}{2}$. **23.** $x^2 + ax + \frac{a^2}{3}$.
24.2. **1.** 1. **2.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **3.** $\frac{4}{3}$. **4.** -2. **5.** $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. **6.** $-\frac{1}{16}$. **7.** $\frac{1}{144}$. **8.** $\frac{1}{4}$. **9.** $\frac{12}{5}$. **10.** $\frac{1}{n}$.
11. -2. **12.** $\frac{1}{4}$. **13.** $\frac{2}{27}$. **14.** $\frac{3}{2}$. **15.** $4\frac{4}{27}$. **16.** $\frac{7}{36}$. **17.** $-\frac{1}{2}$. **18.** $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$. **19.** $\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$.

26-§.

26.1. 20. **26.2.** 1,5. **26.3.** 4. **26.4.** $\frac{a}{b}$. **26.5.** $\frac{8}{3}$. **26.6.** *cosa*. **26.7.** *0,5sin2a.* **26.8.** $\frac{3}{8}$. **26.9.** -6. **26.10.** $\frac{ln8}{ln5}$. **26.11.** $\frac{1}{6}$. **26.12.** $\frac{2}{3}$. **26.13.** $-\frac{1}{20\sqrt{5}}$. **26.14.** 2,5. **26.15.** 0.. **26.17.** 1. **26.18.** $\frac{m-n}{2}$. **26.19**. $e^{0,4}$. **26.20**. e^{6}. **26.21.** e^{-2}.
26.22. 0,25.

27-§.

27.2. **1.** a=2. **2.** a=4. **3.** a=12. **4.** a=1. **5.** a=0. **6.** $a=\beta$.
27.3. **1.** $x=\pm 2$ – ikkinchi tur uzilish nuqtalari. **2.** $x=0, x=1$ – birinchi tur uzilish nuqtalari. **3.** $x=\pm 2$ – ikkinchi tur uzilish nuqtalari. **4.** $x=0$ – ikkinchi tur uzilish nuqtasi. **5.** $x=2, x=1$ – ikkinchi tur uzilish nuqtalari.
6. $x=0, x=1$ – yo'qotilishi mumkin bo'lgan uzilish nuqtalari.
7. $x=0$ – ikkinchi tur uzilish nuqtasi. **8.** $x=0, x=1$ – ikkinchi tur uzilish nuqtalari. **9.** $x=0$ – yo'qotilishi mumkin bo'lgan uzilish nuqtasi; $x=\pi k$ $(k\in Z, k\neq 0)$ lar ikkinchi tur uzilish nuqtalari. **10.** $x=0$ – ikkinchi tur uzilish nuqtasi.

31-§.

31.2. Ha. **31.3.** Yo'q. **31.4.** **1.** Tekis uzluksiz. **2.** Tekis uzluksiz. **3.** Tekis uzluksiz emas. **4.** Tekis uzluksiz emas. **5.** Tekis uzluksiz emas. **6.** Tekis uzluksiz emas. **7.** Tekis uzluksiz. **8.** Tekis uzluksiz. **9.** Tekis uzluksiz.
10. Tekis uzluksiz.

34-§.

34.1. 4; 0. **34.2.** **a)** $2(x+1)^2(7x^2-51x+92)$. **b)** $40x(2x-3)^{11}$.
c) $-12x^{-4}-20x^{-5}$. **d)** $\frac{(1-x)^2(x-7)}{(1+x)^5}$. **e)** $\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ $(|x|\neq 1)$.
f) $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ $(x>0)$. **g)** $-9x^2cos^2x^3sinx^3$.
e) -$sin2xcos(cos2x)$. **m)** $\frac{-1,5\sqrt{ctgx}}{sin^2x}$. **n)** $\frac{2}{xlnx}$. **o)** $\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$. **p)** $\frac{1}{sinx}$ $(0<x-2k\pi<\pi,\ k\in Z)$. **q)** $1+x^x(1+lnx)+x^xx^{x^x}\left(\frac{1}{x}+lnx+ln^2x\right)$.
r) $(sinx)^{cosx}cos2x$.
34.3. **1.** $\frac{1}{12}$. **2.** -9000. **3.** 2. **4.** 2. **5.** $a^2-ab-ac+bc$. **6.** $\frac{1}{a-b}$. **7.** $ab(a+b+2)$. **8.** -1985! **9.** 0. **10.** $-\frac{2(\pi+2)}{\pi^2}$.
34.4. **1.** $x'_y=\frac{x}{x+1}$. **2.** $x'_y=\frac{1}{1-x+y}$. **3.** $x'_y=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. **4.** $x'_y=\frac{x}{1-y^2}$.
5. $x'_i=\frac{x^3}{2y^3}$ $(i=1,2)$.

