Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги

Тошкент Молия институти

Қ Сафаева.

Математик дастурлаш

(Дарслик)

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги Олий ўқув юртларида илмий-услубий бирлашмалар фаолиятини мувофиқлаштирувчи Кенгаш томонидан дарслик сифатида тавсия этилган

Тошкент
«Ибн Сино»
2004

Қ.Сафаева. Математик дастурлаш. Дарслик «Ибн Сино»-2004й, 324-б.

Ушбу китоб математик дастурлашдан ўзбек тилида ёзилган биринчи дарслик бўлиб, унда чизиқли, чизиқсиз, динамик ҳамда ноаниқликда ечимлар қабул қилиш назариясига доир бўлган матрицали ўйинлар назарияси ва табиат билан ўйинлар тизимли равишда ёритилган.

Дарслик 340000 – «Бизнес ва бошқарув» таълим соҳасидаги барча бакалавриат йўналишлари учун мўлжалланган бўлиб, ундан иқтисодиёт ва техника олий ўқув юртларининг барча талабалари, профессор-ўқитувчилари, аспирантлар ва илмий ходимлар фойдаланишлари мумкин.

Книга является первым учебником на узбекском языке по курсу «Математическое программирование» и содержит систематическое изложение таких разделов как линейное, нелинейное, динамическое программирования, методы принятия решений в условиях неопределенности – теории матричных игр и игры с природой.

Учебник предназначен студентам обучающихся по направлениям 340000 – «Бизнес и управление» бакалавриатуры высшего образования. Учебником могут пользоваться студенты и профессорско-преподавательский состав всех экономических и технических ВУЗов, а также аспиранты и научные сотрудники.

This is the first text-book in Uzbek on the mathematic programming and contains the systematic summary such chapters as line non-line, dynamic program, the methods of making decisions in the conditions of intimateness the theory of matrices games and games with nature.

This text-book is for the students training in the direction of bachelor 340000-«Biznes and management».
Thee students and teachers of all economical and technical higher educational institutions, post-graduates and researches can use this text-book.

Ўзбекистон фанлар академиясининг
академиги В.К. Қобулов таҳрири остида

Тақризчилар: физ.мат. фанлар доктори
проф. М. Мирвалиев.,
ф.м.ф.н., доц. Э. Мамуров

$C\frac{1602110000-39}{M354(04)-2004}$

ISBN 5-638-01552-3

Сўз боши

Иқтисодиёт бўйича кадрлар тайёрловчи олий ўқув юртларида математик фанларни ўқитишдан мақсад талабаларни иқтисодиётнинг назарий ва амалий масалаларини ечишда керак бўлган математик аппарат билан таништиришдан иборат. Ана шундай аппаратлардан бири, мумкин бўлган иқтисодий ечимлар тўпламидан мақсадга мувофиқ, энг яхши ечимни топиш усулларини ўргатувчи фан математик дастурлашдир. Инсон фаолиятининг турли соҳаларда, жумладан, иқтисодий изланишларда, халқ хўжалик иқтисодиётини ва унинг турли тармоқларини, бозор, фирма ва ишлаб чиқариш корхоналарини бошқариш ва режалаштиришда ҳамда жараёнларни оптималлаштиришда математик дастурлаш усуллари қўлланилади. Шу сабабали математик дастурлаш фани иқтисодий йўналишлардаги олий ўқув юртларида асосий фан сифатида ўқитилиб келмоқда.

Мазкур китоб математик дастурлашдан ўзбек тилида ёзилган биринчи дарслик бўлиб, у «Бизнес ва бошқарув» таълим соҳасидаги барча бакалавриат йўналишлари Давлат таълим стандартлари асосида яратилган янги ўқув дастурларига мос келади. Дарсликни яратишда муаллиф ўзининг кўп йиллар давомида Тошкент Халқ Хўжалик институтида ва Тошкент Молия институтида ўқиган маърузалари ҳамда кўп йиллик илмий-педагогик тажрибаларига таянган. Дарсликка киритилган асосий мавзулар муаллиф томонидан чоп этилган ўқув қўлланмалар ва маъруза курслари таркибига киритилган ва кўп йиллар давомида иқтисодий олий ўқув юртлари талабаларига хизмат қилиб, синовдан ўтган.

Ҳозирги кунда математик дастурлаш фанидан дарслик ва ўқув қўлланмалар сонининг етарли даражада эмаслиги, ўзбек тилида ҳозирги замон талабларига жавоб берадаган дарсликларнинг мавжуд эмаслиги математик дастурлашнинг назарий ва амалий муаммоларига бағишланган дарслик яратиш заруриятини туғдирган.

Мазкур китоб ушбу мақсад йўлида қўйилган илк қадамлардан биридир. Дарслик математик дастурлашнинг назарий асослари ва амалий масалаларига бағишланган бўлиб, унда чизиқли дастурлашнинг предмети, асосий масалалари, геометрик ва алгебрик ечиш усуллари (I- ва II боблар), чизиқли дастурлашда иккиланиш назарияси (III боб), параметрли дастурлаш (IV боб) транспорт масаласи ва уни ечиш усуллари (V боб), бутун сонли дастурлаш (VI боб), чизиқсиз дастурлашнинг умумий назарияси (VII боб), қавариқ дастурлаш масаласи ва уни ечиш усуллари (VIII боб), квадратик дастурлаш масаласи ва уни ечиш усуллари (IX боб), чизиқсиз дастурлаш масалаларини ечиш учун градиент усуллар (X боб) келтирилган.

Баъзи чизиқсиз ва бутун сонли дастурлаш масалаларини ечишда қўлланиладиган ҳисоблаш усулларидан бири динамик дастурлашдир. Динамик дастурлашни вақтга боғлиқ бўлган жараёнларни оптималлаштириш масалаларини ўргатувчи математик дастурлашнинг бир бўлими деб қараш ҳам одат тусига кирган. Дарсликнинг XI боби динамик дастурлашга бағишланган. Унда динамик дастурлаш кўп босқичли масалаларнинг оптимал ечимини топишнинг математик назарияси сифатида аниқланган.

Иқтисодий амалиётда рақобатли ҳолатлар кўп учрайди. Масалан, бир хил маҳсулот ишлаб чиқарувчи фирмалар, турдош маҳсулотларни сотувчилар, истеъмолчилар ва таъминотчилар, банк ва мижозлар ўртасидаги айрим муносабатларни рақобатли деб қараш мумкин. Рақобатли ҳолатлар билан боғлиқ бўлган иқтисодий масалаларни ечиш учун илмий асосланган усуллар керак бўлади. Ана шу усулларни ўргатувчи фан ўйинлар назарияси ҳисобланади ва у рақобатли ҳолатлардаги масалаларни ечишнинг математик назариясини ўргатади. Ўйинлар назарияси билан чизиқли дастурлаш орасида қуйидаги боғлиқлик мавжуд: а) агар чизиқли дастурлаш иқтисодий жараённинг оптимал ечимини топишга ёрдам берса, ўйинлар назарияси шу оптимал ечимини топиш стратегиясини аниқлайди; б) ҳар қандай матрицали ўйинни чизиқли дастурлаш усуллари билан ечиш мумкин ва аксинча. Ана шу боғлиқликларни назарга олган ҳолда дарсликнинг XII боби ўйинлар назарияси элементларига бағишланган.

Дарслик кўплаб иқтисодий масалаларни ўз ичига олади. Ҳар бир мавзунинг назарий асосларини амалий масала ва мисоллар ечишга татбиқ қилиш йўллари кўрсатилган. Ҳар бир боб таянч сўз ва иборалар, назорат саволлари ва мустақил ечиш учун масалалар билан якунланган.

Дарслик иқтисодий йўналишдаги олий ўқув юртларининг бакалавриат йўналишида таълим олувчи талабалари учун мўлжалланган бўлиб, ундан математик дастурлаш фани ўқитиладиган барча олий юртларининг талабалари, магистрантлари, аспирантлари ва профессор ўқитувчилари фойдаланиши мумкин.

Муаллиф мазкур дарсликнинг қўл ёзмасини синчиклаб ўқиб чиқиб, ўзларининг қимматли маслаҳатлари билан унинг сифатини яхшилашга хисса қўшган Ўзбекистон Фанлар Академиясининг академиги В.Қ. Қобуловга, М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети профессори F. Насриддиновга, Тошкент Давлат иқтисодиёт университетининг «Эҳтимоллар назарияси ва ҳисоблаш математикаси» кафедраси мудири, профессор М. Мирвалиевга ва шу кафедра доценти Ҳ. Жумаевга ўз миннатдорчилигини билдиради.

Кириш.

Математик дастурлаш фани хўжаликни рационал бошқариш принципини ўргатади. Бу ерда дастурлаш сўзи қўйилган мақсадга эришиш йўлида бажариладиган ишлар режасини англатади. Математик дастурлашга иқтисодиётдаги экстремал масалаларни ўрганувчи ва уларни ечиш усулларини яратувчи математиканинг бир йўналиши деб қараш одат тусига кирган. Математика нуқтаи назаридан ўзгарувчиларга маълум (чизиқли ёки чизиқсиз) чекланмалар қўйилган кўп ўлчовли функциянинг максимум ва минимумини топиш масаласи умумий ном билан математик дастурлаш масаласи деб аталади.

Хулоса қилиб айтиш мумкинки, математик дастурлаш чизиқли ва чизиқсиз тенгликлар ва тенгсизликлар билан берилган тўпламларда аниқланган кўп ўлчовли функцияларнинг максимум ва минимум қийматларини топиш назарияси ва усулларини ўргатади. Максимуми ва минимуми қидирилаётган функция мақсад функцияси деб аталади.

Номаълумларга қўйилган чекламалар чизиқли ва чизиқсиз тенглик ва тенгсизликлар системасидан иборат бўлиб, улар бошқарувчи ўзгарувчиларнинг мумкин бўлган қийматлар соҳасини (мақсад функциянинг аниқланиш соҳасини) ифодалайдилар.

Математик дастурлашнинг предмети корхона, фирма, бозор, ишлаб чиқариш бирлашмаси, ҳарбий хизмат объектлари ва бошқа иқтисодий жараёнларни тасвирловчи математик моделлардан иборат бўлади.

Ўрганилаётган иқтисодий жараёнларнинг асосий хоссаларини математик муносабатлар ёрдамида тасвирлаш тегишли иқтисодий жараённинг математик моделини қуриш дейилади. Иқтисодий жараённинг биринчи модели француз олими Ф.Кенэ (1764-1774) томонидан яратилган. У 1758 йилда «Иқтисодий жадвал», 1766 йилда «Арифметик формула» номли асарларини чоп этган.

Ф.Кенэ ўз асарларида жамиятда такрор ишлаб чиқаришнинг асосий босқичларини математик модел шаклида ифодалаган.

«Математик дастурлаш» масаласининг моделини умумий ҳолда қуйдагича ифодалаш мумкин.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциянинг экстремуми

$$g_i\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

шартларни қанотлантирувчи x_1, $x_2, \ldots, x_n$ номаълумларнинг қийматлар соҳасида топилсин, бу ерда f, g_i берилган функциялар, b_i-ихтиёрий ҳақиқий сонлар.

Агар берилган масалада f, *ва* g_i функцияларнинг ҳаммаси чизиқли бўлса, у ҳолда берилган масала «чизиқли дастурлаш» масаласи бўлади.

Агар f, *ва* g, функциялардан камида биттаси чизиқсиз бўлса, у ҳолда берилган модел «чизиқсиз дастурлаш» масаласини ифодалайди.

Агар f, *ва* g, функциялар чизиқли бўлиб, номаълумларга бутун бўлишлик шарти қўйилган бўлса, у ҳолда берилган масала «бутун сонли дастурлаш» масаласи бўлади.

Агар f, *ва* g, функциялардан бирортаси тасодифий миқдорларни ўз ичига олса, у ҳолда берилган модел «стохастик дастурлаш» масаласини ифодалайди.

Агар f *ва* g, функциялар вақтга боғлиқ бўлиб, масалани ечиш кўп босқичли жараён сифатида қаралса, у ҳолда берилган модел динамик дастурлаш масаласидан иборат бўлади.

Агар f, *ва* g, функциялардан камида биттаси қандайдир параметрга боғлиқ бўлса, у ҳолда берилган масала «параметрли дастурлаш» масаласи бўлади.

Мазкур дарслик математик дастурлашнинг юқорида қайд этилган барча бўлимларини ҳамда чизиқли дастурлаш билан боғлиқ бўлган ўйинлар назарияси элементларини ўз ичига олади.

Дарсликнинг ҳажми йўл қўймагани ва фан бўйича намунавий дастурда назарда тутилмагани учун стохастик дастурлаш дарсликка киритилмади.

I БОБ. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШНИНГ ПРЕДМЕТИ ВА МАСАЛАЛАРИ

1-§. Чизиқли дастурлаш предмети. Чизиқли дастурлаш усуллари билан ечиладиган масалалар ва уларнинг математик моделлари

Чизиқли дастурлаш математик дастурлашнинг бир йўналиши бўлиб, у чегараланган ресурслар(хом ашё, техника воситалари, капитал қўйилмалар, ер, сув, минерал ўғитлар ва бошқалар)ни рационал тақсимлаб энг кўп фойда олиш йўлларини ўргатади.

Чизиқли дастурлашнинг фан сифатида шаклланиши XX асрнинг иккинчи ярмидаги иқтисодий фикрларнинг такомиллашишига катта таъсир кўрсатди. 1975 йилда чизиқли дастурлаш назариясини биринчи бор кашф қилган рус олими Л.В.Канторовичга ва математик иқтисодиёт бўйича мутахассис, «Чизиқли дастурлаш» терминининг биринчи муаллифи, америка олими Т.Купмансга Нобел мукофотининг берилиши чизиқли дастурлашнинг иқтисодий назарияга қўшган ҳиссасини тан олишдан иборат деб ҳисоблаш мумкин.

Чизиқли дастурлаш чизиқли функциянинг, унинг таркибига кирувчи номаълумларга чегараловчи шартлар қўйилгандаги, энг катта ва энг кичик қийматини излаш ва топиш услубини ўргатувчи фандир.

Номаълумларга чизиқли четламалар қўйилган чизиқли функциянинг экстремумини топиш масаласи чизиқли дастурлаш масаласи ҳисобланади. Шундай қилиб, чизиқли дастурлаш чизиқли функциянинг шартли экстремумини топиш масалалари туркумига киради.

Чизиқли дастурлаш усулларини қўллаб иқтисодий жараёнларнинг ўзига хос қонуниятларини ўрганиш учун, биринчи навбатда, бу жараёнларни тавсифловчи математик моделларни тузиш керак. Ўрганилаётган иқтисодий жараённинг асосий хоссаларини математик муносабатлар ёрдамида тавсифлаш тегишли иқтисодий жараённинг математик моделини тузиш деб аталади.

Иқтисодий жараёнларнинг математик моделини тузиш учун қуйидаги босқичлардаги ишларни бажариш керак:

1) масаланинг иқтисодий маъноси билан танишиб, ундаги асосий шартлар ва мақсадни аниқлаш;

2) масаладаги маълум параметрларни белгилаш;

3) масаладаги номаълумларни (бошқарувчи ўзгарувчиларни) белгилаш;

4) масаладаги чекламаларни, яъни бошқарувчи ўзгарувчиларнинг қаноатлантириши керак бўлган чегаравий шартларни чизиқли тенгламалар ёки тенгсизликлар орқали ифодалаш;

5) масаланинг мақсадини чизиқли функция орқали ифодалаш. Бундай функция мақсад функция деб аталади.

Бошқарувчи ўзгарувчиларнинг барча чекламаларни қаонатлантирувчи шундай қийматини топиш керакки, у мақсад функцияга энг катта(максимум) ёки энг кичик(минимум) қиймат берсин. Бундан кўринадики, мақсад функция бошқарувчи номаълумотларнинг барча қийматлари ичида энг яхшисини (оптималини) топишга ёрдам беради. Шунинг учун ҳам мақсад функцияни фойдалилик ёки оптималлик мезони деб ҳам аталади.

Иқтисодий масалаларнинг математик моделини тузиш жараёнини амалиётда нисбатан кўп учрайдиган қуйидаги иқтисодий масалалар мисолида ўрганамиз.

1. Ишлаб чиқаришни ташкил қилиш ва режалаштириш масаласи

Фараз қилайлик, корхонада m хил маҳсулот ишлаб чиқарилсин: улардан ихтиёрий бирини i(i=1,..., m) билан белгилаймиз. Бу маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун n хил ишлаб чиқариш факторлари зарур бўлсин. Улардан ихтиёрий бирини j (j=1,..., n) билан белгилаймиз.

Ҳар бир ишлаб чиқариш факторининг заҳираси ва уларнинг бир бирлик маҳсулотни ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган меъёри қуйидаги жадвалда берилган:

и/ч факторлари / и/ч маҳсулот турлари	1	2	3		n	Маҳсулот бирлигидан олинадиган даромад
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	C_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	C_2
...	...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	C_m
и/ч факторининг заҳираси	b_1	b_2	b_3		b_n	

Жадвалдаги ҳар бир b_j - j ишлаб чиқариш факторининг заҳирасини; a_{ij} i маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган j - факторнинг меъёри; c_i - корхонанинг i - маҳсулот бирлигини реализация қилишдан оладиган даромадини билдиради.

Масаланинг иқтисодий маъноси: корхонанинг ишлаб чиқариш режасини шундай тузиш керакки: а) ҳамма маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган ҳар бир ишлаб чиқариш факторининг миқдори уларнинг заҳирасидан ошмасин; б) маҳсулотларни реализация қилишидан корхонананинг оладиган даромади максимал бўлсин.

Режалаштирилган давр ичида ишлаб чиқариладиган i-маҳсулотининг миқдорини x_i билан белгилаймиз. У ҳолда масаладаги а) шарт қуйидаги тенгсизликлар системаси орқали ифодаланади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \quad + a_{m1}x_m \le b_1 , \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{m2}x_m \le b_2 , \\ \text{-------------------------------} \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \quad + a_{mn}x_m \le b_n \end{cases} \qquad (1.1)$$

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра ҳамма номаълумлар манфий бўлмаслиги керак, яъни:

$$x_i \ge 0 \ (i=1,\ 2,\ ...,\ m) \qquad (1.2)$$

Масаладаги б) шарт унинг мақсадини аниқлайди. Демак масаланинг мақсади маҳсулотларни реализация қилишдан корхонанинг оладиган умумий даромадини максималлаштиришдан иборат ва уни

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \quad + c_mx_m \rightarrow max, \qquad (1.3)$$

кўринишди ифодалаш мумкин.

Шундай қилиб, ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласининг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \quad + a_{m1}x_m \le b_1 , \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{m2}x_m \le b_2 , \\ \text{-----------------------------------} \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \quad + a_{mn}x_m \le b_n , \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0, \quad ,\ x_m \ge 0,$$
$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \quad + c_mx_m \rightarrow max.$$

2. Истеъмол савати масаласи

Фараз қилайлик, киши организми учун бир суткада n хил A_1, A_2,..., A_n озуқа моддалари керак бўлсин, жумладан A_1 озуқа моддасидан b_1 миқдорда, A_2 озуқа моддасидан b_2 миқдорда, A_3 озуқа моддасидан b_3 миқдорда ва ҳоказо, A_n дан b_n миқдорда зарур бўлсин ва уларни m та B_1, B_2,...,B_m маҳсулотлар таркибидан олиш мумкин бўлсин, ҳар бир B_i маҳсулот таркибидаги A_j озуқа моддасининг миқдори a_{ij} бирликни ташкил қилсин.

Масаланинг берилган параметрларини қуйидагича жадвалга жойлаштириш мумкин.

озуқа моддалари / маҳсулотлар	A_1	A_2		A_n	Маҳсулот баҳоси
B_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	C_1
B_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	C_2
...	...	...	...	...	...
B_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	C_m
озуқа модданинг минимал нормаси	b_1	b_2		b_n	

Масаланинг иқтисодий маъноси: истеъмол саватига қандай маҳсулотлардан қанчадан киритиш керакки, натижада: а) одам организми қабул қиладиган озуқа моддаси белгиланган минимал нормадан кам бўлмасин; б) истеъмол саватининг умумий баҳоси минимал бўлсин.

Истеъмол саватига киритиладиган i маҳсулотнинг миқдорини x_i билан белгилаймиз. У ҳолда масаланинг а) шарти қуйидаги тенгсизликлар системаси орқали ифодаланади.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \quad + a_{m1}x_m \geq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{m2}x_m \geq b_2 \\ \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \quad + a_{mn}x_m \geq b_n \end{cases} \qquad (1.4)$$

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра ҳамма номаълумлар манфий бўла олмайди, яъни:

$$x_i \geq 0,\ x_2 \geq 0, \quad ,\ x_m \geq 0. \qquad (1.5)$$

Масаладаги б) шарт унинг мақсадини ифодалайди. Демак, масаланинг мақсади истеъмол саватига киритиладиган маҳсулотларнинг умумий баҳосини минималлаштиришдан иборат бўлиб, уни қуйидаги чизиқли функция кўринишида ифодалаш мумкин:

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \quad + c_mx_m \rightarrow min. \qquad (1.6)$$

Шундай қилиб «истеъмол савати» масаласининг математик моделини

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \quad + a_{m1}x_m \geq b_1 \ , \\
a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{m2}x_m \geq b_2 \\
\\
a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \quad + a_{mn}x_m \geq b_n \ ,
\end{cases}
$$

$$
x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \quad , x_m \geq 0,
$$

$$
Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \quad + c_mx_m \to min.
$$

кўринишида ёзиш мумкин.

3. Оптимал бичиш масаласи

Фараз қилайлик корхонада m хил маҳсулотлар тайёрлаш (бичиш) керак бўлсин, ҳамда ҳар бир i-маҳсулотдан a_i миқдорда тайёрлаш режалаштирилган бўлсин. Бу маҳсулотларни тайёрлаш учун n хил хомаки материаллар мавжуд бўлиб, ҳар бир j-хомаки материалнинг узунлиги b_j бирликни ташкил қилсин. Хомаки материаллардан тайёр маҳсулот ишлаб чиқариш учун l хил бичиш усулларини қўллаш мумкин бўлсин ҳамда ҳар бир j-хомаки материални k-усул билан бичганда хосил бўладиган i-маҳсулот миқдори a_{ijk}, чиқинди эса C_{jk} бирликларни ташкил қилсин деб фараз қиламиз.

Масаланинг берилган параметрларини қуйидаги жадвалга жойлаштирамиз:

Тайёрланадиган маҳсулот турлари	Хомаки маҳсулотлар ва уларни кесиш усуллари													Тайёр маҳсулотларни и/ч режаси
	B_1				B_2				...	B_n				
	1	2	...	l	1	2		l		1	2		l	
A_1	a_{111}	a_{112}	...	a_{11l}	a_{121}	a_{122}		a_{12l}		a_{1n1}	a_{1n2}		a_{1nl}	a_1
A_2	a_{211}	a_{212}	...	a_{21l}	a_{221}	a_{222}		a_{22l}		a_{2n1}	a_{2n2}		a_{2nl}	a_2
			...											
A_m	a_{m11}	a_{m12}	...	a_{m1l}	a_{m21}	a_{m22}		a_{m2l}		a_{mn1}	a_{mn2}		a_{mnl}	a_m
Чиқиндилар	C_{11}	C_{12}	...	C_{1l}	C_{21}	C_{22}		C_{2l}		C_{n1}	C_{n2}		C_{nl}	

Хомаки материалларни қайси усул билан бичганда ҳосил бўлган тайёр маҳсулотлар миқдори режадагига тенг бўлади, сарф қилинган хом ашё материаллар миқдори уларнинг заҳирасидан ошмайди ҳамда ҳосил бўлган чиқиндиларнинг умумий миқдори минимал бўлади?

k-усул билан бичиладиган j-хомаки материаллар миқдорини x_{jk} билан белгилаймиз.

Ушбу белгилашларда оптимал бичиш масаласининг математик модели қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \quad + x_{1l} = b_1, \\ x_{21} + x_{22} + \quad + x_{2l} = b_2, \\ ------------------------ \\ x_{n1} + x_{n2} + \quad + x_{nl} = b_n, \end{cases} \qquad (1.7)$$

$$\begin{cases} a_{111}x_{11} + a_{112}x_{12} + \quad + a_{1nl}x_{nl} = a_1, \\ a_{211}x_{11} + a_{212}x_{12} + \quad + a_{2nl}x_{nl} = a_2, \\ ------------------------------------ \\ a_{m11}x_{11} + a_{m12}x_{12} + \quad + a_{mnl}x_{nl} = a_m, \end{cases} \qquad (1.8)$$

$$x_{jk} \geq 0, (j=1, \quad , n; \ k=1, \quad , l) \qquad (1.9)$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} C_{jk} x_{jk} \rightarrow min. \qquad (1.10)$$

Бу ерда(1.7) шарт мавжуд хомаки материалларнинг ҳаммаси кеси-лиши кераклигини, (1.8) шарт тайёр маҳсулотлар ишлаб чиқариш бўйича режани тўла бажариш зарурлигини кўрсатади.

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра ундаги номаълумларнинг манфий бўлаолмаслиги (1.9) шарт орқали ифодаланади. (1.10) шарт масаланинг мақсадидан иборат бўлиб, у ҳомаки материалларни кесишдан ҳосил бўладиган чиқиндиларни энг кам (минимал) бўлишини таъминлайди.

Энди оптимал бичиш масаласининг энг содда ҳоли билан танишамиз.

Дейлик, узунлиги L бўлган хомаки материаллардан узунликлари Δ_i $(i=\overline{1,m})$ бўлган m хил деталларнинг ҳар биридан a_i миқдорда тайёрлаш керак бўлсин. Бундан ташқари хомаки материалларни n $(j = \overline{1,n})$ усул билан кесиш ҳамда ҳар бир j-усул билан кесилган хомаки материалдан a_{ij} миқдорда i-детал тайёрлаш ва c_j миқдорда чиқинди ҳосил қилиш мумкин эканлиги аниқланган бўлсин.

Хомаки материаллардан қанчасини қайси усул билан кесганда тайёрланган деталлар миқдори режадагига тенг бўлади ва ҳосил бўлган чиқиндиларнинг умумий миқдори энг кам (минимал) бўлади.

Масаланинг маълум параметрларини қуйидаги кўринишдаги жадвалга жойлаштирамиз.

Тайёрланадиган деталларнинг узунликлари	Кесиш усуллари				Деталлар ишлаб чиқариш режаси
	1	2		n	
$Д_1$	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	a_1
$Д_2$	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	a_2
. . .	...	...	...	...	...
$Д_m$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
Чиқиндилар миқдори	c_1	c_2		c_n	

j-усул билан кесиладиган хомаки материаллар миқдорини x_j билан белгилаймиз. У ҳолда масаланинг математик модели қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n = a_1 ,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n = a_2 , \qquad (1.11)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_m = a_m ,$$
$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \quad , x_n \geq 0,$$

(1.12)

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \quad + c_nx_n \rightarrow min. \qquad (1.13)$$

Бу ерда (1.11) шарт ҳар бир тайёр маҳсулот бўйича режа тўлиқ бажарилиши кераклигини, (1.12) шарт номаълумларнинг номанфийлигини ва (1.13) шарт чиқиндиларнинг умумий миқдори минимал бўлишини кўрсатади.

1-мисол. Узунлиги 110 см бўлган пўлат хипчинлардан узунликлари 45 см, 35 см ва 50 см бўлган хомаки маҳсулотлар тайёрлаш керак бўлсин. Талаб қилинган хомаки маҳсулотлар миқдори мос равишда 40, 30 ва 20 бирликни ташкил қилсин. Пўлат хипчинларни кесиш йўллари ва уларга мос келувчи хомаки маҳсулотлар ва чиқиндилар миқдори қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хомаки маҳсулотлар узунлиги	Кесиш усуллари						Хомаки маҳсулотлар и/ч режаси
	1	2	3	4	5	6	
45 см	2	1	1	-	-	-	40
35 см	-	1	-	3	1	-	30
50 см	-	-	1	-	1	2	20
Чиқиндилар	20	30	15	5	25	10	

Ҳар бир кесиш усули бўйича қанча пўлат хипчинлар кесилганда тайёрланган хомаки маҳсулотлар миқдори режадагига тенг бўлади ва чиқиндиларнинг умумий миқдори минимал бўлади?

Ечиш. j - усул билан кесиладиган пўлат хипчинлар сонини x_j билан белгилаймиз. У ҳолда узунлиги 45 см бўлган хомаки маҳсулотлардан жаъми

$$2x_j + x_2 + x_3$$

миқдорда тайёрланади. Режага кўра бундай маҳсулотлар сони 40 тага тенг бўлиши керак, яъни

$$2x_j + x_2 + x_3 = 40$$

Худди шунингдек, узунликлари 35 см ва 50 см бўлган хомаки маҳсулотларни ишлаб чиқариш режасини тўла бажарилишидан иборат шартлар мос равишда

$$x_2 \quad + 3x_4 + x_5 = 30$$

ва

$$x_3 \quad\quad + x_5 + 2x_6 = 20$$

тенгламалар орқали ифодаланади.

Иқтисодий маъносига кўра белгиланган номаълумлар манфий бўла олмайди, демак

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \quad\quad , x_6 \geq 0$$

Режадаги хомаки маҳсулотларни ишлаб чиқаришда ҳосил бўлган чиқиндиларнинг умумий миқдорини қуйидаги чизиқли функция кўринишида ифодалаймиз.

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6.$$

Масаланинг шартига кўра бу функция минимум қийматни қабул қилиши керак, яъни

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \rightarrow min.$$

Шундай қилиб, қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласига эга бўламиз.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 40, \\ \quad\;\; x_2 \quad\quad + 3x_4 + x_5 & = 30, \\ \quad\quad\quad x_3 \quad\quad\quad x_5 + 2x_6 & = 20, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \;\; x_5 \geq 0, x_6 \geq 0,$$

$$Y \;\; = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \rightarrow min.$$

Ҳосил бўлган ифода оптимал бичиш масаласининг математик моделидан иборат бўлади.

2-мисол. Кондитер фабрикаси уч турдаги А, В, С карамелларни ишлаб чиқариш учун уч хил хом ашё: шакар, қиём ва қуруқ мевалар ишлатади. 1 тонна карамел турларини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган хом ашёлар миқдори (меъёри), хом ашёларнинг захираси ҳамда 1 тонна карамелни сотишдан олинадиган даромад қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хом ашё турлари	1 тонна маҳсулотга хом ашё сарфи (т.ҳисобида)			Хом ашё захираси (тонна)
	A	B	C	
шакар	0,8	0,5	0,6	800
қиём	0,4	0,4	0,3	600
қуруқ мевалар	-	0,1	0,1	120
1 т карамел сотишдан олинадиган даромад(шартли бирлик)	108	112	126	

Фабрикага максимал фойда келтирувчи карамел ишлаб чиқариш режасини топинг.

Ечиш: Кондитер фабрикасида A турдаги карамелдан x_1 миқдорда, B турдаги карамелдан x_2 миқдорда ва С турдаги карамелдан x_3 миқдорда ишлаб чиқарилсин деб белгилаймиз. У ҳолда фабрикада ишлаб чиқариладиган барча карамеллар учун

$$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3$$

миқдорда шакар сарф қилинади. Бу миқдор шакарнинг захирасидан, яъни 800 тоннадан ошмаслиги керак. Демак,

$$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 \leq 800$$

тенгсизлик ўринли бўлиши керак. Худди шундай йўл билан мос равишда қиём ва қуруқ мевалар сарфини ифодаловчи қуйидаги тенгсизликларни ҳосил қилиш мумкин:

$$0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 \leq 600,$$

$$0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 \leq 120.$$

Фабрика ишлаб чиқарган A карамелдан $108x_1$, B карамелдан - $112x_2$, С карамелдан - $126x_3$ бирлик ва жаъми

$$108x_1 + 112x_2 + 126x_3$$

бирлик даромад олади. Бу йиғиндини Y билан белгилаб уни максимумга эриштилишини талаб қиламиз. натижада қуйидаги функцияга эга бўламиз:

$$Y = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \longrightarrow max.$$

Шундай қилиб, берилган масаланинг математик моделини қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 \le 800, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 \le 600, \\ \qquad\quad 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 \le 120, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0,$$

$$Y = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \to max.$$

3-мисол. Одам организми учун бир суткада A озуқа моддасидан 12 бирлик, B озуқа моддасидан эса 16 бирлик керак бўлсин. Бу озуқа моддаларни $П_1$, $П_2$ маҳсулотлар таркибидан олиш мумкин бўлсин.

Бир бирлик $П_1$, $П_2$ маҳсулотлар таркибидаги A ва B озуқа моддаларининг миқдори, маҳсулотлар баҳоси қуйидаги жадвалда келтирилган:

Маҳсулотлар / Озуқа моддалари	Бир бирлик маҳсулотлар таркибидаги турли озуқа моддаларининг миқдори		Озуқа моддаларининг минимал нормаси
	$П_1$	$П_2$	
A	0,2	0,2	12
B	0,4	0,2	16
Маҳсулотлар баҳоси	2	4	

Бир кунлик овқатланиш режасини қандай тузганда одам организми керакли озуқа моддаларни минимал нормадан кам қабул қилмайди ҳамда сарф қилинган харажатлар энг кам (минимал) бўлади?

Ечиш: 1 суткада овқатланиш учун сарф қилинадиган $П_1$ маҳсулот миқдорини x_1 билан, $П_2$ маҳсулот миқдорини эса x_2 билан белгилаймиз.

У ҳолда одам организми A озуқа моддасидан ҳаммаси бўлиб

$$0{,}2x_1 + 0{,}2x_2$$

миқдорда қабул қилади. Шартга кўра бу миқдор минимал норма 12 дан кам бўлмаслиги керак, яъни

$$0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 \ge 12.$$

Худди шундай йўл билан B озуқа моддаси учун

$$0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 \ge 16$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра масаладаги номаълумлар манфий бўлмаслиги керак, яъни

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0.$$

Масаланинг мақсади овқатланиш учун сарф қилинган харажатларни минималлаштиришдан иборат.

1 суткада сарф қилинган $П_1$ маҳсулот учун $2x_1$ бирлик, $П_2$ маҳсулот учун $4x_2$ бирлик ва жаъми

$$Y=2x_1 + 4x_2$$

миқдорда ҳаражат сарф қилинади. x_1 ва x_2 номаълумларнинг шундай қийматларини топиш керакки, улар Y функцияга энг кичик (минимум) қиймат берсин, яъни

$$Y = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow min$$

шарт бажарилсин.

Шундай қилиб, берилган масаланинг математик моделини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$\begin{cases} 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 \geq 12, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 \geq 16, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0,$$

$$Y = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow min.$$

2-§. Чизиқли дастурлаш масаласининг умумий қўйилиши ва унинг турли формада ифодаланиши

Чизиқли дастурлаш масаласи умумий ҳолда қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n \geq (\leq)\, b_1 \;, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n \geq (\leq)\, b_2 \;, \\ \text{-------------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n \geq (\leq)\, b_m \;, \end{cases} \qquad (1.14)$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \quad , x_n \geq 0, \qquad (1.15)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \quad + c_nx_n \rightarrow min(max). \qquad (1.16)$$

(1.14) ва (1.15) шартларни қаноатлантирувчи номаълумларнинг шундай қийматларини топиш керакки, улар (1.16) чизиқли функцияга минимал (максимал) қиймат берсин. Масаланинг (1.14) ва (1.15) чекламалари унинг **чегаравий шартлари** деб, (1.16) чизиқли функция эса масаланинг **мақсади** ёки **мақсад функцияси** деб аталади.

Масаладаги барча чеклама шартлар ва мақсад функция чизиқли эканлиги кўриниб турибди. Шунинг учун ҳам (1.14) - (1.16) масала **чизиқли дастурлаш** масаласи деб аталади.

Конкрет масалаларда (1.14) шарт тенгламалар системасидан, «≥» ёки «≤» кўринишдаги тенгсизликлар системасидан ёки аралаш системадан иборат бўлиши мумкин. Лекин кўрсатиш мумкинки, (1.14)-(1.16) кўринишдаги масалани осонлик билан қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n = b_1 \ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n = b_2 \ , \\ \text{-----------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n = b_m \ , \end{cases} \qquad (1.17)$$

$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0, \quad , x_n \geq 0, \qquad (1.18)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \quad + c_nx_n \rightarrow min. \qquad (1.19)$$

(1.17)-(1.19) кўриниш чизиқли дастурлаш масаласининг каноник кўриниши деб аталади. Бу масала векторлар ёрдамида қуйидагича ифодаланади:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \quad + P_nx_n = P_0 \ , \qquad (1.20)$$

$$X \geq 0, \qquad (1.21)$$

$$Y = C'X \rightarrow min. \qquad (1.22)$$

бу ерда

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \qquad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$C = (c_1, c_2, \quad , c_n)$ - вектор - қатор.
$X = (x_1, x_2, \quad , x_n)$ - вектор - устун.

(1.17)-(1.19) масаланинг матрица кўринишдаги ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$AX = P_0, \qquad (1.23)$$

$$X \geq 0, \qquad (1.24)$$

$$Y = C'X \rightarrow min, \qquad (1.25)$$

бу ерда $C = (c_1, c_2, \quad , c_n)$ -қатор вектор, $A = (a_{ij})$ - (1.17) система коэффициентларидан ташкил топган матрица; $X = (x_1, x_2, \quad , x_n)$ ва $P_0=(b_1, b_2, \quad , b_n)$ - устун векторлар.

(1.17)-(1.19) масалани йиғиндилар ёрдамида ҳам ифодалаш мумкин:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j = b_i, \qquad (i=1, \quad , m) \qquad (1.26)$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j=1, \quad , n) \qquad (1.27)$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j \rightarrow min. \qquad (1.28)$$

√

1-таъриф. Берилган (1.17)-(1.19) масаланинг жоиз ечими ёки режаси деб, унинг (1.17) ва (1.19) шартларини қаноатлантирувчи $X=(x_1, x_2, \quad , x_n)$ векторга айтилади.

2-таъриф. Агар жоиз режалар тўпламига тегишли бўлган X^0 векторнинг n-m та координатаси (n – номаълумлар сони, m – тенгламалар сони) нолга тенг бўлиб, қолган m та координаталарига мос келган шарт векторлар(масалан, P_{n+1}, $P_{n+2},...,P_{n+m}$ векторлар) чизиқли эркли бўлса, у ҳолда X^0 жоиз режа базис(асосий) режа дейилади.

3-таъриф. Агар $X=(x_1, x_2, \quad , x_n)$ базис режадаги мусбат координаталар сони m га тенг бўлса, у ҳолда бу режа айнимаган базис режа, акс ҳолда айниган базис режа дейилади.

4-таъриф. Чизиқли функция (1.19) га энг кичик қиймат берувчи $X=(x_1, x_2, \quad , x_n)$ базис режа масаланинг оптимал режаси ёки оптимал ечими дейилади.

Чизиқли дастурлаш масаласи устида қуйидаги тенг кучли алмаштиришларни бажариш мумкин.

1. $maxY$ ни $minY$ га айлантириш. Ҳар қандай чизиқли дастурлаш масаласини каноник кўринишга келтириш учун (1.14) тенгсизликлар системасини тенгламалар системасига ва $maxY$ ни $minY$ га айлантириш керак. $maxY$ ни $minY$ га келтириш учун, $maxY$ ни тескари ишора билан олиш, яъни $-maxY=minY$ ёки $maxY=-minY$ кўринишда олиш етарлидир.

Ҳақиқатдан ҳам, ҳар қандай $f(x_1, x_2, \quad , x_n)$ функциянинг минимуми тескари ишора билан олинган шу функция максимумининг қийматига тенг, яъни

$$minf(x_1, x_2, \quad , x_n) \text{ ва } - max[f(x_1, x_2, \quad , x_n)],$$
$$maxf(x_1, x_2, \quad , x_n) \text{ ва } - min[f(x_1, x_2, \quad , x_n)]$$

ифодалар номаълумларнинг бир хил қийматларидагина ўзаро тенг бўлишини кўрсатиш мумкин.

2. Тенгсизликларни тенгламага айлантириш. n номаълумли

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \quad + a_nx_n \le b \qquad (1.29)$$

чизиқли тенгсизликни қараймиз. Бу тенгсизликни тенгламага айлантириш учун унинг кичик томонига номанфий ўзгарувчини, яъни $x_{n+1} \ge 0$ ни қўшамиз.

Натижада $n+1$ номаълумли чизиқли тенгламага эга бўламиз:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \quad + a_nx_n + x_{n+1} = b \qquad (1.30)$$

(1.29) тенгсизликни тенгламага айлантириш учун қўшилган x_{n+1} ўзгарувчи қўшимча ўзгарувчи деб аталади.

(1.29) тенгсизлик ва (1.30)тенгламанинг ечимлари бир хил эканлиги қуйидаги теоремада кўрсатилган.

1-теорема. Берилган (1.29) тенгсизликнинг ҳар бир $X=(\alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_n)$ ечимига (1.30) тенгламанинг фақат битта

$$Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \quad , \alpha_n, \alpha_{n+1})$$

ечими мос келади ва аксинча, (1.30) тенгламанинг ҳар бир Y_0 ечимига (1.29) тенгсизликнинг фақат битта X_0 ечими мос келади.

Теорема исботи. Фараз қилайлик, X_0 (1.29) тенгсизликнинг ечими бўлсин. У ҳолда $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \quad + a_n\alpha_n \le b$ муносабат ўринли бўлади. Тенгсизликнинг чап томонини ўнг томонга ўтказиб ҳосил бўлган ифодани α_{n+1} билан белгилаймиз

$$0 \le b - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \quad + a_n\alpha_n) = \alpha_{n+1}.$$

Энди $Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \quad , \alpha_n, \alpha_{n+1})$ векторни (1.30) тенгламанинг ечими эканлигини кўрсатамиз.

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n+\alpha_{n+1}=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n+(b-a_1\alpha_1-a_2\alpha_2-...-a_n\alpha_n)=b.$$

Энди агар Y_0 (1.30) тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда у (1.29) тенгсизликни ҳам қаноатлантиришини кўрсатамиз.

Шартга кўра:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \quad + a_n\alpha_n + \alpha_{n-1} = b,$$
$$\alpha_{n+1} \ge 0.$$

Бу тенгламадан $\alpha_{n+1} \ge 0$ сонни ташлаб юбориш натижасида

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \quad + a_n\alpha_n \le b$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бундан кўринадики, $X_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n)$ (1.29) тенгсизликнинг ечими экан.

Шундай йўл билан чизиқли дастурлаш масаласининг чекламаларидаги тенгсизликларни тенгламаларга айлантириш мумкин. Бунда шунга эътибор бериш керакки, системадаги турли тенгсизликларни тенгламаларга айлантириш учун уларга бир-бирларидан фарқ қилувчи номанфий ўзгарувчиларни қўшиш керак. Масалан, агар чизиқли дастурлаш масаласи қуйидаги

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n \le b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n \le b_2 , \\ ------------------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n \le b_m , \end{cases} \qquad (1.31)$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \quad , x_n \ge 0, \qquad (1.32)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \quad + c_nx_n \to max \qquad (1.33)$$

кўринишда бўлса, бу масаладаги тенгсизликларнинг кичик томонига $x_{n+1} \geq 0,\ x_{n+2} \geq 0, \quad ,\ x_{n+m} \geq 0$ қўшимча ўзгарувчилар қўшиш ёрдамида тенгламаларга айлантириш мумкин. Бу ўзгарувчилар Y=C'X га 0 коэффициент билан киритилади. Натижада берилган (1.31)-(1.33) масала қуйидаги кўринишга келади.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} = b_2, \\ \text{-----------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n \quad + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \qquad (1.34)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0,\ x_{n-1} \geq 0, \ldots,\ x_{n+m} \geq 0, \qquad (1.35)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + O(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}) \to max. \qquad (1.36)$$

Худди шунингдек,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_m \geq b_2, \\ \text{-----------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{cases} \qquad (1.37)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \quad ,\ x_n \geq 0, \qquad (1.38)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \quad + c_nx_n \to min. \qquad (1.39)$$

кўринишда берилган чизиқли дастурлаш масаласини каноник кўри-нишга келтириш мумкин. Бунинг учун қўшимча $x_{n+1} \geq 0,\ x_{n+2} \geq 0,\ \ldots,\ x_{n+m} \geq 0$ ўзгарувчилар тенгсизликларнинг катта томонидан айрилади. Натижада қуйидаги масала ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n \quad - x_{n+2} = b_2, \\ \text{-----------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n \quad - x_{n+m} = b_m, \end{cases} \qquad (1.40)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0,\ x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0, \ldots,\ x_{n+m} \geq 0, \qquad (1.41)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + O(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}) \to min.$$

(1.42)

Энди чизиқли дастурлаш масаласи ечимларининг хоссалари билан танишамиз. Бунинг учун энг аввал қавариқ комбинация ва қавариқ тўплам тушунчасини эслатиб ўтамиз.

5-таъриф. $A_1, A_2, ..., A_n$ векторларнинг қавариқ комбинацияси деб

$$\alpha_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \ , \ i=\overline{1,n}$$

шартларни қаноатлантирувчи

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \quad + \alpha_n A_n$$

векторга айтилади. n - ўлчовли фазодаги ҳар бир $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ векторга координаталари $(a_1, a_2, \quad ,a_n)$ бўлган нуқта мос келади. Шунинг учун бундан кейин $A = (a_1, a_2, \quad ,a_n)$ векторни n - ўлчовли фазодаги нуқта деб қараймиз.

6-таъриф. Агар n ўлчовли вектор фазодаги С тўплам ўзининг ихтиёрий A_1 ва A_2 нуқталари билан бир қаторда бу нуқталарнинг қавариқ комбинациясидан иборат бўлган $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ $(\alpha_1 > 0, \ \alpha_2 > 0, \ \alpha_1 + \alpha_2 = 1)$ нуқтани ҳам ўз ичига олса, яъни $A_1, A_2 \in C \Rightarrow A \in C$ бўлса, бу тўплам қавариқ тўплам деб аталади.

2-теорема. Чизиқли дастурлаш масаласининг мумкин бўлган режаларидан ташкил топган тўплам қавариқ тўплам бўлади.

Исботи. Чизиқли дастурлаш масаласининг ихтиёрий иккита мумкин бўлган режасининг қавариқ комбинацияси ҳам режа эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, X_1 ва X_2 берилган чизиқли дастурлаш масаласининг мумкин бўлган режалари бўлсин. У ҳолда

$$AX_1 = P_0, \quad X_1 \geq 0, \qquad (1.43)$$

ва $$AX_2 = P_0, \quad X_2 \geq 0, \qquad (1.44)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Энди x_1 ва x_2 режаларнинг қавариқ комбинациясини тузамиз.

$$X = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 , \qquad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

ҳамда уни режа эканлигини кўрсатамиз:

$$AX = A[\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2] = \alpha A x_1 + (1-\alpha) A x_2$$

Энди (1.43) ва (1.44) тенгламаларни инобатга олиб топамиз:

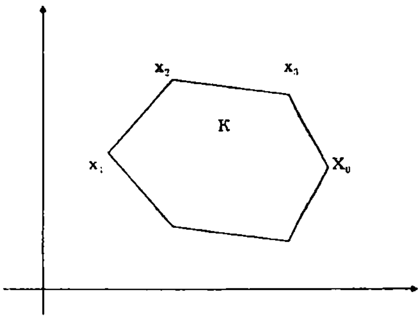
$$\text{AX} = \alpha P_0 + (1-\alpha) P_0 = P_0.$$

Бу муносабат X вектор ҳам режа эканлигини кўрсатади.

3-теорема. Чизиқли дастурлаш масаласининг мақсад функцияси ўзининг оптимал қийматига шу масаланинг режаларидан ташкил топган қавариқ тўпламнинг бурчак нуқтасида эришади. Агар чизиқли функция K қавариқ тўпламнинг бирдан ортиқ бурчак нуқтасида оптимал қийматга эришса, у шу нуқталарнинг қавариқ комбинациясидан иборат бўлган ихтиёрий нуқтада ҳам ўзининг оптимал қийматига эришади.

Исботи. Дейлик, X_0 нуқта чизиқли функцияга экстремум қиймат берувчи нуқта бўлсин. Агар X_0 нуқта бурчак нуқта бўлса, у ҳолда теорема ўз-ўзидан исбот қилинган бўлади. Фараз қилайлик,

X_0 нуқта K қавариқ тўпламнинг ички нуқтаси, x_1, x_2, x_p нуқталар эса унинг бурчак нуқталари бўлсин (1.1-шакл):



1.1 – шакл

X_0 нуқта чизиқли функцияга минимум қиймат берувчи нуқта бўлганлиги сабабли

$$Y(X_0) \le Y(X)$$

тенгсизлик ихтиёрий $X \in K$ учун ўринли бўлади. X_0 нуқта ички нуқта бўлганлиги учун уни бурчак нуқталарнинг қавариқ комбинацияси орқали ифодалаш мумкин:

$$X_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_i, \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1, \qquad \alpha_i \ge 0 \qquad (i = \overline{1,p}) \quad (1.45)$$

$Y(X)$ чизиқли функционал бўлганлиги сабабли

$$Y(X_0) = Y(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \quad + \alpha_p X_p) = \alpha_1 Y(X_1) + $$
$$+ \alpha_2 Y(X_2) + \ldots + \alpha_p Y(X_p) = m, \qquad (1.46)$$

бу ерда m ҳар қандай $X \in K$ учун функциянинг минимал қиймати.

(1.46) тенгликдаги ҳар бир $Y(X_i)$ ни

$$min\ Y(X_i) = Y(X_m)$$

билан алмаштириб қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$Y(X_0) \ge \alpha_1 Y(X_m) + \alpha_2 Y(X_m) + \quad + \alpha_p Y(X_m) =$$
$$Y(X_m)(\alpha_p + \ldots + \alpha_p) = Y(X_m),$$

яъни

$$Y(X_0) \geq Y(X_m).$$

Бу тенгсизликни (1.46) тенглик билан солиштириб қуйидагига эга бўламиз

$$Y(X_0) = Y(X_m)=m.$$

Демак, X_m бурчак нуқтада чизиқли функция ўзининг минимал қийматига эришар экан.

Энди мақсад функция ўзининг минимал қийматига X_1, X_2, X_p нуқталарда эришсин, яъни

$$Y(X_1) = Y(X_2) = \quad = Y(X_p) = m$$

шарт ўринли бўлсин деб фараз қиламиз. Бу нуқталарнинг қаварик комбинациясидан иборат бўлган X нуқтани қараймиз.

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \quad + \alpha_p X_p$$

$$\alpha_i \geq 0 \ (i = \overline{1,p}),$$

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$$

У ҳолда

$$Y(X) = Y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \quad + \alpha_p x_p) = \alpha_1 Y(X_1) + \alpha_2 Y(X_2) + ... +$$

$$+ \alpha_p Y(X_p) = m\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \quad + \alpha_p) = m$$

Демак, мақсад функция X нуқтада ҳам минимум қийматга эришар экан. Шу билан теорема исбот қилинди.

4-теорема. Агар k та ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган P_1, P_2, $P_к$ векторлар берилган бўлиб, улар учун

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + ... + P_к x_к = P_0 \tag{1.47}$$

тенглик барча $x_i \geq 0$ лар учун ўринли бўлса, у ҳолда

$$X = (x_1, x_2, ..., x_к, 0, ..., 0)$$

вектор К қаварик тўпламнинг бурчак нуқтаси бўлади.

Исботи. Маълумки (1.47) тенгликни қаноатлантирувчи номанфий координатали $X=(x_1, x_2, ..., x_к)$ вектор чизиқли дастурлаш масаласининг режаси бўлади. Дейлик X бурчак нуқта бўлмасин. У ҳолда X режани X_1 ва X_2 бурчак нуқталарнинг қаварик комбинацияси орқали ифодалаш мумкин, яъни

$$X = \alpha_1 X_1 + (1-\alpha_1) X_2,$$

$$0 \leq \alpha_1 \leq 1.$$

X векторнинг n-k та компонентаси нолга тенг бўлиб, X_1 ва X_2 векторларнинг координаталари мусбат ва $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ тенгсизлик ўринли бўлганлиги сабабли X_1 ва X_2 векторларнинг ҳам n-k та координатаси нолдан иборат бўлади, яъни

$$X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_к^{(1)}, 0, 0 \quad 0),$$

$$X_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_к^{(2)}, 0, 0 \quad 0).$$

X_1 ва X_2 векторлар чизиқли дастурлаш масаласининг режалари, шунинг учун

$$AX_1 = P_0,$$

$$AX_2 = P_0$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бу шартларни қуйидаги формада ёзамиз:

$$P_1x_1^{(1)} + P_2x_2^{(1)} + \ldots + P_кx_к^{(1)} = P_0$$
$$P_1x_1^{(2)} + P_2x_2^{(2)} + \ldots + P_кx_к^{(2)} = P_0,$$

Маълумки, P_0 векторнинг ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган P_1, P_2, ..., $P_к$ векторлар орқали фақат битта ёйилмасини топиш мумкин. Шунинг учун

$$x_i = x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$$

Демак, X векторни K тўпламнинг ихтиёрий иккита нуқтасининг қавариқ комбинацияси орқали ифодалаш мумкин эмас экан. Бундан X нуқта K тўпламнинг бурчак нуқтаси бўлади деган хулоса келиб чиқади. Шу билан теорема исбот қилинди.

5-теорема. Агар $X=(x_1, x_2, \ \ , x_n)$ бурчак нуқта бўлса, у ҳолда мусбат x_i ларга мос келувчи векторлар ўзаро чизиқли эркли векторлар системасини ташкил қилади (теоремани исботсиз қабул қиламиз).

Юқорида келтирилган теоремалардан қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин.

1-хулоса. K тўпламнинг ҳар бир бурчак нуқтасига P_1, P_2, ..., P_n векторлар системасидан m та ўзаро чизиқли эркли векторлар системаси мос келади.

2-хулоса. $X=(x_1, x_2, \ \ , x_n)$ K тўпламнинг бурчак нуқтаси бўлиши учун мусбат x_i координаталар

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \quad + P_nx_n = P_0$$

ёйилмада ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган P_i векторларнинг коэффициентларидан иборат бўлиши зарур ва етарли.

3-хулоса. Чизиқли дастурлаш масаласи базис ечимларидан ташкил топган тўплам K қавариқ тўпламнинг бурчак нуқталар тўпламига мос келади ва аксинча, ҳар бир базис ечим K тўпламнинг бирор бурчак нуқ-тасига мос келади.

4-хулоса. Чизиқли дастурлаш масаласининг оптимал ечимини K тўпламнинг бурчак нуқталари орасидан қидириш керак.

3-§. Чизиқли дастурлаш масаласининг геометрик талқини. График усул. Иқтисодий масалани график усулда ечиш

Қуйидаги кўринишда ёзилган чизиқли дастурлаш масаласини кўрамиз:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le a_i \qquad (i = \overline{1,m}), \qquad (1.48)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,n}), \qquad (1.49)$$

$$Y=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min). \qquad (1.50)$$

Ушбу чизиқли дастурлаш масаласининг геометрик талқини билан танишамиз.

Маълумки, n та тартиблашган $x_1, x_2, \quad , x_n$ сонлар n-лиги (бирлашмаси) n ўлчовли фазонинг нуқтаси бўлади. Шунинг учун (1.48)-(1.50) чизиқли дастурлаш масаласининг режасини n ўлчовли фазонинг нуқтаси деб қараш мумкин. Бизга маълумки, бундай нуқталар тўплами қавариқ тўпламдан иборат бўлади. Қавариқ тўплам чегараланган (қавариқ кўпбурчак), чегараланмаган (қавариқ кўп қиррали соҳа) бўлиши, битта нуқтадан иборат бўлиши ёки бўш тўплам бўлиши ҳам мумкин.

Координаталари

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \quad + a_nx_n = a$$

тенгламани қаноатлантирувчи $(x_1, x_2, \quad x_n)$ нуқталар тўплами гипертекислик деб аталади. Шу сабабли

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \quad + c_nx_n = Y$$

кўринишида ёзилган мақсад функцияни Y нинг турли қийматларига мос келувчи ўзаро параллел **гипертекисликлар** оиласи деб қараш мумкин.

Ҳар бир гипертекисликнинг ихтиёрий нуқтасида Y функция бир хил қийматни қабул қилади (демак, ўзгармас сатҳда сақланади). Шунинг учун улар «сатҳ текисликлари» дейилади. Геометрик нуқтаи назардан чизиқли дастурлаш масаласини қуйидагича таъсифлаш мумкин:

(1.48) ва (1.49) шартларни қаноатлантирувчи ечимлар кўпбурчагига тегишли бўлган шундай $X^*=(x_1^*, x_2^*, \quad , x_n^*)$ нуқтани топиш керакки, бу нуқтада Y мақсад функцияга максимум(минимум) қиймат берувчи (1.50) гипертекисликлар оиласига тегишли бўлган гипертекислик ўтсин. Жумладан, $n=2$ да (1.48)-(1.50) масала қуйидагича талқин қилинади:

(1.48)-(1.49) шартларни қаноатлантирувчи ечимлар кўпбурчагига тегишли бўлган шундай $X^*=(x_1^*, x_2^*)$ нуқтани топиш керакки, бу нуқтада Y мақсад функцияга энг катта (энг кичик) қиймат берувчи ва (1.50) сатҳ чизиқлар оиласига тегишли бўлган чизиқ ўтсин.

Чизиқли дастурлаш масаласининг геометрик талқинига ҳамда 2-§ да танишган чизиқли дастурлаш масаласи ечимининг хоссаларига таяниб масалани баъзи ҳолларда график усулда ечиш мумкин.

Икки ўлчовли фазода берилган қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласини кўрамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \ , \\ \text{-------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \ , \end{cases} \qquad (1.51)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \qquad (1.52)$$
$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 \to max. \qquad (1.53)$$

Фараз қилайлик, (1.51) система (1.52) шартни қаноатлантирувчи ечимларга эга бўлсин. ҳамда ечимлардан ташкил топган тўплам чекли бўлсин. (1.51) ва (1.52) тенгсизликларнинг ҳар бири

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \ , (i=1,...,m)$$

$x_1=0$, $x_2=0$ чизиқлар билан чегараланган ярим текисликларни ифодалайди.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \qquad (i=1,\dots,m) \qquad (1.54)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ярим текислик $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ тўғри чизиқнинг қайси томонида ётишини аниқлаш учун O(0;0) координата бошини мўлжал нуқта деб қараш мумкин. Агар $x_1=0$, $x_2=0$ қийматларни (1.54) тенгсизликка қўйганда $0 \leq b_i$ тенгсизлик ҳосил бўлса, у ҳолда қидирилаётган ярим текислик $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ тўғри чизиқнинг остида (координата боши томонида) ётади, акс ҳолда у бу тўғри чизиқнинг юқорисида ётувчи ярим текисликдан иборат бўлади.

Чизиқли функция (1.51) ҳам маълум бир ўзгармас C_0=const қийматда

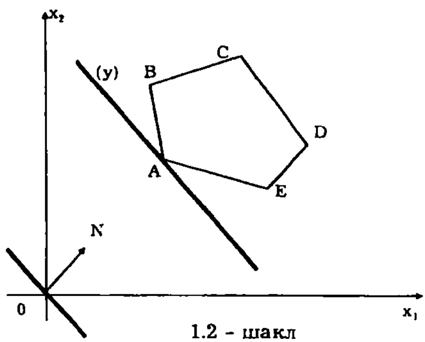
$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$$

сатҳ тўғри чизиқлар оиласига тегишли бўлган тўғри чизиқни ифодалайди. Ечимлардан ташкил топган қавариқ тўпламни ҳосил қилиш учун

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1,\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 = b_2,...,a_{m1}x_1+a_{m2}x_2 = b_m, \quad x_1=0,\ x_2=0,$$

тўғри чизиқлар билан чегараланган кўпбурчакни ясаймиз.

Фараз қилайлик бу кўпбурчак ABCDE бешбурчакдан иборат бўлсин (1.2-шакл)



1.2 - шакл

Чизиқли функцияни ихтиёрий ўзгармас C_0 сонга тенг деб оламиз.

Натижада

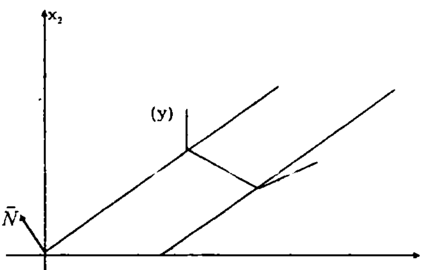
$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0 = const$$

тўғри чизиқ ҳосил бўлади. Бу тўғри чизиқни $\bar{N}(c_1,\ c_2)$ вектор йўналишида ёки унга тескари йўналишида ўзига параллел суриб бориб қавариқ кўпбурчакнинг чизиқли функцияга энг катта ёки энг кичик қиймат берувчи нуқталарни аниқлаймиз.

1-шаклдан кўриниб турибдики, чизиқли функция ўзининг минимал қийматига қавариқ кўпбурчакнинг A нуқтасида эришади. C нуқтада эса, у ўзининг максимал (энг катта) қийматига эришади. Биринчи ҳолда $A(x_1,\ x_2)$ нуқтанинг координаталари масаланинг чизиқли функциясига минимал қиймат берувчи оптимал ечими бўлади. Унинг координаталари AB ва AE тўғри чизиқларни ифодаловчи тенгламалар орқали аниқланади.

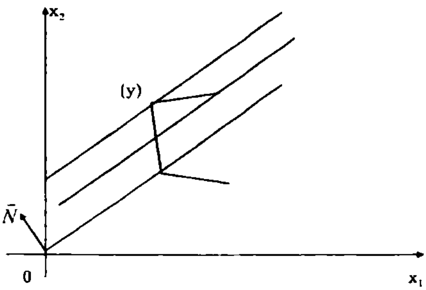
Агар ечимлардан ташкил топган қавариқ кўпбурчак чегараланмаган бўлса, икки ҳол бўлиши мумкин.

1-ҳол. $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ тўғри чизиқ $\bar{N}$ вектор бўйича ёки унга қарама-қарши йўналишда силжиб бориб ҳар вақт қавариқ кўпбурчакни кесиб ўтади. Аммо на минимал, на максимал қийматга эришмайди. Бу ҳолда чизиқли функция қуйидан ва юқоридан чегараланмаган бўлади (1.3-шакл)

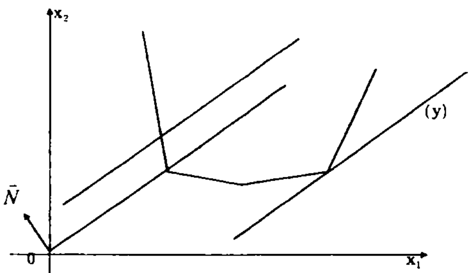


1.3 - шакл

$c_1x_1 + c_2x_2 = c_0$тўғри чизиқ $\bar{N}$ вектор бўйича силжиб бориб қавариқ кўпбурчакнинг бирорта бурчак нуқтасида ўзининг минимал ёки максимум қийматига эришади. Бундай ҳолда чизиқли функция юқоридан чегараланган, қуйидан эса чегараланмаган (1.4-шакл) ёки қуйидан чегараланган, юқоридан эса чегараланмаган (1.5-шакл) бўлиши мумкин.



1.4 - шакл



1.5 - шакл

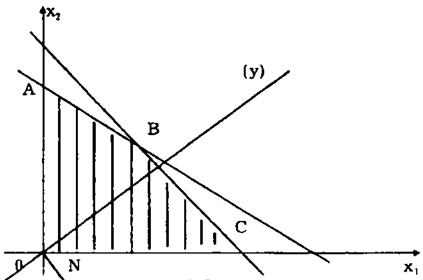
1-мисол. Масалани график усулда ечинг.

$$4x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$
$$Y = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow max.$$

Ечиш. Ечимлардан ташкил топган қавариқ кўпбурчак ясаш учун координаталар системасида

$$4x_1 + 3x_2 = 12 \quad (L_1),$$
$$3x_1 + 4x_2 = 12 \quad (L_2),,$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

чизиқлар ясаймиз (1.6-шакл).



1.6 - шакл

Берилган тенгсизликларни қаноатлантирувчи ечим штрихланган OABC тўртбурчакни ташкил қилади. Энди координаталар бошидан $\bar{N}=(2,5)$ векторни ясаймиз ва унга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ

$$2x_1 - 5x_2 = const$$

тенглама орқали ифодаланади. Уни $\bar{N}$ вектор йўналишида ўзига параллел силжитиб борамиз. Натижада чизиқли функцияга максимал қиймат берувчи $C(3;0)$ нуқтани топамиз. Бу нуқтанинг координаталари $x_1=3$, $x_2=0$ масаланинг оптимал ечими бўлади ва $Y_{max}=2\cdot3-5\cdot0=6$ бўлади.

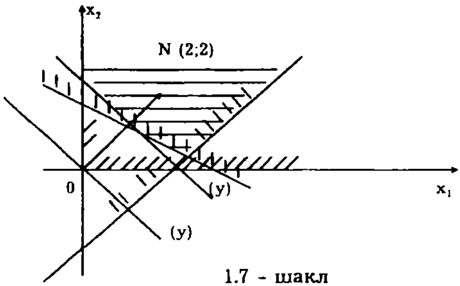
2-мисол. Берилган чизиқли дастурлаш масаласини график усулда ечинг.

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ &x_1 - x_2 \leq 2, \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \\ &Y = 2x_1 + 2x_2 \to max. \end{aligned}$$

Ечиш. Ечим кўпбурчагини ҳосил қиламиз. Унинг учун координаталар системасида

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 = 3, \\ &x_1 \quad x_2 = 2, \\ &x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \end{aligned}$$

тўғри чизиқлар ясаймиз (1.7-шакл).



1.7 - шакл

Шаклдан кўринадики, ечимлар кўпбурчаги юқоридан чегараланмаган. Координата бошидан $\bar{N}$ (2:2) векторни ясаймиз ва унга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу чизиқ

$$2x_1 + 2x_2 = const$$

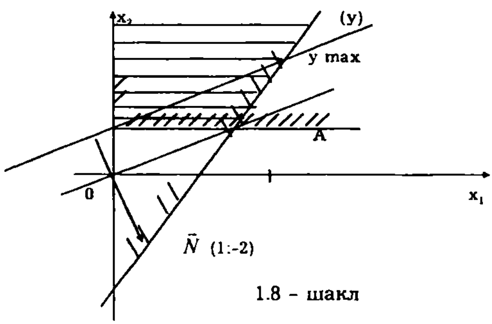
тенглама орқали ифодаланади.

Шаклдан кўринадики, масалада мақсад функциянинг максимум қиймати юқоридан чегараланмаган экан.

3-мисол. Масалани график усулда ечинг.

$$2x_1 - x_2 \le 4 ,$$
$$x_1 \ge 0,$$
$$x_2 \ge 1,$$
$$Y = x_1 - 2x_2 \to max.$$

Масалани юқоридаги усул билан ечиб қуйидаги шаклга эга бўламиз (1.8-шакл):



1.8 - шакл

Шаклдан кўринадики, ечимлар тўплами чегараланмаган, лекин оптимал ечим мавжуд ва у А нуқта координаталаридан иборат.

График усул ёрдами билан иқтисодий масалаларни ечиш ва ечимни таҳлил қилиш мумкин. Буни қуйидаги иқтисодий масала мисолида кўрамиз.

Дейлик, корхонада икки хил бўёқ ишлаб чиқарилсин. Бу бўёқларни ишлаб чиқариш учун 2 хил хом ашёдан фойдаланилсин. Хом ашёларнинг захираси берилган ва улар 6 ва 8 бирликни, иккинчи бўёққа бўлган талаб 2 бирликни ташкил қилади ва у биринчи бўёққа бўлган талабдан 1 бирликка катта.

Ҳар бир бўёқ бирлигини ишлаб чиқариш учун керак бўлган хом ашёлар миқдори (нормаси) ҳамда корхонанинг ҳар бир бўёқдан оладиган даромади қуйидаги жадвалда келтирилган:

Хом ашёлар / бўёқлар	1	2	Бўёқлар баҳоси (шартли бирлик)
I	1	2	3
II	2	1	2
Хом ашё захираси(т)	6	8	

Масаланинг иқтисодий маъноси:

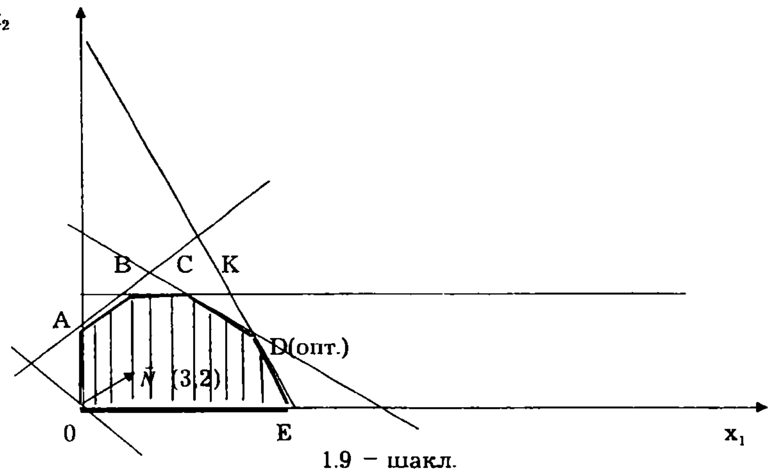
Ҳар бир бўёқдан қанча ишлаб чиқарилганда уларга сарф қилинган хом ашёлар миқдори уларнинг захираларидан ошмайди ҳамда талаб бўйича шартлар ҳам бажарилади?

Масаладаги номаълумларни белгилаймиз: x_1 – ишлаб чиқаришга режалаштирилган I – бўёқ миқдори; x_2 – II – бўёқ миқдори;

У ҳолда масаланинг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади.

$$x_1 + 2x_2 \le 6, \quad (1)$$
$$2x_1 + x_2 \le 8, \quad (2)$$
$$-x_1 + x_2 \le 1, \quad (3)$$
$$x_2 \le 2, \quad (4)$$
$$x_1 \ge 0, \quad (5)$$
$$Y = 3x_1 + 2x_2 \to max \quad (6)$$

Масалани график усулда ечамиз ҳамда $D\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$ оптимал нуқта эканлигини аниқлаймиз (1.9. шакл).



1.9 – шакл.

Демак, оптимал ечим қуйидагича бўлади:

$$x_1 = 3\frac{1}{3};\quad x_2 = 1\frac{1}{3};\quad Y_{max} = 12\frac{2}{3}.$$

Бундан кўринадики, корхона биринчи бўёқдан $3\frac{1}{3}$ бирлик, иккинчисидан $1\frac{1}{3}$ бирлик ишлаб чиқариши керак. Бу ҳолда унинг оладган даромади $12\frac{2}{3}$ бирликка тенг бўлади.

Энди график ёрдамида иқтисодий масала ечимини таҳлил қилиш мумкин эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун оптимал D нуқтага қараймиз.

Бу нуқта $2x_1+x_2=8$ ва $x_1+2x_2=6$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси эканлигидан берилган иқтисодий масаланинг (1) ва (2) чегараловчи шартлари D нуқтада тенгламага айланишини кўрсатади. Бу эса бўёқ ишлаб чиқариш учун сарф килинадиган иккала хом ашёнинг ҳам камёб (дефицит) эканлигини кўрсатади. Оптимал нуқта билан боғлиқ бўлган шартлар актив шартлар. Унга боғлиқ бўлмаган шартлар эса пассив шартлар деб аталади. Биз кўраётган масалада маҳсулотларга бўлган талабга қўйилган $x_1+x_2\leq 1$ ва $x_2 \leq 2$ шартлар оптимал нуқтага боғлиқ эмаслигини ва шу сабали бу шартлар пассив шартлар эканлигини аниқлаймиз.

Пассив шартларга мос келувчи ресурслар камёб бўлмайди ва уларнинг маълум даражада ўзгариши оптимал ечимга таъсир қилмайди. Аксинча, актив шартларга мос келувчи ресурсларни бир бирликка оширилиши оптимал ечимнинг ўзгаришига олиб келади.

Масалан, 1-хом ашё захирасини бир бирликка оширилиши оптимал ечимга қандай таъсир кўрсатишини кўриш учун уни 7 га тенг деб оламиз. У ҳолда CD кесма ўзига параллел равишда юқорига кўтарилади ва DCK учбурчак ҳосил бўлади. Энди К нуқта оптимал нуқтага айланади.

Бу нуқтада $x_2=2$ ва $2x_1+x_2=8$ тўғри чизиқлар кесишади. Шунинг учун энди масаланинг (2) ва (4) шартлари актив шартларга, (1) ва (3) шартлари эса пассив шартларга айланади. К нуқтанинг координаталари $x_2= 2,\ x_1=3$. Демак, янги оптимал ечим

$$x_1 = 3, \quad x_2 =2, \quad Y_{max} =13$$

бўлади.

Оптимал ечимда 1-хом ашёга доир (1) чегаравий шарт

$$x_1 + 2x_2 = 3+2*2=7$$

га тенг бўлади. Демак, 1-хом ашёнинг энг кўп мумкин бўлган захираси 7 га тенг бўлиши кераклигини кўрсатади.

Худди шундай йўл билан 2-хом ашёлар бир бирликка ошириш оптимал ечимни қандай ўзгартиришини кўрсатиш мумкин.

Бундан ташқари камёб бўлмаган хом ашёлар миқдорини, оптимал ечимга таъсир қилмаган даражада, қанчалик камайтириш мумкинлигини ҳам кўрсатиш мумкин.

Юқоридаги 1.9-шаклда BC кесма $x_2 = 2$ чизиқли, яъни масалаинг 4 шартини ифодалайди. Бу пассив шарт. Мақсад функция қийматини ўзгартирмаган ҳолда пассив шартни қанчалик ўзгартириш мумкин эканлигини аниқлаш учун BC кесмани ўзига параллел пастга то D нуқта билан кесишгунча силжитамиз. Бу нуқтада $x_2 = 1\frac{1}{3}$ бўлади.

Демак, иккинчи бўёққа бўлган талабни оптимал ечимга таъсир қилмасдан $1\frac{1}{3}$ гача камайтириш мумкин экан.

Шундай йўл билан масаланинг оптимал ечимига таъсир этмасдан унинг (3) пассив шартнинг ўнг томонини қанчага камайтириш мумкин эканлигини кўрсатиш мумкин.

Таянч сўз ва иборалар.

Дастурлаш, чизиқли дастурлаш, модел, математик модел, чегаравий шартлар, мақсад функция, жоиз режа, базис ечим (режа), айниган(хос) базис режа, айнимаган базис режа, оптимал режа, қўшимча ўзгарувчи, векторларнинг қавариқ комбинацияси, қавариқ тўплам, қавариқ тўпламнинг бурчак нуқтаси, гипертекислик, гипертекисликлар оиласи, сатҳ текисликлари, актив шартлар, пассив шартлар, ечимлар кўпбурчаги.

Назорат саволлари

1. Математик дастурлашнинг предмети нимадан иборат?

2. Иқтисодий масаланинг математик модели нима ва у қандай тузилади?

3. Чизиқли дастурлаш масаласининг чегараловчи шартлари қандай кўринишда бўлиши мумкин?

4. Ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласидаги номаълумлар, асосий шартлар ва мақсад функция қандай маънони билдиради?

5. «Истеъмол савати» масаласидаги номаълумлар, асосий шартлар ва мақсад функция қандай маънони билдиради?

6. «Оптимал бичиш» масаласидаги номаълумлар, асосий шартлар ва мақсад функция қандай маънони билдиради?

7. Умумий кўринишдаги чизиқли дастурлаш масаласини қандай шаклларда ифодалаш мумкин?

8. Чизиқли дастурлаш масаласининг жоиз ечими нима?

9. Чизиқли дастурлаш масаласининг базис ечимини таърифланг.

10. Айниган ва айнимаган базис ечимлар нима?

11. Чизиқли дастурлаш масаласининг оптимал ечими нима?

12. Чизиқли дастурлаш масаласида қандай тенг кучли алмаштиришларни бажариш мумкин?

13. Чизиқли дастурлаш масаласи ечимларидан ташкил топган тўплам қандай тўплам бўлади?

14. Ечимлардан ташкил топган қавариқ кўпбурчакнинг бурчак нуқтаси билан базис ечим орасида қандай боғланиш бор?

15. Мақсад функция ўзининг оптимал қийматига қандай нуқтада эришади?

16. Чизиқли дастурлаш масаласининг жоиз режасининг мавжуд эмаслик шартлари қандай?

17. Чизиқли дастурлаш масаласининг геометрик талқини қандай?

18. Чизиқли дастурлаш масаласи ечимларининг қандай хоссаларига асосан график усулни қўллаш мумкин?

19. Чизиқли дастурлаш масаласи режаларидан ташкил топган тўплам қандай бўлиши мумкин?

20. Қандай ҳолда чизиқли дастурлаш масаласи бирдан ортиқ оптимал ечимга эга бўлиши мумкин?

21. Иқтисодий масалани график усулда ечганда хом ашёларнинг камёб ёки камёб эмаслигини қандай аниқлаш мумкин?

22. Пассив ва актив чегараловчи шартлар нима?

23. Актив шартларни (камёб хом ашёларни) бир бирликка оширганда оптимал ечим қандай ўзгаради?

24. Оптимал ечимни ўзгартирмаган ҳолда пассив шартларни қанчалик ўзгартириш мумкин?

Масалалар

1. Мебел фабрикасида стандарт ўлчамдаги фанерлардан мос равишда 24, 31 ва 18 дона 3 хил буюмлар учун тайёр қисмлар қирқилиши керак. ҳар бир фанер тайёр қисмларга икки хил усулда қирқилиши мумкин. Қуйидаги жадвалда ҳар бир қирқиш усулида олинадиган тайёр қисмлар сони ва бунда ҳосил бўладиган чиқиндилар миқдори берилган.

Тайёр қисм турлари	қирқиш усулида ҳосил бўладиган тайёр қисмлар сони (дона)	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Чиқиндилар миқдори (см^2)	12	16

Зарур миқдордан кам бўлмаган тайёр қисмлар тайёрлаш ва энг кам чиқиндига эга бўлиши учун фанерлардан нечтасини қайси усулда қирқиш керак?

2. Икки хил маҳсулотни сотишда 4 хил ресурслардан фойдаланилади. Маҳсулотлар бирлигини сотиш учун сарф қилинадиган турли ресурслар миқдори(меъёри) ҳамда ҳар бир ресурснинг заҳираси қуйидаги жадвалда келтирилган.

Ресурслар	ҳар бир маҳсулот бирлигига сарф қилинадиган ресурслар миқдори (меъёр)		Ресурлар заҳираси
	I-маҳсулот	II-маҳсулот	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12
Маҳсулот бирлигини сотишдан олинадиган даромад	2	3	

Чегараланган ресурслардан фойдаланиб савдо корхонасининг даромадини максималлаштирувчи маҳсулотларни сотиш режасини топинг.

3. Фирма ўз маҳсулотини радио ва телевизион тармоқ орқали реклама қилиш имкониятига эга. Фирма 1 ойда реклама учун 1000 долл.миқдорида пул ажратган. Радио орқали рекламанинг ҳар бир

минутига 5 долл., телевизор орқали рекламанинг ҳар минутига эса 100 долл., сарф қилинади. Фирманинг радио рекламани телерекламага нисбатан 2 марта кўпроқ ташкил қилиш хоҳиши бор. Олдинги йиллардаги тажриба шу0ни кўрсатадики, бир минутли телереклама маҳсулот сотилишини радио рекламага нисбатан 25 марта кўпроқ таъминлайди.

Фирманинг ҳар ойда реклама учун ажратиладиган маблағини радио ва телереклама ўртасида оптимал тақсимланг.

4. График усулда қуйидаги тенгсизликлар системасининг ечимлар кўпбурчагини топинг.

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 \le 4\ , \\ &4x_1 + 3x_2 \le 12\ , \\ &-x_1 + x_2 \le 1 \\ &x_1 + x_2 \le 6 \\ &x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \end{aligned}$$

5. Масалани график усулда ечинг ҳамда ундаги пассив ва актив шартларни аниқланг.

$$\begin{aligned} &x_1 \quad x_2 \le 1 \\ &3x_1 - x_2 \le 6 \\ &x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \\ &Y = 6x_1 - 2x_2 \rightarrow max \end{aligned}$$

6. Масалани график усулда ечинг ва масад функциянинг оптимал қийматини ўзгартирмаган ҳолда масала чекламаларини қанчалик ўзгартириш мумкин эканлигини кўрсатинг.

$$\begin{aligned} &2x_1 + 7x_2 \le 21 \\ &7x_1 + 2x_2 \le 49 \\ &x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \\ &Y = 4x_1 + 4x_2 \rightarrow max. \end{aligned}$$

II БОБ. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ МАСАЛАСИНИ АЛГЕБРАИК УСУЛЛАР БИЛАН ЕЧИШ

1- §. Чизиқли дастурлаш масаласининг базис ечими ва уни топиш усуллари

Вектор формада ёзилган чизиқли дастурлаш масаласини кўрамиз:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n = P_0. \tag{2.1}$$

$$X \geq 0, \tag{2.2}$$

$$Y = CX \rightarrow \min \tag{2.3}$$

Бу масала чизиқли дастурлаш масаласининг каноник кўринишидан иборат. Агар масала бундай кўринишда берилмаган бўлса, у ҳолда I бобда кўрсатилган чизиқли алмаштиришларни бажариб уни шундай кўринишга келтириш мумкин. Берилган (2.1)-(2.3) масаланинг оптимал ечими мавжуд бўлиши учун (2.1) система биргаликда ҳамда биттадан ортиқ номанфий ечимга эга бўлиши ва демак, (2.1) системанинг r ранги номаълумлар сони n дан кичик бўлиши керак, яъни $r<n$. Бу ерда $r>n$ маънога эга эмаслигини ҳамда $r=n$ бўлганда система ягона ечимга эга бўлиши ва оптимал ечимни танлаш учун имконият бўлмаслигини айтиб ўтиш ўринли. Дейлик, $r=m$ $(m<n)$ тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда n та P_1, P_2, ..., P_n векторлар системаси m та ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар системасини ўз ичига олади. Бундай векторлар системаси **базис** деб аталади. Берилган P_1, P_2, ..., P_n векторлар системасида бир неча базис мавжуд бўлиши мумкин, лекин уларнинг умумий сони C_n^m дан ошмайди, ҳамда ҳар бир базис m та ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар системасидан иборат бўлади.

Базисга кирувчи векторлар **базис векторлар**, уларга мос келувчи ўзгарувчилар эса **базис ўзгарувчилар** бўлишини I бобда кўрган эдик.

Дейлик, P_1, P_2, ..., P_n векторлар таркибидаги битта базис биринчи m та P_1, P_2, ..., P_m векторларни ўз ичига олсин. Бу ҳолда бу векторларга мос келувчи $x_1, x_2, ..., x_m$ ўзгарувчилар базис ўзгарувчилар ҳамда $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ ўзгарувчилар эса эркли ўзгарувчилар бўлади. Бундай фаразда (2.1) системани Жордан-Гаусс усулини қўллаб қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{n-m} a_{ij}x_{m+j}, \qquad (i = 1,2,...m) \tag{2.4}$$

Бу тенглик $x_1, x_2, ..., x_m$ базис ўзгарувчиларнинг эркли $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ ўзгарувчилар орқали ифодасини кўрсатади. (2.4) кўринишдаги ифода (2.1) системанинг **умумий ечими** ёки унинг

$x_1, x_2, \dots, x_m$ базисга нисбатан **аниқланган формаси** деб аталади. (2.4) кўринишдаги система X- тенгламалар системаси деб ҳам аталади.

Агар $P_1, P_2, \dots, P_n$ векторлар системаси бошқа базисга ҳам эга бўлса, у ҳолда (2.1) системани бошқа базис ўзгарувчиларга нисбатан аниқланган формасини ҳам топиш мумкин.

(2.4) тенгликдаги x_{m+j} $(j=1,2,\dots,n)$ эркли ўзгарувчиларга аниқ қийматлар бериб, базис ўзгарувчиларнинг мос қийматларини топиш ва демак, берилган (2.1) системанинг аниқ бир хусусий ечимини топиш мумкин.

Эркли ўзгарувчиларга 0 қиймат бериб топиладиган хусусий ечим **базис ечим** деб аталади. (2.4) системага мос келувчи базис ечим:

$$x_1=b_1,\ x_2=b_2, \dots,\ x_m=b_m,\ x_{m+1}=0,\ x_{m+2}=0, \dots,\ x_n=0$$

ёки

$$X=(b_1,\ b_2, \dots,\ b_m, 0, 0, \dots, 0).$$

Берилган n та $P_1, P_2,$ P_n векторлар системасидаги базислар сони C_n^m дан ошмаслигини ва ҳар бир базисга аниқ бир базис ечим мос келишини назарга олиб, (2.1) системадаги базис ечимлар сони C_n^m дан ошмайди деб хулоса қилиш мумкин.