34.5. **1.** $(sinx)^{1+cosx}(ctg^2x - lnsinx) - (cosx)^{1+sinx}(tg^2x - lncosx)$, $(0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2},\ k \in Z)$. **2.** $\frac{2sinx(cosxsinx^2 - xsinx)}{sin^2x^2}$. **3.** $cos(lnx)$. **4.** $\frac{1}{ch2x}$.
34.6. **1.** $\frac{dx}{a^2+x^2}$. **2.** $\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}$. **3.** $\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$. **4.** $\frac{sgna}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **34.7.** **a)** $y'_x = -1$, $(0 < x < 1)$. **b)** $y'_x = -\frac{b}{a}ctgt\ \ (0 < |t| < \pi)$. **c)** $y'_x = ctg\frac{t}{2}\ \ (t \neq 2k\pi,\ k \in Z)$. **d)** $y'_x = sgnt\ \ (0 < |t| < +\infty)$.

35-§.

35.1. **1**. 360. **2.** $\frac{5^4}{4^5}$. **3**. 0. **4**. -0,5. **5**. $-\frac{1}{16}e^2$. **6**. $\frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$, $(x < 1)$.
35.2. **1**. $\frac{arcsinx + x\sqrt{1-x^2}}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}$. **2**. $-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$. **3**. $\frac{42}{125}x^{-\frac{12}{5}}$. **4**. $x^2(60lnx + 47)$.
5. $2^{50}\left(-x^2sin2x + 50xcos2x + \frac{1225}{2}sin2x\right)$. **6**. $e^x\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\frac{A_{10}^i}{x^{i+1}}$, $A_{10}^i = 10 \cdot 9 \cdots (k-i)$, $A_{10}^i = 1$. **7**. $-2^8sin2x - 2^{18}sin4x + 2^8 3^{10}sin6x$.
8. $-\frac{60}{x^6} + \left(\frac{144}{x^5} - \frac{160}{x^3} + \frac{96}{x}\right)sin2x + \left(\frac{60}{x^6} - \frac{180}{x^4} + \frac{120}{x^2} + 32lnx\right)cos2x$.
9. $2^{20}e^{2x}(x^2 + 20x + 95)$. **10**. $\frac{(-1)^{n-1}n!\gamma^{n-1}(\alpha\delta - \beta\gamma)}{(\gamma x + \delta)^{n+1}}$.
35.3. **1**. $-\frac{15}{8x^3\sqrt{x}}dx^3\ \ (x > 0)$. **2**. $-1024(xcos2x + 5sin2x)dx^{10}$.
3. $e^x\left(lnx + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4}\right)dx^4$. **4**. $8sinxshxdx^6$. **5**. $e^x\left(x^n + n^2x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-1} + \cdots + n!\right)dx^n$. **6**. $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(lnx - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)dx^n\ \ (x > 0)$.

37-§.

37.1. **1**. $\sum_{k=0}^{n}\frac{e^2}{2^k k!}x^k + o(x^n)$. **2**. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{2^k k!}x^k + o(x^n)$.
3. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k}{3^{k+1}}x^k + o(x^n)$. **4**. $ln5 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{4}{5}\right)^k x^k + o(x^n)$.
5. $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k-1}}{k!}(k+10)x^k + o(x^n)$. **6**. $ln\frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^{k-1}}{3^k}\right)x^k + o(x^n)$. **7**. $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$.
37.2. **1**. $\frac{1}{24}$. **2**. $-\frac{1}{2}$. **3**. $\frac{1}{2}$. **4**. -2. **5**. -1. **6**. $\frac{8}{15}$.
37.3. **1**. $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$; -48. **2**. $1 + 60x + 1950x^2 + o(x^2)$.
3. $a + \frac{1}{ma^{m-1}}x - \frac{(m-1)}{2m^2a^{2m-1}}x^2 + o(x^2)$. **4**. $1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$.