Агар (2.1) системанинг базис ечимидаги барча ўзгарувчилар номанфий қийматларни қабул қилса, бундай базис ечим (2.1) – (2.3) масаланинг **базис ечими** бўлади. Математик дастурлашда базис ечим **базис режа** деб ҳам аталади (базис режа ҳақида айрим тушунча ва тасдиқлар I бобда келтирилган).

Базис режа $r=m$ тадан ортиқ мусбат компоненталарни ўз ичига ола олмайди. Агар ундаги мусбат компоненталар сони m га тенг бўлса, бундай базис режа **айнимаган режа**, агар m дан кичик бўлса, у **айниган базис режа** бўлади.

Агар (2.1)-(2.3) чизиқли дастурлаш масаласининг ечимлар (режалар) тўплами бўш бўлмаса, у ҳолда бу режалар ичида камида биттаси базис режа бўлишини исботлаш мумкин.

Энди чизиқли дастурлаш масаласининг базис ечимини топиш усуллари билан танишамиз. Бунинг учун қуйидаги кўринишда ёзилган чизиқли дастурлаш масаласига мурожаат қиламиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{-----------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.5)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0, \qquad (2.6)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \min \qquad (2.7)$$

Юқорида таъкидлаганимиздек, агар бу масала оптимал ечимга эга бўлса, у ҳолда унинг камида битта базис ечими мавжуд бўлади ва у (2.5) системанинг номанфий ечимларидан бири бўлади. Демак, берилган масаланинг аниқ бир базис режасини топиш учун (2.5) системанинг номанфий базис ечимини топиш керак.

Қуйида (2.5) системанинг номанфий базис ечимини топиш усули билан танишамиз.

Бу усулнинг алгоритми қуйидагидан иборат.

1. (2.5) системадаги тенгламаларнинг чап томонидан барча элементлар ўнг томонга ўтказилиб 0 – тенгламалар системаси тузилади:

$$\begin{cases} 0 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n, \\ 0 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \cdots - a_{2n}x_n, \\ \text{-------------------------} \\ 0 = b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \cdots - a_{mn}x_n. \end{cases} \tag{2.8}$$

2. Берилган системанинг биргаликда эмаслик ва номанфий ечимини мавжуд эмаслик шартлари текширилади:

а) агар (2.8) системадаги камида битта тенглама

$$0 = b + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$$

кўринишда бўлиб, $b \neq 0$ бўлса, берилган тенгламалар системаси биргаликда бўлмайди.

б) агар (2.8) системада камида битта тенглама

$$0 = b + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \quad + a_n \cdot x_n$$

кўринишда бўлиб $b, a_1, a_2, \ldots, a_n$ лар бир хил ишорали бўлса, берилган система номанфий ечимга эга бўлмайди.

Агар юқоридаги а) ва б) шартлардан бирортаси бажарилса, ечиш жараёни тўхтатилади, акс ҳолда системани ечиш давом эттирилади.

3. Агар (2.8) тенгламалар системасида

$$0 = 0 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$$

кўринишдаги тенглама қатнашса, бундай тенгламалар, номаълумларнинг ихтиёрий қийматлари қаноатлантиргани учун, ўчириб ташланади.

4. Қолган 0 – тенгламаларни ўзаро қўшиб, назорат тенглама (н.т.) деб аталувчи тенглама тузилади. Назорат тенглама икки хил вазифани бажаради:

1) ажратилиши керак бўлган номаълум назорат тенгламадан танланади;

2) ҳар бир қадамдан кейин ҳосил бўлган назорат тенглама қолган 0 – тенгламалар йиғиндисига тенг эканлигига асосланиб, ҳисоблашлар тўғри олиб борилаётганини текшириб бориш мумкин.

5. Назорат тенгламадан коэффициенти энг кичик бўлган номаълум (масалан, x_k) ажратилиши керак бўлган номаълум сифатида танланади.

6. Танланган x_k номаълум

$$\min_{a_{ik}<0} \frac{b_i}{|a_{ik}|} = \frac{b_l}{b_{lk}}.$$

шартни қаноатлантирувчи l-тенгламадан ажратилиб, янги системанинг биринчи тенгламаси тузилади. Ҳар бир тенгламага мос келувчи $b_i/|a_{ik}|(a_{ik}<0)$ нисбат i-тенгламада x_k номаълум бўйича ҳисобланган аниқловчи коэффициент (А.К.) деб аталади.

7. Топилган x_k номаълумнинг қийматини эски системанинг қолган тенгламаларига ва назорат тенгламага қўйиш учун бу тенгламаларга қўшимча тенглама тузилади.

8. Ҳар бир тенгламани, шу жумладан, назорат тенгламани ўзининг қўшимчаси билан қўшиб янги системанинг қолган тенгламалари ва назорат тенгламаси ҳосил қилинади. Агар ҳосил бўлган янги система учун юқоридаги а) ва б) мавжуд эмаслик мезонлари бажарилмаса, юқоридаги 4-8 пунктларда қилинган ишлар яна такрорланади. Шундай йўл билан системани ечиш ҳамма 0-тенгламалар х-тенгламага (номаълуми ажратилган тенгламага) айлангунча, яъни назорат тенглама 0=0 кўринишга келгунча такрорланади. Сўнгра системанинг номанфий ечими (ҳақиқий ёки базис) ёзилади.

Ҳосил бўлган х- тенгламалар системаси қуйидаги кўринишда бўлсин деб фараз қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 = b_1^1 + a_{1m+1}^1 x_{m+1} + a_{1m+2}^1 x_{m+2} + \ldots + a_{1n}^1 x_n, \\ x_2 = b_2^1 + a_{2m+1}^1 x_{m+1} + a_{2m+2}^1 x_{m+2} + \ldots + a_{2n}^1 x_n, \\ \text{-------------------------} \\ x_m = b_m^1 + a_{mm+1}^1 x_{m+1} + a_{mm+2}^1 x_{m+2} + \ldots + a_{mn}^1 x_n, \end{cases} \qquad (2.9)$$

бу ерда $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – базис ўзгарувчилар, $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ – эркли ўзгарувчилар. Эркли ўзгарувчиларни 0 га тенглаб берилган системанинг номанфий (ҳақиқий ёки базис) ечими ёзилади:

$$X = (b_1^1, b_2^1, \ldots, b_m^1, 0, 0, \ldots, 0) \tag{2.10}$$

1-мисол. Системанинг номанфий базис ечимини топинг.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Ечиш. Берилган тенгламалар системасини 0-тенгламалар системасига айлантирамиз ва назорат тенглама тузамиз.

$$\left\{\begin{array}{l|l} 0 = 1 - x_1 - \underline{2x_2} + x_3 + x_4, & 1/2 \\ \begin{cases} 0 = 2 + x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4, \\ -2x_2 = -1 + x_1 - x_3 - x_4, \end{cases} & 2/2 = 1 \\ \begin{cases} 0 = 5 - x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4, \\ -5x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4, \end{cases} & 5/5 = 1 \\ \begin{cases} нт 0 = 8 - x_1 - 9x_2 - 3x_3 + x_4, \\ -9x_2 = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2}x_1 - \frac{9}{2}x_3 - \frac{9}{2}x_4, \end{cases} & \end{array}\right.$$

Назорат тенгламадан энг кичик коэффициентли номаълумни, яъни x_2 ни танлаймиз. 0-тенгламалар системасидаги ҳар бир тенглама учун $b_i/|a_{i2}|(a_{i2}<0)$ нисбатларни, яъни аниқловчи коэффициентларни ҳисоблаймиз.

Аниқловчи коэффициентлар ичида энг кичигига мос келган 1-тенгламадан x_2 ни ажратиб x – тенгламага айлантирамиз:

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

Бу тенгламадан фойдаланиб эски системанинг ҳар бир қолган тенгламаларига ҳамда назорат тенгламага қўшимча тенглама тузамиз ва уларни мос тенгламалар тагига ёзамиз.

Ҳар бир тенгламани ва назорат тенгламани ўзининг қўшимчаси билан қўшиб янги системани ҳосил қиламиз.

$$
\left\{\begin{array}{l|l}
\left\{\begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, \\ \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4, \end{array}\right. & — \\
0 = 1 + 2x_1 - 4x_3 - 2x_4, & 1/4 \\
\left\{\begin{array}{l} 0 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_1 - \frac{7}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4, \\ -\frac{7}{2}x_3 = -\frac{7}{8} - \frac{7}{4}x_1 + \frac{7}{4}x_4, \end{array}\right. & 5/7 \\
\left\{\begin{array}{l} н.т. \quad 0 = \frac{7}{2} + \frac{7}{2}x_1 - \frac{15}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_4, \\ -\frac{15}{2}x_3 = -\frac{15}{8} - \frac{15}{4}x_1 + \frac{15}{4}x_4, \end{array}\right. &
\end{array}\right.
$$

Янги системанинг назорат тенгламасидан энг кичик коэффициентли x_3 номаълумни танлаймиз ва системадаги тенгламаларда бу номаълум учун аниқловчи коэффициент ҳисоблаймиз. Аниқловчи коэффициентлар ичида энг кичиги 2-тенгламага мос келгани учун x_3 ни 2-тенгламадан ажратиб х-тенгламага айлантирамиз.

$$x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4$$

Топилган x_3 нинг қийматини бошқа тенгламаларга ва назорат тенгламага қўйиш учун уларга қўшимча тенгламалар тузамиз. Ҳар бир тенгламани ва назорат тенгламани ўзининг қўшимчаси билан қўшиб янги системани ҳосил қиламиз.

Энди назорат тенгламадан x_1 ни танлаб унинг устида юқоридаги ишларни бажариб қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$
\begin{array}{l|l}
\left\{\begin{array}{l} x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4, \\ \frac{1}{2}x_1 = \frac{5}{4} - 2x_2 - \frac{1}{2}x_4, \end{array}\right. & — \\
x_2 = \frac{5}{8} - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_4, & 5/2
\end{array}
$$

$$
\left\{\begin{array}{l|l}
0 = \frac{13}{8} - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_4, & 13/2 \\
-\frac{1}{4}x_1 = -\frac{5}{8} + x_1 + \frac{1}{4}x_4, &
\end{array}\right.
$$

$$\begin{cases} и.т. \quad 0=\frac{13}{8}-\frac{1}{4}x_1-\frac{1}{4}x_4, \\ -\frac{1}{4}x_1=-\frac{5}{8}+x_2+\frac{1}{4}x_4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=\frac{5}{2}-4x_2-x_4, \\ x_3=\frac{3}{2}-2x_2-x_4, \\ 0=1+x_2+\frac{1}{2}x_4, \\ и.т. 0=1+x_2+\frac{1}{2}x_4, \end{cases}$$

Ҳосил бўлган янги системада б) мавжуд эмаслик шарти бажарилади. 3-тенгламада озод ҳад билан номаълумлар олдидаги коэффициентлар бир хил ишорали бўлганлиги сабабли система номанфий ечимга эга бўлмайди.

Юқоридаги усул билан чизиқли тенгсизликлар системасининг ҳам номанфий ечимини топиш мумкин. Лекин бунда тенгсизликларнинг кичик томонига $x_{m+1}\geq 0$, $x_{m+2}\geq 0$, ..., $x_{m+n}\geq 0$ қўшимча ўзгарувчилар қўшиб тенгламалар системасини ҳосил қилиш керак бўлади.

2-мисол. Берилган тенгсизликлар системасининг номанфий базис ечимини топинг.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4\leq 2, \\ 2x_1+x_2+3x_3-x_4\leq 5, \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0, x_4\geq 0. \end{cases}$$

Ечиш. Системадаги биринчи тенгсизликга x_5 ни, иккинчисига x_6 ни қўшиб қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4+x_5=2, \\ 2x_1+x_2+3x_3-x_4+x_6=5, \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0, x_4\geq 0, x_5\geq 0, x_6\geq 0. \end{cases}$$

Ҳосил бўлган тенгламалар системасини юқоридаги алгоритм асосида ечамиз.

$$I\ \text{қадам}\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = 2 - x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5, \\ \left\{\begin{array}{l} 0 = 5 - 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_6, \\ -2x_1 = -4 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \text{н.т.} 0 = 7 - 3x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 - x_6, \\ -3x_1 = -6 + 6x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 3x_5, \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \begin{array}{|c|} A.K.(x_1) \\ \hline 2 \\ 5/2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$II\ \text{қадам}\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2 \quad 2x_2 + 2x_3 - \quad - x_5, .. \\ 2x_3 = \frac{2}{7} + \frac{6}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_4 + \frac{4}{7}x_5 - \frac{2}{7}x_6, \end{array}\right. \\ 0 = 1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 - x_6, \\ \left\{\begin{array}{l} \text{н.т.} 0 = 1 + 3x_2 \quad 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 \\ \quad 7x_3 = -1 \quad 3x_2 - 3x_4 - 2x_5 + x_6, \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \begin{array}{|c|} A.K.(x_3) \\ --- \\ \\ \\ 1/7 \\ \end{array}$$

$$III\ \text{қадам}\quad \left\{\begin{array}{l} x_3 = \frac{1}{7} + \frac{3}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_4 + \frac{2}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_6, \\ x_1 = \frac{16}{7} - \frac{8}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 - \frac{2}{7}x_6, \end{array}\right.$$

$$\text{Н.Т.} \qquad 0 = 0$$

Жавоб. Базис ечим: $x_1 = 16/7$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1/7$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$.

2- §. Базис ечимнинг оптималлик шарти. Чекли оптимал ечимнинг мавжуд бўлмаслик шарти. Янги базис ечимга ўтиш қоидаси

Дейлик, канoник кўринишдаги (2.5)-(2.7) чизиқли дастурлаш масаласининг оптимал ечимини топиш керак бўлсин. Масаланинг оптимал ечими унинг базис ечимларидан бири бўлиб, унда (2.7) мақсад функция минимал қийматга эришади. Демак, оптимал ечимни базис ечимлар ичидан қидириш керак.

Фараз қилайлик, 1-§ да танишган усул билан (2.5) система $x_1, x_2, \ldots, x_m$ базис ўзгарувчиларга нисбатан аниқланган қуйидаги кўринишга келтирилган бўлсин:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = b_{10} + b_{11}x_{m+1} + b_{12}x_{m+2} + \ldots + b_{1n-m}x_n, \\ x_2 = b_{20} + b_{21}x_{m+1} + b_{22}x_{m+2} + \ldots + b_{2n-m}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = b_{m0} + b_{m1}x_{m+1} + b_{m2}x_{m+2} + \ldots + b_{mn-m}x_n, \end{array}\right. \qquad (2.11)$$

Бу система х- тенгламалар системаси дейилади. Бу системадан фойдаланиб (2.7) мақсад функцияни эркли ўзгарувчиларнинг функцияси, яъни

$$Y = c_{00} + \sum_{j=1}^{n-m} c_{0j} x_{m+j} \qquad (2.12)$$

кўринишида ифодалаш мумкин. (2.11) ифодадаги эркли ўзгарувчиларни 0 га тенглаб, $x_1=b_{10}$, $x_2=b_{20},\ldots,x_m=b_{m0}$ базис ечимни топамиз. Бу базис ечимдаги (2.12) мақсад функциянинг қиймати $Y=c_{00}$ бўлади.

Топилган базис ечимни оптимал ечим бўлишини текшириш ҳамда, агар бу базис ечим оптимал ечим бўлмаса, бошқа базис ечимга ўтиш қоидаси билан танишиш учун (2.11) системани ва (2.12) функцияни қуйидаги кўринишдаги жадвалга жойлаштирамиз.

Базис ўзгарувчилар	B_0	Эркли ўзгарувчилар					
		x_{m+1}	x_{m+2}		x_{m+s}		x_n
x_1	b_{10}	b_{11}	b_{12}	...	b_{1s}	...	b_{1n-m}
x_2	b_{20}	b_{21}	b_{22}	...	b_{2s}	...	b_{2n-m}
x_k	b_{k0}	b_{k1}	b_{k2}	...	b_{ks}	...	b_{kn-m}
x_m	b_{m0}	b_{m1}	b_{m2}	...	b_{ms}	...	b_{mn-m}
Y	c_{00}	c_{01}	c_{02}	...	c_{0s}	...	c_{0n-m}

Бундай жадвал **симплекс жадвал** деб аталади. Симплекс жадвалнинг бир неча турлари мавжуд бўлиб, уларнинг баъзилари билан кейинги параграфларда танишамиз.

Агар B_0 векторнинг барча элементлари учун

$$b_{i0}>0 \ (i=1,\ldots,m)$$

шарт ўринли бўлса, у ҳолда

$$X_0=(b_{10},b_{20,\ldots,}b_{m0},0,0,\ldots,0)$$

вектор берилган масаланинг базис режаларидан бири бўлади. Бу режага мақсад функциянинг

$$Y(X_0)=c_{00}$$

қиймати мос келади. Агар (2.12) ёйилмадаги $c_{01}, c_{02}, \ldots, c_{0n-m}$ элементларнинг барчаси номанфий бўлса, яъни

$c_{0j} \geq 0$ $(j=1,2,\ldots,n-m)$ шарт ўринли бўлса, у ҳолда топилган X_0 базис режа **оптимал режа** бўлади. Оптимал режадаги мақсад функциянинг энг кичик қиймати

$$Y_{min} = Y(X_0) = c_{00}$$

бўлади.

Агар c_{0j} $(j=1,\ldots,n-m)$ коэффициентлардан камида биттаси манфий ишорали бўлса, у ҳолда топилган базис режа оптимал режа бўлмайди. Уни оптимал режага яқинроқ бўлган, яъни

$$Y(X_1) \leq Y(X_0)$$

шартни қаноатлантирувчи бошқа X_1 базис режа билан алмаштириш керак бўлади. Бундай жараённи амалга ошириш учун қуйидаги ишларни бажариш керак:

1) $\min\limits_{c_{0j}<0} c_{0j} = c_{OS}$

шартни қаноатлантирувчи устунга мос келувчи x_{m+s} номаълум танланади, яъни базисга киритилиши керак бўлган номаълум белгиланади. Бу ерда икки хил вазият рўй бериши мумкин:

а) x_{m+s} эркли ўзгарувчига мос келувчи устундаги элементларнинг барчаси мусбат, яъни $b_{is} \geq 0$ $(i=1,2, \quad ,m)$ Бундай шарт бажарилганда мақсад функция чекли минимум қийматга эга бўлмайди ва берилган масаланинг чекли оптимал ечими мавжуд бўлмайди

б) x_{m+s} эркли ўзгарувчига мос келувчи устидаги элементлар ичида камида биттаси манфий ишорали бўлсин дейлик У ҳолда базисга x_{m+s} ўзгарувчи киритилиб,

$$\min_{b_{is}<0} \frac{b_{i0}}{b_{is}} = \frac{b_{k0}}{b_{ks}} \qquad (2.13)$$

шартни қаноатлантирувчи қатордаги x_k ўзгарувчи базисдан чиқарилади Сўнгра топилган x_{m+s} ноъмалумнинг қиймати бошқа тенгламалар ва мақсад функциясига қўйиб чиқилади. Натижада янги базис режа топилади. Агар янги базис режа оптимал режа бўлса, у ҳолда масалани ечиш тўхтатилади. Акс ҳолда, агар имконият бўлса, юқоридаги йўл билан янги базис ечимга ўтилади. Базис режаларни алмаштириш жараёни берилган масаланинг оптимал ечими топилгунча ёки ундаги мақсад функциянинг чекли минимум қиймати мавжуд эмаслиги аниқлангунча такрорланади.

Ихтиёрий чизиқли дастурлаш масаласининг базис режасини топиш ва бу режани бошқа базис режаларга алмаштира бориб, оптимал ечимни топиш жараёнини жадвал кўринишда ҳам тасвирлаш мумкин .Бунинг учун

1) чизикли алмаштиришларни қўллаб, берилган чизиқли дастурлаш масаласи қуйидаги кўринишга келтирилади,

$$\begin{cases} 0 = b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ 0 = b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = b_m + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (2.16)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \min \quad (2.17)$$

2) (2.15) системанинг биргаликда эмаслик ва унинг номанфий ечимининг мавжуд эмаслик шартлари текширилади (1-§ да танишган а) ва б) шартларнинг бажарилиши текширилади). Агар бу шартлар бажарилмаса (2.15)-(2.17) масала қуйидаги симилекс жадвал деб аталувчи жадвалга жойдаштирилади.

2-жадвал

Базис ўзгарув-чилар ($X_{баз}$)	B	x_j					
		x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
0	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
0	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
0	b_l	a_{l1}	a_{l2}	...	a_{lk}	...	a_{ln}
0	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
Н.Т.	S_0	S_1	S_2	...	S_k	...	S_n
Y	c_0	c_1	c_2	...	c_k	...	c_n

3) жадвалнинг m+1 –қаторига назорат тенглама (Н.Т.)деб аталувчи ва дастлабки m та тенгламалар йиғиндисидан иборат бўлган тенглама жойдаштирилган .

Бунда

$$S_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i; \quad S_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}; \quad S_2 = \sum_{i=1}^{m} a_{i2}; \quad S_n = \sum_{i=1}^{m} a_{in};$$

Жадвалнинг охирги m+2-қаторига мақсад функция

$$Y = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

кўринишда ёзилган.

4) назорат тенгламадаги

$$\max_j S_j = S_k$$

шартни қаноатлантирувчи устунга мос келувчи ноъмалум белгиланади Белгиланган ноъмалум

$$\min_{a_{ik}<0} \frac{b_i}{|a_{ik}|} = \frac{b_l}{|a_{lk}|}$$

шартни қаноатлантирувчи тенгламадан ажратилади. Сўнгра Жордан-Гаусс усулини қўллаб ажратилган (базис) ўзгарувчи бошқа тенгламалардан, Н.Т. дан ва мақсад функциядан йўқ қилинади, яъни симплекс жадвал алмаштирилади.

Бу жараён назорат тенглама (Н.Т.) 0=0 кўринишга келгунча такрорланади. Сўнгги ҳолатда (2.15)-(2.17) система базис ўзгарувчиларга нисбатан аниқланган шаклга, яъни x- тенгламалар системаси кўринишига келади. Бу ҳолда симплекс жадвал 1-жадвал кўринишга келади. Демак, бу босқичда масаланинг бошланғич базис ечими топилади;

5) топилган базис режада жадвалнинг Y қаторидаги барча ҳадлар $c_{0j} \geq 0$ $(j=1,2,...,n-m)$ бўлса, у ҳолда топилган базис режа оптимал режа бўлади. Агар бирорта $c_{0j}<0$ $(j=1,2,..,m)$ бўлса, у ҳолда топилган базис режа оптимал режа бўлмайди. Уни оптимал режага яқинроқ бўлган бошқа режага алмаштириш учун юқорида келтирилган усул билан симплекс жадвал алмаштирилади;

6) масаланинг жавобини (оптимал ечимни) ёзиш учун эркли ўзгарувчилар 0 га, базис ўзгарувчилар эса озод ҳадларга тенглаштирилади. Топилган ноъмалумларнинг қийматидан фойдаланиб Y_{mi} , сўнгра (агар зарур бўлса) Y_{max} нинг қиймати топилади.

Мисол Масаланинг базис ечимларидан бирини топинг ва уни оптимал ечимга айлантиринг:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5}),$$

$$Y = -x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

Ечиш. Масаланинг шартларидаги тенгламалар системасини 0- тенгламалар системасига айлантирамиз:

$$\begin{cases} 0 = 2 + 2x_1 - x_2 - x_3, \\ 0 = 2 - x_1 + 2x_2 - x_4, \\ 0 = 5 - x_1 - x_2 - x_5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5}),$$

$$Y = -x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

Ҳосил бўлган масалани қуйидаги симплекс жадвалга жойлаштирамиз ва юқорида танишган итерацион жараённи бажарамиз.

3-жадвал

Баз. ўзгар. ($X_{баз}$)	B	x_j					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	А. К.
0	2	2	-1	-1	0	0	2
0	2	-1	2	0	-1	0	
0	5	-1	-1	0	0	-1	-
Н.т.	9	0	0	-1	-1	-1	
Y	0	-1	1	0	0	0	
x_3	2	2	-1	-1	0	0	
0	2	-1	2	0	-1	0	2
0	5	-1	-1	0	0	-1	5
Н.т.	7	-2	1	0	-1	-1	
Y	0	-1	1	0	0	0	
x_3	6	0	3	-1	-2	0	-
x_1	2	-1	2	0	-1	0	
0	3	0	-3	0	1	-1	1
Н.т.	3	0	-3	0	1	-1	
Y	-2	0	-1	0	1	0	
x_3	9	0	0	-1	-1	-1	
x_1	4	-1	0	0	-1/3	-2/3	
x_2	1	0	-1	0	1/3	-1/3	
Н.т.	0	0	0	0	0	0	
Y	-3	0	0	0	2/3	1/3	

Охирги босқичда топилган x-тенгламалар системасини ва Y мақсад функцияни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин

$$\begin{array}{l} 9 \quad x_4 \\ 4 \quad \frac{1}{3}x_4 \quad \frac{2}{3}x_5 \\ 1 + \frac{1}{3}x_4 \quad \frac{1}{3}x_5, \\ Y \quad -3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \end{array}$$

Бу ерда x_1, x_2, x_3 лар ажратилган базис ўзгарувчилар, x_4 ва x_5 эса эркли ўзгарувчилардир. Эркли ўзгарувчиларга 0 қиймат бериб, масаланинг базис режасини топамиз

$$X_0=(4;1;9;0;0)\ ,\quad Y(X_0)=-3.$$

Эркли ўзгарувчилар мақсад функция Y да мусбат коэффицентлар билан қатнашгани учун топилган базис режа оптимал режа бўлади. Оптимал режа қуйидагича ёзилади:

$$X_{опт}=(4;1;9;0;0)\ ,\ Y_{min}=-3.$$

3- §.Чизиқли дастурлаш масаласини ечиш учун симплекс усул (Данциг усули)

Данциг яратган симплекс усул ҳар бир тенгламада биттадан ажратилган noъмалум (базис ўзгарувчи) қатнашиши шартига асосланган. Бошқача айтганда, ЧД масаласида m та ўзаро чизиқли эркли векторлар мавжуд деб қаралади. Умумийликни бузмаган ҳолда бу векторлар биринчи m та $P_1,P_2,\dots,P_m$ векторлардан иборат бўлсин, дейлик. У ҳолда масала қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} x_1+a_{1m+1}x_{m+1}+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ x_2+a_{2m+1}x_{m+1}+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \text{------------------} \\ x_m+a_{mm+1}x_{m+1}+\dots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \qquad (2.18)$$

$$x_1\geq 0,\ \ x_2\geq 0,\qquad x_n\geq 0, \qquad (2.19)$$

$$Y=c_1x_1+c_2x_2+\qquad +c_nx_n\to \min. \qquad (2.20)$$

(2.18) системани вектор шаклида ёзиб олайлик:

$$P_1x_1+P_2x_2+\qquad +P_mx_m+P_{m+1}x_{m+1}+\qquad +P_nx_n=P_0, \quad (2.21)$$

бу ерда

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\dots\\0\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\dots\\0\end{pmatrix},\dots,P_m=\begin{pmatrix}0\\0\\\dots\\1\end{pmatrix},P_{m+1}=\begin{pmatrix}a_{1m+1}\\a_{2m+1}\\\dots\\a_{mm+1}\end{pmatrix},\dots,P_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\dots\\a_{mn}\end{pmatrix},\quad P_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_m\end{pmatrix}.$$

$P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_m$ векторлар системаси m-ўлчовли фазода ўзаро чизиқли эркли бўлган бирлик векторлар системасидан иборат. Улар m ўлчовли фазонинг базисини ташкил қилади. Ушбу векторларга мос келувчи $x_1,x_2,\dots,x_m$ ўзгарувчиларни ***«базис ўзгарувчилар»*** деб аталади.

x_{m+1}, x_{m+2},..., x_n – базис бўлмаган (эркли) ўзгарувчилар. Агар эркли ўзгарувчиларга 0 қиймат берсак, базис ўзгарувчилар озод ҳадларга тенг бўлади. Натижада $X_0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ ечим ҳосил бўлади. Бу ечим бошланғич жоиз ечим бўлади. Ушбу ечимга $x_1P_1+x_2P_2+...+x_mP_m = P_0$ ёйилма мос келади. Бу ёйилмадаги P_1, P_2, ..., P_m векторлар ўзаро эркли бўлганлиги сабабли топилган жоиз ечим базис ечим бўлади.

Данциг усулида симплекс жадвал қуйидаги кўринишда бўлади:

Базис вект.	$C_{баз}$	P_0	c_1	c_2		c_m	c_{m+1}		c_k		c_n
			P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
P_1 P_2	c_1 c_2	b_1 b_2	1 0	0 1		0 0	a_{1m+1} a_{2m+1}		a_{1k} a_{2k}		a_{in} a_{2n}
P_l		b_l	0	0		0	a_{lm+1}		a_{lk}		a_{ln}
P_m	c_m	b_m	0	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
$\Delta_j=Z_j-c_j$		$Y_0=\sum_{i=1}^{m}c_jb_j$	$\Delta_1=0$	$\Delta_2=0$		$\Delta_m=0$	$\Delta_{m+1}=\sum_{i=1}^{m}a_{i\,m+1}$		$\Delta_k=\sum_{i=1}^{m}a_{ik}c_i-c_k$		$\Delta_n=\sum_{i=1}^{m}a_{in}c_i-c_n$

Жадвалдаги $C_{баз}$ билан белгиланган устун $x_1, x_2, ..., x_m$ базис ўзгарувчиларнинг чизиқли функциядаги коэффициентлардан ташкил топган вектор, яъни

$$C_{баз}=(c_1, c_2, ..., c_m) \tag{2.22}$$

Жадвалда ҳар бир P_j векторнинг устига x_j номаълумнинг чизиқли функциядаги коэффициенти c_j ёзилган. m+1- қаторга эса $x_1, x_2, ..., x_m$ базис ўзгарувчилардаги чизиқли функциянинг қиймати

$$Y_0=\sum_{i=1}^{m}b_ic_i \tag{2.23}$$

ҳамда базис ечимнинг оптималлик мезонини баҳоловчи сон

$$\Delta_j = Z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m}a_{ij}c_i - c_j \qquad (i=1,...,m;\ j=1,...,n) \tag{2.24}$$

ёзилган. Базис ўзгарувчиларга мос келувчи $P_1, P_2, \ldots, P_m$ векторлар базис векторлар деб белгиланган. Бу векторлар учун $\Delta_j=Z_j-c_j=0$ $(j=1,\ldots,m)$ бўлади. Агар барча устунларда $\Delta_j \le 0$ бўлса, у ҳолда

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_m) = (b_1,b_2,\ldots,b_m)$$

ечим оптимал ечим бўлади. Бу ечимдаги чизиқли функциянинг қиймати Y_0 га тенг бўлади. Агар баъзи $\Delta_j>0$ бўлса, у ҳолда

$$\max_{Z_j - c_j > 0} (Z_j - c_j) = Z_k - c_k = \Delta_k$$

шартни қаноатлантирувчи P_k векторни базисга киритиб, базисдан

$$\min_{a_{ik} > 0} (b_i / a_{ik}) = b_l / a_{lk} \qquad (2.25)$$

шартни қаноатлантирувчи P_l векторни чиқариш керак бўлади. Бу ҳолда a_{lk} элемент ҳал қилувчи элемент сифатида белгиланди. Шу элемент жойлашган l-қатордаги P_l вектор ўрнига у жойлашган устундаги P_k вектор базисга киритилади. P_l векторнинг ўрнига P_k векторни киритиш учун симплекс жадвал қуйидаги формулалар асосида алмаштирилади.

$$\begin{cases} b \quad b \quad (b_l / a_{lk}) \; a \\ b_l \quad b_l / a_{lk} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \; = a_{ij} \quad (a_{lj} / a_{lk}) \; a_{ik} \\ a \; = a_{lj} / a_{lk} \end{cases}$$

Симплекс жадвал алмашгандан сўнг яна қайтадан Δ_j баҳолар аниқланади. Агар барча j лар учун $\Delta_j \le 0$ бўлса, оптимал ечим топилган бўлади. Акс ҳолда топилган базис режа бошқа базис режа билан алмаштирилади. Бунда қуйидаги теоремаларга асосланиб иш кўрилади:

1- теорема. Агар $X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ базис режа учун $\Delta_j=Z_j-c_j\le 0$ $(j=1,\ldots,n)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда бу режа оптимал режа бўлади.

2- теорема. Агар X_0 базис режада тайин бир j учун $\Delta_j=Z_j-c_j>0$ шарт ўринли бўлса, у ҳолда X_0 оптимал режа бўлмайди ва шундай X_1 режани топиш мумкин бўладики, унинг учун

$$Y(X_1)<Y(X_0)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Агар тайин бир j учун $\Delta_j=Z_j-c_j>0$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда 2- теоремага асосан бу базис режани ҳам янги базис режага алмаштириш керак бўлади. Бу жараён оптимал режа топилгунча ёки масаладаги мақсад функциянинг қуйидан чегараланмаган эканлиги аниқлангунча такрорланади.

Масаланинг оптимал ечимининг мавжуд бўлмаслик шарти қуйидагича:

Агар тайин j учун $\Delta_j=Z_j-c_j>0$ тенгсизлик ўринли бўлиб, бу устундаги барча элементлар $a_{ij}\le 0$ $(i=1,...,m)$ бўлса, у ҳолда масаланинг мақсад функцияси чекли экстремумга эга бўлмайди.

Фараз қилайлик, симплекс жадвалда оптималлик шарти $(\Delta_j\le 0,\ j=1,...,n)$ бажарилсин. Бу ҳолда бу ечим

$$X_0=B^{-1}P_0 \qquad (2.26)$$

формула орқали топилади. Бу ерда $B=(P_1, P_2, ..., P_m)$ матрица базис векторлардан ташкил топган матрицадир.

(1)-(3) масала учун B матрица m ўлчовли J_m бирлик матрицадир, яъни $B=J_m$.

$BB^{-1}=J_m$ бўлганлиги сабабли B^{-1} матрица ҳам бирлик матрицадир. Демак

$X_0=P_0=(b'_{10}, b'_{20}, \quad b'_{m0}, 0, ..., 0)$ оптимал ечим бўлади.

1-мисол. Масалани симплекс усул билан ечинг

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_5=7 \\ -2x_2+4x_3+x_4=12 \\ -4x_2+3x_3+8x_5+x_6=10 \end{cases}$$

$$x_j\ge 0, \qquad (j=1, 2,..., 6)$$

$$Y=x_2-3x_3+2x_5\to \min.$$

Ечиш. Белгилашлар киритамиз ва симплекс жадвални тўлдирамиз:

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}, P_3=\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}, P_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, P_5=\begin{pmatrix}-2\\0\\8\end{pmatrix}, P_6=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, P_0=\begin{pmatrix}7\\12\\10\end{pmatrix}$$

$$C'=(0;\ 1;\ -3;\ 0;\ 2)$$

i	Базис вект.	$C_{баз}$	P_0	0	1	-3	0	2	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	7	1	3	-1	0	-2	0
2	P_4	0	12	0	-2	$\boxed{4}$	1	0	0
3	P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1
Δ_j			0	0	-1	3	0	-2	0
1	P_1	0	10	1	$\boxed{5/2}$	0	1/4	-2	0
2	P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0
3	P_6	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1
Δ_j			-9	0	1/2	0	-3/4	-2	0
1	P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	-4/5	0
2	P_3	-3	5	1/5.	0	1	3/10	-2/5	0
3	P_6	0	11	1	0	0	-1/2	6	1
Δ_j			-11	-1/5	0	0	-4/5	-8/5	0

Симплекс усулнинг I босқичида базисга P_3 вектор киритилиб P_4 вектор чиқарилди, II босқичида P_2 киритилди ва P_1 чиқарилди. Симплекс жадвал (7) формулалар асосида алмаштирилиб борилди. III босқичда оптимал ечим топилди:

$$X = (0;\ 4;\ 5;\ 0;\ 0;\ 11)\quad Y_{min} = -\ 11.$$

4-§. Сунъий базис усули

Агар масаланинг шартларида ўзаро эркли бўлган m та бирлик векторлар (базис векторлар) қатнашмаса, улар сунъий равишда киритилади. Масалан, қуйидаги кўринишдаги масала берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n \le b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n \le b_2 , \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n \le b_m . \end{cases} \qquad (2.27)$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \qquad x_n \ge 0, \qquad (2.28)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \quad + c_nx_n \to \max. \qquad (2.29)$$

Бу масалага $x_{n+1} \ge 0$, $x_{n+2} \ge 0$, ..., $x_{n+m} \ge 0$ қўшимча ўзгарувчилар киритилса, қуйидаги кенгайтирилган масала ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 , \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m . \end{cases} \qquad (2.30)$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \qquad x_n \ge 0, \qquad ..., \ x_{n+m} \ge 0, \qquad (2.31)$$

$$Y = - \ c_1x_1 - \ c_2x_2 - \qquad c_nx_n + 0(x_{n+1} + ,...+ x_{n+m}) \to \min. \qquad (2.32)$$

У ҳолда P_{n+1}, P_{n+2},... P_{n+m} векторлар базис векторлар ва $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ ўзгарувчилар «базис ўзгарувчилар» деб қабул қилинади.

Агар берилган масала қуйидаги кўринишда бўлса,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n = b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n = b_2 , \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n = b_m . \end{cases} \qquad (2.33)$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \qquad x_n \ge 0, \qquad (2.34)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \quad + c_nx_n) \to \min, \qquad (2.35)$$

унга сунъий $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ ўзгарувчилар киритилиб ушбу кенгайтирилган масала ҳосил қилинади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \text{-----------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \qquad (2.36)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \qquad x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0, \dots,\ x_{n+m} \geq 0, \qquad (2.37)$$

$$Y = -\ c_1x_1 -\ c_2x_2 \qquad c_nx_n + M(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \rightarrow \min. \quad (2.38)$$

бу ерда: M – етарлича катта мусбат сон.

Сунъий базис ўзгарувчиларига мос келувчи P_{n+1}, $P_{n+2}, \dots, P_{n+m}$ векторлар «сунъий базис векторлар» деб аталади.

Берилган (2.33)-(2.35) масаланинг оптимал ечими қуйидаги теоремага асосланиб топилади.

Теорема. Агар кенгайтирилган (2.36)-(2.38) масаланинг оптимал ечимида сунъий базис ўзгарувчилари нолга тенг бўлса, яъни

$$x_{n+i} = 0 \ (i=1,\dots,m)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бу ечим берилган масаланинг ҳам оптимал ечими бўлади.

Агар кенгайтирилган масаланинг оптимал ечимида камида битта сунъий базис ўзгарувчи нолдан фарқли бўлса, у ҳолда масала ечимга эга бўлмайди.

2-мисол. Масалани сунъий базис усули билан ечинг

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j=1, 2, \dots, 4)$$

$$Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4) \rightarrow \max.$$

Ечиш. Масалага сунъий $x_5 \geq 0$ $x_6 \geq 0$ ўзгарувчилар киритамиз ва уни нормал кўринишга келтирамиз.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j=1, 2, \dots, 6)$$

$$Z = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + M(x_5 + x_6)) \rightarrow \min.$$

ҳосил бўлган масалани симплекс жадвалга жойлаштириб, уни симплекс усул билан ечамиз.

·	Базис вект.	$C_{баз}$	P_0	-5	-3	-4	1	M	M
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_5	M	3	1	3	2	2	1	0
2	P_6	M	3	2	2	1	1	0	1
Δ_j			6M	3M+5	5M+3	3M+4	3M-1	0	0
1	P_2	-3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0
2	P_6	M	1	4/3	0	-1/3	-1/3	-2/3	1
Δ_j			M-3	4/3M+4	0	-1/3M+2	-1/3M-3	-5/3M-1	0
1	P_2	-3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	-1/4
2	P_1	-5	3/4	1	0	-1/4	-1/4	-1/2	3/4
Δ_j			-6	0	0	3	-2	1-M	-3-M
1	P_3	-4	1	0	4/3	1	1	2/3	-1/3
2	P_1	-5	1	1	1/3	0	0	-1/3	2/3
Δ_j			9	0	-4	0	-5	-1-M	-2-M

Шундай қилиб симплекс усул бўйича 4-та қадамдан иборат яқинлашишда оптимал ечим топилди. $\Delta_j \le 0$. Оптимал ечим $X=(1;0;1;0;0;0)$ $Y_{min}=-9$.

Кенгайтирилган масаланинг оптимал ечимидаги сунъий ўзгарувчилар 0 га тенг ($x_5=0$, $x_6=0$). Шунинг учун (3-теоремага асосан) берилган масаланинг оптимал ечими

$X=(1;0;1;0)$; $Z_{min}=-9$; $Z_{max}=9$; бўлади.

5- §. Хос чизиқли дастурлаш масаласи. Циклланиш ва ундан қутилиш усули (ε - усул)

Агар P_i базис векторларга мос келувчи бирорта x_i =0 бўлса, яъни

$$P_0=x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_mP_m$$

ёйилмадаги x_i лардан камида биттаси нолга тенг бўлса, чизиқли дастурлаш масаласи **хос чизиқли дастурлаш масаласи** дейилади ва P_i базис векторларга мос келувчи базис режа – **хос режа** бўлади.

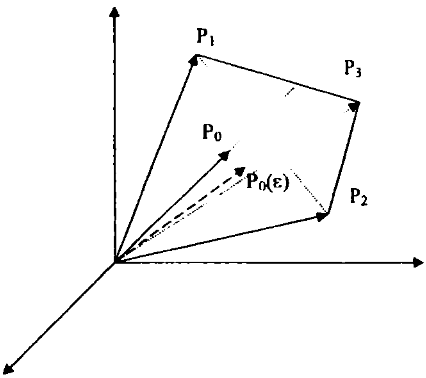
Юқорида, симплекс усулни асослаш жараёнида чизиқли дастурлаш масалаларини хосмас деб фараз қилган эдик. Бу фаразга кўра симплекс усулнинг ҳар бир итерациясидан сўнг чизиқли функциянинг қиймати камая боришини ва чекли сондаги итерациядан сўнг у ўзининг оптимал қийматига эришиши мумкинлигини кўрсатган эдик.

Агар масаланинг базис режаси хос режа бўлса,

$$\theta = \frac{x_k}{x_{lk}} = 0$$

бўлиши мумкин. У ҳолда бир базис режадан иккинчисига ўтганда, чизиқли функциянинг қиймати ўзгармайди. Баъзан бундай масалаларни ечиш жараёнида циклланиш ҳолати, яъни маълум сондаги итерациядан сўнг олдинги итерациялардан бирортасига қайтиш ҳолати рўй бериши мумкин. Циклланиш ҳолати рўй берган масалаларда оптимал режа ҳеч қачон топилмайди. Циклланиш ҳолати, одатда, базис режадаги бирдан ортиқ $x_i=0$ бўлган ҳолатларда рўй бериши мумкин. Бирдан ортиқ векторлар учун $\theta=0$ бўлганда базисдан чиқариладиган векторни тўғри аниқлаш циклланиш ҳолатини олдини олишда катта аҳамиятга эгадир. Бундан кўринадики, хос масалаларни ечишга мослаштирилган усуллар масаланинг оптимал ечимини топишга ишонч билдириб базисдан чиқариладиган векторни танлашнинг ягона йўлини кўрсатиши керак.

Хос чизиқли дастурлаш масаласининг геометрик тасвирини 2.1 шаклдан кўриш мумкин. Бунда P_0 вектор P_1, P_2, P_3 векторлардан тузилган қавариқ конуснинг сиртида ётибди. Шунинг учун P_0 вектор P_1, P_2, P_3 векторларнинг қавариқ комбинацияси сифатида ифодалаб бўлмайди, лекин уни P_1 ва P_2 векторларнинг қавариқ комбинацияси орқали ифодалаш мумкин. P_0 ни P_1, P_2, P_3 векторларнинг қавариқ комбинацияси орқали ифодалаш учун $x_1P_1+x_2P_2+\ x_3P_3$ ёйилмадаги P_3 векторнинг коэффициенти $x_3=0$ бўлиши керак.



2.1- шакл.

Агар P_3 векторни силжитиб P_1, P_2, P_3 векторлардан ташкил топган қавариқ конуснинг ичига киритсак, у ҳолда уни P_1, P_2, P_3 векторларнинг қавариқ комбинацияси орқали ифодалаш мумкин бўлади. P_3 векторни қавариқ конуснинг ичига силжитиш учун ихтиёрий кичик $\varepsilon>0$ сон олиб, P_1, P_2, P_3 векторларнинг

$$\varepsilon P_1+\varepsilon^2 P_2+\varepsilon^3 P_3$$

комбинациясини тузамиз ва уни масаланинг

$$x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3=P_0$$

чекламаларининг ўнг томонига қўшиб ёзамиз:

$$x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3=P_0+\varepsilon P_1+\varepsilon^2 P_2+\varepsilon^3 P_3=P_0(\varepsilon) \qquad (2.39)$$

Ҳосил бўлган $P_0(\varepsilon)$ вектор P_1, P_2, P_3 векторлардан ташкил топган қавариқ конуснинг ичида ётади (2.1- шакл). Демак, P_0 ни P_1, P_2, P_3 векторларнинг қавариқ комбинацияси орқали ифодалаш мумкин.

Худди шунингдек, умумий ҳолда берилган масаланинг

$$x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_mP_m+\ldots+x_nP_n=P_0 \qquad (2.40)$$

чекламаларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_mP_m+\ldots+x_nP_n=$$
$$P_0+\varepsilon P_1+\varepsilon^2 P_2+\ldots+\varepsilon^m P_m+\ldots+\varepsilon^n P_n=P_0(\varepsilon) \qquad (2.41)$$

Фараз қилайлик, P_1, P_2,..., P_m базис векторлар бўлиб, улар В матрицани ташкил қилсин. У ҳолда

$$\overline{X}=B^{-1}P_0\geq 0 \qquad (2.42)$$

берилган масаланинг ечими ва

$$\overline{X}(\varepsilon)=B^{-1}P_0(\varepsilon)\geq 0 \qquad (2.43)$$

ўзгартирилган (2.41) чегараловчи шартли масаланинг ечими бўлади.

$$\overline{X_j}=B^{-1}P_j \qquad (2.44)$$

тенглик ўринли бўлгани учун (2.43) ни ушбу кўринишда ифодалаш мумкин.

$$\overline{X}(\varepsilon)=B^{-1}P_0+\varepsilon B^{-1}P_1+\varepsilon^2 B^{-1}P_2+\ldots+\varepsilon^m B^{-1}P_m+\ldots+\varepsilon^n B^{-1}P_n=$$
$$=\overline{X}+\varepsilon X_1+\varepsilon^2 X_2+\ldots+\varepsilon^m X_m+\ldots+\varepsilon^n X_n. \qquad (2.45)$$

Демак, $\overline{b_i}(\varepsilon)$ қуйидагича аниқланади

$$\overline{b_i}(\varepsilon)=\overline{b_i}+\sum_{j=1}^{n}\varepsilon^j a_{ij} \qquad (2.46)$$

$$\overline{b_i}(\varepsilon)=\overline{b_i}+\varepsilon^i+\sum_{j=m+1}^{n}\varepsilon^j a_{ij} \qquad (2.46)$$

ε ни шундай кичик сон деб қабул қилиш мумкинки, $\overline{b_i}(\varepsilon)>0$ тенгсизлик барча $i=1,2,\ldots,m$ лар учун ўринли бўлади. Базисдан чиқариладиган P_l векторни аниқлаш учун

$$\theta_0 = \frac{b_l(\varepsilon)}{a_{lk}} = \min_i \frac{\bar{b}_i(\varepsilon)}{a_{ik}} = \frac{b_l + \varepsilon^l + \sum_{j=m+1}^{n} \varepsilon^j a_{lj}}{a_{lk}} > 0 \qquad (2.48)$$

қийматни барча $a_{lk}>0$ лар учун ҳисоблаймиз. (2.47) га асосан $\frac{b_i(\varepsilon)}{a_{ik}}$

нисбат $i=l$ да минимумга эришади, чунки $b_l(\varepsilon)$ ε^j ни ўз ичига олувчи бирдан-бир ўзгарувчидир. (2.45) ва (2.48) га асосан θ_0 (2.46) даги ε^j олдидаги коэффициентдан фойдаланиб аниқланади.

Симплекс жадвал бўйича ишлаш жараёнини қуйидагича тартиблаш мумкин.

Агар

$$\theta_0 = \min_i \frac{\bar{b}_i}{a_{ik}}, \qquad (a_{ik} > 0)$$

қиймат, битта $i=l$ индекс учун ўринли бўлса, у ҳолда P_l базисдан чиқарилади. Агар θ минимум қийматга бир нечта i индексларда эришиса, у ҳолда ҳамма i индекслар учун $j=l$ да a_{ij}/a_{ik} нисбат ҳисобланади. Бу нисбатларнинг минимумига мос келувчи векторни базисдан чиқарилади. Агар θ минимум қийматга бир нечта i индексларда эришса, у ҳолда худди шундай нисбатни $j+1$ устун учун ҳисобланади ва бу нисбатнинг минимум қийматига мос келувчи вектор базисдан чиқарилади.

Масалан, агар P_1, P_2, ..., P_m базис векторлар учун

$$\theta_0 = \frac{b_1}{a_{1k}} = \frac{b_2}{a_{2k}},$$

бўлса, у ҳолда $\frac{a_{11}}{a_{1k}}; \frac{a_{21}}{a_{2k}}$ нисбатлар ҳисобланиб, улар ўзаро солиштирилади.

Бунда

$$\min_i \left(\frac{a_{i1}}{a_{ik}}\right) = \frac{a_{21}}{a_{2k}}, \qquad (i = 1,2)$$

бўлса, P_2 вектор базисдан чиқарилади. Агар

$$\min_i \left(\frac{a_{i1}}{a_{ik}}\right) = \frac{a_{11}}{a_{1k}}, \qquad (i = 1,2)$$

бўлса, базисдан P_1 вектор чиқарилади. Агар

$$\frac{a_{11}}{a_{1k}} = \frac{a_{21}}{a_{2k}}$$

тенглик ўринли бўлса, $\frac{a_{12}}{a_{1k}}$ ва $\frac{a_{22}}{a_{2k}}$ нисбатлар ҳисобланиб, улар ўзаро солиштирилади.

Юқоридагидек нисбатларни солиштириш тенгсизлик ҳосил бўлгунча давом эттирилади. (2.47) га асосан албатта бирорта j учун тенгсизлик ҳосил қилиши керак.

Базисга киритиладиган P_k танлангандан сўнг, симплекс жадвал маълум йўл билан алмаштирилади. Натижада топилган янги $\overline{X}(\varepsilon)$ базис режа етарли даражада кичик ε учун хосмас режа бўлади.

Амалда хос чизиқли дастурлаш масаласи жуда кам учрайди. Қуйида биз келтирадиган масала Америка математиги Бил томонидан тузилган.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + \qquad + x_6 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad {}_7 = 1, \end{cases} \qquad (I)$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,7})$$

$$Y = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \to \min$$

Бу масала хос масала бўлиб, уни юқорида келтирилган «тўғрилаш» усулини қўлламай ечганда циклланиш ҳолати рўй беради. Симплекс усулнинг 7- итерациясидан сўнг 2- итерацияга қайтиш ҳолати рўй беради. Агар юқорида кўрган «тўғрилаш» усулини қўлламасак, бу циклланиш ҳолати чексиз равишда такрорланиши мумкин, демак масаланинг оптимал ечимини топиш имконияти бўлмайди.

Энди масалага «тўғрилаш» усулини қўллаб ечамиз. Энг аввал берилган масалани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 + \frac{1}{4}\varepsilon - 60\varepsilon^2, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + \qquad + x_6 = 0 + \frac{1}{2}\varepsilon - 90\varepsilon^2, \\ \qquad\qquad x_3 + \qquad\qquad + x_7 = 1, \end{cases} \qquad (II)$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,7})$$

$$Y = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \to \min.$$

Бу ерда ε кичик мусбат сон бўлиб, уни шундай танлаш мумкинки, натижада тенгламаларнинг ўнг томонига ε нинг фақат биринчи ва иккинчи даражасини қўшиш етарли бўлсин. (II) масалани симплекс жадвалга жойлаштириб ечамиз:

I.

Баз. век.	$C_{баз}$	P_0	-3/4	150	-1/50	6	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	0	$0+(1/4)\varepsilon-60\varepsilon^2$	1/4	-60	-1/25	9	1	0	0
P_6	0	$0+(1/2)\varepsilon-90\varepsilon^2$	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	3/4	-150	1/50	-6	0	0	0

II.

P_1	-3/4	$\varepsilon-240\varepsilon^2$	1	-240	-4/25	36	4	0	0
P_6	0	$30\varepsilon^2$	0	30	3/50	-15	-2	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	0	30	7/50	-33	-3	0	0

III.

P_1	-3/4	ε	1	40	8/25	-84	-12	8	0
P_2	150	ε^2	0	1	1/500	-1/2	-1/15	1/30	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	0	0	2/25	-18	-1	-1	0

IV.

P_1	-3/4	$160\varepsilon^2+\varepsilon$	1	-160	0	-4	-4/3	8/3	0
P_3	-1/50	$500\varepsilon^2$	0	500	1	-250	-100/3	50/3	0
P_7	0	1	0	-500	0	250	100/3	-50/3	1
		0	0	-40	0	2	-1	-7/3	0

V.

P_1	-3/4	$160\varepsilon^2+\varepsilon+2/125$	1	-168	0	0	-4/5	12/5	2/125
P_2	-1/50	$500\varepsilon^2+1$	0	0	1	0	0	0	1
P_4	6	1/250	0	-2	0	1	2/15	-1/15	-1/250
		$-1/125-130\varepsilon^2-3/4\varepsilon$	0	-39	0	0	7/5	-11/5	-1/125

VI.

P_1	-3/4	$160\varepsilon^2+\varepsilon+1/25$	1	-180	0	6	0	2	1/25
P_3	-1/50	$500\varepsilon^2+1$	0	0	1	0	0	0	1
P_5	0	3/100	0	-15	0	15/2	1	-1/2	-3/100
		$-130\varepsilon^2-3/4\varepsilon-1/20$	0	-15	0	-21/2	0	-3/2	-1/20

Шундай қилиб, юқоридаги «тўғрилаш» усулини қўллаб масалани ечганда 6- босқичда оптимал ечим топилади.

$$X(\varepsilon)=(160\varepsilon^2+\varepsilon+1/25; 0; 500\varepsilon^2+1;\ 0; 3/100)$$

$$Y_{min}(\varepsilon)=-130\varepsilon^2-(3/4)\varepsilon-1/20$$

Берилган масалани ечимини топиш учун $\varepsilon=0$ деб қабул қиламиз.

Жавоб: $X_0=(1/25; 0; 1; 0; 3/100)$, $Y_{min}(X_0)=-1/20$.

Қуйидаги хос масалани тўғрилаш усулини (ε- усулни) қўллаб ечинг:

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 4x_6 = 0, \\ \quad x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 0 \\ \qquad\quad x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,7})$$

$$Y = x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \to \max.$$

Таянч сўз ва иборалар.

Ажратилган ўзгарувчилар; ажратилмаган ўзгарувчилар; базис; базис ўзгарувчи; базис ечим; умумий ечим; номанфий базис ечим; назорат тенглама; аниқловчи коэффициент; 0-тенглама; X-тенглама; 0-тенгламалар системаси; X-тенгламалар системаси; симплекс усул; симплекс жадвал; оптималлик мезони; оптимал ечимнинг мавжуд эмаслик мезони; сунъий базис; сунъий базис усули; кенгайтирилган масала; хос чизиқли программалаш масаласи; хос режа (ечим); циклланиш; ε-усул.

Назорат саволлари:

1. Базис нима?
2. Базис векторлар ва базис ўзгарувчилар нима?
3. Чизиқли тенгламалар системасининг умумий ечими ёки базис ўзгарувчиларга нисбатан аниқланган формаси қандай?
4. Чизиқли тенгламалар системасининг базис ечими деганда қандай ечимни тушунамиз?
5. Чизиқли тенгламалар системасининг номанфий базис ечими нима?
6. 0- тенглама ва 0- тенгламалар системасини таърифланг.
7. Чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда бўлмаслик шарти қандай?
8. Чизиқли тенгламалар системасининг номанфий ечими қачон мавжуд бўлмайди?
9. Назорат тенглама нима?
10. Аниқловчи коэффициент нима ва у қандай топилади?

11. Симплекс жадвал нима ва унинг қандай кўринишларини биласиз?
12. Чизиқли дастурлаш масаласининг оптимал режаси (ечими) нима?
13. Оптимал ечимнинг мавжуд эмаслик шарти қандай?
14. Базис ечимлар қандай қоида асосида алмаштирилади?
15. Симплекс (Данциг) усулининг ғояси қандай?
16. Данциг усулида оптималлик мезони қандай?
17. Данциг усулида оптимал ечимнинг мавжуд эмаслик мезони қандай?
18. Сунъий базис усули қачон қўлланилади?
19. Сунъий ўзгарувчи ва қўшимча ўзгарувчилар нима ва уларнинг фарқи нимадан иборат?
20. Сунъий базис усулида оптимал ечимнинг мавжуд эмаслик шарти қандай?
21. Чизиқли дастурлаш масаласининг хос масаласи қандай?
22. Циклланиш нима ва у қачон рўй бериши мумкин?
23. ε- усулнинг ғояси қандай?

Масалалар:

1. Чизиқли тенгламалар системасининг номанфий базис ечимини топинг.

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad = 12, \\ 6x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 = 30, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0. \qquad (j = \overline{1,4}).$$

2. Чизиқли тенгсизликлар симтемасининг номанфий базис ечимини топинг.

$$a) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \qquad \leq 4, \\ x_1 \qquad + 2x_3 \leq 7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0. \qquad (j = \overline{1,3})$$

$$б) \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 \geq 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad \geq 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0. \qquad (j = \overline{1,4})$$

3. Берилган системанинг номанфий базис ечимлари ичида мақсад функцияга экстремал қиймат берувчисини топинг.

$$a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ -x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,4})$$

$$Y = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max.$$

$$б)\begin{cases} 2x_1 \qquad + x_3 + x_4 \leq 30, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 20, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,4})$$

$$Y = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 \to \max.$$

$$в)\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 8, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,4})$$

$$Y = 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \to \max.$$

4. Чизиқли дастурлаш масалаларини симплекс усул билан ечинг.

$$a)\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 9, \\ 3x_1 - x_2 \qquad\qquad + x_5 = 12, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,5})$$

$$Y = 7x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 - 9 \to \max.$$

$$б)\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 \qquad\qquad = 4, \\ \quad 2x_2 + 4x_3 + x_4 \qquad - 8, \\ \quad x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,5})$$

$$Y = x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 \to \max.$$

$$в)\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad \leq 4, \\ x_1 \qquad + 3x_3 \leq 7, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 12, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,3})$$

$$Y = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \to \max.$$

5. Масалаларнинг ечимини сунъий базис усули билан ечинг.

$$а)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 \geq 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 \qquad \geq 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,4})$$

$$Y = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max.$$

$$б)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 \qquad + 3x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,4})$$

$$Y = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max.$$

$$в)\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad \leq 4, \\ x_1 \qquad + 3x_3 \leq 7, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,3})$$

$$Y = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max.$$

6. Хос чизиқли дастурлаш масаласининг оптимал ечимини топинг.

$$а)\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad - 2x_5 = 0, \\ x_2 \qquad + x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5})$$

$$Y = x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max.$$

$$б)\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 8x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 + 11x_5 + 2x_6 - x_7 - x_8 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 15x_4 + 12x_5 - x_6 - x_7 + 3x_8 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,8})$$

$$Y = x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 + x_7 + 7x_8 \to \max.$$

$$в)\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad = 0, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,4})$$

$$Y = 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 \to \max.$$

III БОБ. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШДА ИККИЛАНИШ НАЗАРИЯСИ

1-§. Иккиланиш назариясининг асосий тушунчалари. Қўшма масалалар ва уларнинг иқтисодий талқини. Симметрик ва симметрик бўлмаган қўшма масалалар

Ҳар бир чизиқли дастурлаш масаласига унга нисбатан иккиланган масала деб аталувчи бошқа масалани мос қўйиш мумкин. Берилган масаладаги мақсад функция ва номаълумларга қўйилган чегаравий шартлар орқали иккиланган масаланинг мақсад функциясини ва чегаравий шартларини тўла аниқлаш мумкин.

Берилган масала ва унга иккиланган масалалар биргаликда ўзаро иккиланган (қўшма) масалалар деб аталади. Агар берилган масала ёки унга иккиланган масалалардан бирортаси ечимга эга бўлса, уларнинг иккинчиси ҳам оптимал ечимга эга бўлади.

Ўзаро қўшма масалаларни кўз олдига келтириш ва уларнинг иқтисодий маъноларини таҳлил қилиш учун қуйида ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласини кўрамиз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n \le b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n \le b_2 , \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n \le b_m , \end{cases} \tag{3.1}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \qquad x_n \ge 0, \tag{3.2}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \quad + c_nx_n \to max \tag{3.3}$$

Масаланинг (3.1) шарти маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган m хил хом ашёнинг ҳар бири чегараланган эканлигини ва уларни меъёрида сарф қилиш кераклигини кўрсатади. Бу ерда: x_j $(j=1,...,n)$ ишлаб чиқариладиган j-маҳсулот миқдори, b_i $(i=1,...,m)$ i-хом ашёнинг заҳираси, a_{ij} коэффициентлар j-маҳсулот бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган i-хом ашё микдори (нормаси) ни кўрсатади. Y-мақсад функция бўлиб у ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг пул қиймати максимум бўлиши кераклигини кўрсатади, бу ерда C_j j-маҳсулот бирлигининг баҳосидир. Масалани вектор формада қуйидагича ёзиш мумкин:

$$AX \le B, \tag{3.4}$$

$$X \ge 0, \tag{3.5}$$

$$Y = CX \longrightarrow max \tag{3.6}$$

Фараз қилайлик, корхона маълум бир сабабларга кўра маҳсулот ишлаб чиқаришни тўхтатган бўлсин. Шу сабабли корхона хом ашё ва бошқа ишлаб чиқариш воситаларини сотмоқчи бўлади. Корхона бу хом ашёларни сотишдан олган тушумининг маҳсулот ишлаб чиқариб уни сотишдан олган тушумидан кам бўлмаслигига ҳаракат қилади. Иккинчи томондан хом ашё сотиб олувчи корхона эса уларни кам харажат сарф қилиб сотиб олишга ҳаракат қилади. Иккиланган масала хом ашёларни сотувчи ва уларни сотиб олувчи корхоналар мақсадини амалга ошириши керак. Бунинг учун хом ашёларнинг W_1, W_2, W_n нархини шундай белгилаш керакки сотувчи корхона зарар кўрмасин ҳамда сотиб олувчи корхонанинг сарф қилган харажатлари минимал бўлсин.

Математик нуктаи назардан иккиланган масалани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} a_{11}W \quad + a_{21}W \quad \quad {}_{m1}W \\ a_{12}W \quad a_{22}W \quad \quad {}_{,2}W \\ \\ a_{1n}W \quad a_{2n}W\ {}_2 + \ldots \quad {}_{,n}W \end{cases} \tag{3.7}$$

$$W_1 \geq 0, W_2 \geq 0, \ldots, W_m \geq 0, \tag{3.8}$$

$$F = b_1W_1 + b_2W_2 + \ldots + b_mW_m \longrightarrow \min \tag{3.9}$$

Иккиланган масаладаги (3.7) чекламалар маҳсулот бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган барча хом ашёларнинг пул қиймати маҳсулот баҳосидан кам бўлмаслик кераклигини кўрсатади. (3.9) шарт эса мақсад функция бўлиб, у барча хом ашёларнинг баҳоси минимал бўлиши кераклигини кўрсатади.

Иккиланган масала матрица формада қуйидагича ёзилади:

$$WA \leq C, \tag{3.10}$$

$$W \geq 0, \tag{3.11}$$

$$F = WB \longrightarrow min \tag{3.12}$$

(3.1)-(3.3) ва (3.7)-(3.9) масалалар "ўзаро симметрик бўлган қўшма масалалар" дейилади. Бу масалаларнинг ҳар бирида чегаравий шартлар тенгсизликлардан иборат бўлади ҳамда номаълумларнинг манфий бўлмаслиги талаб қилинади. Симметрик бўлмаган қўшма масалалар умумий ҳолда қуйидагича қўйилади:

Берилган масала

$$AX = B, \tag{3.13}$$

$$X \geq 0, \tag{3.14}$$

$$Y = CX \longrightarrow max(min) \tag{3.15}$$

Иккиланган масала

$$WA \geq C \ (WA \leq C) \tag{3.16}$$

$$F = WB \longrightarrow min(max) \tag{3.17}$$

Бу масалалардан кўринадики, агар берилган масаладаги чекламалар тенглама кўринишида бўлса, у холда иккиланган масаладаги чегаравий шартлар тенгсизлик кўринишида бўлади, уларнинг "$\geq$" ёки "$\leq$" кўринишида бўлиши берилган масаладаги мақсад функциясининг мос равишда Y *max* ёки Y *min* кўринишда бўлишига боғлиқ бўлади. Агар берилган масалада мақсад функцияси Y *max* кўринишида бўлса, иккиланган масалада у F *min* бўлади ва аксинча, агар берилган масалада мақсад функция Y *min* кўринишда бўлса, у ҳолда иккиланган масалада F *max* кўринишда бўлади.

Юқоридагилардан хулоса қилиб, ўзаро иккиланган (қўшма) масалаларнинг математик моделларини қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин.

Симметрик бўлмаган қўшма масалалар:

1.	Берилган масала $AX=B,$ $X\geq 0,$ $Y=C'X \longrightarrow min$	Иккиланган масала $WA \leq C,$ $F=WB \longrightarrow max$
2.	Берилган масала $AX=B,$ $X\geq 0,$ $Y=C'X \longrightarrow max$	Иккиланган масала $WA \geq C,$ $F=WB \longrightarrow min$

Симметрик қўшма масалалар:

3.	Берилган масала $AX \geq B,$ $X\geq 0,$ $Y=C'X \longrightarrow min$	Иккиланган масала $WA \leq C,$ $W \geq 0,$ $F=WB \longrightarrow max$
4.	Берилган масала $AX\leq B,$ $X\geq 0,$ $Y=C'X \longrightarrow max$	Иккиланган масала $WA \geq C,$ $W \geq 0,$ $F=WB \longrightarrow min$

Қўшма масалалар орасида яна қуйидаги боғланишлар мавжуд.

1. Берилган масаладаги технологик коэффициентлардан ташкил топган матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлса, иккиланган масаладаги матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{m2} \\ \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

кўринишда, яъни А матрицага транспонирланган матрица бўлади.

2. Иккиланган масаладаги номаълумлар сони берилган масаладаги чекламаларнинг сонига тенг. Иккиланган масаладаги чекламалар сони берилган масаладаги номаълумлар сонига тенг бўлади.

3. Иккиланган масала мақсад функциясидаги коэффициентлар берилган масаладаги озод ҳадлардан иборат бўлади. Иккиланган масаладаги озод ҳадлар эса берилган масала мақсад функцияси коэффициентларидан иборат бўлади.

4. Агар берилган масаладаги x_j номаълум мусбат бўлса ($x_j \geq 0$) у ҳолда иккиланган масаладаги j-чеклама "$\geq$"кўринишдаги тенгсизликдан иборат бўлади. Агар x_j номаълум мусбат ҳам, манфий ҳам қийматларни қабул қилиши мумкин бўлса, у ҳолда иккиланган масаладаги j-чеклама тенгламадан иборат бўлади.

5. Агар берилган масаладаги i-чеклама тенгсизликдан иборат бўлса, иккиланган масаладаги W_i номаълум мусбат бўлади, яъни $W_i \geq 0$.

Агар (1)-(3) масаладаги i-чеклама тенгламадан иборат бўлса, W_i мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин.

1-мисол. Берилган масалага иккиланган масала тузинг.

$$\begin{gathered} -x_1+3x_2-5x_3 \leq 12, \\ 2x_1-x_2+4x_3 \leq 24, \\ 3x_1+x_2+x_3 \leq 18, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \\ Y=2x_1+x_2+3x_3 \longrightarrow max. \end{gathered}$$

Ечиш. Масаладаги барча чекламалар "$\leq$" кўринишдаги тенгсизликлардан иборат, демак, берилган масалага симметрик қўшма масалаларни хосил қиламиз:

Берилган масала	Иккиланган масала
$-x_1+3x_2-5x_3 \leq 12,$	$-W_1+2W_2+3W_3 \geq 2,$
$2x_1-x_2+4x_3 \leq 24,$	$3W_1-W_2+W_3 \geq 1,$
$3x_1+x_2+x_3 \leq 18,$	$-5W_1+4W_2+W_3 \geq 3,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$	$W_1 \geq 0,\ W_2 \geq 0,\ W_3 \geq 0,$
$Y=2x_1+x_2+3x_3 \longrightarrow max.$	$F=12W_1+24Wx_2+18W_3 \longrightarrow min.$

2-мисол. Берилган масалага иккиланган масала тузинг.

$$x_1-x_2+4x_3\le 12,$$
$$x_1+3x_2-2x_3=13,$$
$$x_1+5x_2-6x_3\le 11,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,$$
$$Y=4x_1+x_2+4x_3\to max$$

Ечиш. Берилган масаладаги иккинчи шарт тенгламадан 1-шарт ҳамда 3-шарт тенгсизликлардан иборат. Шунинг учун, иккиланган масалани тузишда юқоридаги 5-бандда келтирилган қоидага риоя қиламиз ва қуйидаги масалаларга эга бўламиз:

Берилган масала	Иккиланган масала
$x_1-x_2+4x_3\le 12,$	$W_1+W_2+W_3\ge 4,$
$x_1+3x_2-2x_3=13,$	$-W_1+3W_2+5W_3\ge 1,$
$x_1+5x_2-6x_3\le 11,$	$4W_1-2W_2-6W_3\ge 4,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,$	$W_1\ge 0,\ W_3\ge 0,$
$Y=4x_1+x_2+4x_3\to max.$	$F=12W_1+13Wx_2+11W_3\to min.$

2-§. Иккиланиш назариясининг асосий теоремалари ва уларнинг иқтисодий талқини

Иккиланиш назариясида берилган масаланинг ихтиёрий X жоиз режаси ҳамда иккиланган масаланинг ихтиёрий W жоиз режаси учун

$$Y(X)\le F(W) \qquad (3.18)$$

тенгсизлик, яъни

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i W_i$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундай тенгсизлик иккиланиш назариясининг **асосий тенгсизлиги** деб аталади.

Бу тенгсизлик ихтиёрий мумкин бўлган ишлаб чиқариш режаси ҳамда хом ашёларнинг ихтиёрий мумкин бўлган баҳолари учун ишлаб чиқарилган маҳсулот баҳоси сарф қилинган хом ашёлар баҳосидан ошмаслигини кўрсатади.

1-теорема. Агар қўшма масалалардан бироргаси оптимал ечимга эга бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам ечимга эга бўлади ҳамда бу масалалардаги чизиқли функцияларнинг экстремал қийматлари ўзаро тенг бўлади, яъни

$$Y_{min}=F_{max} \qquad (3.19)$$

Агар бу масалалардан бирининг чизиқли функцияси чегараланмаган бўлса, у ҳолда иккинчи масала ҳеч қандай ечимга эга бўлмайди.

Исбот. Теоремани симметрик бўлмаган қўшма масалалар учун исботлаймиз. Берилган масала оптимал ечимга эга ва уни симплекс усул билан топиш мумкин деб фараз қиламиз. Умумийликни бузмасдан оптимал ечимдаги базис векторлар биринчи m та P_1, P_2, , P_m векторлардан иборат деб қабул қиламиз. Шу векторларнинг координаталаридан тузилган матрицани B билан белгилаймиз. Охирги симплекс жадвал дастлабки симплекс жадвалдаги P_1, P_2, , P_m P_{m+1}, , P_n векторларнинг базис векторлар буйича ёйилмасини ўз ичига олади, яъни дастлабки симплекс жадвалдаги ҳар бир вектор P_j учун охирги симплекс жадвалда қуйидаги муносабатларни қаноатлантирувчи X_j вектор мос келади:

$$P_j=BX_j \text{ ёки } B^{-1}P_j=X_j \qquad (3.20)$$

$\overline{X}=(X_1,X_2,\dots,X_m,X_{m+1},\dots,X_n)$билан охирги симплекс жадвалнинг элементларидан ташкил топган матрицани белгилаймиз. Симплекс жадвалнинг дастлабки m та вектори базис векторлардан иборат бўлганлиги сабабли $\overline{X}$матрица қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{1m+1} & x_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & x_{2m+1} & x_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & x_{mm+1} & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Оптимал ечим $X^0=B^{-1}b$ вектордан иборат бўлиб, қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$A=B\overline{X},\ B^{-1}A=\overline{X}, \qquad (3.21)$$
$$b=BX^0,\ B^{-1}b=X^0, \qquad (3.22)$$
$$y_{min}=C^0X^0, \qquad (3.23)$$
$$\Delta=C^0\overline{X}-C\leq 0, \qquad (3.24)$$

бу ерда $C^0=(c_1, c_2, ..., c_m)$- оптимал ечимга мос келувчи C векторнинг координаталаридан тузилаган вектор - қатор. Энди

$$W^0=C^0B^{-1} \qquad (3.25)$$

формула орқали аниқланувчи W^0 ни иккиланган масаланинг режаси эканлигини кўрсатамиз. (3.16), (3.21), (3.24), (3.25) муносабатларга асосан

$$W^0A - C = C^0B^{-1}A - C = C^0\overline{X} - C\leq 0.$$

Демак,

$$W^0A - C \leq 0,$$

ёки

$$W^0A \leq C,$$

Шундай қилиб (3.25) шартни каноатлантирувчи W^0 вектор иккиланган масаланинг режаси бўлади. Бу режадаги иккиланган масала чизиқли функциясининг қиймати $Z(W^0)= W^0b$ га тенг.

(3.25) ва (3.22) га асосан

$$Z(W^0)= W^0b= C^0B^{-1}b= C^0X^0=Y(X^0)=Y_{min} \qquad (3.26)$$

Бундан кўринадики, иккиланган масала чизиқли функциясининг W^0 режадаги қиймати берилган масаланинг чизиқли функциясининг оптимал қийматига тенг экан.

Энди W^0 режа иккиланган масаланинг оптимал режаси эканлигини кўрсатамиз. (3.13) ва (3.14) шартларни каноатлантирувчи ихтиёрий n ўлчовли W векторлар учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$WAX=Wb=Z(W) \qquad (3.27)$$
$$WAX\leq CX=Y(X) \qquad (3.28)$$

(3.27) ва (3.28) дан

$$F(W) \leq Y(X) \qquad (3.29)$$

тенгсизликлар ҳосил бўлади.

Бу тенгсизлик ихтиёрий W ва X лар учун бажарилади. Демак, (3.16) ва (3.17) чизиқли функцияларнинг оптимал қийматлари учун ҳам

$$max\ F(W) \leq min\ Y(X) \qquad (3.30)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Иккинчи томондан W^0 режа учун (3.26) тенглик ўринлидир. Демак, W^0 да иккиланган масаланинг чизиқли функцияси узининг максимал қийматига эришади.

Худди шундай йул билан, агар иккиланган масала оптимал ечимга эга бўлса, бурилган масала ҳам оптимал ечимга эга бўлишини ва қўшма масалаларнинг оптимал ечимлари учун

$$max\ F(W) = min\ Y(X)$$

тенглик ўринли бўлишини исбот қилиш мумкин.

Теоремани иккинчи кисмини исботлаш учун берилган масаланинг чизиқли функцияси қуйидан чегараланмаган деб фараз қиламиз. У ҳолда (3.29) га асосан

$$F(W) \leq -\infty$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ифода маънога эга бўлмаганлиги сабабли иккиланган масала ечимга эга бўлмайди.

Худди шунингдек иккиланган масаланинг чизиқли функцияси юкоридан чегараланмаган деб фараз қилсак, (3.29) га асосан

$$Y(X) \geq +\infty$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизлик ҳам маънога эга бўлмагани сабабли, берилган масала ечимга эга бўлмайди.

Исбот қилинган теорема симметрик қўшма масалалар учун ҳам ўринли бўлиб, унга асосан ўзаро қўшма масалалардан ихтиёрий бирининг ечимини топиб, у орқали иккинчисининг ечимини аниқлаш мумкин.

Келтирилган иккиланиш назариясининг 1-теоремаси иқтисодий нуқтаи назардан шундай талқин қилинади:

Агар ташқаридан белгиланган C_j баҳода сотилган маҳсулотнинг пул микдори W_i ички баҳо асосида ўлчанган харажатлар (хом ашёлар) миқдорига тенг бўлса, яъни

$$\sum_{j=1}^{n} C_j X_j = \sum_{i=1}^{m} b_i W_i$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда маҳсулотнинг мумкин бўлган ишлаб чиқариш режаси ҳамда хом ашёларнинг мумкин бўлган баҳолари оптимал бўлади. Бундан кўринадики, иккиланган баҳолар сарф қилинган харажатлар ва ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг пул миқдорини ўзаро тенг бўлишини таъминловчи восита бўлиб хизмат қилади.

Хулоса. Агар берилган масала ечимга эга бўлса, у холда иккиланган масаланинг ечими $W^0=B^{-1}\,C^0$ формула орқали топилади. Худди, шунингдек, агар иккиланган масала оптимал ечимга эга бўлса, у ҳолда берилган масаланинг оптимал ечими

$$X^0=b^0B^{-1}$$

формула орқали топилади.

Мисол. Берилган ва унга иккиланган масалани ечинг.

Берилган масала

$$x_1+3x_2-x_3+2x_5=7,$$
$$-2x_2+4x_3+x_4=12,$$
$$-4x_2+3x_3+8x_5+x_6=10,$$
$$x_j\geq 0,\ j=1,6,$$
$$Y=x_2-3x_3+2x_5 \longrightarrow min$$

Ечиш. Масалада қуйидаги белгилашлар киритамиз ва иккиланган масалани тузамиз.

$$C=(0,\ 1,\ -3,\ 0,\ 2,\ 0),$$
$$b=(7,\ 12,\ 10)^T.$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 3 & 0 & 8 & 1\end{pmatrix},$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & -4\\ -1 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 8\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

бу ерда, A^T - A матрицага нисбатан транспонирланган матрица.

Иккиланган масала:

$$W_1 \le 0,$$
$$3W_1 - 2W_2 - 4W_3 \le 1,$$
$$-W_1 + 4W_2 + 3W_3 \le -3,$$
$$W_2 \le 0,$$
$$2W_1 + 8W_3 \le 2,$$
$$W_3 \le 0,$$
$$F = 7W_1 + 12W_2 + 10W_3 \longrightarrow max$$

Берилган масалани симплекс жадвалга жойлаштириб, уни симплекс усул билан ечамиз.

I.

Б.в.	С	P_0	0	1	-3	0	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	0	7	1	3	-1	0	2	0
P_4	0	12	0	-2	4	1	0	0
P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1
Δ_j		0	0	-1	3	0	-2	0

II.

Б.в.	С	P_0	0	1	-3	0	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	0	10	1	5/2	0	1/4	2	0
P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0
P_6	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1
Δ_j		-9	0	1/2	0	-3/4	-2	0

III.

Б.в.	С	P_0	0	1	-3	0	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0
P_4	-3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0
P_6	0	11	1	0	0	-1/2	10	1
Δ_j		-11	-1/5	0	0	-8/10	-12/5	0

III итерациядан сўнг берилган масаланинг оптимал ечими

$$X= (0;\ 4;\ 5;\ 0;\ 0;\ 11)$$

топилади. Бу ечимдаги чизиқли функциянинг қиймати

$$Y_{min}=-11$$

Охирги симплекс жадвалдан:

$C^0=(1,\ -3,\ 0)$ вектор қатор ва тескари B^{-1} матрицани аниқлаймиз.

$$B^{-1}=(P_1,P_4,P_6)=\begin{pmatrix} 2/5 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & 3/10 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

ва (3.17) формула ёрдамида иккиланган масаланинг ечимини топамиз:

$$W^0=(W_1,W_2,W_3)=(1,-3,0)\begin{pmatrix} 2/5 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & 3/10 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}=(-1/5,-4/5,0).$$

Шундай қилиб, иккиланган масаланинг оптимал ечими:

$$W^0=(-1/5;\ -4/5;\ 0),$$

бўлиб, унга мос келувчи чизиқли функциянинг қиймати

$$F_{max}=-11$$

бўлади. Охирги симплекс жадвалдан кўринадики иккиланган масала ечимини ҳисоблаб ўтирмаслик ҳам мумкин. Бу жадвалда B^{-1} матрицани ташкил қилувчи P_1, P_4, P_6 векторларга мос келувчи $m+1$ – қаторнинг Δ_1, Δ_4, Δ_6, элементлари W^0 векторнинг (иккиланган масала ечимининг) элементларини беради. $m+1$ қаторнинг P_0 векторга мос келган элементи эса оптимал ечимга мос келувчи Y_{min} ва F_{max} функцияларнинг қийматини беради.

Шундай қилиб, кўриш мумкинки, оптимал ечимда қўшма масалалар мақсад функцияларнинг қийматлари ўзаро тенг бўлади, яъни

$$Y_{min}=Y\ (X^0)=\ F\ (W^0)=F_{max}=-11.$$

2-теорема. Берилган масаланинг базис ечими X^0 ва иккиланган масаланинг базис ечими W^0 оптимал ечими бўлиши учун қуйидаги тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

$$x_j^0\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i^0-C_j\right)=0,\ j=\overline{1,n} \qquad (3.31)$$

$$W_i^0\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j^0-b_i\right)=0,\ i=\overline{1,m} \qquad (3.32)$$

Исботи. Теоремани (3.1)-(3.3) ва (3.7)-(3.9) кўринишдаги берилган қўшма масалалар учун исботлаймиз. X^0 ва W^0 векторлар мос равишда берилган ва унга иккиланган масаланинг оптимал ечими бўлсин деб фараз қиламиз. У ҳолда қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \le b_i, \; i = \overline{1, m} \tag{3.33}$$

$$x^0 \ge 0, \; (j = \overline{1, n}) \tag{3.34}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i^0 \ge C_j, \; j = \overline{1, n} \tag{3.35}$$

$$W_i^0 \ge 0, \; (i = \overline{1, m}) \tag{3.36}$$

(3.33) тенгсизликнинг икки томонини W_i^0га кўпайтирамиз ва қуйидагига эга бўламиз:

$$W_i^0 \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^0 \le W_i^0 b_i, \; (i = \overline{1, m}) \tag{3.37}$$

Бу тенгсизликнинг икки томонини i индекс бўйича суммалаймиз:

$$\sum_{i=1}^{m} W_i^0 \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \le \sum_{i=1}^{m} W_i^0 b_i$$

ёки

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 W_i^0 \le \sum_{i=1}^{m} W_i^0 b_i \tag{3.38}$$

Худди шунингдек (3.35) тенгсизликнинг икки томонини $x_j^0 \ge 0$ га кўпайтириб j индекс бўйича суммалаймиз ва қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^0 \sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i^0 \ge \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0$$

ёки

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j^0 W^0 \ge \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 \tag{3.39}$$

Юкоридаги 1-теоремага асосан қўшма масалаларнинг оптимал ечимлари учун

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 = \sum_{i=1}^{m} b_i W_i^0$$

тенглик ўринли бўлади. Демак (3.38) ва (3.39) дан қуйидаги муносабатлардан ҳосил қилиш мумкин.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j^0 W_i^0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i^0 x_j^0 = \sum_{i=1}^{m} W_i^0 b_i$$

Бу тенгликларни қуйидаги кўринишда ифодалаймиз:

$$\sum_{i=1}^{m} W_i^0 (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0) = 0, \qquad (3.40)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^0 (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} W^0 - C_j) = 0. \qquad (3.41)$$

Бу муносабатлардан (3.33), (3.34), (3.35) ва (3.36) шартларни инобатга олиб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$W_i^0 (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0) = 0,$$

$$x_j^0 (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i^0 - C_j) = 0.$$

Шу билан, теорема шартларининг зарурлиги исботланди. Уларнинг етарлилигини исботлаш учун қўшма масалаларнинг ихтиёрий X^1 ва W^1 базис ечимларини кўрамиз ва улар устида юқоридагидек алмаштиришлар бажариб

$$\sum_{i=1}^{m} W_i^1 b_i \quad \sum_{j=1}^{n} C_j$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Демак, 1-теоремага асосан X^1 ва W^1 режалар мос равишда берилган ва иккиланган масаланинг оптимал ечими бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди. Ушбу теоремадан қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин.

1. Агар

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 < b_i$$

тенгсизлик ихтиёрий $i = \overline{1,m}$ учун бажарилса, у ҳолда $W_i^0 = 0$ бўлади.

2. Агар

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \quad b_i$$

тенглик ихтиёрий $i = \overline{1,m}$ учун бажарилса, у ҳолда $W_i^0 > 0$ бўлади.

3. Агар

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i^0 > C_j, \ j = \overline{1,n}$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $x_j^0 = 0$ бўлади.