38-§.

38.1. **1**. 1. **2**. $\frac{4}{7}$. **3**. $3a$. **4**. $\frac{4}{9}$. **5**. 1. **6**. 1. **7**. -1. **8**. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$.
9. $lna - 1$. **10**. 2. **11**. 1. **12**. 1.

39-§.

39.1. **1**. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ oraliqda kamayadi, $(-1; 1)$ oraliqda o'sadi.

2. $(100;+\infty)$ oraliqda kamayadi, $(0;100)$ oraliqda o'sadi. **3**. Funksiya o'suvchi. **4**. $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ oraliqda kamayadi, $(-1;0)\cup(1;+\infty)$ oraliqda o'sadi. **5**. $(n;+\infty)$ oraliqda kamayadi, $(0;n)$ oraliqda o'sadi.
6. $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ oraliqda o'sadi, $(-1;1)$ oraliqda kamayadi.
8. Funksiya o'suvchi.
39.2. **1**. $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $(k\in Z)$ oraliqda o'sadi, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $(k\in Z)$ oraliqda kamayadi. **2**. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{11}{8};2\right)\cup(2;+\infty)$ oraliqda o'sadi, $\left(-\frac{1}{2};\frac{11}{8}\right)$ oraliqda kamayadi. **3**. $\left(-\infty;\frac{3a}{2}\right)$ oraliqda o'sadi, $\left(\frac{3a}{2};+\infty\right)$ oraliqda kamayadi. **4**. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)\cup(2;)$ oraliqda o'sadi. **5**. $(-\infty;0)$ oraliqda o'sadi, $(0;+\infty)$ oraliqda kamayadi.
6. $\left(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right)$ oraliqda o'sadi, $\left(0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right)$ oraliqda kamayadi.
7. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ oraliqda o'sadi, $\left(-\sqrt{3};-1\right)\cup(-1;1)\cup\left(1;\sqrt{3}\right)$ oraliqda kamayadi. **8**. $(-\infty;-50)\cup(-50;0)\cup(0;25)$ oraliqda o'sadi, $(25;+\infty)$ oraliqda kamayadi.

40-§.

40.1. $x=0{,}25$ maksimum nuqtasi, $y=2{,}25$ maksimumi. **40.2.** Ekstremumi yo'q. **40.3.** -3 va 2 minimum nuqtalari, -40,25 va -9 minimumlari, 0 maksimum nuqtasi, 7 maksimumi. **40.4.** $x=\pm\sqrt{2}$ maksimum nuqtalari, $y=4e^{-2}$ maksimumi, $x=0$ minimum nuqtasi, $y=0$ minimumi. **40.5.** $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$ lar minimum nuqtalari, $y=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ minimumi, $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$ lar maksimum nuqtalari, $y=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ maksimumi. **40.6.** $x=0$ minimum nuqtasi, $y=0$ minimumi, $x=-4$ maksimum nuqtasi, $y=-\frac{256}{27}$ maksimumi. **40.7.** $x=2\pi k,\ x=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$ lar maksimum nuqtalari, $y=1$ maksimumi, $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$ lar maksimum nuqtalari, $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ maksimumi, $x=\pi+2\pi k$ va $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$ lar minimum nuqtalari, $y=-1$ minimumi, $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$ lar minimum nuqtalari, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ minimumi. **40.8.** $x=1$ minimum nuqtasi, $y=ln2-\frac{\pi}{2}$ minimumi.
40.9. 12; -4. **40.10.** $y=5-2\sqrt{5};\ -1.$ **40.11.** $\frac{\pi}{2}-1;1-\frac{\pi}{2}.$
40.12. $\frac{3\sqrt{3}}{2};\ -1.$ **40.13.** $e-2;2-2ln2.$

42-§.