4. Агар

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i^0 = C_j, \ i = \overline{1,n}$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $x_j^0 > 0$ бўлади.

Бу хулосалардан кўринадики, иккиланган баҳоларга хом ашёларнинг камёб (дефицит)* эканлигини баҳоловчи ўлчов (катталик) деб қараш мумкин.

Ишлаб чиқаришда тўла ишлатиладиган хом ашё **камёб хом ашё** деб аталади. Бундай хом ашёларнинг иккиламчи баҳоси мусбат ишорали бўлади. Камёб хом ашёларнинг ишлаб чиқаришга сарф қилинган ҳажмини бир бирликка ошириш натижасида корхона даромадини ошириш мумкин.

Ишлаб чиқаришда тўла ишлатилмайдиган хом ашёлар **камёб бўлмаган (ортиқча) хом ашё** деб аталади. Бундай хом ашёларнинг иккиламчи баҳоси 0 га тенг бўлади.

Маҳсулот ишлаб чиқаришда камёб бўлмаган хом ашёларни ошириб сарф қилиш натижасида корхона даромадини ошириб бўлмайди.

Дейлик, хом ашёларнинг b_i захираси ўзгарувчан бўлсин. X^0 оптимал режани ўзгартирмаган ҳолда хом ашёлар сарфини қанчалик ўзгартириш мумкин, ҳамда b_i нинг ўзгариши мақсад функциянинг экстремал қийматига қандай таъсир этади?- деган савол туғилиши мумкин. Бу саволга иккиланиш назариясининг 3-теоремаси жавоб беради.

3-теорема. Оптимал баҳо W_i^0 нинг қиймати i - хом ашёнинг b_i захираси бир бирликка ўзгарганда мақсад функция Y_{max} нинг ўзгарган миқдорини кўрсатади, яъни

$$W_i^0 = \frac{\partial Y_{max}}{\partial b_i}$$

Агар ∂b_i ни Δb_i га, ∂Y_{max} ни ΔY_{max} га алмаштирсак, у ҳолда

$$W_i^0 = \frac{\Delta Y_{max}}{\Delta b_i}$$

ёки

$$\Delta Y_{max} = W_i^0 \Delta b_i$$

Бундан, агар $\Delta b_i = 1$ бўлса, у ҳолда $\Delta Y_{max} = W_i^0$ бўлади, яъни иккиланган масаланинг оптимал ечими камёб хом ашёлар миқдорини бир бирликка ошириб сарф қилинганда мақсад функциянинг қанча миқдорга ўзгаришини кўрсатади.

Мисол. Қуйида келтирилган масаланинг ва унга иккиланган масаланинг ечимини топинг ҳамда иккиланиш назариясининг асосий теоремаларининг ўринли эканини текширинг.

$$\begin{gathered} x_1+2x_2+x_3 \le 18, \\ 2x_1+x_2+x_3 \le 16, \\ x_1+x_2 \le 8, \\ x_2+x_3 \le 6, \\ x_j \ge 0,\ (j=1,\ 2,\ 3) \\ Y = 3x_1+4x_2+2x_3 \longrightarrow \quad max \end{gathered}$$

Ечиш. Масалага иккиланган масалани тузамиз:

$$W_1+2W_2+W_3 \ge 3,$$

$$2W_1+W_2+W_3+W_4 \ge 4,$$
$$W_1+W_2+W_4 \ge 2,$$
$$W_1\ge 0,\ W_2\ge 0,\ W_3\ge 0,\ W_4\ge 0,$$
$$F=18W_1+16W_2+8W_3+6W_4 \longrightarrow min$$

Берилган масалани каноник кўринишга келтирамиз ва симплекс усул билан ечамиз.

$$x_1+2x_2+x_3+x_4=18,$$
$$2x_1+x_2+x_3+x_5=16,$$
$$x_1+x_2 \qquad +x_6=8,$$
$$x_2+x_3+x_7=6,$$
$$x_j\ge 0,\ (j=1,\ 2,\ ...,7)$$
$$Y=3x_1+4x_2+2x_3 \longrightarrow max$$

I.

Б.в.	C	P_0	3	4	2	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4	0	18	1	2	1	1	0	0	0
P_5	0	16	2	1	1	0	1	0	0
P_6	0	8	1	1	0	0	0	1	0
P_7	0	6	0	1	1	0	0	0	1
	Δ_j	0	-3	-4	-2	0	0	0	0

II.

Б.в.	C	P_0	3	4	2	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4	0	6	1	0	-1	1	0	0	-2
P_5	0	10	2	0	0	0	1	0	-1
P_6	0	2	1	0	-1	0	0	1	-1
P_2	4	6	0	1	1	0	0	0	1
	Δ_j	24	-3	0	2	0	0	0	4

III.

Б.в.	C	P_0	3	4	2	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4	0	4	0	0	0	1	0	-1	-1
P_5	0	6	0	0	2	0	1	-2	1
P_1	3	2	1	0	-1	0	0	1	-1
P_2	4	6	0	1	1	0	0	0	1
	Δ_j	30	0	0	-1	0	0	3	4

IV.

Б.в.	C	P_0	3	4	2	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4	0	4	0	0	0	1	0	-1	-1
P_3	2	3	0	0	1	0	1/2	-1	1/2
P_1	3	5	1	0	0	0	1/2	0	-1/2
P_2	4	3	0	1	0	0	-1/2	1	1/2
	Δ_j	33	0	0	0	0	1/2	2	3/2

Симплекс усулнинг 4-босқичида масаланинг оптимал ечими топилди

$$X^0=(5;\ 3;\ 3;\ 4)$$
$$Y(X^0)=33.$$

Иккиланган масалани ечими

$$W^0=(0;\ 1/2;\ 2;\ 3/2)$$
$$F(W^0)=33.$$

Демак, оптимал ечим учун 1-теорема ўринли бўлаяпти:

$$Y_{max}=Y(X^0)=F\ (W^0)=F_{min}=33.$$

Берилган масаланинг ечимини унинг шартларига қўйганда 1-шарт қатъий тенгсизликка айланади, иккинчи, учинчи ва тўртинчи шартлар эса тенгламага айланади:

$$5+2*3+3=14<18$$
$$2*5+3+3=16=16$$
$$5+3\ \ =8=8$$
$$3+3\ \ =6=6$$

Шунинг учун иккиланган масалада $W_j^0=0$ ҳамда $W_2^0 \neq 0, W^0 \neq 0, W_4^0 \neq 0$
Энди иккиланган масаланинг

$$W^0=(0;\ 1/2;\ 2;\ 3/2)$$

оптимал ечимини унинг шартларига қўйсак, ундаги барча шартлар айниятга айланади:

$$0+2.1/2+2=3=3$$
$$2.0+1/2+2+3/2=4=4$$
$$0+1/2+3/2=2=2$$

Шунинг учун берилган масаланинг оптимал ечимидаги барча x_j^0 кординаталар мусбат. Бу юқоридаги 2-теореманинг ўринли эканини кўрсатади.

Охирги симплекс жадвалдан кўриш мумкинки,

$$\Delta_4=W_1^0=0, \Delta_5=W_2^0=1/2, \Delta_6=W_3^0=2, \Delta_7=W_4^0=3/2$$

Демак, 3-теоремага асосан масаланинг I-шартидаги озод ҳаднинг ўзгариши мақсад функцияга таъсир этмайди. Агар II-шартдаги озод ҳадни бир бирликка оширсак, мақсад функция

$W_2^0=1/2$ миқдорга ошади.

Худди шунингдек, берилган масаланинг II ва IV-шартларидаги озод ҳадларни бир бирликка оширсак, мақсад функция мос равишда 2 ва 3/2 бирликка ошади.

3-§. Иқтисодий масалалар ечимларининг таҳлили

Маълумки, чизиқли дастурлаш усуллари ва, жумладан, симплекс усул иқтисодий масалаларнинг энг яхши (оптимал) ечимини топишга ёрдам беради.

Лекин бунинг ўзи кифоя эмас. Оптимал ечим топилгандан сўнг иқтисодий объектлар (завод, фабрика, фирма) бошлиқлари олдида қуйидагига ўхшаш муаммоларни ечишга тўғри келади:

- хом ашёларнинг баъзиларини ошириб, баъзиларини қисқартириб сарф қилинса оптимал ечим қандай ўзгаради?
- оптимал ечимни ўзгартирмасдан хом ашёлар сарфини қандай даражага ўзгартириш (камайтириш) мумкин?

Маҳсулотга бўлган талаб бир бирликка камайганда (ошганда) оптимал ечим қандай ўзгаради?

Шунга ўхшаш муаммоларни ҳал қилишда иккиланиш назариясидан фойдаланилади. Бунга иккиланиш назариясининг юқоридаги теоремаларига асосланилади.

Иқтисодий масаланинг оптимал ечимини таҳлил қилиш жараёнини қуйидаги мисолда кўрсатамиз.

1-масала. Фараз қилайлик, корхонада бир хил маҳсулот 3 та технология асосида ишлаб чиқарилсин. Ҳар бир технология бўйича бир бирлик вақт ичида сарф қилинадиган ресурсларнинг миқдори, уларнинг захираси, ҳар бир технологиянинг унумдорлиги қуйидаги жадвалда келитирилган.

Ресурслар	Технологиялар			Ресурслар захираси
	Т1	Т2	Т3	
Иш кучи (ишчи/соат)	15	20	25	1200
Бирламчи хом ашё	2	3	2.5	150
Электроэнергия (квт/с)	35	60	60	3000
Технологиянинг унумдорлиги	300	250	450	
Технологияларни қайта ишлатиш режалари (вакти)	X_1	X_2	X_3	

Корхонада ишлаб чиқарилган маҳсулотлар миқдори максимал бўлиши учун қайси технологиядан қанча вақт фойдаланиш керак?

Ечиш. Масаланинг математик моделини тузамиз:

$$15x_1+20x_2+25x_3 \le 1200$$
$$2x_1+3x_2+2.5x_3 \le 150$$
$$35x_1+60x_2+60x_3 \le 3000$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$$
$$Y=300\,x_1+250\,x_2+450\,x_3 \longrightarrow max$$

Ҳосил бўлган масалага иккиланган масалани тузамиз:

$$15W_1+2W_2+35W_3 \ge 300,$$

$$20W_1+3W_2+60W_3\geq 250,$$
$$25W_1+2.5W_2+60W_3\geq 450,$$
$$W_1\geq 0,\ W_2\geq 0,\ W_3\geq 0,$$
$$F=1200W_1+150W_2+3000W_3 \longrightarrow min$$

Берилган масалани каноник кўринишга келтирамиз:

$$15x_1+20x_2+25x_3+x_4=1200$$
$$2x_1+3x_2+2.5x_3\quad +x_5=150$$
$$35x_1+60x_2+60x_3\qquad +x_6=3000$$
$$x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0,\quad x_3\geq 0,\ x_4\geq 0,\quad x_5\geq 0,\quad x_6\geq 0,$$
$$Y=-300\ x_1-250\ x_2-450\ x_3 \longrightarrow min$$

Бу масалани симплекс жадвалга жойлаштириб, уни симплекс усул билан ечамиз:

Б. узг	$C_{баз}$	B	-300	-250	-450	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_4	0	1200	15	20	25	1	0	0
X_5	0	150	2	3	2.5	0	1	0
X_6	0	3000	35	60	60	0	0	1
Δ_j		0	300	250	450	0	0	0
X_3	-450	48	0.6	0.8	1	0.04	0	0
X_5	0	30	0.5	1	0	-0.1	1	0
X_6	0	120	-1	12	0	-2.4	0	1
Δ_j		-21600	30	-110	0	-18	0	0
X_3	-450	12	0	-0.4	1	0.16	-1.2	0
X_1	-300	60	1	2	0	-0.2	2	0
X_6	0	180	0	14	0	-2.6	2	1
Δ_j		-23400	0	-170	0	-12	-60	0

Симплекс усулнинг III босқичида берилган масаланинг оптимал ечими топилди

$$X^*=(60;\ 0;\ 12;\ 0;\ 0;\ 180),$$
$$Y_{min}=-23400,\quad Y_{max}=23400$$

Жадвалдан кўринадики, Т-1 технологияни 60 соат, Т-3 ни 12 соат қўллаш керак. Т-2 технологияни эса, умуман қўлламаслик керак.

Иккиланган масаланинг ечими:

$$W^0=(12;\ 60;\ 0),\ F_{max}=23400.$$

Демак, биринчи ва иккинчи ресурслар (иш кучи ва бирламчи хом ашё)нинг иккиланган баҳолари учун

$$W_1^0 = 12 > 0, W_2^0 = 60 > 0$$

муносабатлар ўринли. Бундан иш кучи ва бирламчи хом ашё ишлаб чиқаришда тўла ишлатилганлиги кўринади. Демак, бу ресурслар камёб ресурслардир.

Учинчи ресурс (электроэнергия)нинг иккиламчи баҳоси $W_3^0 = 0$ бўлгани учун бу ресурс камёб эмас, яъни ортиқча.

Бу айтилганларни текшириш учун берилган масаланинг ечимини унинг шартларига қўямиз.

$$15\quad 60+2\cdot 0+25\quad 12=1200$$
$$2\quad 60+2\quad 0+2.5\quad 12=150$$
$$35\cdot 60+60\cdot 0+60\quad 12=2820<3000$$

ҳамда ундаги биринчи ва иккинчи шартларнинг айниятга, учинчи шарт эса қатъий тенгсизликка айланганини кўрамиз.

Демак, ҳақиқатдан ҳам, иш кучи ва бирламчи хом ашё камёб, электроэнергия эса ортиқча экан.

Электроэнергияни иккиламчи баҳоси $W_3^0 = 0$ бўлгани учун уни ишлаб чиқаришга ошириб сарф қилиш, корхонада маҳсулот ишлаб чиқариш ҳажмини ўзгаришига таъсир қилмайди.

Иш кучининг иккиламчи баҳоси $W^0 = 12 > 0$ бўлгани учун уни бир бирликка ошириб сарф қилинса, корхонадаги ишлаб чиқариш режаси ўзгаради. Бу режани қандай ўзгаришини аниқлаш учун охирги симплекс жадвалдаги X_4 устунига қараймиз ва хулоса қиламиз. Янги режага асосан Т-1 технология 0.2 соат камроқ, Т-3 технология эса 0.16 соат кўпроқ ишлатилади. Натижада корхона 12 бирлик қўшимча маҳсулот ишлаб чиқаради. Бу ҳолда корхонанинг ишлаб чиқарган маҳсулотининг ҳажми

$$23400+12=23412$$

бирлик бўлади.

Бирламчи хом ашёнинг иккиламчи баҳоси $W_2^0 = 60 > 0$. Демак, бу хом ашёни бир бирликка ошириб сарф қилиш оқибатида корхонада ишлаб чиқариладиган маҳсулотлар ҳажми 60 бирликка ошади, яъни

$$23400+60=23460$$

бирлик бўлади. Охирги симплекс жадвалнинг X_5 устунига қараймиз ва аниқлаймиз. Бирламчи хом ашёни бир бирликка ошириб сарф қилинса, корхонанинг ишлаб чиқариш режаси ўзгаради. Бу режага асосан Т-1 технология 2 соат кўпроқ ва Т-3 технология 1.2 соат камроқ ишлатилади ва натижада ишлаб чиқариладиган умумий маҳсулот миқдори 60 бирликка ошади:

$$(60+2)\quad 300+(12-1.2)\cdot 450=23460$$

Энди иккиланган масала ечимини унинг шартларига қўйиб топамиз:

$$5 \quad 12 + 5 \cdot 60 + 35 \quad 0 = 300$$
$$20 \quad 12 + 3 \cdot 60 + 60 \quad 0 = 420 > 250$$
$$25 \quad 12 + 2.5 \cdot 60 + 60 \quad 0 = 450$$

Бундан кўринадики, иккиланган масала ечимида 1 ва 3-шартлар айниятга айланиб, 2-шарт қатъий тенгсизликка айланади.

Демак, Т-1 ва Т-3 технологиялар ёрдамида бир бирлик вақт ичида ишлаб чиқарилган маҳсулот баҳоси билан унга сарф қилинган ресурсларнинг иккиламчи баҳолари ўзаро тенг. Шунинг учун Т-1 ва Т-3 технологияларни ишлаб чиқаришда қўллаш керак.

Т-2 технология билан бир бирлик вақт ичида сарф қилинган ресурсларнинг иккиламчи баҳоси ишлаб чиқариладиган маҳсулотлар баҳосидан кўп бўляпти. Демак, Т-2 технология самарасиз. Шунинг учун уни ишлаб чиқаришда қўллаш керак эмас.

Энди қуйидаги ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласи ечимини таҳлил қиламиз:

2-мисол. 3 та А,В,С маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун 3 хил хом ашёлар (ресурслар) ишлатилсин. I тур хом ашёнинг захираси 180 кг. II тур хом ашёнинг захираси 210 кг ва III тур хом ашёнинг захираси 244 кг бўлсин. Ҳар бир маҳсулотнинг 1 бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган турли хил хом ашёнинг миқдори (нормаси) ва маҳсулот бирлигининг баҳоси (нархи) қуйидаги жадвалда жойлаштирилган.

хом ашё / маҳсулотлар	I	II	III	Маҳсулот бирлиги баҳоси
A	4	3	1	10
B	2	1	2	14
C	1	3	5	12
хом ашё захираси	180	210	244	

Бу масала бор ресурслардан оптимал фойдаланиш масаласи бўлиб, унинг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$
\begin{gathered}
4x_1+2x_2+x_3 \le 180,\\
3x_1+x_2+3x_3 \le 210,\\
x_1+2x_2+5x_3 \le 244,\\
x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0,\\
Y=10\,x_1+14\,x_2+12\,x_3 \longrightarrow max.
\end{gathered}
$$

Бу ерда $X=(x_1, x_2, x_3)$ ишлаб чиқариш режасини кўрсатади. Бу масалага иккиланган масалани тузамиз:

$$4W_1+3W_2+W_3\geq 10,$$
$$2W_1+W_2+2W_3\geq 14,$$
$$W_1+3W_2+5W_3\geq 12,$$
$$W_1\geq 0,\ W_2\geq 0,\ W_3\geq 0,$$
$$F=180W_1+210W_2+244W_3 \longrightarrow \ min$$

Бу ерда $W=(w_1,\ w_2,\ w_3)$ хом ашёларнинг иккиламчи баҳосидан иборат вектор-қатор. Иккиланган масаланинг иқтисодий маъноси: хом ашёлар баҳосини шундай танлаш керакки, натижада 1 бирлик маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарф қилинган хом ашёнинг умумий баҳоси маҳсулот баҳосидан кам бўлмасин ҳамда сарф қилинган барча хом ашёларнинг умумий баҳоси минимал бўлсин.

Маълумки, агар берилган масала оптимал ечимга эга бўлса, у ҳолда иккиланган масала ҳам ечимга эга бўлади ва бу ечим

$$W^*=C^0B^{-1}$$

формула орқали топилади. Бу ерда C^0 охирги симплекс жадвал оптимал ечимга мос келувчи мақсад функция коэффициентларидан ташкил топган вектор-қатор. B дастлабки симплекс жадвалдаги базис векторлардан ташкил топган матрица. B^{-1} охирги симплекс жадвалда В матрица ўрнида ҳосил бўлган матрица (тескари матрица).

Берилган масалани симплекс жадвалга жойлаштириб, уни симплекс усул билан ечамиз:

	Б. узг	$C_{баз}$	10	14	12	0	0	0	X_0
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
I.	X_4	0	4	2	1	1	0	0	180
	X_5	0	3	1	3	0	1	0	210
	X_6	0	1	2	5	0	0	1	244
	Δ_j		-10	-14	-12	0	0	0	
II.	X_2	14	2	1	1/2	1/2	0	0	90
	X_5	0	1	0	5/2	-1/2	1	0	120
	X_6	0	-3	0	4	-1	0	1	64
	Δ_j		18	0	-5	7	0	0	1260
III	X_2	14	19/8	1	0	5/8	0	-1/8	82
	X_5	0	23/8	0	0	1/8	1	-5/8	80
	X_3	12	-3/4	0	1	-1/4	0	1/4	16
	Δ_j		57/4	0	0	23/4	0	5/4	1340

Натижада иккала масала учун оптимал ечимини топамиз.
Оптимал ечим: берилган масала учун

$$X^*=(0;\ 82;\ 16),\ \ Y_{max}=1340$$

иккиланган масала учун

$$W^*=(23/4;\ 0;\ 5/4),\ F_{min}=1340$$

Энди берилган масала ечимини таҳлил қиламиз. Бунинг учун иккиланган масала ечимини кўрамиз. Унда $W_1=23/4$ ва $W_3=5/4$ бўлиб, улар нолга тенг эмас. Бу ҳол I ва II тур хом ашёларнинг тўла ишлатилганлигини, яъни уларнинг камёб эканлигини кўрсатади. Бу ечимда $W_0=0$, бу ҳол II тур хом ашё тўла ишлатилмаганлигини, демак, унинг ортиқча эканлигини (камёб эмаслигини) кўрсатади.

Иккиланган масаланинг ечими "**шартли иккиланган баҳо**" дейилади. Улар хом ашёлар миқдорини бир бирликка ортиқча сарф қилинганда мақсад функциянинг қиймати, яъни ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг пул миқдори қанчага ўзгаришини кўрсатади. Масалан, 1-тур хом ашёни 1 кг ортиқча сарф қилиш натижасида мақсад функциянинг қиймати 23/4=5.75 бирликка ошади. Агар 1 тур хом ашёдан ишлаб чиқаришда 1 кг ортиқча сарф қилинса, корхонанинг ишлаб чиқариш режаси ўзгаради. Бу янги режага мувофиқ ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг пул миқдори 5,75 бирликка кўпроқ бўлади. Жадвалдаги X_4 устунга қараб қуйидагиларни аниқлаймиз. Янги режада *B* маҳсулотни ишлаб чиқариш 5/8 бирликка ошади ва *C* маҳсулотни ишлаб чиқариш 1/4 бирликка камаяди. Бунинг натижасида 2-тур хом ашё сарфи 1/8 бирликка камаяди.

$$(5/8\quad 1 - 3\quad 1/4 = 5/8 - 6/8 = - 1/8).$$

Худди шунингдек X_6 устунга қараймиз. 3 тур хом ашё харажатини 1 кг га ошириб сарф қилиш натижасида янги режа топилади ва бу режага кўра ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг пул қиймати 5/4=1.25 сўмга ошади ва 1340+1.25=1342.25 сўмни ташкил қилади. Бу натижа *B* маҳсулот ишлаб чиқаришни 1/8 бирликка камайтириш, *C* маҳсулот ишлаб чиқаришни 1/4 бирликка ошириш хисобига бўлади Бу ҳолда 2-тур хом ашё 5/8 кг кўпроқ сарф қилинади.

Иккиламчи оптимал баҳоларни иккиланган масала шартларига қўйиб қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$23+5/4>10$$
$$23/2+5/2=14$$
$$23/4+25/4=12$$

Бундан кўринадики, иккиланган масаланинг биринчи шарти қатъий тенгсизликдан иборат бўляпти. Бу ҳол *A* маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинган хом ашёларнинг баҳоси бу маҳсулот баҳосидан кўп бўлаяпти. Шунинг учун *A* маҳсулотни ишлаб чиқариш корхона учун фойдали эмас. Иккиланган масаладаги 2 ва 3-шартлар оптимал ечимда тенгликка айланади. Бу ҳол *B* ва *C* маҳсулотлар бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинган хом ашёларнинг баҳоси маҳсулот баҳосига тенг эканлигини кўрсатади. Демак, *B* ва *C* маҳсулотларни ишлаб чиқариш корхона учун фойдали бўлади.

Шундай қилиб, шартли оптимал баҳолар берилган масаланинг оптимал режаси билан чамбарчас боғланган. Берилган масаладаги параметрларнинг ҳар қандай ўзгариши унинг оптимал ечимига таъсир қилади, демак улар шартли оптимал баҳоларнинг ўзгаришига ҳам сабаб бўлади.

4-§. Иккиланган симплекс усул

Бу параграфда биз чизиқли дастурлаш масаласининг **иккиланиш назариясига асосланган ва иккиланган симплекс усул** деб аталувчи усул билан танишамиз.

Иккиланган симплекс усул оддий симплекс усулга нисбатан баъзи қулайликларга эга:

1) иккиланган симплекс усул бўйича ечилаётган масала шартларидаги b_i озод ҳадлар мусбат бўлмаслиги ҳам мумкин;

2) иккиланган симплекс усул билан бир вақтнинг ўзида ҳам берилган масаланинг ҳамда унга иккиланган масаланинг ечими топилади ёки иккала масаланинг ечими мавжуд эмаслиги аниқланади;

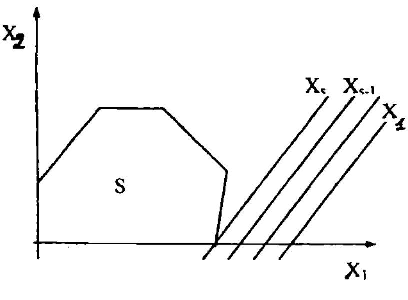
3) берилган масаланинг чекламалари «$\geq$» белги билан боғланган ёки унинг баъзи озод ҳадлари манфий бўлган ҳолларда, иккиланган симплекс усулни қўллаш бажариладиган ҳисоблаш ишлари сонини камайтиради;

4) иккиланган симплекс усул билан ишлаб чиқаришнинг баъзи зарур тавсифларини аниқлаш мумкин. Масалан, бир вақтнинг ўзида ҳам ишлаб чиқариш режасини, ҳам ишлаб чиқаришга сарф қилинадиган ҳамма воситалар баҳосини ҳисоблаш мумкин.

Оддий симплекс усул сингари иккиланган симплекс усулининг ҳар бир итерациясида n ўлчовли X вектор алмашиб боради. Фақат, шунга эътибор бериш кераккки, симплекс усулдан фарқли равишда, иккиланган симплекс усул билан топилган n-ўлчовли X вектор таянч режа бўлмаслиги мумкин, чунки у мусбатлик шартини қаноатлантирмаслиги мумкин.

Бундай режани **чала жоиз режа** деб атаймиз.

Иккиланган симплекс усул бўйича чала жоиз режаларни алмаштириш жараёни базис режа топилгунча тарорланади. Топилган базис режа эса масаланинг оптимал ечими бўлади.



3.1-шакл

Геометрик нуқтаи назардан X_1, X_2, .., X_{s-1}, X_s чала жоиз режалар кетма-кетлиги берилган чизиқли дастурлаш масаласи жоиз режаларидан ташкил топган S қаварик соҳанинг ташқарисида ётувчи чизиқлардан иборат бўлади ва ҳар бир X_i, X_{i-1} га нисбатан S тўпламга яқинроқ жойлашган бўлади. (3.1-шакл)

Чала жоиз режаларни алмаштириш жараёни натижасида S тўпламнинг бўш тўплам эканлиги аниқланади ёки чекли сондаги итерациядан сўнг, шундай $X_s \in S$ нуқта топиладики, у берилган масаланинг базис режаси ва демак, оптимал ечими бўлади.

Фараз қилайлик, каноник формадаги чизиқли дастурлаш масаласи берилган бўлсин.

$$AX=b, \qquad (3.42)$$
$$X \geq 0, \qquad (3.43)$$
$$Y=CX \longrightarrow min. \qquad (3.44)$$

Бу масалага иккиланган масала қуйидагича бўлади:

$$WA \leq C, \qquad (3.45)$$
$$F=Wb \longrightarrow max. \qquad (3.46)$$

Берилган масаланинг (3.42) шартини қаноатлантирувчи $X=(x_1, x_2, \quad x_n)$ чала жоиз режа берилган бўлсин деб фараз қиламиз. X векторнинг нолдан фарқли бўлган элементларига мос келувчи P_j векторлар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар бўлади. Ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар системасини берилган чала жоиз режадаги базис деб атаймиз.

Чала жоиз режа $\tilde{X}$ учун

$$\Delta_j = y_j - c_j \leq 0, (j = \overline{1,n}) \qquad (3.47)$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда

$$W^0 = C^0 B^{-1}$$

вектор иккиланган масаланинг жоиз режаси бўлади. Бу режадаги (3.46) чизиқли функциянинг қиймати

$$F^0 = C^0B^{-1}b$$

формула орқали аниқланади. (3.47) шартни қаноатлантирувчи чала жоиз режа учун қуйидаги теоремани исботлаймиз.

1-теорема. Агар чала жоиз режа (3.42) (3.44) масаланинг базис режаси бўлса, у **оптимал режа** ҳам бўлади.

Исбот. Теореманинг шартига кўра барча $\Delta_j \le 0$ ҳамда $\tilde{X}$ - базис режа. Демак, унинг барча элементлари $xj>0$. II боб, 3-§ да кўрсатилган 2-теоремага асосан $\tilde{X}$ режа оптимал режа бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

Энди чала жоиз режа $\tilde{X}$ ни янги чала жоиз режа $\tilde{X}$га алмаштириш жараёни билан танишамиз.

Фараз қилайлик, $\tilde{X}$ векторга мос келувчи базис матрица

$$B = (P_1, P_2, ..., P_i, ..., P_m)$$

бўлсин. Бу матрицага тескари бўлган B^{-1} матрицанинг қаторларини B_i билан белгилаймиз. У ҳолда $\tilde{X}$ векторнинг элементлари

$$\tilde{x}_i = B_ib$$

формула орқали аниқланади. Агар барча i лар учун $\tilde{x}_i \ge 0$ бўлса, $\tilde{X}$ базис режа бўлади. Фараз қилайлик $x_l=B_l\, b=min\ B_i\, b<0$ бўлсин. У ҳолда P_l векторни базисдан чиқариш керак. Базисга кирмаган P_j векторлар учун $x_{lj} = B_lP_j$ ўринли бўлади. Энди камида битта $x_{lj}<0$ лар учун $(y_j-c_j)/\ x_{lj}$ ни ҳисоблаймиз.

Агар

$$\theta = \min_{x_{lj}<0} \frac{y_j-c_j}{x_{lj}} = \frac{y_j-c_j}{x_{lk}} > 0$$

бўлса, P_k вектор базисга киритилади. Натижада янги

$$\bar{B} = (P_1, P_2, ..., P_{l-1}, P_k, P_{l+1}, ..., P_m)$$

базис матрица келиб чиқади.

Бу базисга мос келувчи янги

$$\tilde{X}^1 = (\tilde{x}_1^1, \tilde{x}_2^1, ..., \tilde{x}_{l-1}^1, \tilde{x}_k^1, \tilde{x}_{l+1}^1, ..., \tilde{x}_m^1)$$

чала жоиз режанинг компонентлари

$$\tilde{X}^1 = \bar{B}^{-1}b$$

формула орқали топилади. Янги базисга мос келувчи иккиланган масаланинг ечими

$$W^1 = W^0 - \theta B_l$$

формула орқали топилади. W^1 режага мос келувчи F чизиқли функциянинг қиймати қуйидагига тенг бўлади:

$$W^1b = W^0b - \theta x_l$$

Агар $\tilde{X}^1$ режанинг барча элементлари мусбат бўлса, у оптимал режа бўлади. Акс ҳолда, яна базисдан чиқариладиган P_m вектор аниқланади. Агар барча $x^1_{ml} \ge 0$ бўлса, берилган масала ва унга иккиланган масала ечимга эга бўлмайди. Агар баъзи j ларда $x'_{mj} \le 0$ бўлса, у ҳолда

$$\theta = \min_{x_{mj}<0} \frac{y'_j - c_j}{x_{mj}} = \frac{y'_t - c_t}{x_{mt}}$$

шартини қаноатлантирувчи P_t вектор базисга киритилади. Симплекс жадвал оддий симплекс усулидагидек алмаштирилади. Шундай қилиб, чала жоиз режаларни алмаштириш жарёни берилган ва иккиланган масаланинг оптимал ечими топилгунча такрорланади.

Иккиланган симплекс усулга доир бўлган қуйидаги теоремаларни исботсиз келтирамиз.

2-теорема. Агар (3.42) (3.44) масаланинг чала жоиз режасининг компонентларидан камида биттаси, масалан $x_k<0$ бўлиб, барча j лар учун $x_{kj} \ge 0$ бўлса, берилган масала таянч режага эга бўлмайди.

3-теорема. Агар топилган чала жоиз режа $\tilde{X}$ учун $\Delta_j = y_j - c_j \le 0$, бўлганда, $x_k<0$ бўлиб, камида битта $x_{kj}<0$ бўлса, у ҳолда X ни янги чала режа X'-га алмаштириш натижасида чизиқли функциянинг қиймати камаяди. X векторни X' га алмаштириш учун базисдан P_k вектор чиқарилиб, базисга қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи P_s вектор киритилади:

$$x_k<0,\ x_{ks}<0$$

ва

$$\left| \frac{\Delta_s}{x_{ks}} \right| < \left| \frac{\Delta_j}{x_{kj}} \right| \qquad (j \ne s;\ x_{kj}<0).$$

Мисол. Қуйидаги масала ва унга иккиланган масаланинг ечимини иккиланган симплекс усул ёрдами билан топинг.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 \ge 8, \\ -x_2 - 3x_3 + 6x_4 \ge 4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 \ge 0, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}, \end{cases}$$

$$Y = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_5 \longrightarrow \min.$$

Ечиш. Берилган масалани каноник формага келтирамиз.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 8, \\ -x_2 - 3x_3 + 6x_4 - x_6 = 4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 - x_7 = 0, \end{cases} \qquad (I)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7}$$

$$Y = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 \longrightarrow \min.$$

Бу масаладаги x_5, x_6, x_7 қўшимча ўзгарувчиларга мос келувчи P_5, P_6, P_7 векторларни базис векторларга айлантириш учун (I) масаладаги тенгламаларнинг ҳар бирини (-1) га кўпайтирамиз. Натижада қуйидаги масалага эга бўламиз:

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = -8, \\ x_2 + 3x_3 - 6x_4 + x_6 = -4, \\ -2x_1 - x_3 + x_4 + x_7 = 0, \end{cases} \qquad (II)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}$$

$$Y = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 \longrightarrow min$$

Бу масалага иккиланган масала ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\begin{cases} -3w_1 \quad 2w_3 \leq 4, \\ -2w_1 + w_2 \leq 3, \\ w_1 + 3w_2 - w_3 \leq 10, \\ -5w_1 - 6w_2 + w_3 \leq 5, \\ w_1 \leq 0, \\ w_2 \leq 0, \\ w_3 \leq 0, \end{cases} \qquad (III)$$

$$Z = -8w_1 - 4w_2 \quad \longrightarrow max$$

(II) масалада P_5, P_6, P_7 векторларни базис векторлар деб қабул қилиб, симплекс жадвални тўлдирамиз.

$$j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \text{ учун}$$

$$\Delta_j = y_j - c_j \leq 0,$$

бўлади. Демак,

$$X^0 = B^{-1}b = (-8; -4; 0)$$

вектор (II) масаланинг чала жоиз ечими бўлади. Бу ерда $B = (P_5, P_6, P_7)$ - базис матрица. Иккиланган масаланинг бу базисдаги ечими

$$W^0 = C^0B^{-1} = (0; 0; 0)$$

Чала жоиз режа Хнинг энг кичик манфий элементига мос келувчи P_5 векторни базисдан чиқарамиз ва

$$\theta = \min_{x_{1j}<0} \frac{\Delta_j}{x_{1j}} = \min_{x_{1j}<0} \frac{y_j - c_j}{x_{1j}} = \frac{\Delta_4}{x_{14}} = 1 \quad > 0$$

шартни қаноатлантирувчи P_4 векторни базисга киритамиз. x_{14} - ҳал қилувчи элемент бўлади. Симплекс жадвални оддий симплекс усулдагидек алмаштирамиз. Янги симплекс жадвалда барча j лар учун $\Delta_j = y_j - c_j \leq 0$.

Берилган масаланинг янги чала жоиз режаси $X^1 = (8/5; 28/5; -8/5)$ бўлади. Бу жоиз режага мос келувчи иккиланган масала *(III)* нинг жоиз режаси

$$W = (-1; 0; 0)$$

вектордан иборат ва чизиқли функциянинг унга мос келувчи қиймати

$$Y' = Y(X') = F' = F(W') = 8 \text{ бўлади.}$$

Чала жоиз X' нинг манфий элементига мос келувчи P_7 векторни базисдан чиқариб,

$$\theta = \min_{x_{3j}<0} \frac{y_j - c_j}{x_{3j}} = \min_{x_{3j}<0} \left(\frac{-1}{-\frac{13}{5}}; \frac{-1}{-\frac{2}{5}}; \frac{-11}{-\frac{4}{5}} \right) = \frac{5}{13} = \frac{\Delta_j}{x_{31}}$$

шартни қаноатлантирувчи P_1 векторни базисга киритамиз ва симплекс жадвални алмаштирамиз. Янги симплекс жадвалда барча j лар учун

$$\Delta_j = y_j - c_j \le 0.$$

Янги базисга мос келувчи чала жоиз режа

$$X'' = \left(\frac{16}{13}; \frac{44}{13}; \frac{8}{13}\right)$$

бўлади. Бу режадаги ҳамма элементлар мусбат бўлгани учун бу берилган масаланинг жоиз режаси ва демак (1- теоремага асосан) унинг оптимал режаси бўлади.

Янги базисдаги иккиланган масаланинг ечими

$$W'' = \left(-\frac{14}{13};\ 0;\ \frac{5}{13}\right)$$

вектордан иборат ва

$$Y_{min} = Y(X'') = F_{max} = F(W'') = 112/13$$

I.

Базис вект.	$C_{баз}$	P_0	4	3	10	5	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	0	-8	-3	-2	1	-5	1	0	0
P_6	0	-4	0	1	3	-6	0	1	0
P_7	0	0	-2	0	-1	1	0	0	1
Δ_j		0	-4	-3	-10	-5	0	0	0

II.

Базис вект.	$C_{баз}$	P_0	4	3	10	5	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4	5	8/5	3/5	2/5	-1/5	1	-1/5	0	0
P_6	0	28/5	18/5	17/5	9/5	0	-6/5	1	0
P_7	0	-8/5	13/5	-2/5	-4/5	0	1/5	0	1
Δ_j		0	-1	-1	-11	0	-1	0	0

III.

Базис вект.	$C_{баз}$	P_0	4	3	10	5	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4	5	16/13	0	4/13	-5/13	1	-2/13	0	3/13
P_6	0	44/13	0	37/13	9/13	0	-12/13	1	18/13
P_1	4	8/13	1	2/13	4/13	0	-1/13	0	-5/13
Δ_j		112/13	0	-11/13	-139/13	0	-14/13	0	-5/13

Таянч сўз ва иборалар

Иккиланган масала; симметрик қўшма масалалар; симметрик бўлмаган қўшма масалалар; иккиламчи баҳолар; оптимал ечим баҳоси; танқис (камёб) хом ашё; нотанқис хом ашё; шартли оптимал ечим; иккиланган симплекс усул; чала жоиз ечим; чала базис ечим.

Назорат саволлари

1. Берилган ва унга иккиланган масалаларнинг умумий қўйилиши ва турли шаклда ёзилишини кўрсатинг.
2. Берилган ва унга иккиланган масалаларнинг иқтисодий маъносини изоҳланг.
3. Берилган ва унга иккиланган масалаларнинг мақсад функциялари орасидаги боғланиш қандай?
4. Берилган ва унга иккиланган масалалардаги чегараловчи шартлар орасида қандай боғланиш бор?
5. Симметрик ва носимметрик қўшма масалалар орасидаги фарқ қандай?
6. Иккиланиш назариясининг 1-асосий теоремаси қандай?
7. Иккиланиш назариясининг 2-асосий теоремасини таърифланг ва унинг маъносини изоҳланг.
8. Иккиланиш назариясининг 3-асосий теоремаси таърифланг ва унинг маъносини изоҳланг.
9. Иккиланган симплекс усул билан қандай масалаларни ечиш мумкин?
10. Иккиланган симплекс усулнинг оддий симплекс усулдан фарқи қандай?

11. Иккиланган симплекс усулда масала ечимининг мавжуд эмаслик шартини таърифланг.
12. Иккиланган симплекс усулда ечимнинг оптималлик шарти нимадан иборат?

Масалалар

Берилган масалаларга иккиланган масалани тузинг.

1) $2x_1 - 3x_2 \le 9,$
$-2x_1 + 5x_2 \le 25,$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$
$Y = 16x_1 + 9x_2 \longrightarrow max$

2) $2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 \ge 9,$
$3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 \ge 4,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$
$Y = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 \longrightarrow min$

3) $x_1 + x_2 + x_3 \le 6,$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 9,$
$3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 11,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$
$Y = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3. \longrightarrow min$

4) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5,$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 13,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$
$Y = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4. \longrightarrow min$

5) $2x_1 + x_2 + x_3 = 10,$
$-x_1 + 4x_2 + x_4 = 8,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$
$Y = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3. \longrightarrow min$

6) $2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 3,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$
$Y = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4. \longrightarrow min$

Берилган масалаларга иккиланган масалаларни тузинг ва уларнинг иккаласининг ҳам ечимини топинг:

1) $2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 6,$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$
$Y = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \longrightarrow min$

2) $x_1 + 3x_2 \leq 4,$
$x_1 + 2x_3 \leq 3,$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$
$Y = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \longrightarrow min$

3) $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2,$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$
$Y = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \longrightarrow min$

4) $5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 9,$
$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 11,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$
$Y = 2x_1 + 3x_2\ 4x_3 \longrightarrow min$

5) $2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 3,$
$x_1 - x_3 \leq 4,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$
$Y = x_1 + 4x_2 + x_3 \longrightarrow min$

Қуйидаги масалаларнинг математик моделини тузиб уни ечинг, ҳамда ечимни таҳлил қилинг.

1)

Маҳсулотлар / Хом ашёлар захираси	Маҳсулот бирлигининг ишлаб чиқариш учун хом ашё сарфи		
	А	Б	В
48	2	4	3
60	4	2	3
Даромад	6	4	3

2)

Маҳсулотлар / Ишлаб чиқариш ресурслари захираси	I	II	III	IV
48	2	4	1	5
16	4	1	4	1
22	2	3	1	2
Ишлаб чиқариладиган маҳсулот баҳоси	7	3	4	2

Берилган масала ва унга иккиланган масалалар ечимини иккиланган симплекс усул билан топинг.