42.1. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ oraliqda yuqoriga qavariq, $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ oraliqda pastga qavariq, $x=\pm\frac{1}{2}$ egilish nuqtalari. **42.2.** $(-\infty;0)$ oraliqda yuqoriga qavariq, $(0;+\infty)$ oraliqda pastga qavariq, $x=0$ egilish nuqtasi.
42.3. $(2\pi k;\pi+2\pi k)$ oraliqlarda yuqoriga qavariq, $(\pi+2\pi k;2\pi+2\pi k)$ oraliqlarda pastga qavariq, $x=\pi k,\ k\in Z$ egilish nuqtalari. **42.4.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ oraliqda yuqoriga qavariq, $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ oraliqda pastga qavariq, $x=\frac{1}{2}$ egilish nuqtasi. **42.5.** Pastga qavariq. **42.6.** $(-\infty;1)$ oraliqda yuqoriga qavariq, $(1;+\infty)$ oraliqda pastga qavariq, $x=1$ egilish nuqtasi. **42.7.** $x=\pm1$.
42.8. $x=2, x=4$. **42.9.** $x=e^{8/3}$. **42.10.** $x=\frac{1}{e\sqrt{e}}$.

43-§.

43.1. $27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C$. **43.2.** $\frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7+C$. **43.3.** $\frac{1}{6}x^6-\frac{12}{5}x^5+9x^4+C$. **43.4.** $x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C$.
43.5. $x-\frac{1}{x}-2ln|x|+C$. **43.6.** $aln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}+C$. **43.7.** $\frac{3}{8}x\sqrt[5]{x^3}-3\sqrt[3]{x^2}+C$. **43.8.** $1\frac{2}{15}x^{\frac{15}{17}}+2\frac{1}{22}x^{\frac{22}{15}}+1{,}25x^{\frac{4}{5}}+C$. **439.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)+C$. **43.10.** $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C$. **43.11.** $2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{27x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}+C$.
43.12. $ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C$. **43.13.** $x-arctgx+C$. **43.14.** $-x+\frac{1}{2}ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$.
43.15. $x+2ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

44-§.

44.1. $-\sqrt{1-x^2}+C$. **44.2.** $\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C$. **44.3.** $-\frac{12}{5}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}+C$. **44.4.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}ln\left(\frac{ch2x}{\sqrt{2}}+\sqrt{sh^4x+ch^4x}\right)+C$.
44.5. $0{,}25(arccosx)^{-4}+C$. **44.6.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^5}+C$.
4.7. $0{,}25\sqrt[3]{(1+3sinx)^4}+C$. **44.8.** $-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}+C$.
44.9. $0{,}75\sqrt[3]{(1+lnx)^4}+C$. **44.10.** Agar $x+a>0, x+b>0$ bo'lsa, $2ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right)+C$; Agar $x+a<0, x+b<0$ bo'lsa, $-2ln\left(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}\right)+C$; **44.11.** $xsinx+cosx+C$.
44.12. $\frac{1}{2}x^2ln3x-0{,}25x^2+C$. **44.13.** $-(x+1)e^{-x}+C$.
44.14. $\frac{3^x}{ln3}\left(x-\frac{1}{ln3}\right)+C$. **44.15.** $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(lnx-\frac{1}{n+1}\right)+C$.

44.16. $-\frac{x}{2}+\frac{1+x^2}{2}arctgx+C$. **44.17.** $xlnx-x+C$. **44.18.** $-\frac{1+x^2}{2}e^{-x^2}+C$.
44.19. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(ln^2x-\frac{4}{3}lnx+\frac{8}{9}\right)+C$. **44.20.** $xarcsinx+\sqrt{1-x^2}+C$.
44.21. $I_n=-\frac{cosx\cdot sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}$. **44.22.** $I_n=\frac{sinx\cdot cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}$.
44.23. $I_n=\frac{sinx}{(n-1)\cdot cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\cdot I_{n-2}$. **44.24.** $I_n=\frac{x^{\alpha}ln^nx}{\alpha+1}-\frac{n}{\alpha+1}\cdot I_{n-1}$.

45-§.

45.1. $\frac{1}{2}ln\left|\frac{(2+x)^4}{(1+x)(3+x)^3}\right|+C$. **45.2.** $ln|x-2|+ln|x+5|+C$. **45.3.** $\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{16}{3}ln|x+2|+\frac{1}{6}ln|x-1|-\frac{16}{2}ln|x+1|+C$. **45.4.** $x+\frac{1}{6}ln|x|-\frac{9}{2}ln|x-2|+\frac{28}{3}ln|x-3|+C$. **45.5.** $-\frac{1}{(x-2)^2}+ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$. **45.6.** $-\frac{1}{3}ln|x+1|+\frac{1}{6}ln|x^2-x+1|+\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$. **45.7.** $ln|x-3|-\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C$.
45.8. $\frac{1}{4}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}arctgx+C$. **45.9.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}+C$.
45.10. $-\frac{1}{x-2}-arctg(x-2)+C$.

46-§.

46.1. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x}+6arctg\sqrt[6]{x}+3ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)+C$. **46.2.** $4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}+24ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C$. **46.3.** $\frac{3}{7}\sqrt[6]{(2x-3)^7}+C$. **46.4.** $6\left(\frac{1}{3}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|\right)+C$. **46.5.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C$.
46.6. $-2t-ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C,\ t=\sqrt{\frac{x-2}{x}}$.
46.7. $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$. **46.8.** $\left(1-\frac{x}{2}\right)\sqrt{1-x^2}-arcsinx+C$.
46.9. $\frac{3}{4}ln\frac{x\sqrt[3]{x}+1}{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^2\left(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}\right)^2}-\frac{3}{2\sqrt{7}}arctg\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}+C$. **46.10.** $6t-3t^2+1{,}5t^4+\frac{6}{5}t^5-\frac{6}{7}t^7+3ln(1+t^2)-6arctgt+C,\ t=\sqrt[6]{x+1}$.
46.11. $ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2arctgz+C,\ z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$. **46.12.** $\frac{3}{2(2z+1)}+\frac{1}{2}ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}+C,\ z=x+\sqrt{1+x+x^2}$. **46.13.** $-2arctg\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x}+C$.
46.14. $\frac{2}{27}\left(\frac{1}{t}-2t-\frac{t^3}{3}\right)+C,\ t=\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$. **46.15.** $\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3}[(z-1)^3+(z-1)^{-3}]+[(z-1)^2+(z-1)^{-2}]+[(z-1)+(z-1)^{-1}]\right\}+\frac{1}{2}ln|z-1|+C,\ z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$.

46.16. $-\frac{5}{18(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^2}+\frac{3}{4}ln|z-1|-\frac{16}{27}ln|z-2|-\frac{17}{108}ln|z+1|+C,\quad z=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.

47-§.

47.1. $\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)+C.$

47.2. $3arctg\sqrt[3]{x}+C.$ **47.3.** $2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{3/2}+C.$ **47.4.** $0{,}6z^5-2z^3+3z+C,\ z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}.$ **47.5.** $-z+\frac{2}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5+C,\ z=\sqrt{1+x^2}.$

47.6. $\frac{1}{6}ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+C,\ z=\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{x}.$ **47.7.** $3\left(ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{\sqrt{3}x}-\frac{1}{3}ln\left|1-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}\right|-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+C.$

47.8. $1{,}25z^4-\frac{5}{9}z^9+C,\ z=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}.$ **47.9.** $\frac{3z}{2(z^3+1)}-\frac{1}{4}ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{2z-1}{\sqrt{3}}+C,\quad z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}.$ **47.10.** $\frac{1}{4}ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}arctgz+C,\ z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$

48-§.

48.1. $-3\sqrt[3]{cosx}+\frac{3}{7}cos^2x\sqrt[3]{cosx}+C.$ **48.2.** $-sinx-\frac{1}{sinx}+C.$

48.3. $-sinx+ln\left|tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$ **48.4.** $-ctgx-0{,}5sinxcosx-1{,}5x+C.$

48.5. $\frac{sinx}{3cos^3x}+\frac{2}{3}tgx+C.$ **48.6.** $shx-arctg(shx)+C.$ **48.7.** $\frac{1}{2}tg^2x+ln|cosx|+C.$ **48.8.** $ctgx-\frac{1}{3}ctg^3x+x+C.$ **48.9.** $-\frac{3}{2}cosx-\frac{cos^3x}{2sin^2x}-\frac{3}{2}ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$ **48.10.** $\frac{1}{3}sin^3x-sinx+ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$

48.11. $\frac{1}{2}ln\left|2tg\frac{x}{2}+3\right|+C.$ **48.12.** $\frac{1}{cosx}+\frac{1}{3cos^2x}+ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$

I-VII boblarda keltirilgan testlarning javoblari

I bobda keltirilgan testlarning javoblari

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		a	a	b	b	b	a	b	c	d
1	a	b	c	d	a	a	a	a	a	a
2	c	a	c	d	a	b	d	a	a	a
3	d	c	a	c	c	c	b	b	d	c
4	b									