1) $x_1 + 2x_3 = 4,$
$x_1 - x_2 = 3,$
$x_1 + 6x_2 - x_3 = 3,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$
$Y = 8x_1 + 4x_2 - 2x_3 \longrightarrow max$

2) $2x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 = 18,$
$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq -8,$
$x_1 - x_3 \leq 4,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$
$Y = 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \longrightarrow min$

3) $3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \geq 8,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 6,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$
$Y = 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \longrightarrow min$

4) $3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7,$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10,$
$4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 15,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$
$Y = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \longrightarrow max$

IV БОБ. ПАРАМЕТРЛИ ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ

1-§. Параметрли чизиқли дастурлаш масалаларининг қўйилиши ва турлари. Параметрли дастурлаш масалаларининг иқтисодий ва геометрик талқини

Оптималлаштириш масалаларини чизиқли дастурлаш усуллари билан ечиш учун бу масалалардаги параметрлар (А матрица, b ва с векторларини элементлари) аниқ ўзгармас сон қийматларини қабул қилади деб фараз қилинади. Лекин амалдаги кўп масалаларда бу параметрнинг тақрибий қийматлари ёки уларнинг ўзгариш соҳаси маълум бўлади. Шунинг учун чизиқли дастурлаш масаласи оптимал ечимининг ҳар бир параметрнинг ўзгаришига боғлиқлик даражасини, яъни масаладаги параметрларнинг ўзгариши унинг ечимига қандай таъсир қилишини аниқлаш масаласи қўйилади.

Ана шундай масалаларни хал қилиш параметрли чизиқли дастурлашнинг предметини ташкил қилади.

Каноник формадаги чизиқли дастурлаш масаласини кўрамиз

$$AX = b,$$
$$X \geq 0,$$
$$Y = C'X \rightarrow min.$$

Бу масалада А матрицанинг элементлари, b ва С векторларнинг компонентлари қандайдир параметр таъсири остида ўзгариши мумкин.

Агар фақат С векторнинг компонентлари λ параметрга боғлиқ, яъни

$$C = C' + \lambda C'', \quad (\delta \leq \lambda \leq \varphi)$$

бўлса, берилган масала функцияси параметрга боғлиқ бўлган масала дейилади. Бундай масалаларда λ параметрнинг $[\delta, \varphi]$ оралиқдаги ҳар бир қиймати учун

$$Y = \sum_{j=1}^{n}(C'_j + C''_j\lambda)^* x_j, \qquad (4.1)$$

фукциянинг

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (4.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (4.3)$$

шартлардаги минимум қийматини топиш талаб қилинади.

Бу ерда C'_j, C''_j, α_{ij}, b_i - аниқ сонлар.

Агар b векторнинг компонентлари t параметрга $(\alpha \leq t \leq \beta)$ боғлиқ, яъни

$$b = b' + tb'' \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

бўлса, у ҳолда берилган масала озод ҳади параметрга боғлиқ бўлган масала деб аталади.

Бундай масалаларда $[\alpha, \beta]$ оралиқдаги ҳар бир t учун

$$Y = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j, \tag{4.4}$$

фукциянинг

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i + b_i t, \qquad (i = \overline{1,m}) \tag{4.5}$$

$$x_j \ge 0, \qquad (i = \overline{1.m}) \tag{4.6}$$

шартлардаги минимал қийматини топиш талаб қилинади.

Агар чизиқли дастурлаш масаласидаги мақсад функция коэффициентлари ҳамда озод ҳадлар t параметрга боғлиқ бўлса, уни қуйидаги умумлашган параметрли дастурлаш масаласи кўринишида ифодалаш мумкин:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i + b_i t, \qquad (i = \overline{1,m}) \tag{4.7}$$

$$x_j \ge 0 \quad (i = \overline{1,m}) \tag{4.8}$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} (C'_j + C''_j t) x_j \to min, \tag{4.9}$$

$$t \in [\alpha, \beta]. \tag{4.10}$$

Умумий ҳолда, масаладаги ҳамма коэффициентлар параметрга боғлиқ бўлиши, яъни қуйидаги масала ўринли бўлиши мумкин

$$\sum_{j=1}^{n} (a'_{ij} + a''_{ij} t) x_j = b'_i + b''_i t, \; (i = \overline{1,m}) \tag{4.11}$$

$$x_j \ge 0, \qquad (i = \overline{1,m}) \tag{4.12}$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} (C'_j + C''_j t) x_j \to min, \tag{4.13}$$

$$t \in [\alpha, \beta]. \tag{4.14}$$

Қўйилган масала чизиқли дастурлаш усуллари ёрдамида ечилади.

Параметрли дастурлаш масалаларининг геометрик талқини билан танишамиз. Бунинг учун (4.1) - (4.3) кўринишидаги масалага мурожаат қиламиз. Энг аввал (4.2) ва (4.3) шартларни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами (қавариқ кўпбурчак) бўш эмас ва биттадан кўп нуқтани ўз ичига олади деб фараз қиламиз. У ҳолда (4.1) (4.3) масала λ параметрнинг $\lambda \in [\delta, \varphi]$ оралиқдаги ҳар бир қиймати учун қавариқ кўпбурчакнинг (4.1) функцияга минимум қиймат берувчи нуқтасини топишдан иборат бўлади. Бундай нуқтани топиш учун $\lambda = \lambda_0$ (λ_0 - ихтиёрий сон) деб қабул қиламиз ва параметрнинг бу қийматида (4.1) (4.3) масаланинг оптимал ечимини топамиз. Демак, бу масаланинг таянч режаларидан ташкил топган қавариқ кўпбурчакнинг четки нуқталари ичида (4.1) функцияга минимум қиймат берувчи нуқтани топамиз ёки $\lambda = \lambda_0$ да берилган масаланинг ечими мавжуд эмаслигини аниқлаймиз. Агар $\lambda = \lambda_0$ да (4.1) - (4.3) масаланинг оптимал ечими топилган бўлса, бу ечим λ нинг яна қандай қийматлари учун оптимал ечим бўлишини аниқлаймиз. Сўнгра λ нинг $[\delta, \varphi]$ оралиққа тегишли бўлган бошқа λ_1 қиймати олинади ва бу қийматдаги (4.1) (4.3) масаланинг оптимал ечими топилади. Топилган ечим λ параметрнинг $[\delta, \varphi]$ оралиқдаги яна қандай қийматлари учун оптимал ечим бўлиши белгиланади. Чекли сондаги бундай ишлардан сўнг λ нинг $[\delta, \varphi]$ оралиқдаги хар бир қиймати учун берилган масаланинг оптимал ечими топилади ёки масаланинг ечими мавжуд эмаслиги аниқланади.

Қуйидаги иқтисодий масалани математик моделини тузинг ва уни юқоридаги геометрик талқиндан фойдаланиб ечинг.

Масала. Корхона икки А ва В турдаги маҳсулот ишлаб чиқаради. Бу маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун 3 хил хом ашёлар ишлатилади.

Ҳар бир маҳсулот бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган турли хом ашёлар миқдори (нормаси) ҳамда корхонадаги мавжуд хом ашёлар заҳираси қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хом ашё турлари	Маҳсулот бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган хом ашёлар нормаси		Хом ашё заҳираси
	А	В	
I	4	1	16
II	2	2	22
III	6	3	36

А маҳсулотнинг баҳоси 2 п.б.дан 12 п.б. оралиғида, В маҳсулотнинг баҳоси эса 13 п.б.дан 3 п.б. оралиғида ўзгариши мумкинлигини аниқланган.

Демак, А маҳсулотнинг баҳосини

$$C_1 = 2 + t, \qquad 0 \le t \le 10,$$

В маҳсулот баҳосини эса

$$C_2 = 13 - t, \qquad 0 \le t \le 10$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

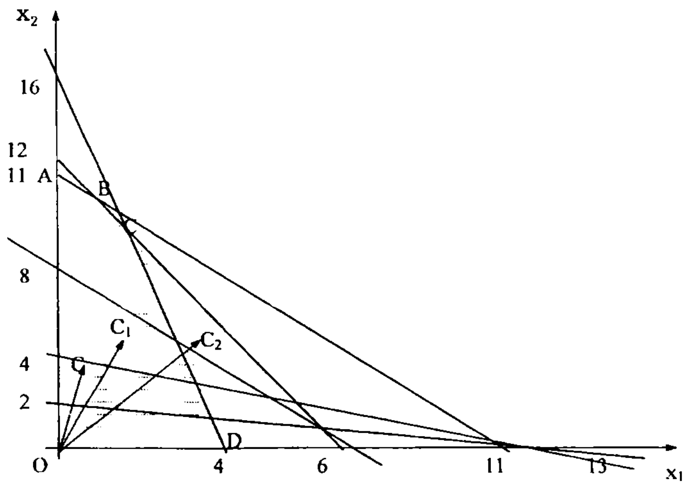
Ҳар бир мумкин бўлган баҳолар учун ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг умумий баҳосини максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режаси топилсин.

Ечиш. Масаланинг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &\le 16 \\ 2x_1 + 2x_2 &\le 22 \\ 6x_1 + 3x_2 &\le 36 \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \begin{aligned} &(4.15) \\ &(4.16) \end{aligned}$$

$$Y = (2+t)x_1 + (13-t)x_2 \to \max. \qquad (4.17)$$

Ҳосил бўлган масалани ечиш учун (4.15), (4.16) шартларни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламидан иборат бўлган қаварик кўпбурчакни ясаймиз. Бу OABCD беш бурчакдан иборат бўлади. (4.1 - шакл).



4.1 – шакл.

Энди $t=0$ да

$$Y=2x_1+13x_2 \to max$$

чизиқли функцияни ҳосил қиламиз, ҳамда Y га ихтиёрий (масалан, $Y_1=26$) қиймат бериб

$$2x_1+13x_2=26$$

тўғри чизиқни ясаймиз. Ҳосил бўлган тўғри чизиқни *C (2;13)* вектор йўналишида сура бориб, уни *OABCD* қавариқ бешбурчакнинг *A (0;11)* бурчак нуқтасидан ўтишини аниқлаймиз. Бу нуқтанинг координаталари берилган масаланинг $t=0$ даги оптимал ечимини беради

$$X_0^* = (0;11)$$
$$Y_{max}=143.$$

Бу ечим қуйидагича талқин қилинади:

Агар А маҳсулотнинг баҳоси $C_1 = 2+0=2$ п.б. ва В маҳсулотнинг баҳоси $C_2 = 13 - 0=13$ п.б. бўлса, у ҳолда корхона А маҳсулот ишлаб чиқармайди ва В маҳсулотдан 11 бирлик ишлаб чиқаради. Бу режага асосан корхонада ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг умумий баҳоси 143 п.б. бўлади.

Энди $t=2$ деб қабул қиламиз ва

$$Y = 4x_1+11x_2 \rightarrow max$$

функцияни ҳосил қиламиз. Y га ихтиёрий (масалан $Y_2=44$) қиймат берамиз ва

$$4x_1+11x_2=44$$

тўғри чизиқни ясаймиз. Бу тўғри чизиқни C_1 (4;11) вектор йўналишида суриб бориб, унинг OABCD бешбурчакнинг A (0;11) бурчак нуқтасидан ўтишини аниқлаймиз. Бу нуқтанинг координаталари берилган масаланинг $t=2$ даги оптимал ечимини беради:

$$X_1=(0;11)$$
$$Y_{max} = 121.$$

Демак, агар А маҳсулотнинг баҳоси

$$C_1=2+2=4 \text{ п.б.}$$

бўлиб, В маҳсулот баҳоси

$$C_2=13-2=11 \text{ п.б.}$$

бўлса, у ҳолда корхонанинг А маҳсулотни ишлаб чиқармаслиги ва В маҳсулотдан 11 бирлик ишлаб чиқаришини кафолатлайдиган режаси оптимал режа бўлади. Бу режага асосан корхона жами 121 п.б.га тенг маҳсулот ишлаб чиқаради.

4.1- шаклдан кўринадики, топилган режа $(2+t)\, x_1+(13-t)\, x_2= h$ тўғри чизиқ билан $2x_1+2x_2=22$ тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлмаслигини таъминловчи барча t лар учун оптимал режа бўлади. Агар бу чизиқлар праллел бўлса, у ҳолда

$$\frac{2+t}{2}=\frac{13-t}{2} \Rightarrow t=5{,}5 \text{ бўлади.}$$

t нинг бу қийматида АВ кесманинг ихтиёрий нуқтаси берилган масаланинг оптимал ечими бўлади.

Шундай қилиб, $0 \le t \le 5{,}5$ оралиқдаги ихтиёрий t учун (4,15)-(4,17) масаланинг оптимал ечими

$$X_0=(0;11).$$

$Y = (2+t)\ 0 + (13-t)\ 11 = 143-11t$ бўлади. Энди t нинг $t>5,5$ қийматида,масалан $t>6$ да

$$Y = 8x_1 + 7x_2$$

фукнцияни ҳосил қиламиз. Y га $Y_3=56$ қиймат берамиз ва $8x_1 + 7x_2=56$ тўғри чизиқни ясаймиз. Бу чизиқни C_2 (8;7) вектор йўналишида суриб бориб у билан OABCD бешбурчакнинг кесишган бурчак нуқтаси B(1;10) ни топамиз. Бу нуқтанинг координаталари берилган масаланинг $t=6$ даги оптимал ечимини беради.

$$X_1 = (1;10)$$
$$Y(X_1) = 78.$$

Демак, агар А маҳсулот баҳоси $C_1 = 2 + 6 = 8$ п.б. бўлиб, В маҳсулот баҳоси $C_2 = 13 \quad 6 = 7$ п.б. бўлса, корхонанинг оптимал режасига асосан А маҳсулотдан 1 та, В маҳсулотдан 10 та ва жами 78 п.б.га тенг маҳсулот ишлаб чиқарилади.

4.1 шаклдан кўринадики, корхонанинг ушбу режаси $(2+t)x_1 + (13-t)x_2 = h$ ва $6x_1+3x_2=36$ тўғри чизиқларнинг параллел бўлмаслигини таъминловчи параметрнинг барча $t > 5,5$ қийматлари учун оптимал режа бўлади. Агар тўғри чизиқлар параллел бўлса

$$\frac{2+7}{6} = \frac{13-t}{3}$$

тенглик бажарилади. Бундан $t=8$ эканини аниқлаш мумкин. Параметрнинг $t=8$ қийматида BC кесманинг ихтиёрий нуқтаси (4.15)-(4.17) масаланинг оптимал ечими бўлади.

Шундай қилиб, t параметрнинг $5{,}5 \le t \le 8$ оралиқдаги ихтиёрий қиймати учун берилган масаланинг оптимал ечими

$$X_1 = (1;10)$$
$$Y(X_1) = (2+t)\ 1 + (13-t)\ 10 = 13-9t$$

бўлади.

Худди шунингдек мулоҳаза юритиб t нинг $8 \le t \le 10$ оралиқдаги ихтиёрий қийматида (4.15)-(4.17) масаланинг оптимал ечими

$$X_2 = (1;10)$$
$$Y(X_2) = 108-6t$$

бўлишини кўрсатиш мумкин. Бу ечимни қуйидагича талқин қилиш мумкин. Агар А маҳсулот баҳоси 10 ва 12 п.б. оралиғида В маҳсулот баҳоси 3 ва 5 п.б. оралиғида бўлса, у ҳолда корхонанинг оптимал режасига асосан А маҳсулотдан 2 та, В маҳсулотдан 8 та ва жами

$$Y(X_2) = 108-6t \qquad (8 \le t \le 10)$$

п.б.га тенг маҳсулотни ишлаб чиқариш керак.

Берилган (4.15)-(4.17) масаланинг оптимал ечимини қуйидагича ёзиш мумкин: t нинг $0 \le t \le 5{,}5$ оралиқдаги қийматлари учун оптимал ечим

$$X_0 = (0;11), \qquad Y(X_0) = 143-11t$$

t нинг $5{,}5 \le t \le 8$ оралиқдаги қийматлари учун оптимал ечим

$$X_1 = (1;10), \qquad Y(X_1) = 132-9t$$

t нинг $8 \le t \le 10$ оралиқдаги қийматлари учун оптимал ечим

$$X_1 = (1;10), \qquad Y(X_1) = 132-9t$$

t нинг $8 \le t \le 10$ ораликдаги қийматлари учун оптимал ечим

$$X_2 = (2;8), \qquad Y(X_2) = 108 - 6t.$$

2-§. Функцияси параметрга боғлиқ бўлган масала

Математик модели функцияси параметрга боғлиқ бўлган масалага мисол бўла оладиган маҳсулотни ишлаб чиқариш ва сақлашни оптималлаштириш масаласи билан танишамиз.

Масала. Фараз қилайлик, корхонада мавсумий маҳсулот ишлаб чиқарилсин. Бу маҳсулотга бўлган талаб йилнинг турли ойларида турлича бўлсин. Агар корхона ҳар ойда талабга мувофиқ равишда маҳсулот ишлаб чиқарса, у икки томонлама зарар кўриши мумкин:

1) маҳсулотга бўлган талаб максимал бўлган ойларда корхона ўз имкониятидан ортиқча миқдорда маҳсулот ишлаб чиқариш учун қўшимча харажатлар сарф қилади;

2) маҳсулотга талаб камайган ойларда эса техника ва иш кучининг бир қисми бекор қолгани сабабли корхона яна қўшимча зарар кўради.

Корхона йилнинг ҳамма ойларида бир текис маҳсулот ишлаб чиқариб, маҳсулотга талаб кам бўлган ойлардан ортиб қолган маҳсулотни талаб кўп бўлган ойларигача сақлаб қўйиши мумкин. Лекин бу ҳолда маҳсулотни сақлаш учун қўшимча харажат талаб қилинади. Корхонанинг ишини шундай режалаштириш керакки, ҳар бир ойдаги маҳсулотга бўлган талаб тўла қондирилсин ҳамда маҳсулотни ишлаб чиқариш ва уни сақлашга сарф қилинадиган умумий харажатлар минимал бўлсин.

Қуйидаги белгилашлар киритамиз:

S_t t ойнинг бошида корхонадаги маҳсулотнинг умумий миқдори $(t=\overline{1,\tau})$;

r_t - t ойда маҳсулотга бўлган талаб;

d бир ойлик маҳсулотни сақлаш учун сарф қилинадиган харажатлар;

x_t - t ойда ишлаб чиқариладиган маҳсулотнинг миқдори;

C бир бирлик маҳсулотни ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган харажат.

t ойда ишлаб чиқариладиган маҳсулот шу ойда тўлиқ ёки қисман ишлатилади деб фараз қилинади. У ҳолда ишлаб чиқариладиган ва сақланадиган маҳсулот шу ойда тўлиқ ёки қисман ишлатилади деб фараз қилинади. У ҳолда ишлаб чиқариладиган ва сақланадиган маҳсулот миқдорини қуйидаги ифода орқали боғлаш мумкин:

$$S_k = S_0 + \sum_{j=1}^{k} x_j - \sum_{j=1}^{k} r_j \ge 0, \qquad (k = \overline{1,12})$$

бу ерда $x_j \ge 0, r_j \ge 0, S_j \ge 0$, $(j = \overline{1,12})$.

Ишлаб чиқаришга ва маҳсулотни сақлашга сарф қилинадиган харажатлар қуйидагича аниқланади:

$$\sum_{j=1}^{12} S_j d + \sum_{j=1}^{12} c y_j ,$$

бу ерда y_j $z_j = x_j$ x_{j-1}, $y_j \ge 0, z_j \ge 0$ ҳамда y_j j ойда ишлаб чиқаришни кенгайтириш, z_j эса j ойда ишлаб чиқаришни қисқартиришни кўрсатади. Агар d ва C ўзгармас сонлар бўлса, $\frac{C}{d}$ ни λбилан белгилаб, чизиқли функцияси

$$t(S,y) = \sum_{j=1}^{12} (S_j + \lambda y_j)$$

кўринишда бўлган масалани ҳосил қиламиз. Бу масалани чизиқли дастурлаш масаласи сингари ечиш мумкин. Агар d ва c ўзгарувчан миқдорлар бўлса, $\lambda = \frac{c}{d}$ нисбат c ва d ларнинг турли ўзгариш оралиғида турли қийматларни қабул қилиши мумкин. Бу ҳолда чизиқли функциянинг коэффициентлари масала ечимига таъсир қилади, яъни параметрли дастурлаш масаласи ҳосил бўлади.

Энди функцияси параметрга боғлиқ бўлган масалани ечиш усули билан танишамиз. Бунинг учун қуйидаги кўринишдаги параметрли дастурлаш масаласини кўрамиз:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = \overline{1,m}) \qquad (4.18)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,n}), \qquad (4.19)$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} (c'_j + \lambda c''_j) x_j \to \min, \qquad (4.20)$$

$$\delta \le \lambda \le \varphi, \qquad (4.21)$$

бу ерда δ, φ ихтиёрий ҳақиқий сонлар, c'_j, c''_j, a_{ij}, b_i берилган ўзгармас сонлар.

λ нинг ўзгариш соҳасидаги ҳар бир қиймати учун шундай $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ векторлар топиш керакки, у (4.18) ва (4.19) шартларни қаноатлантириб, (4.20) чизиқли функцияни минимумга айлантирсин.

Фараз қилайлик, берилган масала хосмас масала бўлиб, камида битта базис режага эга бўлсин. У ҳолда симплекс усулни қўллаб, $\lambda = \delta$ учун масаланинг оптимал режасини топиш ёки $\lambda = \delta$ да масаланинг ечими мавжуд эмаслигини аниқлаш мумкин.

а) ҳол. $\lambda = \delta$да масаланинг оптимал ечими топилган бўлсин. Чизиқли функциянинг коэффициентлари λнинг функцияси сифатида $(c_i = c'_i + \lambda c''_i)$ берилганлиги сабабли ихтиёрий базис ечим учун $\Delta_j = y_j - c_j$ айирмани ҳам λ нинг функцияси сифатида ифодалаш мумкин, яъни $z_j - c_j = a_j + \lambda\beta_j$.

Топилган оптимал ечим учун $\alpha_j + \delta\beta_j \le 0, (j = \overline{1,n})$ тенгсизлик ўринли. Бу эса

$$\alpha_j + \lambda\beta_j \le 0, (j = \overline{1,n}) \qquad (4.22)$$

тенгсизликлар системасининг биргаликда эканлигини кўрсатади. Бундан барча $\beta_j<0$ учун

$$\lambda \ge -\frac{a_j}{\beta_j}$$

ва барча $\beta_j>0$ учун

$$\lambda \le -\frac{a_j}{\beta_j}$$

Белгилашлар киритамиз:

$$\underline{\lambda} = \begin{cases} \max\limits_{\beta_j<0}\left(-\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}\right), \\ -\infty, \quad \text{агар ҳамма } \beta_j\ge 0 \end{cases} \qquad (4.23)$$

$$\bar{\lambda} \begin{cases} \max\limits_{\beta_j<0}\left(-\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}\right), \\ -\infty, \quad \text{агар ҳамма } \beta_j\le 0 \end{cases} \qquad (4.24)$$

У ҳолда (4.18)-(4.21) масаланинг $\lambda=\delta$ даги оптимал ечими λ нинг $\underline{\lambda} \le \lambda \le \bar{\lambda}$ интервалдаги ҳамма қийматлари учун оптимал ечим бўлади.

Агар $\bar{\lambda}=+\infty$ бўлса, λ нинг ҳамма қийматлари учун оптимал ечим топилган бўлади ва ишлаш жараёни тугайди.

Фараз қилайлик, $\bar{\lambda}$ чекли сондан иборат бўлсин ($\bar{\lambda} = -\dfrac{\alpha_k}{\beta_k}, \beta_k > 0$). Агар барча $x_{ik}\le 0$ бўлса, симплекс усулнинг хоссаларига кўра $\lambda > \bar{\lambda}$ бўлганда масаланинг чизиқли функцияси қуйидан чегараланмаган бўлади ва агар камида битта $x_{ik}\ge 0$ бўлса (масалан $x_{lk}>0$), у ҳолда симплекс усулни қўллаб базисдан P_l вектор чиқарилиб, унинг ўрнига P_k вектор киритилади. Натижада симплекс жадвал ўзгаради, масаланинг янги ечими топилади.

Топилган янги ечим учун қуйидаги теорема ўринлидир.

1-теорема. Янги ечим λ нинг камида битта қиймати учун оптимал ечим бўлади ва агар у λ нинг $\underline{\lambda}' \le \lambda \le \bar{\lambda}'$ интервалдаги ҳамма қийматлари учун оптимал ечим бўлса, у ҳолда

$$\bar{\lambda} = \underline{\lambda}'$$

бўлади.

Исбот. Топилган янги ечим λ параметрнинг ҳеч бўлмаганида битта қиймат учун берилган масаланинг ечими бўлади ва бу ечим учун

$$\alpha'_j+\lambda\beta'_j\le 0,\quad (j=\overline{1,n}) \qquad (4.25)$$

система биргалашган бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, $\lambda=\bar{\lambda}$ бўлганда янги ечим ҳосил қилиш учун базисга P_k вектор киритилади. P_k вектор учун эса

$$z_k-c_k=\alpha_k+\bar{\lambda}\beta_k\le 0$$

тенгсизлик ўринли.

Бундан кўринадики, янги ечим масаланинг $\lambda=\bar{\lambda}$ қийматидаги оптимал ечими бўлади.

Энди ҳар қандай $\lambda<\bar{\lambda}$ (4.25) шартни қаноатлантирмаслигини кўрсатамиз.

Маълумки,

$$\begin{cases} \alpha'_l=-\dfrac{\alpha_k}{x_{lk}}, \\ \beta'_l=-\dfrac{\beta_k}{x_{lk}}. \end{cases} \qquad (4.26)$$

Фараз қилайлик (4.25) системани ихтиёрий λ қаноатлантирсин. У ҳолда, хусусан,

$$\alpha'_l+\lambda\beta'_l\le 0$$

ўринли бўлади ёки $x_{lk}>0$ ва (4.26) га асосан

$$-\alpha_k-\lambda\beta_k\le 0$$

бўлади. Бу ерда $\beta_k>0$ бўлганлиги сабабли $\lambda\ge-\dfrac{\alpha_k}{\beta_k}=\bar{\lambda}$.

Юқорида кўрсатилган усул билан λ нинг бир ўзгариш соҳасидан иккинчисига ўтиб бориш жараёнини $\lambda=\varphi$ бўлганга қадар давом эттириш керак.

Масала хосмас масала бўлганлиги сабабли бундай жараён чексиз давом этмайди ва λ нинг ҳамма қийматлари учун оптимал ечим топилганда ёки λ нинг маълум бир қийматидан кейинги қийматларида масаланинг ечими йўқлиги аниқланганда жараён тугалланади. Баъзан масаланинг айрим режалари учун $\bar{\lambda}=\underline{\lambda}$ бўлиши мумкин. Параметрнинг бундай шартини қаноатлантирувчи қийматлари унинг **критик** қийматлари ва масаланинг бундай шартини қаноатлантирувчи параметрга мос бўлган ечими эса **критик ечим** деб аталади.

б) ҳол. Масала $\lambda=\delta$ да ечимга эга эмас. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин:

1) P_k - базисга кириши керак бўлган вектор. Шартга кўра $\alpha_k+\delta\beta_k>0$ ва барча $x_{ik}\leq 0$. Агар $\beta_k\geq 0$ бўлса, у ҳолда масаланинг чизиқли функцияси λ нинг ҳар қандай қиймати учун қуйидан чегараланмаган бўлади.

2) $\beta_k<0$ бўлса, $\alpha_k+\delta\beta_k>0$ тенгсизлик λ нинг $\lambda<\lambda_1'=-\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ қийматлари учун ўринли бўлади.

Бу ҳолда масала λ нинг $\delta\leq\lambda<\lambda_1'$ интервалдаги қийматлари учун оптимал ечимга эга бўлмайди. Лекин бунда $\lambda=\lambda_1'$ бўлган ҳолни текшириш керак. Агар барча j ларда $\alpha_j+\lambda'_1\beta_j\leq 0$ бўлса, $\lambda=\lambda_1'$ да масаланинг оптимал ечими топилган бўлади.

Фараз қилайлик, $\lambda_1=\min\limits_{\beta_j>0}\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)$. Бу ҳолда топилган ечим λ нинг $\lambda_1'\leq\lambda\leq\lambda_1$ оралиқдаги қиймати учун оптимал ечими бўлади ва масалани ечиш жараёни *а)* ҳолдагидек давом эттирилади. Агар барча j лар учун

$$\alpha_j+\lambda'_1\beta_j\leq 0$$

тенгсизлик бажарилмаса, базисга

$$\max_{\alpha_j+\lambda_1'\beta_j>0}(\alpha_j+\lambda_1'\beta_j)=\alpha_t+\lambda_1'\beta_t$$

шартни қаноатлантирувчи P_t вектор киритилади. Бу жараён ҳамма j лар учун $\alpha_j+\lambda'_1\beta_j\leq 0$ бўлгунча ёки $\alpha_t+\lambda'_1\beta_t$ га мос келувчи P_t векторнинг барча компоненталари $x_{it}\leq 0$ бўлгунча такрорланади. Агар ҳамма j лар учун $\alpha_j+\lambda'_1\beta_j\leq 0$ бўлса юқоридаги а) ҳолга қайтамиз, агар $j=t$ учун $\alpha_t+\lambda'_1\beta_t>0$ ва $x_{it}\leq 0$ $(i=\overline{1,m})$ бўлиб, $\beta_t<0$ бўлса, у ҳолда берилган масаланинг чизиқли функцияси

$$\lambda<\lambda_2'=-\frac{\alpha_t}{\beta_t}(\lambda'_1<\lambda'_2)$$

учун қуйидан чегараланмаган бўлади.

Энди $\lambda=\lambda'_2$ бўлгани ҳолни текшириш керак. Агар $\lambda=\lambda'_2$ да масала оптимал ечимга эга бўлса, яъни барча j лар учун

$$\alpha_j+\lambda'_2\beta_j\leq 0$$

бўлса, масалани ечиш юқоридагидек давом эттирилади. Агар $\lambda=\lambda'_2$ қийматда масала ечимга эга бўлмаса, юқорида кўрган 1) ва 2) ҳолдан бирортаси юз бериши мумкин. Агар 1) ҳол бажарилса $\lambda\geq\lambda'_2$ учун масала ечимга эга бўлмайди; агар 2) ҳол бажарилса, λ нинг маълум бир интервалдаги қийматлари учун масала ечимга эга бўлмайди.

Шундай йўл билан λ нинг барча қийматлари текширилиб чиқилади.

Мисол. Қуйидаги параметрли дастурлаш масаласини ечинг:

$$Y=(2+3\lambda)x_1+(-1+2\lambda)x_2+3\lambda x_3+4x_4\to max,$$

$$-\infty<\lambda<+\infty,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 7, \\ -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 \le 15, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 2, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0. (j = \overline{1,4}).$$

Берилган масалани x_5, x_6, x_7 қўшимча ўзгарувчилар билан тўлдирамиз ва $maxY$ ни $minY$ га айлантирамиз. Натижада қуйидаги каноник формадаги масалани ҳосил қиламиз:

$$x_1+2x_2+x_3+3x_4+x_5=7,$$
$$-3x_1+4x_2+3x_3-x_4+x_6=15,$$
$$2x_1-5x_2+2x_3+2x_4+x_7=2,$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1.7},$$
$$Y=(2+3\lambda)x_1-(-1+2\lambda)x_2-3\lambda x_3-4x_4 \to min,$$
$$-\infty < \lambda < +\infty$$

Бу масаладаги P_5, P_6, P_7 векторларни базис векторлар деб қабул қилиб, симплекс жадвални тўлдирамиз. Ҳар бир P_j устунга мос келувчи $\Delta_j=y_j-c_j$ ни

$$\Delta_j=\alpha_j+\lambda\beta_j$$

кўринишида ифодалаймиз ҳамда жадвалнинг m+1 қаторига α_j ни ва m+2 қаторига β_j ни жойлаштирамиз. λ нинг қуйи чегараси учун масаланинг оптимал ечимини топамиз. Бундай ечим учун барча $\beta_j \ge 0$, $j = \overline{1,7}$, бўлиши керак.

Бу ҳолда

$$\Delta_j=a_j+\lambda\beta_j \le 0.$$

Демак, $\lambda=-\infty$ учун оптимал ечим топилган бўлади. Биринчи симплекс жадвалдан кўринадики P_5, P_6, P_7 базис векторларга мос келувчи $X_1=(0; 0; 0; 0; 7; 15; 2)$ берилган масаланинг $\lambda=-\infty$ қиймати учун оптимал ечим бўлади. Бу ечим λ нинг қайси интервалдаги қийматлари учун оптимал ечим бўлишини аниқлаймиз.

Бунинг учун λ нинг юқори чегарасини топамиз.

$$\bar{\lambda} = \min_{\beta_j > 0}\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right) = \min\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{2}{3}.$$

Демак, $X_1=(0; 0; 0; 0; 7; 15; 2)$ ечим λ нинг $-\infty < \lambda \le -\frac{2}{3}$ интервалдаги ҳамма қийматлари учун оптимал ечим бўлади.

Энди $\lambda > -\frac{2}{3}$ учун оптимал ечимини топамиз. Бунинг учун базисга P_1 векторни киритиб

$$\theta = \min_{x_{1j}>0} \frac{x_j}{x_{1j}} = \min\left(\frac{7}{1};\frac{2}{2}\right) = 1$$

сонга мос келувчи P_7 векторни базисдан чиқарамиз. Натижада II симплекс жадвал ҳосил бўлади. Бу жадвалдаги P_5, P_6, P_7 базис векторларга мос келувчи $X_1=(1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 6;\ 18;\ 0)$ ечим $\lambda > -\frac{2}{3}$ учун оптимал ечим бўлади (теоремага асосан). Бу ечим λ нинг

$$-\frac{2}{3} \le \lambda \le \overline{\lambda'} = -\frac{8}{19}$$

интервалдаги ҳамма қийматлари учун ҳам оптимал ечим бўлади. Энди $\lambda > -\frac{8}{19}$ учун оптимал ечимни аниқлаймиз.

Бунинг учун

$$\overline{\lambda} = \min_{\beta_j>0} \frac{-\alpha_j}{\beta_j} = -\frac{\alpha_2}{\beta_2} = -\frac{8}{19}$$

га мос келувчи P_2 векторни базисга киритиб, P_5 векторни базисдан чиқарамиз. Натижада III симплекс жадвал ҳосил бўлади. Бунда P_2, P_6, P_1 векторлар базис векторлар бўлиб, уларга мос келган $X_2 = \left(\frac{13}{3};\frac{4}{3};0;0;0;\frac{68}{3};0\right)$ вектор $\lambda = -\frac{8}{19}$ учун масаланинг оптимал ечими бўлади. Бунда $Y(X_3)=-(42/57)$. Бу жадвалда m+2 қаторнинг барча элементлари манфий сонлардан иборат, яъни барча $\beta_j \le 0, (j=\overline{1,7})$.

Демак, топилган ечими λ нинг

$$-\frac{8}{19} \le \lambda < +\infty$$

интервалдаги ҳамма қийматлари учун оптимал ечим бўлади.I I.

Б.в.	C	P_0	$-2-3\lambda$	$1-2\lambda$	-3λ	-4	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	0	7	1	2	1	3	1	0	0
P_6	0	15	-3	4	3	-1	0	1	0
P_7	0	2	2	-5	2	2	0	0	1
m+1		0	2	-1	0	4	0	0	0
m+2		0	3	2	3	0	0	0	0

II

P_5	0	6	0	9/2	0	2	1	0	-1/2
P_6	0	18	0	-7/5	6	2	0	1	3/2
P_1	$-2-3\lambda$	1	1	-5/2	1	1	0	0	1/2
$m+1$		-2	0	4	-2	2	0	0	-1
$m+2$		-3	0	19/2	0	-3	0	0	-3/2

III

P_2	$1-2\lambda$	4/3	0	1	0	4/9	2/9	0	-1/9
P_6	0	68/3	0	0	6	32/9	7/9	1	10/9
P_1	$-2-3\lambda$	13/3	1	0	1	19/9	5/9	0	2/9
$m+1$		-22/3	0	0	-2	2/9	-8/9	0	-1/3
$m+2$		-47/3	0	0	0	-65/9	-19/9	0	-4/9

3-§. Озод ҳади параметрга боғлиқ бўлган масала (иккиланган параметрли дастурлаш масаласи)

Озод ҳади параметрга боғлиқ бўлган масала билан чизиқли функцияси параметрга боғлиқ бўлган масала ўзаро қўшма масалалар бўлади. Уларнинг ихтиёрий бирини ечиб иккинчисининг ҳам ечимини аниқлаш мумкин.

Функцияси параметрга боғлиқ бўлган масалага иккиланган масаланинг озод ҳади t параметрга боғлиқ бўлади ($\alpha \le t \le \beta, \alpha, \beta$ ихтиёрий ҳақиқий сонлар).

Бу параграфда ана шундай иккиланган параметрли дастурлаш масаласини ечиш усули билан танишамиз.

Фараз қилайлик, қуйидаги озод ҳади параметрга боғлиқ бўлган масала берилган бўлсин:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i + tb_i', (i=\overline{1,m}), t \in [\alpha, \beta]. \qquad (4.27)$$

$$x_j \ge 0, (j=\overline{1,n}) \qquad (4.28)$$

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min. \qquad (4.29)$$

$\alpha \le t \le \beta$ интервалдаги t нинг ҳар бир қиймати учун (4.27) ва (4.28) шартларни қаноатлантирувчи шундай $X=(x_1, x_2, \quad x_3)$ векторни топиш керакки, у (4.29) чизиқли функцияга минимал қиймат берсин.

Фараз қилайлик, $t=\alpha$ да масаланинг $\overline{X}=(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ оптимал режаси топилган бўлсин. Масаладаги b_i озод ҳадлар t параметрга боғлиқ бўлгани сабабли $\overline{X}(\overline{X}=B^{-1}b)$ векторнинг компоненталарини α нинг чизиқли функцияси сифатида ифодалаш мумкин, яъни

$$\bar{x}_i \quad q_i + \alpha p_i$$

Шартга кўра $\bar{X}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)$ $t=\alpha$ даги оптимал ечим. Шунинг учун

$$\bar{x}_i = q_i + \alpha p_i \geq 0$$

бўлиши керак ва демак,

$$q_i + tp_i \geq 0 \qquad (4.30)$$

тенгсизликлар системаси биргаликда бўлади.

Бу ерда 4 та ҳол рўй бериши мумкин:

1) Агар (4.30) ифодада барча $p_i=0$ бўлса, у холда топилган $\bar{X}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)$режа t нинг ихтиёрий қийматлари учун оптимал режа бўлади;
2) (4.30) да барча $p_i \geq 0$ $(i=\overline{1,m})$. Бу ҳолда топилган $\bar{X}$ режа ихтиёрий $\alpha \leq t$ учун оптимал режа бўлади;
3) Агар (4.30) да барча $p_i \leq 0$ $(i=\overline{1,m})$бўлса, у ҳолда топилган режа $\bar{X}$ ихтиёрий $t \leq \alpha$ учун оптимал режа бўлади;
4) (4.30) ифодадаги p_i лардан баъзилари мусбат, баъзилари эса манфий бўлиши мумкин.

Агар $p_i>0$ бўлса, (4.30) дан $\quad t \geq -\frac{q_i}{p_i}$.

Худди шунингдек, агар $p_i<0$ бўлса, у ҳолда $t \leq -\frac{q_i}{p_i}$.

Энди қуйидагиларни қабул қиламиз

$$\underline{t} = \begin{cases} \max\limits_{p_i>0} \left(-\frac{q_i}{p_i}\right), \\ -\infty \quad \text{агар ҳамма } p_i \leq 0 \end{cases} \qquad (4.31)$$

$$\bar{t} = \begin{cases} \min\limits_{p_i<0} \left(-\frac{q_i}{p_i}\right), \\ +\infty \quad \text{агар ҳамма } p_i \geq 0 \end{cases} \qquad (4.32)$$

Бунда топилган $\bar{X}$ режа t нинг $\underline{t} \leq t \leq \bar{t}$ интервалдаги ҳар бир қиймати учун оптимал режа бўлади. Агар $\bar{t}=+\infty$ бўлса, t нинг ҳамма қийматлари учун оптимал ечим топилган бўлади ва масалани ечиш жараёни тўхтатилади. Фараз қилайлик, $\bar{t} \neq +\infty$ да

$$\bar{x}_i = q_i + tp_i \geq 0 (i=\overline{1,m}) \qquad (4.33)$$

ва

$$y_j \qquad \leq 0 (j \quad \overline{1,n}) \qquad (4.34)$$

шартлар бажарилсин. Бошқача айтганда $\overline{X}$ вектор оптималлик шартини қаноатлантирсин. Лекин, шуни айтиб ўтиш керакки, (4.33), (4.34) шартларни қаноатлантирувчи $\overline{X}$ вектор оптимал ечим бўлмаслиги ҳам мумкин. t нинг қийматини ошириб бориш натижасида бирорта t учун, масалан t=C учун $\bar{x}_l = q_l + tp_l < 0$ бўлиши мумкин.

У ҳолда

$$\bar{t} = -\frac{q_l}{p_l} \qquad (p_l<0)$$

бўлади. Энди $t > \bar{t}$ учун янги оптимал ечимни аниқлаш керак. Бунинг учун базисга кирадиган ва базисдан чиқадиган векторларни танлаш керак. Бу векторлар қуйидаги теоремага асосан танланади:

Теорема. Агар $\bar{t} = -\frac{q_l}{p_l}$ га мос келувчи p_l вектор базисдан чиқарилиб, базисга

$$\frac{y_k - c_k}{x_{lk}} = \min_{x_{lj}<0} \frac{y_j - c_j}{x_{lj}}$$

шартни қаноатлантирувчи P_k векторни киритилса, ҳосил бўлган янги ечим $\overline{X'}$ t нинг ҳеч бўлмаганда битта қиймати учун оптимал ечим бўлади. Агар $\overline{X'}$ t нинг $\underline{t}' \le t \le \bar{t}'$ интервалдаги қийматлари учун оптимал ечим бўлса, $\bar{t} = \underline{t}'$ бўлади.

Исбот. Симплекс жадвалдаги озод ҳадлардан ташкил топган p_0 векторнинг янги базис векторлар орқали ёйилмаси қуйидаги формулалар орқали аниқланади:

$$\bar{x}'_i = q_i' + tp_i' = q_i + tp_i - \frac{x_{ik}}{x_{lk}}(q_l + tp_l), i \ne l,$$

$$\bar{x}'_k = q'_k + tp'_k = \frac{q_l + tp_l}{x_{lk}}$$

$\overline{X'}$ вектор $t = \underline{t}' = -\frac{q_l}{p_l}$ учун оптимал режадир ва агар $\overline{X'}$ бирорта бошқа t учун ҳам режа бўлса, у ҳолда $t \ge \bar{t}$ бўлади. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\frac{q_l + tp_l}{x_{lk}} \ge 0, x_{lk} \le 0, \ p_l < 0$$

Бундан

$$t \ge -\frac{q_l}{p_l} = \bar{t}$$ эканлиги келиб чиқади.