II bobda keltirilgan testlarning javoblari

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		b	a	a	a	c	a	c	d	a
1	c	d	a	a	b	d	c	c	b	d
2	a	a	a	b	b	b				

III bobda keltirilgan testlarning javoblari

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		b	a	c	d	d	d	d	b	b
1	b	a	c	c	c	b	c	a	d	b
2	c	a	a	a	a	a	a	c	a	b
3	a	a	a	a	b	d	d	b	a	a
4	a	a	a	c	a	a	c	a	b	a
5	a	a	c	a	c	a	a	a	a	b
6	b	c	c	a	b	b	a	a	a	a
7	a									

IV bobda keltirilgan testlarning javoblari

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		a	b	b	b	c	c	c	c	a
1	a	a	a	c	c	c	a	a	a	a
2	b	b	b	b	a	a	c	a	a	a
3	d	a	d	d	d	a	a	a	a	c
4	a	a	c	b	a	b	b	a	a	a
5	a									

V bobda keltirilgan testlarning javoblari

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	a	a	a	a	b	a	a	a	c	b
1	d	d	b	c	c	b	a	a	a	a
2	a	a	a	a	b	b	b	b		

VI bobda keltirilgan testlarning javoblari

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0		c	a	a	a	b	a	a	a	a
1	a	d	c	b	a	c	d	d	c	c
2	a	b	b	b	c	c	c	c	c	c
3	a	b	b	a	a	a	b	b	b	b
4	a	a	d	d	d	d	a	a	b	b
5	b									

VII bobda keltirilgan testlarning javoblari

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0		a	a	a	b	c	b	a	a	d
1	a	b	d	a	c	a	a	d	a	a
2	d	b	a	a	a	a	a	c	a	a
3	a									

Adabiyotlar ro‘yxati

1.Sh.Alimov, R.Ashurov. Matematik analiz. 1-qism, darslik, -Toshkent: “Mumtoz so‘z”, 2018, 586 bet.

2. Xudayberganov G., Vorisov A.K., Mansurov X.T., Shoimqulov B.A. Matematik analizdan ma’rizalar, I q. T. “Voris”. 2010.

3. Ильин В.А., Садовничний В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ, 1т. М. Изд-во МГУ. 1987.

4. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. – Курс математического анализа М.: «БИНОМ» 2015.

5. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу. М. «Наука». 1990.

6. Азларов Т.А., Мансуров Х.Т. Математик анализ, 1 қ. Т. “Ўқитувчи”. 1994.

7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Математик анализ асослари, 1-қисм.-Тошкент, “Ўқитувчи”, 1981, 576 бет.

8. Aksoy A.G., Khamsi M.A. A problem bool in real analysis. Springer, 2010.

9.Садуллаев А., Мансуров Х.Т., Худойберганов Г., Ворисов А.К., Гуломов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, 1қ. Т. “Ўқитувчи”. 1993, 1995.

10. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Том 1 и 2. М. «Наука». 1984, 1986.

11. Ғозиев А., И. Исраилов, М.Яхшибоев. Математик анализдан мисол ва масалалар тўплами. Ўқув қўлланма (1-2 қисмлар). “Фан ва технология”. -Тошкент. 2010-2015 йй.

12.Alimov Sh.O., Xalmuxamedov O.R. Algebra va analiz asoslari, 10-11 sinflar uchun darslik.

Mardiyev Rasul, Usmanov Salim Eshimovich

ANALIZ ASOSLARI

fani uchun o‘quv qo‘llanma

«**5130100 MATEMATIKA**»

ta’lim yo‘nalishi bakalavr talabalari uchun

Muharrir J.Bozorova
Musahhih L.Xoshimov
Texnik muharrir B.Egamberdiyev

ISBN 978-9943

2021-yil 15 martda tahririy-nashriyot bo‘limiga qabul qilindi.
2021-yil 20 martda original-maketdan bosishga ruxsat etildi.
Qog‘oz bichimi 60x84. “Times New Roman” garniturasi.
Offset qog‘ozi. Shartli bosma tabog‘i – 17,25.
Adadi nusxa. Buyurtma №

SamDU tahririy-nashriyot bo‘limida chop etildi.
140104, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 15.

СИГНАЛ НУСХА