Энди янги режани оптимал ечим эканлигини кўрсатамиз. Маълумки,

$$(y_j - c_j)' = y_j - c_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}}(y_k - c_k).$$

Бунда $y_j - c_j \le 0, x_{lk} < 0$ бўлгани сабабли, $x_{lj}>0$ бўлганда $(y_j - c_j)' \le 0$ бўлади, яъни $y_j - c_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}}(y_k - c_k) \le 0$.

Бундан $x_{lj}>0$ учун

$$y_j - c_j \le \frac{x_{lj}}{x_{lk}}(y_k - c_k)$$

ёки

$$\frac{y_j - c_j}{x_{lj}} \ge \frac{y_k - c_k}{x_{lk}}.$$

Демак, базисга киритиладиган P_k вектор учун

$$\min_{x_{lj}<0} \frac{y_j - c_j}{x_{lj}} = \frac{y_k - c_k}{x_{lk}}$$

шарт қаноатлантирилиши керак.

Агар барча $x_{lj}>0$ бўлса, у холда $t > \bar{t}$ учун масала ечимга эга бўлмайди.

Мисол. Озод ҳади параметрга боғлиқ бўлган чизиқли дастурлаш масаласини ечинг.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \le 1 - 2t, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 20 - t, \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 5 + 3t, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$, $(j = \overline{1,4})$,

$-\infty < t < +\infty$

$Y = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 \to max.$

Ечиш. Берилган масалага қўшимча ўзгарувчилар киритамиз ва $Y \to max$ ни $Y \to min$ га айлантирамиз. Натижада каноник формадаги масалага эга бўламиз.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 1 - 2t, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_6 = 20 - t, \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x7 = 5 + 3t. \end{cases}$$

$x_j \ge 0$, $(j = \overline{1,7})$,

$-\infty < t < +\infty$

$Y = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \to min.$

Ҳосил бўлган масаладаги P_5, P_6, P_7 векторларни базис векторлар деб қабул қилиб, симплекс жадвални тўлдирамиз ва симплекс усули ёрдами билан $t = -\infty$ учун оптимал ечимни топамиз.

IV босқичда $t = -\infty$ учун оптимал ечим топилди. Бу ечим:

$$X_1=\left(5-\frac{14}{17}t;5-\frac{1}{17}t;0;0;-14-\frac{5}{17}t;0;0\right)$$

$$Y_1=y(X_1)=-5-\frac{12}{17}t.$$

(4.32) га асосан $\bar{t}=\min\left(\frac{5}{\frac{14}{17}},\frac{-14}{\frac{5}{17}},\frac{5}{\frac{1}{17}}\right)=\min\left(\frac{85}{14},-\frac{238}{5},85\right)=-\frac{238}{5}$ га мос бўлган

P_5 векторни базисдан чиқариб, базисга $\min\limits_{x_5<0}\frac{\Delta_j}{x_5},(j=\overline{1,7})$ нисбатни берувчи P_6 векторни киритамиз.

Натижада III босқичда топилган

$$X_2=\left(-\frac{13}{14}t;1-\frac{1}{7}t;0;0;0;17+\frac{5}{14}t;0\right)$$

вектор $t=-\frac{238}{5}$ учун оптимал ечим бўлади. (4.32) га асосан

$$\bar{t}'=\min\left(\frac{0}{\frac{13}{14}};\frac{1}{\frac{1}{17}}\right)=0$$

Демак, $\bar{t}'=-\frac{q_1}{p_1}=0$ бўлганлиги сабабли, унга мос келувчи P_1 векторни базисдан чиқариб, базисга

$$\min_{x_{1j}<0}\frac{\Delta_j}{x_{1j}}=\min_{x_{1j}<0}\frac{y_j-c_j}{x_{1j}}=\frac{y_3-c_3}{x_{13}}=\frac{23}{13}$$

шартни қаноатлантирувчи P_3 векторни киритамиз. Ҳосил бўлган

$$X_3=(0;1+t;t;0;0;17-8t;0)$$

вектор масаланинг $t=0$ даги оптимал ечими ва бу ечимдаги мақсад функциянинг қиймати $y_3=-2+t$ га тенг. Бу режа t нинг

$$0\le t\le\bar{t}''=\frac{17}{8}$$

интервалдаги барча қийматлари учун оптимал режа бўлади. Энди $\bar{t}''$ га мос келувчи P_6 векторни базисдан чиқарамиз ва P_7 ни базисга киритамиз. Натижада ҳосил бўлган

$$X_4=(0;\frac{64}{13}-\frac{11}{13}t;\frac{17}{13}+\frac{5}{13}t;0;0;0;17-8t)$$

вектор масаланинг $t=\frac{17}{8}$ даги оптимал ечими бўлади. Бунда

$$y_4=y(X_4)=-\frac{77}{13}+\frac{37}{13}t.$$

Бу ечим t нинг

$\frac{17}{8} \le t \le \frac{64}{11}$ интервалдаги барча қийматлари учун оптимал ечим бўлади. Лекин $t^{*} = -\frac{q_2}{p_2} = \frac{64}{11}$ га мос келувчи барча $x_{2j} \geq 0$ бўлганлиги сабабли, масала $t > \frac{64}{11}$ ечимга эга бўлмайди.

I.

Б.в.	*C*	P_0	*1*	*-2*	*3*	*1*	*0*	*0*	*0*
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	*0*	*1-2t*	*2*	*1*	*-3*	*1*	*1*	*0*	*0*
P_6	*0*	*20-t*	*1*	*3*	*4*	*2*	*0*	*1*	*0*
P_7	*0*	*5+3t*	*-4*	*5*	*-2*	*3*	*0*	*0*	*1*
Δ_j		*0*	*-1*	*2*	*-3*	*-1*	*0*	*0*	*0*

II.

P_5	*0*	$-\frac{13}{5}t$	$\frac{14}{5}$	*0*	$-\frac{13}{5}$	$\frac{2}{5}$	*1*	*0*	$\frac{1}{5}$
P_6	*0*	$17-\frac{5}{14}t$	$\frac{17}{5}$	*0*	$\frac{26}{5}$	$\frac{1}{5}$	*0*	*1*	$-\frac{3}{5}$
P_2	-2	$1+\frac{3}{5}t$	$-\frac{4}{5}$	*1*	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	*0*	*0*	$\frac{1}{5}$
Δ_j		$-2-\frac{6}{5}t$	$\frac{3}{5}$	*0*	$-\frac{11}{5}$	$-\frac{11}{5}$	*0*	*0*	$-\frac{2}{5}$

III.

P_1	*1*	$-\frac{13}{5}t$	*1*	*0*	$\frac{13}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{14}$	*0*	$-\frac{1}{14}$
P_6	*0*	$17+\frac{5}{14}t$	*0*	*0*	$\frac{117}{14}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{17}{14}$	*1*	$-\frac{5}{14}$
P_2	-2	$1-\frac{1}{7}t$	*0*	*1*	$-\frac{8}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	*0*	$\frac{1}{7}$
Δ_j		$-2-\frac{9}{14}t$	*0*	*0*	$-\frac{23}{14}$	$-\frac{16}{7}$	$-\frac{13}{14}$	*0*	$-\frac{5}{14}$
$\frac{\Delta_j}{x_{6j}}$							$\frac{3}{17}$		

IV.

P_1	1	$5-\frac{14}{17}t$	1	0	$\frac{26}{17}$	$\frac{1}{17}$	0	$\frac{5}{17}$	$-\frac{3}{17}$
P_5	0	$-14-\frac{5}{17}t$	0	0	$-\frac{117}{17}$	$\frac{4}{17}$	1	$-\frac{14}{17}$	$\frac{5}{17}$
P_2	-2	$5-\frac{1}{17}t$	0	1	$\frac{14}{17}$	$\frac{11}{17}$	0	$\frac{4}{17}$	$\frac{1}{17}$
$m+1$		$-5-\frac{12}{17}t$	0	0	$-\frac{53}{17}$	$-\frac{38}{17}$	0	$-\frac{3}{17}$	$-\frac{5}{17}$
$\frac{\Delta_j}{x_{5j}}$					$\frac{53}{117}$			$\frac{3}{17}$	

V.

P_1	1	$-\frac{13}{14}t$	1	0	$\frac{13}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{14}$	0	$-\frac{1}{14}$
P_6	0	$17+\frac{5}{14}t$	0	0	$\frac{117}{14}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{17}{14}$	1	$-\frac{5}{14}$
P_2	-2	$1-\frac{1}{7}t$	0	1	$-\frac{8}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$
Δ_j		$-2-\frac{17}{14}t$	0	0	$-\frac{23}{14}$	$-\frac{16}{7}$	$-\frac{3}{14}$	0	$-\frac{5}{14}$
$\frac{\Delta_j}{x_{5j}}$					$\frac{23}{13}$				5

VI.

P_3	3	t	$-\frac{14}{13}$	0	1	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{5}{13}$	0	$\frac{1}{13}$
P_6	0	$17-18t$	9	0	0	1	2	1	-1
P_2	-2	$1+t$	$-\frac{16}{13}$	1	0	$\frac{7}{13}$	$-\frac{2}{13}$	0	$\frac{3}{13}$
Δ_j		$-2+t$	$-\frac{23}{13}$	0	0	$-\frac{33}{13}$	$-\frac{11}{13}$	0	$-\frac{3}{13}$
$\frac{\Delta_j}{x_{5j}}$									$\frac{3}{13}$

VII.

P_3	3	$\frac{17}{13}+\frac{5}{13}t$	$-\frac{5}{13}$	0	1	$-\frac{1}{13}$	$-\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$	0
P_7	0	$17-18t$	-9	0	0	-1	-2	-1	1
P_2	-2	$\frac{64}{13}-\frac{11}{13}t$	$\frac{11}{13}$	1	0	$\frac{10}{13}$	$\frac{4}{13}$	$-\frac{3}{13}$	0
Δ_j		$-\frac{77}{13}+\frac{37}{13}t$	$-\frac{50}{13}$	0	0	$-\frac{36}{13}$	$-\frac{7}{13}$	$-\frac{3}{13}$	0

Таянч сўз ва иборалар

Параметрли дастурлаш; функцияси параметрга боғлиқ бўлган масала; озод ҳади параметрга боғлиқ бўлган масала; параметрнинг критик қийматлари; критик ечим

Назорат саволлари

1. Параметрли дастурлаш масаласининг предмети нима?
2. Параметрли дастурлаш масалаларининг қандай турлари мавжуд?
3. Функцияси параметрга боғлиқ бўлган масала қандай қўйилади?
4. Озод ҳадлари параметрга боғлиқ бўлган масала қандай кўринишда бўлади?
5. Параметрли дастурлаш масаласининг қандай умумлаштирилган ҳолларини биласиз?
6. Параметрли дастурлаш масаласининг геометрик талқини қандай?
7. Маҳсулотни ишлаб чиқариш ва уни сақлашни оптималлаштириш масаласининг математик моделини тузинг ва уни функцияси параметрга боғлиқ бўлган масала сифатида ифодаланг.
8. Функцияси параметрга боғлиқ бўлган масалани ечиш жараёнини тавсифланг.
9. Параметрнинг маълум бир қийматида топилган ечим учун қандай теорема ўринли бўлади?
10. Функцияси параметрга боғлиқ бўлган масалани ечиш жараёнини қандай ҳолларда тўхтатиш мумкин?
11. Озод ҳади параметрга боғлиқ бўлган масала билан функцияси параметрга боғлиқ бўлган масала орасида қандай боғланиш бор?
12. Озод ҳади параметрга боғлиқ бўлган масалани ечиш алгоритмини тавсифланг.
13. Озод ҳади параметрга боғлиқ бўлган масалани ечишда параметрнинг бир қийматидан бошқа қийматига ўтиш қандай теоремага асосан бажарилади?

Масалалар

I. Параметрли дастурлаш масаласининг геометрик талқинидан фойдаланиб, қуйидаги масалаларни t параметрнинг $-\infty<t<\infty$ оралиқдаги барча қийматлари учун ечинг.

1.1

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 23, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 20, \\ -\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_5 = 24, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$

$Y = 6x_1 + (4+t)x_3 + (12-t)x_4 \to max;$

1.2

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 24, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$

$Y = 3x_1 - (3+t)x_2 + (4+t)x_4 \to max;$

II. Қуйидаги функцияси параметрга боғлиқ бўлган масалаларни аналитик усул билан ечинг.

2.1

$-x_1 + x_2 \leq 3,$

$4x_1 + 5x_2 \leq 51,$

$2x_1 - 5x_2 \leq 3,$

$x_1 + x_2 \geq 5,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$

$Y = 5x_1 + (2+3\lambda)x_2 \to max,\ \lambda \in [0,10].$

2.2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}$

$Y = 2\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - 3x_3 + \lambda x_4 + 2x_5 - 3\lambda x_6 \to max,\ \lambda \in [0,10].$

2.3

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 10, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 6, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 5, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}$

$$Y=(1-2\lambda)x_1+\lambda x_2+x_3-(2-\lambda)x_4\to max, \ -\infty<\lambda<+\infty.$$

III. Қуйидаги озод ҳади параметрга боғлиқ бўлган масалаларни ечинг.

3.1
$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4\le 10+3t, \\ 4x_1-x_2+2x_3+x_4\le 7-t, \\ 3x_2+x_3-2x_4\le 2+5t, \end{cases}$$
$$x_j\ge 0, \quad j=\overline{1,4}, \ -\infty<\lambda<+\infty,$$

$$Y=2x_1-x_2+5x_3+x_4\to max$$

3.2
$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-4x_3\ge 1-t, \\ -x_1+4x_2+3x_3\ge -3, \\ 2x_1+8x_3\ge 2, \end{cases}$$
$$x_j\ge 0, \quad j=\overline{1,3}, \ 0\le t\le +\infty,$$

$$Y=7x_1+12x_2+10x_3\to max.$$

3.3
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=12+t, \\ 2x_1-x_2+x_4=8+4t, \\ -2x_1+2x_2+x_5=10-6t, \end{cases}$$
$$x_j\ge 0, \quad j=\overline{1,5}, \ -\infty<t<+\infty,$$

$$Y=3x_1-2x_2+5x_3-4x_5\to max.$$

V БОБ. ТРАНСПОРТ МАСАЛАСИ

Транспорт масаласи чизиқли дастурлаш масалалари ичида назарий ва амалий нуқтаи назардан энг яхши ўзлаштирилган масалалардан бири бўлиб, ундан саноат ва қишлоқ хўжалик маҳсулотларини ташишни оптимал режалаштириш ишларида муваффақиятли равишда фойдаланилмоқда.

Транспорт масаласи махсус чизиқли дастурлаш масалалари синфига тегишли бўлиб, унинг чегараловчи шартларидаги коэффициентлардан тузилган (a_{ij}) матрицанинг элементлари 0 ва 1 рақамлардан иборат бўлади ва ҳар бир устунда фақат иккита элемент 0 дан фарқли, қолганлари эса 0 га тенг бўлади. Транспорт масаласини ечиш учун унинг махсус хусусиятларини назарга олувчи усуллар яратилган бўлиб, қуйида биз улар билан танишамиз.

1-§. Транспорт масаласининг математик модели ва хоссалари

Фараз қилайлик, A_1, A_2, A_m пунктларда бир хил маҳсулот ишлаб чиқарилсин. Маълум бир вақт оралиғида ҳар бир $A_i(i=1,m)$ пунктда ишлаб чиқариладиган маҳсулот миқдори a_i бирликка тенг бўлсин. Ишлаб чиқариладиган маҳсулотлар B_1, B_2, ..., B_n пунктларда истеъмол қилинсин ҳамда ҳар бир $B_j(j=1,n)$ истеъмолчининг кўрилаётган вақт оралиғида маҳсулотга бўлган талаби $b_j(j=1,n)$ бирликка тенг бўлсин.

Бундан ташқари A_1, A_2, ..., A_m пунктларда ишлаб чиқариладиган маҳсулотларнинг умумий миқдори B_1 ,B_2 ,..., B_n пунктларнинг маҳсулотга бўлган талабларининг умумий миқдорига тенг, яъни

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

тенглик ўринли бўлсин деб фараз киламиз Дейлик, ҳар бир ишлаб чиқариш пункти A_i дан ҳамма истеъмол қилувчи пунктга маҳсулот ташиш имконияти мавжуд ҳамда A_i пунктдан B_j пунктга маҳсулотни олиб бориш учун сарф қилинадиган харажат C_{ij} пул бирлигига тенг бўлсин.

x_{ij} билан режалаштирилган вақт оралиғида A_i пунктдан B_j пунктга олиб бориладиган маҳсулотнинг умумий миқдорини белгилаймиз.

Транспорт масаласининг берилган параметрларини ва белгиланган номаълумларни қуйидаги жадвалга жойлаштирамиз.

1-жадвал.

B_j / A_i	B_1	B_2		B_n	и/ч маҳсулотлар миқдори
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}		C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}		C_{2n} X_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}		C_{mn} X_{mn}	a_m
талаб миқдори	b_1	b_2		b_n	

Масаланинг иқтисодий маъноси юк ташишнинг шундай режасини тузиш керакки: 1) ҳар бир ишлаб чиқариш пунктидаги маҳсулотлар тўла тақсимлансин ; 2) ҳар бир истеъмолчининг маҳсулотга бўлган талаби тўла қаноатлантирсин ва шу билан бирга сарф қилинадиган йўл харажатларининг умумий қиймати минимал бўлсин.

Масаланинг биринчи шартини қуйидаги тенгламалар системаси орқали ифодалаш мумкин:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m, \end{cases} \qquad (5.1)$$

Масаланинг иккинчи шарти эса қуйидаги тенгламалар системаси кўринишида ифодаланади:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n. \end{cases} \qquad (5.2)$$

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра номаълумлар манфий бўлмаслиги керак, яъни

$$x_{ij} > 0 \, (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}). \qquad (5.3)$$

i-ишлаб чиқариш пунктидан j-истеъмол қилувчи пунктга режадаги x_{ij} бирлик маҳсулотни етказиб бериш учун сарф қилинадиган йўл харажати $c_{ij}\ x_{ij}$ пул бирлигига тенг бўлади.

Режадаги барча маҳсулотларни ташиш учун сарф қилинадиган умумий йўл харажатлари

$$Y = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \quad + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \quad +$$
$$c_{2n}x_{2n} + \ldots \qquad _1 + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

функция орқали ифодаланади. Масаланинг шартига кўра бу функция минимумга интилиши керак, яъни

$$Y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min. \quad (5.4)$$

(5.1) (5.4) муносабатлар биргаликда транспорт масаласининг математик модели деб аталади.

Транспорт масаласининг математик моделини қуйидаги йиғинди кўринишида ҳам ёзиш мумкин.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (i = \overline{1,m}) \qquad (5.5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, (j = \overline{1,n}) \qquad (5.6)$$

$$x_{ij} \geq 0, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}) \qquad (5.7)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min \qquad (5.8)$$

Масаладаги ҳар бир a_i ,b_j ва c_{ij} номанфий сонлар, яъни: $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $c_{ij} \geq 0$.

Агар (5.5.) - (5.8.) масалада

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i = A \qquad (5.9)$$

тенглик ўринли бўлса, яъни ишлаб чиқарилган маҳсулотлар йиғиндиси унга бўлган талаблар йиғиндисига тенг бўлса, у ҳолда бу масалани ёпиқ моделли транспорт масаласи деб айтамиз.

1-теорема. Ҳар қандай ёпиқ моделли транспорт масаласи ечимга эга.

Исбот. Шартга кўра $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i = A > 0$, у ҳолда

$$_{ij} = \frac{a_i b_j}{A} (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$$

берилган транспорт масаласининг режаси бўлади. Ҳақиқатдан ҳам,

$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A} \geq 0$, чунки $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $A>0$.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i}{A}\sum_{j=1}^{n} b_j = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j \sum a_i}{A} = b_j.$$

Демак, ${}_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}$ транспорт масаласининг ҳамма шартларини қаноатлантиради. Шунинг учун бу миқдор масаланинг режаси бўлади.

2-теорема. Транспорт масаласининг шартларидан тузилган матрицанинг $r(A)$ ранги $m+n-1$ га тенг.

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, бу матрица кенгайтирилган ҳолда қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг ихтиёрий қатори (масалан, 1-қатори) қолган қаторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат эканлигини кўрсатиш мумкин. Бунинг учун $m+1$, $m+2$, ..., $m+n$ қаторидан ўзаро қўшиб, натижасидан 2, 3, ..., $(m+n)$ қаторларни айирсак 1-қаторни ҳосил қиламиз. Демак, $r(A)=n+m-1$. Энди 2, 3, ..., $(m+n)$ - қаторлар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган системани ташкил қилишини кўрсатамиз. Бунинг учун ихтиёрий α_2, α_3, ...,α_m, β_1, β_2, ..., β_n сонлар олиб уларга мос равишда 2, 3, ..., m, $(m+n)$ - қаторларни кўпайтириб ўзаро қўшамиз ва натижасини $0=(0,0...0...0,0,...\ 0)$ га тенглаймиз. Натижада қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + ...0\cdot\alpha_m + 1\cdot\beta_1 + 0\cdot\beta_2 + ... + 0\cdot\beta_n = 0, \\ 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + ...0\cdot\alpha_m + 0\cdot\beta_1 + 1\cdot\beta_2 + ... + 0\cdot\beta_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + ...0\cdot\alpha_m + 0\cdot\beta_1 + 0\cdot\beta_2 + ... + 1\cdot\beta_n = 0. \end{cases} \qquad (5.10)$$

ва

$$\begin{cases} 1\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + ...0\cdot\alpha_m + 1\cdot\beta_1 + 0\cdot\beta_2 + ... + 0\cdot\beta_n = 0, \\ 0\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 + ...0\cdot\alpha_m + 1\cdot\beta_1 + 0\cdot\beta_2 + ... + 0\cdot\beta_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + ...1\cdot\alpha_m + 1\cdot\beta_1 + 0\cdot\beta_2 + ... + 0\cdot\beta_n = 0. \end{cases} \qquad (5.11)$$

(5.10) системадан $\beta_1=0$, $\beta_2=0$,..., $\beta_n=0$, (5.12)

(5.11) системадан

$$\begin{cases}\alpha_2+\beta_1=0,\\ \alpha_3+\beta_1=0,\\ \dots\dots\dots\dots\\ \alpha_m+\beta_1=0.\end{cases}$$

тенгликлар келиб чиқади. Бундан (5.12) га асосан $\alpha_2=\alpha_3=\dots\alpha_n=0$ бўлади. Демак, А матрицанинг $m+n-1$ та қатори ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган системани ташкил қилади ва демак $r(A)=m+n-1$ бўлади.

3-теорема. Агар масаладаги барча a_i ва b_i лар бутун сонлардан иборат бўлса, транспорт масаласининг ечими бутун сонли бўлади.

Теореманинг исботини транспорт масаласининг бошланғич базис режаларини топиш усулларида кўриш мумкин.

4-теорема. Ихтиёрий транспорт масаласининг оптимал режаси мавжуддир.

Исбот. 1- теоремага асосан масаланинг камида битта режаси мавжуддир. (5.5), (5.6) шартлардаги коеффицентлар ва барча a_i, b_i лар мусбат бутун сон бўлганлиги сабабли x_{ij} ҳам юқоридан чегараланган бўлади ва унинг қиймати мос a_i, ва b_j ларнинг қийматидан ошмайди.

Шундай қилиб, транспорт масаласи режаларидан ташкил топган тўплам бўш тўплам бўлмайди, у чегараланган тўплам бўлади. Демак, транспорт масаласи оптимал режага эга.

2-§. Транспорт масаласининг бошланғич базис режасини топиш усуллари

Бошқа чизиқли дастурлаш масалалари сингари транспорт масаласини ечиш жараёни бошланғич базис режани топишдан бошланади. Транспорт масаласининг базис режасини топиш усуллари кўп бўлиб, қуйида биз "шимолий-ғарб бурчак" усули ва "минимал харажатлар" усули билан танишамиз.

1. Шимолий-ғарб бурчак усули. Фараз қилайлик, транспорт масаласининг шартлари қуйидаги жадвалга жойлаштирилган бўлсин.

a_i \ b_j	b_1	b_2		b_n
a_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}

Шимолий-ғарб бурчак усулининг ғояси қуйидагилардан иборат. Энг аввал шимолий-ғарбда жойлашган катакчадаги x_{11}

номаълумнинг қийматини аниқлаймиз, $x_{11}=min\ (a_1,b_1)$. Агар $a_1 \le b_1$ бўлса $x_{11}=a_1$ ва $x_{1j}=0$, $(j=\overline{2,n})$, агар $b_1 \le a_1$бўлса $x_{11}=b_1$ ва $x_{i1}=0$, $(i=\overline{2,m})$ бўлади. Фараз қилайлик, биринчи ҳол бажарилсин. Бу ҳолда 1-қадамдан сўнг масаланинг ечимларидан ташкил топган матрица қуйидаги кўринишда бўлади.

1-қадам

$$\begin{array}{cccc|c}
x_{11}=a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{2n} & a_2 \\
x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & x_{mn} & a_m \\
\hline
b_1-a_1 & b_2 & b_3 & b_n &
\end{array}$$

Энди иккинчи қатордаги биринчи элементнинг қийматини топамиз:

Агар $a_2>b_1-a_1$ бўлса, $x_{21}=b_1-a_1$ ва $x_{i1}=0$, $(i=\overline{3,m})$,

Агар $a_2<b_1-a_1$ бўлса, $x_{21}=a_2$ ва $x_{2j}=0$, $(j=\overline{2,n})$.

Фараз қилайлик, янги матрица учун ҳам 1-ҳол бажарилсин, у ҳолда 2-қадамдаги ечимлар матрицаси қуйидагигача бўлади.

$$\begin{array}{|cccc|c}
x_{11}=a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{21}=b_1-a_1 & x_{22} & x_{23} & x_{2n} & a_2-b_1+a_1 \\
0 & x_{32} & x_{33} & x_{3n} & a_3 \\
0 & x_{m2} & x_{m3} & x_{mn} & a_m \\
\hline
0 & b_2 & b_3 & b_n &
\end{array}$$

Худди шундай йўл билан давом этиб, ҳар бир қадамда бирорта x_{ij} нинг қиймати топилади. $x_{ij}=min(a_i,b_j)$ ва a_i ёки b_j нолга айлантирилади.

Бу жараён барча a_i ва b_j лар нолга айлангунча такрорланади. Маълумки, ҳар бир x_{ij} нинг қиймати a_i ва b_j ларнинг турли комбинацияларини айириш ёки қўшиш ёрдами билан топилади, шунинг учун a_i ва b_j лар бутун бўлганда топилган базис режа бутун сонли бўлади. Бундан ташқари, юқоридаги 2-теоремага асосан базис ечимдаги нолдан фарқли x_{ij} номаълумлар сони $m+n-1$ дан ошмайди.

Мисол. Қуйидаги транспорт масаласининг бошланғич базис ечимини топинг.

b_j / a_i	3	6	2	1
4	2	5	9	5
2	8	3	5	8
3	7	3	1	4
3	5	9	7	2

1-қадам.

$$x_{11}=min(4,3)=3.$$

Шунинг учун $b'_1=0$ ва $a_1=4\text{-}3=1$, $x_{21}=x_{31}=x_{41}=0$

2-қадам.

$$x_{12}=min(1,6)=1.$$

Бунда $a'_1=0$ ва $b'_2=6\text{-}1=5$, $x_{13}=x_{14}=0$.

3-қадам.

$$x_{22}=min(2,5)=2.$$

Бунда $a'_2=0$ ва $b'_2=5\text{-}2=3$, $x_{23}=x_{24}=0$.

4-қадам.

$$x_{32}=min(3,3)=3.$$

Бунда $a''_2=b''_2=0$ бўлади ҳамда $x_{33}=x_{34}=0,\ x_{42}=0$.

5-қадам.

$x_{43}=2,\ a'_4=3\text{-}2=1$.

6-қадам.

$$x_{44}=min\ (1,1)=1$$

Бунда $a'_4=b'_4=0$ бўлади ва масалани ечиш жараёни тугайди. Топилган бошланғич базис ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

a_i \ b_j	3	6	2	1
4	2 3	5 1	9	5
2	8	3 2	5	8
3	7	3 3	1	4
3	5	9	7 2	2 1

Топилган бошланғич базис ечимдаги нолдан фарқли бўлган номаълумлар сони 6 та бўлиб, у $m+n\text{-}1=7$ дан кичик. Агар масаланинг базис режадаги нолдан фарқли бўлган x_{ij} номаълумлар сони $m+n\text{-}1$ дан кичик бўлса, бундай режани хос режа деб атаймиз. Хос режани тўғрилаш усуллари билан кейинроқ танишамиз.

II. Минимал харажатлар усули. Транспорт масаласининг оптимал ечимини топиш учун керак бўладиган итерациялар сони бошланғич базис ечимини танлашга боғлиқдир. Оптимал ечимга яқин бўлган базис ечимни топиш масаланинг оптимал ечимини топишни тезлаштиради. Юқоридаги «шимолий-ғарб бурчак» усули транспорт масаласининг базис ечимини ихтиёрий равишда, транспорт харажатларини назарга олмаган ҳолда аниқлайди.

Бундай усул ёрдами билан топилган кўпгина базис ечим оптимал ечимдан йироқ бўлиб, оптимал ечимни топиш учун жуда кўп итерацияларни бажаришга тўғри келади.

Адабиётда транспорт масаласининг бошланғич базис ечимини топиш учун транспорт харажатларини назарга олувчи кўп усуллар маълум(устундаги минимал элемент усули, минимал харажатлар усули, икки томонлама танлаш усули ва ҳоказолар).Уларнинг ҳаммаси транспорт харажатларини назарга олувчи усулларидир.

Минимал харажатлар усулининг ғояси қуйидагилардан иборат:

1. Транспорт масаласи харажатларидан ташкил топган матрица белгилаб олинади, яъни

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & & \\ c_{21} & & \\ & & \\ c_{m1} c_{m2} \dots c_{mn} \end{bmatrix}$$

Бу матрицанинг минимал элементини топиб белгилаймиз:

$$\min_{i,j} c_{ij} = c_{i_1 j_1}$$

У ҳолда $x_{i_1 j_1}$ қуйидагича аниқланади

$$=min(a_{i_1}\ b_{j_1}).$$

Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин:

1) $a_{i_1} < b_{j_1}$

2) $a_{i_1} > b_{j_1}$

Биринчи ҳолда $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$ бўлганда қаторнинг барча $x_{i_1 j}$ $(j \neq j_1)$ элементлари 0 га тенг, яъни

$$x_{i_1 j} = 0,\ (j \neq j_1)$$

бўлади, бундай ҳолда i_1 қатор ўчирилади деб айтамиз. Иккинчи ҳолда $x_{i_1 j_1} = b_{j_1}$ ва j_1 устуннинг барча $x_{i j_1}$ $(i \neq i_1)$ элементлари 0 га тенг, яъни

$$x_{i j_1} = 0,\ (i \neq i_1)$$

тенглик ўринли бўлади, бундай ҳолда j_1 устун ўчирилади деб айтамиз.

2. Фараз қилайлик, C' матрица C матрицанинг i_1 қаторини (1-ҳол) ёки j_1 устунини (2-ҳол) ўчириш натижасида ҳосил бўлган матрица бўлсин. Янги матрица учун

$$a_i^{(1)}=\begin{cases} a_i, i \neq i_1 \\ a_i - x_{i_1 j_1}, & i = i_1 \end{cases} \qquad b_j^{(1)}=\begin{cases} b_j, j \neq j_1 \\ b_j & j = j_1 \end{cases}$$

бўлсин.

Маълумки, C' матрицадаги устун ва қаторлар сони C матрицаникидан биттага кам бўлади. Иккинчи қадамда юқоридаги C матрица учун бажарилган ишлар C' матрица ва $a_i^{(1)}, b_j^{(1)}$ миқдорлар учун бажарилади. Натижада режалардан ташкил топган $X=(x_{ij})$ матрицанинг яна бир қатори ёки устуни тўлдирилади. Бу жараён C матрицанинг ҳамма қатор ва устунлари ўчирилгунча, яъни X матрицанинг ҳамма қатор ва устунлари тўлдирилгунча такрорланади.

m та ишлаб чиқарувчи пунктни n та истеъмол қилувчи пунктга боғловчи транспорт масаласининг бошланғич базис режасини топиш учун минимал харажатлар усулида $n+m-1$ та қадамдан иборат ишларни бажариш керак бўлади.

Мисол. Берилган транспорт масаласининг базис режасини минимал харажатлар усулидан фойдаланиб топинг.

b_j / a_i	5	9	9	7
11	7	8 3	5 1	3 7
11	2 5	4 6	5	9
8	6	3	1 8	2

1. $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{33} = 1$

$x_{33}=min\ (a_3\ ,\ b_3)=min\ (8,9)=8.$

Бу ҳолда $x_{3j}=0,\ (j\neq3)$ бўлади. Бошқача айтганда 3-қатор ўчирилади ва янги C' матрица ҳосил бўлади. Бу матрицада

$a_3{}^1=8-8=0,$

$b_3{}^1=9-8=1$

бўлиб, C' матрица қуйидаги кўринишда бўлади:

$$C' = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. C' матрицадаги элементлар ичида энг кичигини топамиз, яъни

$$\min_{i,j} c_{ij} = c_{21} = 2.$$

У ҳолда $x_{21}=min\ (a_2, b_1)=min\ (11,5)=5$. Демак, $x_{21}=b_1=5$.

Шунинг учун $x_{i1}=0\ (i\neq2)$ бўлади, яъни 1-устун ўчрилади. Натижада янги

$$C'' = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади. Бу матрица учун $b_1{}^{(1)}=5-5=0,\ a_2{}^{(1)}=11-5=6.$

3. C'' матрицанинг энг кичик элементи $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{14} = 3.$

Шунинг учун $x_{14}=min\ (a_1,\ b_4)=min\ (11,7)=7$. Бу ерда 4-устун ўчирилади ва $a_1{}^{(1)}=a_1-x_{14}=11-7=4$ бўлади. Натижада янги

$$C^{III}=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади.

4. C^{III} матрицанинг элементлари орасида энг кичиги топилади

$$\min_{i,j} c_{ij}=c_{21}=4$$

Бу ҳолда,

$$x_{22}=min(a_2^{(1)},b_2)=min(6,9)=6.$$

Натижада 2-қатор ўчирилади ва b_2нинг қиймати

$$b_2^{(1)}=b_2-x_{22}=9-6=3$$

га ўзгаради ва янги C^{IV} матрица-қатор ҳосил бўлади:

$$C^{IV}=(8,5).$$

Шундай йўл билан 5-қадамда $x_{13}=1$ топилиб, 3-устун ўчирилади. осил бўлган X матрица қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$X=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1 & 7\\ 5 & 6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

Бу матрица берилган транспорт масаласининг базис ечимидир.

2-Мисол.

b_i / a_i	80	120	70	130
100	10	7	6	8
150	6	8	13	11
150	8	10	12	5

Бу масаланинг транспорт харажатларидан тузилган матрица

$$C=\begin{pmatrix}10 & 7 & 6 & 8\\ 6 & 8 & 13 & 11\\ 8 & 10 & 12 & 5\end{pmatrix}$$

дан иборат.

1. $min\ c_{ij}=c_{34}=5,$
$c_{34}=min(150,\ 130)=130.$

Демак, 4-устун ўчирилади ва a_4 нинг қиймати $150-130=20$ га ўзгаради. Жадвалда бу ҳолни қуйидагича кўрсатиш мумкин.

b_i / a_i	80	120	70	130
100	10	7	6	8
150	6	8	13	11
20	8	10	12	5 130

2. C матриқанинг 4-устунини ўчириш натижасида ҳосил бўлган

$$C^{I}=\begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 \\ 6 & 8 & 13 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

матриқанинг элементлари ичида энг кичигини $minc_{ij}=c_{21}=6$, унга мос келувчи базис ўзгарувчи

$$x_{21}=min(180,80)=80$$

ни аниқлаймиз. Бу ҳолда 1-устун ўчирилади ва a_2 нинг қиймати 150-$80=70$ га ўзгаради.

a_i \ b_j	0	120	70	0
100	10	7	6	8
70	6 80	8	13	11
20	8	10	12	5 130

3. C^{I} матриқанинг 1-устунини ўчириш натижасида қуйидаги
4.

$$C^{II}=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 13 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

матрицага эга бўламиз. Бу матриқанинг C''_{ij} элементлари орасида энг кичигини топамиз:

$$min\ c''_{ij}=c''_{12}=c''_{13}=6,$$

Демак, $x_{13}=min(100,70)=70$.

Бу ҳолда C матриқанинг 3-устуни ўчирилади ва a_1 нинг қиймати 100-70=30 га ўзгаради.

a_i \ b_j	80	120	70	130
100	10	7	6 70	8
150	6 80	8	13	11
150	8	10	12	5 130

4. Энди, C матриқанинг 1, 3, 4-устунларини ўчириш натижасида $C^{III}=(7,\ 8,\ 10)$ - вектор-устунга эга бўламиз.

Бу векторнинг ҳар бир компонентларини ўсиш тартибида қараб чиқиб, уларга мос келувчи x_{ij} ларни аниқлаймиз:

a_i \ b_j	80	120	70	130
100	10	7 30	6 70	8
150	6 80	8 70	13	11
150	8	10 20	12	5 130

Берилган масаланинг базис ечими:

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 30 & 70 & 0 \\ 80 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 130 \end{bmatrix}$$

матрицадан иборат бўлади.

3-§. Транспорт масаласининг оптимал ечимини топиш учун потенциаллар усули

Потенциаллар усули транспорт масаласини ечиш учун қўлланган биринчи аниқ усул бўлиб, у 1949 йилда рус олимлари Л.В.Канторович ва М.К.Гавурин томонидан яратилган. Бу усулнинг асосий ғояси транспорт масаласига мослаштирилган симплекс усулдан иборат бўлиб, биринчи марта чизиқли дастурлаш масалаларини ечиш усулларига боғлиқ бўлмаган ҳолда тасвирлашган. Кейинроқ, худди шунга ўхшаш усул Америка олими Данциг томонидан яратилди. Данцинг усули чизиқли дастурлашнинг асосий ғояларига асосланган бўлиб, Америка адабиётида бу усул модифицирланган тақсимот усули деб юритилади.

Потенциаллар усули ёрдами билан бошланғич базис режадан бошлаб, оптимал ечимга яқинроқ бўлган янги базис режаларга ўтиб бориб, чекли сондаги итерациядан сўнг масаланинг оптимал ечими топилади. Ҳар бир итерацияда топилган базис режа оптимал режа эканини текшириш учун ҳар бир ишлаб чиқарувчи (A_i) ва истеъмол қилувчи (B_j) пунктга унинг потенциали деб аталувчи u_i ва v_j миқдор мос қўйилади. Бу потенциаллар шундай танланадики, бунда ўзаро боғланган A_i ва B_j пунктларга мос келувчи потенциаллар йиғиндиси c_{ij} га (A_i дан B_j га бирлик маҳсулотни ташиш учун сарф қилинадиган транспорт харажатига) тенг бўлиши керак.

5-теорема. Агар $X^*=(x_{ij}^*)$ режа транспорт масаласининг оптимал режаси бўлса, у ҳолда унга

$$u_i^*+v_j^*=c_{ij} \quad (x_{ij}^*>0), \qquad (5.13)$$

$$u_i^*+v_j^*\leq c_{ij} \quad (x_{ij}^*=0) \qquad (5.14)$$

шартларни қаноатлантирувчи $n+m$ та u_i^* ва v_j^* потенциаллар мос келиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Етарлилиги. Фараз қилайлик, $X^*=(x_{ij}^*)$ режа учун (5.13), (5.14) шартлар ўринли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $X`=(x_{ij}`)$ режа учун

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_{ij} \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i^*+v_j^*)x'_{ij} = \sum_{i=1}^{m} u_i^*\sum_{j=1}^{n} x'_{ij}+\sum_{j=1}^{n} v_j^*\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j^* = \sum_{i=1}^{m} u_i^*\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* + \sum_{j=1}^{n} v_j^*\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i^*+v_j^*)x_{ij}^* = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}^*$$

Демак, X* режадаги чизиқли функциянинг қиймати унинг ихтиёрий $X`$ режадаги қийматидан кичик бўляпти. Шунинг учун X^* режа оптимал бўлади.

Зарурлиги. Берилган

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} \end{cases} \qquad (5.15)$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n, \end{cases} \qquad (5.16)$$

$$x_{ij}\geq 0, \qquad (5.17)$$

$$Y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \longrightarrow \min \qquad (5.18)$$

транспорт масаласига иккиланган масалани ҳосил қилиш учун (5.15) системадаги ҳар бир тенгламага потенциаллар деб аталувчи $u_1, u_2,$ $, u_m$ сонларни, (5.16) системадаги ҳар бир тенгламага эса $v_1, v_2,$ $, v_n$ сонларни мос қўямиз. У ҳолда, иккиланган масала қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u_i+v_j\leq c_{ij} \qquad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n) \qquad (5.19)$$

$$f=\sum_{j=1}^{n} b_j v_j+\sum_{i=1}^{m} a_i u_i \longrightarrow \max. \qquad (5.20)$$

Шартга кўра $X^*=(x_{ij}^*)$ режа (5.15)-(5.18) масаланинг оптимал режаси бўлганлиги сабабли, иккиланиш назариясига доир асосий теоремага асосан иккиланган масала ҳам оптимал

$$z^*=(\bar{u}^*,\bar{v}^*),$$

$$Y_{min}=f_{max}$$

ечимга эга бўлади, яъни

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^*,$$

$$x_{ij}^* \geq 0.$$

Иккиланиш назариясидан маълумки, агар иккиланган масаланинг оптимал ечимидаги i-компонента мусбат бўлса, берилган масаланинг оптимал ечими i- шартни тенгликка айлантиради ва аксинча, берилган масаланинг оптимал ечимидаги i-компонента нолга тенг бўлса, иккиланган масаланинг i- шарти тенгсизликдан иборат бўлади.

Демак,

$$\begin{cases} u_i^* + v_j^* = c_{ij}, x_{ij}^* > 0, \\ u_i^* + v_j^* \leq c_{ij}, x_{ij}^* = 0. \end{cases} \qquad (5.21)$$

(5.19) га асосан бошланғич базис режа оптимал ечим бўлиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

а) ҳар бир тўлдирилган (маҳсулот тақсимланган) катакча учун

$$u_i + v_j = c_{ij} \qquad (5.22)$$

б) ҳар бир бўш (маҳсулотлар тақсимланмаган) катакча учун

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad (5.23)$$

Агар камида битта бўш катакча учун (5.23) шарт бажарилмаса, топилган базис режа оптимал ечим бўлмайди ва

$$\max_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \max_{\Delta_{ij}>0} (u_i + v_j - c_{ij}) = \Delta_{kl}, \quad \left[\Delta_{ij} = (u_i + v_j - c_{ij})\right]$$

шартни қаноатлантирувчи (k,l) катакчани тўлдирилган катакчага айлантириш керак бўлади.

Шундай қилиб, потенциаллар усулининг алгоритми қуйидагидан иборат:

1. Юқоридан кўрилган усулларнинг биридан фойдаланиб, бошланғич базис режа топилади.

2. Топилган режани оптимал режа эканлигини текшириш учун потенциаллар системаси тузилади. Бунинг учун (5.19) формуладан фойдаланиб, ҳар бир тўлдирилган катакча учун (5.22) кўринишда потенциал тенгламалар тузилади. Маълумки, транспорт масаласининг режасидаги 0 дан фарқли бўлган ўзгарувчилар сони $n+m-1$ та. Демак, потенциал тенгламалар системаси $n+m$ та номаълумли $n+m-1$ тенгламалар системасидан иборат бўлади. Бу системада номаълумлар сони тенгламалар сонидан ортиқ бўлгани сабабли потенциалларнинг сон қийматини топиш учун улардан ихтиёрий биттасига аниқ бир қиймат, масалан нол қиймат бериб, қолганларини бирин-кетин топиш мумкин.

Фараз қилайлик, u_i маълум бўлсин, у ҳолда (5.22) дан v_j топилади:

$$v_j=c_{ij}-u_i$$

Агар v_j маълум бўлса, у ҳолда u_i қуйидагича топилади:

$$u_i=c_{ij}-v_j$$

Барча потенциалларнинг сон қийматини аниқлаб бўлгач, ҳамма бўш катакчалар учун

$$\Delta_{ij}=(u_i+v_j-c_{ij})$$

ҳисобланади. Агарда барча i ва j лар учун

$$\Delta_{ij}\leq 0,\ (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$$

ўринли бўлса, топилган бошланғич базис режа оптимал режа бўлади.

3. Агар i ва j ларнинг камида бир қиймати учун $\Delta_{ij}>0$ бўлса, бошланғич базис режа алмаштирилади. Бунинг учун

$$\max_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij}=\Delta_{lk}$$

шартни қаноатлантирувчи (l,k) катакча тўлдирилади (x_{lk} номаълум базисга киритилади). $x_{lk}=\theta$ деб фараз қилиб (l,k) катакчага θ киритилади. Сўнгра соат стрелкаси бўйича (l,k) катакчадан бошлаб ҳаракат қилиб, тўлдирилган катакчаларга тартиб билан $(-)$ ва $(+)$ ишоралари қўйилиб борилади. Натижада ёпиқ K контур ҳосил бўлади

$$K=K^{-1}\cup K^{+},$$

бу ерда K^{-1} ,K^{+} -(-) ва (+) ишорали катакчаларни ўз ичига олувчи ярим контурлар.

Қуйидаги формула орқали θ нинг сон қиймати топилади.

$$\theta=\min_{x_{ij}\in K^-} x_{ij}=x_{pq} \qquad (5.24)$$

4. Янги базис режа ҳисобланади:

$$\left.\begin{aligned}
&x'_{lk}=\theta,\\
&x'_{pq}=0,\\
&x'_{ij}=x_{ij}, агар \quad x_{ij}\notin K,\\
&x'_{ij}=x_{ij}+\theta, агар \quad x_{ij}\in K^{+},\\
&x'_{ij}=x_{ij}-\theta, агар \quad x_{ij}\in K^{-}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.25)$$

Янги базис режадаги тўлдирилган катакчалар сони $n+m-1$ та бўлганлиги учун (5.24) шартни қаноатлантирувчи катакчалар бирдан ортиқ бўлса, улардан биттасини бўш катакчага айлантириб, қолган катакчалардаги тақсимотни 0 га тенг деб қабул қилинади. Топилган янги базис режа учун яна қайтадан потенциаллар системаси топилади ва янги режанинг оптимал режа бўлишлик шарти текширилади. Агар янги базис режа оптимал режа бўлмаса, у ҳолда яна қайтадан 3, 4 пунктларда қилинган ишлар такрорланади. Жараён оптимал ечим топилгунча, яъни барча бўш катакчалар учун

$$\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}\leq 0$$
шарт бажарилгунча такрорланади.

Мисол. Берилган транспорт масаласини потенциаллар усули билан ечинг.

1-жадвал.

b_i / a_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 100-θ	7 $\boxed{8}$	4 $\boxed{9}$	1 θ $\boxed{11}$	4 $\boxed{5}$	0
250	2 100+θ	7 150-θ	10 $\boxed{-5}$	6 $\boxed{-2}$	11 $\boxed{-12}$	-8
200	8 $\boxed{-8}$	5 50+θ	3 100	2 50-θ	2 $\boxed{-3}$	-10
300	11 $\boxed{3}$	8 $\boxed{11}$	12 $\boxed{5}$	16 50	13 250	4
v_i	10	15	13	12	9	θ=50

1. Бошланғич базис режани «шимолий-ғарб бурчак» усули билан топамиз.

2. Ҳар бир тўлдирилган катакча учун потенциал тенглама тузиб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$u_1+v_1=10, \quad u_3+v_3=3,$$
$$u_2+v_1=2, \quad u_3+v_4=2,$$
$$u_2+v_2=7, \quad u_4+v_4=16,$$
$$u_3+v_2=5, \quad u_4+v_5=15.$$

Бу системадаги номаълумлар сони тенгламалар сонидан биттага кўп. Шунинг учун ихтиёрий бир потенциални (масалан, u_1 ни) 0 га тенг деб қабул қилиб, қолганларини бирин-кетин топиш мумкин.

$u=(0, -8, -10, 4)$,

$v=(10, 15, 13, 12, 9)$.

3. Ҳар бир бўш катакча учун
$$\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$$
ни ҳисоблаб уни бўш катакчанинг пастки ўнг бурчагига ёзамиз:
$$\max_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij}=\Delta_{42}=11$$
бўлганлиги сабабли (1,4) катакчага (ёки (4,2) катакчага) θ сон киритамиз ва (1,1), (2,1), (2,2),(3,2), (3,4) катакчаларни ўз ичига олувчи ёпиқ К контурини тузамиз.

$$K=K^{-}\cup K^{+},$$

бу ерда (1,1), (2,2), (3,4)$\in K^{-}$ ва (2,1), (3,2)$\in K^{+}$

4. θ нинг сон қийматини топамиз.

$$\theta=\min_{x_{ij}\in k^{-}} x_{ij}=x_{34}=50.$$

Янги базис режани аниқлаймиз ва уларни жадвалга жойлаштирамиз.

2-жадвал.

b_i / a_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 50-θ	7 8	4 9	1 50+θ	4 -6	0
250	2 150+θ	7 100-θ	10 -10	6 -13	11 -21	-8
200	8 -8	5 100	3 100	2 -11	2 -14	-10
300	11 14	8 θ 22	12	16 50-θ	13 250	15
v_i	10	15	13	1	-2	θ=50

Юқоридаги усул билан потенциаллар системасини тузиб ва уни ечиб $u=(0, -8, -10, 15)$, $v=(10, 15, 13, 1, -2)$ эканини топамиз. Барча бўш катаклар учун $\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$ ни ҳисоблаб чиқамиз.

2-жадвалдан кўринадики, $\max \Delta_{ij}=\Delta_{42}=22$.

Шунинг учун (4.2) катакча θ ни киритиб, жадвалда кўрсатилган ёпиқ К контурни тузамиз ва $\theta=\min_{x_{ij}\in K} x_{ij}=x_{44}=50$ эканини аниқлаймиз.

Сўнгра (5.23) формула орқали янги базис режани топиб жадвалга жойлаштирамиз ва юқоридаги ишларни такрорлаймиз.

3-жадвал.

b_i / a_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 0-0	7 8	4 9	1 100	4 0 16	0
250	2 200+θ	7 50-θ	10 -5	6 -13	11 1	-8
200	8 -8	5 100	3 100	2 -11	2 8	-10
300	11	8 50+θ	12	16	13 250-θ	-7
v_i	10	15	13	1	20	0=0

4-жадвал.

b_i / a_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 $\boxed{-16}$	7 $\boxed{-8}$	4. $\boxed{-7}$	1 100	4 0	0
250	2 200	7 50	10 $\boxed{-5}$	6 $\boxed{3}$	11 $\boxed{1}$	8
200	8 $\boxed{-8}$	5 $100-\theta$	3 100	2 $\boxed{5}$	2 θ $\boxed{8}$	6
300	11 $\boxed{-8}$	8 $50+\theta$	12 $\boxed{-6}$	16 $\boxed{-6}$	13 $250-\theta$	9
v_i	-6	-1	-3	1	4	$\theta=100$

5-жадвал.

b_i / a_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 $\boxed{-16}$	7 $\boxed{-8}$	4 $\boxed{1}$	1 $100-\theta$	4 $0+\theta$	0
250	2 200	7 $50-\theta$	10 $\boxed{3}$	6 θ $\boxed{3}$	11 $\boxed{1}$	8
200	8 $\boxed{-16}$	5 $\boxed{-8}$	3 100	2 $\boxed{-3}$	2 100	-2
300	11 $\boxed{-8}$	8 $150+\theta$	12 θ 2	16 $\boxed{-6}$	13 $150-\theta$	9
v_i	-6	-1	5	1	4	$\theta=50$

6-жадвал.

a_i \ b_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 $\boxed{-13}$	7 $\boxed{-8}$	4 $\boxed{1}$	1 50	4 50	0
250	2 200	7 $\boxed{-11}$	10 $\boxed{0}$	6 50	11 $\boxed{-2}$	5
200	8 $\boxed{-13}$	5 $\boxed{-8}$	3 $100-\theta$	2 $\boxed{-3}$	2 $100+\theta$	-2
300	11 $\boxed{-5}$	8 100	12 θ $\boxed{2}$	16 $\boxed{-6}$	13 $100-\theta$	9
v_i	-3	-1	5	1	4	$\theta=100$

7-жадвал.

a_i \ b_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 $\boxed{-13}$	7 $\boxed{-6}$	4 θ $\boxed{1}$	1 50	4 $50-\theta$	0
250	2 200	7 $\boxed{-1}$	10 $\boxed{0}$	6 50	11 $\boxed{-2}$	5
200	8 $\boxed{-11}$	5 $\boxed{-8}$	3 $0-\theta$	2 $\boxed{-3}$	2 $200+\theta$	-2
300	11 $\boxed{-7}$	8 200	12 100	16 $\boxed{-8}$	13 $\boxed{-2}$	7
v_i	-3	1	5	1	4	$\theta=0$

8-жадвал.

a_i \ B_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 $\boxed{-13}$	7 $\boxed{-7}$	4 0	1 50	4 50	0
250	2 200	7 $\boxed{-2}$	10 $\boxed{-1}$	6 50	11 $\boxed{-2}$	5
200	8 $\boxed{-11}$	5 $\boxed{-7}$	3 $\boxed{-1}$	2 $\boxed{-3}$	2 200	-2
300	11 $\boxed{-6}$	8 200	12 100	16 $\boxed{-7}$	13 $\boxed{-1}$	8
v_i	-3	0	4	1	4	

8-жадвалда келтирилган режа оптимал ечим бўлади, чунки барча бўш катакчалар учун

$$\Delta_{ij}=(u_i+v_j-c_{ij})\leq 0.$$

Шундай қилиб, саккизинчи циклда қуйидаги оптимал ечимга эга бўлдик:

$$x_{14}=50,\quad x_{15}=50,$$
$$x_{21}=200,\quad x_{24}=50,$$
$$x_{35}=200,\quad x_{42}=200,\quad x_{43}=100,$$
$$y_{min}=50+4\cdot 50+2\cdot 200+6\cdot 50+2\cdot 200+8\cdot 200+12\cdot 100=4150.$$

4-§. Хос транспорт масаласи ва уни тўғрилашнинг ε - усули

Транспорт масаласининг базис режасидаги мусбат компонентлар сони $k<n+m-1$ бўлса, бу режа хос режа бўлади. Бундай режани тўғрилаш учун унга $n+m-1-k$ та нол элемент киритиш мумкин. Киритилган нол элементларга мос векторлар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар бўлиши керак. Бунга эришиш учун қуйидаги ε усулни қўлланиш мумкин.

ε усул. Шимолий ғарб бурчак усули билан бошланғич базис режани топишни эслаймиз. Агар 1-қадамда

$$x_{21}=b_1-a_1=a_2$$

бўлса, x_{31} ҳам, x_{22} ҳам мусбат сон бўла олмайди. Ҳар вақт бундай вазият рўй берганда базис режадаги базис ўзгарувчилар сони камая боради. Бундай ҳол одатда, транспорт масаласидаги бир неча a_i нинг йиғиндиси (ҳаммаси эмас) бир неча b_j нинг йиғиндисига тенг бўлганда бажарилиши мумкин. Ана шундай ҳол ўринли бўлган транспорт масаласини хос транспорт масаласи деб айтамиз.

Хос ҳолатининг олдини олиш учун a_i ва b_j лардан тузилган хусусий йиғиндиларнинг ўзаро тенг бўлмаслигига эришиш, бунинг учун эса a_i ва b_j ларнинг қийматининг бирор кичик сонга ўзгартириш керак. Масалан, етарлича кичик $\varepsilon>0$ сонни олиб, a_i ва b_j ларни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\overline{a_i}=a_i+\varepsilon,\quad (i=\overline{1,m})$$
$$\overline{b_j}=b_j,\quad (i=\overline{1,n-1})$$
$$\overline{b_n}=b_n+m\varepsilon,\quad \varepsilon>0.$$

ε етарлича кичик сон бўлганлиги сабабли ҳосил бўлган масаланинг X(ε) оптимал режаси ε=0 да берилган масаланинг оптимал ечими бўлади.

ε усулни қуйидаги масалага қўллаймиз:

b_i / a_i	1	3	3	2	5
3	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
4	c_{31}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}
7	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}

транспорт масаласи учун «шимолий-ғарб бурчак» усули билан базис режа тузсак, у хос режа бўлади, маҳсулот тақсимланган катаклар сони 6 та (масала хосмас бўлиши учун улар 7 та бўлиши керак) яъни

b_i / a_i	1	3	3	2	5
3	c_{11} 1	c_{12} 2	c_{13}	c_{14}	c_{15}
4	c_{31}	c_{22} 1	c_{23} 3	c_{24}	c_{25}
7	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34} 2	c_{35} 5

ε усулни қўлланилганда эса ушбу жадвал ҳосил бўлади:

b_i / a_i	1	3	3	2	$5+3\varepsilon$
$3+\varepsilon$	c_{11} 1	c_{12} $2+\varepsilon$	c_{13} 0	c_{14}	c_{15}
$4+\varepsilon$	c_{31}	c_{22} $1-\varepsilon$	c_{23} 3	c_{24} 2ε	c_{25}
$7+\varepsilon$	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34} $2-2\varepsilon$	c_{35} $5+3\varepsilon$

Топилган базис режада $x_{24}=2\varepsilon>0$. ε усул 0 қийматли икки ўзгарувчидан қайси бирини базисга киритиш кераклигини кўрсатиб беради. Агар ε усул қўлланилмаганда эди x_{24} ва x_{33} ўзгарувчилардан қайси бирини базисга киритиш кераклигини танлаш керак бўларди. ε усул ана шундай танлаш муаммосини ҳал қилади.

5-§. Очиқ моделли транспорт масаласи

Баъзи транспорт масалаларида ишлаб чиқарилган маҳсулотлар йиғиндиси $\sum_i a_i$ уларга бўлган талаблар йиғиндиси

$\sum_j b_j$ дан кичик (катта) бўлиши мумкин. Бундай масалалар очиқ моделли транспорт масаласи дейилади.

Агар $\sum_i a_i < \sum_j b_j$ бўлса, маҳсулотга бўлган ҳамма талабни қаноатлантириб бўлмайди. Лекин бу ҳолда ҳам маҳсулотларни кам харажат сарф қилиб тақсимлаш режасини аниқлаш мумкин. Бунинг учун масалага ишлаб чиқарган маҳсулоти

$$a_{m+1} = \sum_j b_j - \sum_i a_i > 0$$

бирликни ташкил қилувчи сохта m+1 - пункт киритилади. Бу пунктдан барча истеъмол қилувчи пунктларга маҳсулотни ташиш учун сарф қилинадиган транспорт харажатлари $c_{m+1,j}=0$, $j=\overline{1,n}$ деб қабул қилинади.

Агар $\sum_i a_i > \sum_j b_j$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда n+1 сохта истеъмол қилувчи пункт киритилиб, бу пунктга маҳсулотни ташиш учун сарф қилинадиган транспорт харажатлари $c_{i,n+1}=0$, $i=\overline{1,m}$ деб қабул қилинади. Бу пунктнинг масулотга бўлган талаби

$$b_{n+1} = \sum_i a_i - \sum_j b_j > 0 \text{ бўлади.}$$

Мисол. Қуйидаги очиқ моделли транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_i	3	3	3	2	2
4	3	2	1	2	3
5	5	4	3	1	1
7	0	2	3	4	5

Бу масалада $\sum_i a_i = 16 > \sum_j b_j = 13$. Шунинг учун талаби $b_6 = 16-13=3$

бўлган сохта истеъмол қилувчи пункт киритиб, масалани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

a_i \ b_i	3	3	3	2	2	3
4	3	2	1	2	3	0
5	5	4	3	1	1	0
7	0	2	3	4	5	0

Бу масалани потенциал усули билан ечиб, 7-циклда оптимал ечимни топамиз:

a_i \ b_i	3	3	3	2	2	3
4	3	2 1	1 3	2	3	0
5	5	4	3	1 2	1 2	0 1
7	0 3	2 2	3	4	5	0 2

яъни:

$$x_{12}=1,\ x_{13}=3,$$
$$x_{24}=2,\ x_{25}=2,\ x_{26}=1$$
$$x_{31}=3,\ x_{32}=2,\ x_{36}=2,$$
$$Y_{min}=1\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 2+1\cdot 2+1\cdot 0+0\cdot 3+2\cdot 2+2\cdot 0=13.$$

Демак, ишлаб чиқарилган маҳсулотларни энг кам ҳаражат сарф қилиб тақсимлаш учун 2-ишлаб чиқарувчи пунктда 1 бирлик ва 3-ишлаб чиқарувчи пунктда 2 бирлик маҳсулот ортиб қолиши керак экан.

6-§. Дифференциал ренталар усули (Брудно усули)

Рус олими А.Л.Лурье 1959 йилда транспорт масаласини ечиш учун оптимал ечимга шартли оптимал ечимлар ёрдами билан яқинлашиш усулини яратди. А.Л.Брудно бу усулни модифицирлаб (ўзгартириб), уни **дифференциал ренталар усули** деб атайди. Дифференциал ренталар усули ва шартли оптимал ечимлар билан яқинлашиш усулининг ғояси бир хил бўлишига қарамай, улар бир-биридан фарқ қилади. Улар орасидаги асосий фарқ шундан иборатки, дифференциал ренталар усули электрон ҳисоблаш машинасида қўлланиш учун қулай бўлиб, шартли оптимал режалар ёрдами билан яқинлашиш усулига нисбатан икки марта кам вақт талаб қилади.

Маълумки, транспорт масаласини потенциаллар усули билан ечишда энг аввал ишлаб чиқарилган ҳамма маҳсулот тўла тақсимланади, яъни базис режа топилади. Сўнгра топилган базис режа оптимал режага кетма-кет яқинлаштирилиб борилади. Дифференциал ренталар усулида эса дастлаб маҳсулотнинг бир қисми тақсимлана-
ди, лекин тақсимланган маҳсулот оптимал режанинг қисмини ташкил қилади. Ечиш жараёни маҳсулот тўла тақсимлангунча даваом эттирилади.

Дифференциал ренталар усулининг алгоритмини кўришдан аввал баъзи қўшимча тушунчалар билан танищамиз.

Фараз қилайлик, $X=(x_{ij})$ базис ечимга шундай икки ўлчовли (nxm) жадвал мос келсинки, унда ҳар бир x_{ij} базис ўзгарувчи жойлашган катакчага белги (квадратча) қўйилган бўлсин.

1-таъриф. Агар белги ўзининг устунида (қаторида) ягона бўлса, у тартибланувчи деб аталади. Берилган жадвалдаги белгиларнинг ҳар бирини қуйидаги алгоритм ёрдамида тартиблаш мумкин бўлса, бу белгилар системаси тартибланувчи деб аталади.

Белгиларни тартиблаш учун транспорт жадвалининг биринчи устунидан бошлаб тартиб билан барча устунлар қараб чиқилади ва белгиларга 1 номердан бошлаб тартиб номерлар қўйилади.

Қаралаётган устунда (қаторда) ягона номерланмаган белги қатнашса унга навбатдаги тартиб номери қўйилади, акс ҳолда бу устундаги (қатордаги) белгилар вақтинча номерланмай ўтказиб юборилади. Белгилар устунлар бўйича номерланиб бўлмаган ҳолда 1-қатордан бошлаб номерланиш татиби давом эттирилади. Шундай қилиб, белгиларнинг ҳаммаси номерлангунча кетма-кет устун ва қатор бўйлаб белгилар қараб чиқилади.

Лемма. Икки ўлчовли (nxm) жадвалдаги белгилар системаси тартибланувчи бўлиши учун бу жадвалнинг ихтиёрий $(n'xm')$ қисмидаги белгилар сони $n'+m'-1$ та бўлиши зарур ва етарлидир.

Зарурлиги. Фараз қилайлик, белгилар системаси тартибланувчи бўлсин. У ҳолда берилган (nxm) жадвалнинг ихтиёрий $(n'xm')$ қисми камида битта номерланувчи белгини ўз ичига олишини исбот қилиш мумкин. $(n'xm')$ жадвалда битта ҳам номерланувчи белги бўлмасин дейлик. У ҳолда бу жадвалнинг ҳар бир устун ва қаторида камида икитадан белги жойлашган бўлади, яъни $(n'xm')$ жадвалдаги белгилар системаси ҳам тартибланувчи бўлмайди. Демак, бундай зидликда (nxm) жадвалдаги белгилар системаси ҳам тартибланувчи бўлмайди, чунки тартибланувчи белгилар системасини ўз ичига олган жадвалнинг ихтиёрий қисмидаги белгилар системаси ҳам тартибланувчи бўлиши керак.

Етарлилиги. Фараз қилайлик, (nxm) жадвалнинг ихтиёрий $(n'xm')$ қисми камида битта номерланувчи белгини ўз ичига олсин. Бу ҳолда $(n'xm')$ жадвалдаги ҳамма белгиларни ва демак, (nxm) жадвалдаги белгиларни бирин-кетин номерлаш мумкин бўлади.

Транспорт масаласини дифференциал ренталар усули билан ечиш учун масаланинг берилганларини ушбу жадвалга жойлаштирамиз

b_i / a_i	b_1	b_2		b_n
a_1	c_{11} 1 x_{11}	c_{12}		c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22} 2 x_{22}		c_{2n}
a_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn} n x_{mn}

Сўнгра қуйидаги ишларни амалга оширамиз.

1. Ҳар бир j, $(j=\overline{1,n})$ учун

$$\min_i c_{ij}=c_{kj} \qquad (5.24)$$

топилади ва (k,j) катакчанинг юқори ўнг бурчагига белги (квадратча) киритилади. Агарда j-устунда (5.24) шартни қаноатлантирувчи c_{ij} лар биттадан кўп бўлса, у ҳолда улардан фақат биттасига мос келувчи катакчага белги киритилади.

2. Юқоридаги алгоритм бўйича белгилар номерланади.

3. Биринчи номерли белгидан бошлаб, тартиб билан ҳар бир белги жойлашган (k,l) катакчага маҳсулот тақсимланади

$$X_{kl}=min\ (a_k,b_l)$$

Агар $b_l<a_k$ бўлса, $x_{kl}=b_l$ бўлади ва a_k нинг қиймати a_k-b_l га ўзгаради. Агарда $a_k<b_l$ бўлса, $x_{kl}=a_k$ бўлиб, b_l нинг қиймати b_l-a_k га ўзгаради.

4. Ҳар бир j-устун учун

$$b_j^t=\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^{(t)}, \qquad (5.27)$$

яъни j-истеъмол қилувчи пунктга келтирилган маҳсулотлар йиғиндиси топилади, бу ерда t-циклнинг номери.

5. Устун характеристикаси $(y.x.)$ топилади. Агар j-устун учун

$$b_j^t<b_j$$

бўлса, яъни j-пунктнинг маҳсулотга бўлган талаби қондирилмаган бўлса, у ҳолда жадвалдаги устун характеристикаси $(y.x.)$ ни ифодаловчи қаторда j-устун учун (-) ишора қўйилади.

6. Қатор характеристикаси (қ.х) топилади бунинг учун белгиларни тескари тартибда бир марта қараб чиқиб, минус ишорали устундаги белги жойлашган қаторга минус ишора қўйилади.

Агар белги минус ишорали i-қаторда жойлашган бўлиб, бу белги жойлашган (i,j) катакчадаги $x_{ij}>0$ бўлса, j-устунга ҳам минус ишора қўйилади. Ҳамма белгиларни бир марта қараб чиққандан сўнг қолган қатор ва устунларга плюс ишора қўйилади.

7. Ҳар бир минус ишорали j-устун учун дифференциал рента

$$\Delta_j=\min_i c_{ij}^{+}-c_{ij}^{0}$$

топилади, бу ерда c_{ij}^{+}- плюс ишорали қатордаги транспорт харажатларини ва c_{ij}^{0} белгиси бор катакчадаги транспорт харажатини кўрсатади.

8. $\min\limits_j \Delta_j=\Delta_k$ шартни қаноатлантирувчи k-устундаги минимал харажат жойлашган (l,k) катакчага қўшимча белги киритилади.

Сўнгра янги циклга ўтилади. Янги циклга ўтиш учун яна жадвал тузилади. Янги жадвалга a_i, b_j лар ва мусбат ишорали қатордаги c_{ij} лар олдинги жадвалдан ўзгармасдан кўчирилди. Минус ишорали қатордаги транспорт харажатлари $(\bar{c}_{ij})$ га Δ_k қўшилади, яъни

$$(\bar{c}_{ij})' = \bar{c}_{ij} + \Delta_k .$$

Янги жадвалга белгилар номерсиз кўчирилади. Агар бирорта j-устунда иккита белги жойлашган бўлиб улардан бири мусбат қаторда, иккинчиси эса минус ишорали қаторда ётса, минус ишорали белги янги жадвалга кўчирилмайди.

Янги цикл белгиларни номерлашдан бошланади ва юқоридаги 2-8 пунктларда қилинган ишлар яна қайтадан такрорланади. Бундай такрорланиш масаланинг оптимал ечими топилгунча, яъни барча j лар учун $b_j = b'_j$ тенглик бажарилгунча давом этади. Сўнгра масаланинг оптимал ечими ёзилади.

Фараз қилайлик,

$$x^*_{11},\ x^*_{21},\ \ldots,\ x^*_{mn}$$

масаланинг оптимал ечими бўлсин, у ҳолда бу ечимдаги умумий транспорт харажатлари қуйидагига тенг бўлади:

$$Y_{min}=c_{11}x^*_{11}+c_{21}x^*_{21}+\ldots+c_{mn}x^*_{mn}$$

Мисол. Дифференциал renталар усули билан қуйидаги масалани ечамиз.

I.

b_j / a_i	200	200	100	100	250	Қ.Х.
100	10	7	4	1 $\boxed{4}$ 100	4	+
250	2 $\boxed{1}$ 200	7	10	6	11	+
200	8	5 $\boxed{2}$ 200	3 $\boxed{3}$ 0	2	2 $\boxed{5}$ 0	-
300	11	8	12	16	13	+
b^1_j	200	200	0	100	0	
У.Х.	+	-	-	+	-	
Δ_j		2	1		2	$\Delta_{min}=1$

II.

a_i \ b_i	200	200	100	100	250	қ.Х.
100	10	7	4 $\boxed{5}$ 0	1 $\boxed{3}$ 100	4	-
250	2 $\boxed{1}$ 200	7 3	10	6	11	+
200	9	6 $\boxed{2}$ 200	4 $\boxed{6}$ 0	3	3 $\boxed{4}$ 0	-
300	11	8	12	16	13	+
b^2_j	200	200	0	100	0	
У.Х.	+	-	-	-	-	
Δ_j		1	6	5	8	$\Delta_{min}=1$

III.

a_i \ b_i	200	200	100	100	250	қ.Х.
100	11	8	5 $\boxed{4}$ 0	2 $\boxed{2}$ 100	5	
250	2 $\boxed{1}$ 200	7 $\boxed{5}$ 50	10	6	11	
200	10	7 $\boxed{6}$ 0	5 $\boxed{7}$ 0	4	4 $\boxed{3}$ 200	-
300	11	8	12	16	13	+
b^3_j	200	50	0	100	200	
У.Х.	-	-	-	-	-	
Δ_j	9	1	7	14	9	$\Delta_{min}=1$

IV.

a_i \ b_i	200	200	100	100	250	Қ.X.
100	12	9	6 4 0	3 2 10 0	6	-
250	3 1 200	8 5 0	11	7	12	+
200	1	8	6 6 0	5	5 3 200	-
300	11	8 4 200	12	16	13	+
b^4_j	200	200	0	100	200	
У.X.	+	+	-	-	-	
Δ_j			5	4	7	$\Delta_{min}=4$

V.

a_i \ b_i	200	200	100	100	250	Қ.X.
100	16	13	10 6 100	7 7 0	10	-
250	3 1 200	8 5 0	11	7 8 50	12	-
200	15	12	10 3 0	9	9 2 200	-
300	11	8 4 200	12	16	13	+
b^5_j	200	200	100	50	200	
У.X.	-	+	-	-	-	
Δ_j	8		2	9	4	$\Delta_{min}=2$

VI.

b_i / a_i	200	200	100	100	250	қ.Х.
100	18	15	12 $\boxed{7}$ 0	9 $\boxed{8}$ 50	12	+
250	5 $\boxed{1}$ 200	10	13	9 $\boxed{4}$ 50	14	+
200	17	14	12 $\boxed{5}$ 0	11	11 $\boxed{3}$ 200	-
300	11	8 $\boxed{2}$ 200	12 $\boxed{6}$ 100	16	13	+
b^6_j	200	200	100	100	200	
У.Х.	+	+	+	+	-	
Δ_j					1	$\Delta_{min}=1$

VII.

b_i / a_i	200	200	100	100	250	қ.Х.
100	18	15	12 $\boxed{6}$ 0	9 $\boxed{7}$ 50	12 $\boxed{8}$ 50	
250	5 $\boxed{1}$ 200	10	13	9 $\boxed{3}$ 50	14	
200	18	15	13	12	12 $\boxed{4}$ 200	
300	11	8 $\boxed{2}$ 200	12 $\boxed{5}$ 100	16	13	
b^7_j	200	200	100	100	250	
У.Х.						
Δ_j						

Шундай қилиб, VII циклда оптимал ечим топилди. Масаланинг жавобини ёзиш учун топилган оптимал режани дастлабки жадвалга жойлаштирамиз:

10	7	4 0	1 50	4 50
2 200	7	10	6 50	11
8	5	3	2	2 200
11	8 200	12 100	16	13

Оптимал режа

$x_{14}=50,\ x_{15}=50,\ x_{15}=0$

$x_{21}=200,\ x_{24}=50,$

$x_{35}=200,$

$x_{42}=200,\ x_{43}=100,$

$Y_{min}=1\cdot 50+4\cdot 50+6\cdot 50+2\cdot 200+2\cdot 200+8\cdot 200+12\cdot 100=4150$

Таянч сўз ва иборалар

Транспорт масаласи, ёпиқ моделли транспорт масаласи, "банд катакчалар", "бўш катакчалар", "шимолий ғарб бурчак" усули, "минимал харажатлар" усули, харажатлар матрицаси, потенциаллар, потенциал тенглама, ёпиқ контур, хос транспорт масаласи, хос базис ечим, циклланиш, ε-усул, очиқ моделли транспорт масаласи, дифференциал ренталар усули, шартли оптимал ечим, қатор ва устун характеристикалари, тартибланувчи белгилар.

Назорат саволлари

1. Транспорт масаласининг математик модели қандай ва у қандай формаларда ёзилади?
2. Ёпиқ ва очиқ моделли транспорт масалаларига изоҳ беринг.
3. Транспорт масаласи ечими мавжуд бўлишининг зарур ва етарлилик шарти нимадан иборат?
4. Транспорт масаласи шартларидан тузилган матрицанинг ранги нимага тенг?
5. Транспорт масаласи ечимидаги 0 дан фарқли ўзгарувчилар сони нечта?
6. Қайси ҳолда транспорт масаласининг ечими бутун сонли бўлади?
7. "Шимолий-ғарб бурчак" усулининг ғояси қандай?
8. "Минимал харажатлар" усулининг ғояси қандай?
9. Потенциаллар нима ва у қандай маънога эга?
10. Потенциал тенглама нима ва у қандай ёзилади?
11. Транспорт масаласи базис ечимининг оптималлик шарти нимадан иборат?
12. Брудно усули қандай усул?
13. Хос транспорт масаласи қандай?
14. Хос базис ечим деб қандай ечимга айтилади?
15. Циклланиш нима ва у қандай ҳолларда рўй бериши мумкин?
16. ε-усулнинг маъноси нимадан иборат?
17. Очиқ моделли транспорт масаласини қандай йўл билан ёпиқ моделли масалага айлантириш мумкин?
18. Сохта таъминотчининг маҳсулот захираси нимага тенг бўлади?
19. Сохта истеъмолчининг маҳсулотга бўлган талаби қанча бўлади?

Масалалар

1. Берилган масалаларнинг математик моделини тузинг.

а) 3 та A, B, C темир йўл станцияларида мос равишда 80, 70 ва 50 вагонлар захираси мавжуд. Бу вагонларни ғалла ортишга шайланган 4 та пунктта юбориш керак. Жумладан, 1-пунктга 60 та, 2-пунктга 45 та, 3-пунктга 65 ва 4-пунктга 30 та вагон керак. Вагонларни тақсимлаш учун сарф қилинадиган харажатлар матрицаси қуйидаги кўринишда берилган:

$$C=\begin{pmatrix} 14 & 13 & 16 & 11 \\ 12 & 17 & 14 & 18 \\ 15 & 12 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

Вагонларни истеъмолчиларга оптимал тақсимлаш режасини тузинг.

б) Тўрт хил иш майдонга уч хил турдаги ускуналарни оптимал тақсимлаш талаб қилинади. Ускуналар миқдори мос равишда 45, 30, 50 бирликда бўлиб, иш майдонларининг уларга бўлган талаблари 20, 40, 45, 20 бирликдан иборат. Ҳар бир ускунанинг тайин иш майдонидаги меҳнат унумдорлиги қуйидаги матрица билан характерланади.

$$C=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Берилган транспорт масалаларининг бошланғич базис ечимини топинг.

а)

$a_i \backslash b_i$	150	150	100
200	1	3	4
150	4	3	1
50	3	1	4

б)

b_i / a_i	120	80	50
130	1	7	8
70	6	1	1
50	7	6	1

в)

b_i / a_i	70	70	70
110	1	3	3
70	3	1	3
30	5	3	4

3. Берилган транспорт масалаларини потенциаллар усули билан ечинг.

а)

b_i / a_i	250	250	250	250
400	7	5	8	11
300	10	6	5	3
300	2	7	3	4

б)

b_i / a_i	80	70	150	150
120	5	7	6	3
130	3	5	4	7
150	7	6	3	2

4. Берилган транспорт масалаларини дифференциал ренталар усули билан ечинг.

а)

b_i / a_i	150	150	150	150
170	3	7	6	9
180	9	6	3	5
150	6	8	9	3

б)

a_i \ b_j	150	150	150	150
190	10	11	9	8
210	8	9	11	10
200	7	7	8	5

6. Очиқ моделли транспорт масалаларини ечинг.

а)

a_i \ b_j	150	150	150
110	7	5	8
120	11	9	10
120	6	6	7

б)

a_i \ b_j	225	225	300
250	5	7	8
210	8	9	10
240	9	10	5

6. Хос транспорт масалаларини ε-усулни қўллаб ечинг.

а)

a_i \ b_j	200	250	200	150
200	5	9	8	7
250	6	7	8	9
350	9	8	7	6

б)

a_i \ b_j	12	18	20	10
12	1	3	5	7
18	2	4	6	1
30	6	7	3	5

VI БОБ. БУТУН СОНЛИ ДАСТУРЛАШ

Ўзгарувчиларига бутун сонли бўлишлик шарти қўйилган чизиқли дастурлаш масалалари катта аҳамиятга эгадир. Бундай масалалар бутун сонли дастурлаш масалалари деб аталади. Бутун сонли дастурлаш масалаларига сайёҳ ҳақидаги масала, оптимал жадвал тузиш, рационал бичиш, транспорт воситаларини маршрутларга оптимал тақсимлаш, бўлинмайдиган махсулотлар ишлаб чиқарувчи корхонанинг ишини оптимал режалаштириш масалалари мисол бўла олади. Бу масалаларнинг баъзилари билан танишамиз.

1 - §. Иқтисодий масалалар

1. Сайёҳ ҳақидаги масала. Фараз қилайлик, P_0 шахарда яшовчи сайёҳ n та P_1, P_2,..., P_n шаҳарларда бир мартадан бўлиб, минимал вақт ичида P_0 шаҳарга қайтиб келиши керак бўлсин. Бу масаланинг математик моделини тузиш учун савдогарнинг P_i шаҳардан P_j шаҳарга бориши учун сарф қилган вақтини t_{ij}, $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n})$ билан ҳамда унинг ҳар бир P_i шаҳардан P_j шаҳарга бориш вариантининг характеристикасини x_{ij} билан белгилаймиз. Агар савдогар P_i шаҳардан P_j га борса, x_{ij} = *1*, бормаса x_{ij} = *0* бўлади (Соддалик учун P_i ва P_j шаҳарлар фақат бир маршрут ёрдами билан боғланган деб фараз қиламиз). Бу ҳолда масаланинг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad (i=\overline{1,n}) \tag{6.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad (j=\overline{1,n}) \tag{6.2}$$

$$x_{ij} = 0, \text{ёки } x_{ij} = 1), \tag{6.3}$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \to \min \tag{6.4}$$

2. Оптимал жойлаштириш масаласи

Фараз қилайлик, m та A_1, A_2,..., A_m пунктларда бир хил маҳсулотлар ишлаб чиқарувчи корхоналарни жойлаштириш керак бўлсин. Ҳар бир корхонанинг ишлаб чиқариш қувватини билдирувчи x_i $(i=\overline{1,m})$ бутун сонли қийматларни қабул қилади. Ҳар бир A_i пунктда маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарф қилинган ҳаражат ишлаб чиқарилган маҳсулот миқдорига боғлиқ бўлиб, у $f_i\,(x_i)$ функция орқали ифодаланади. Соддалик учун бу функцияни чизиқли деб қабул қиламиз, яъни

$$f_i\,(x_i) = c_i\, x_i.$$

Бундан ташқари n та пунктда бу маҳсулот истеъмол қилинади. ҳар бир истеъмол қилувчи пунктнинг маҳсулотга бўлган талаби маълум ва улар $b_1, b_2, \dots, b_n$ бирликларни ташкил қилади деб фараз қиламиз. Ҳар бир A_i ишлаб чиқарувчи пункт ҳар бир B_j истеъмол қилувчи пункт билан боғланган бўлиб йўл харажатлари матрицаси $C = (c_{ij})$ дан иборат бўлсин.

A_i пунктдан B_j пунктга юбориладиган маҳсулот миқдорини x_{ij} билан белгилаймиз. У ҳолда масаланинг математик модели қуйидаги кўринишда ифодаланади:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = x_i, \quad (i = \overline{1,m}) \tag{6.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} \geq b_j, \quad (j = \overline{1,n}) \tag{6.6}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ (i=1,m; \ j=1,n) \tag{6.7}$$

$$x_i \text{ — бутун сон,} \tag{6.8}$$

$$y = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min. \tag{6.9}$$

3. Тақсимот масаласи

Берилган n та ишни бажариш учун m та ускунлардан фойдаланиш мумкин. i-ускунанинг $(i=1,\dots,m)$ j-ишни $(j=1,\dots,n)$ бажаришдаги меҳнат унумдорлигини C_{ij} билан белгилаймиз. Ҳар бир ускунада фақат битта ишни бажариш мумкинлигини ҳамда ҳар бир иш фақат битта ускунада бажарилишини назарга олган ҳолда максимал меҳнат унумдорлигини таъминловчи ускуналарни ишларга тақсимлаш режасини аниқлаймиз.

Масаладаги номаълумларни $x_{ij}(i=1,\dots,m, \ \ j-1,\dots,n)$ билан белгилаймиз. Бу ерда x_{ij} – j-ишни i-ускунада бажаришни баҳоловчи сон бўлиб, агар j-иш i-ускунада бажарилса $x_{ij}=1$, агар j-иш i-ускунада бажарилмаса $x_{ij}=0$ бўлади.

Ҳар бир ускунани фақат битта ишни бажаришда қўлланиши

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad (i = \overline{1,m}), \tag{6.10}$$

тенглик орқали ифодаланади.

Ҳар бир ишни фақат битта ускунада бажарилиши

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad (j = \overline{1,n}), \tag{6.11}$$

тенглик орқали ифодаланади. Бу ерда

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{агар } j-\text{иш } i-\text{ускунада бажарилса,} \\ 0, & \text{агар } j-\text{иш } i-\text{ускунада бажарилмаса.} \end{cases} \tag{6.12}$$

Шундай қилиб, масала (6.10)-(6.12) шартларни қаноатлантирувчи ҳамда

$$Y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij} \qquad (6.13)$$

функцияга максимал қиймат берувчи x_{ij} номаълумларнинг қийматини топишга келтирилди. Бу масала ҳам бутун сонли дастурлаш масаласи бўлади.

Мисол. Цехда қўшимча ускуна ўрнатишга қарор қабул қилиниб, унинг учун 19/3 $м^2$ майдон ажратилди. Бу ускунани сотиб олиш учун цех 10 минг сўм пул сарф қилиши мумкин. Цех ўз имкониятидан келиб чиқиб 2 турдаги ускуна сотиб олиши мумкин. 1-турдаги ускунанинг баҳоси 1000 сўм, II-турдагисининг баҳоси эса, 3000 сўм туради.

I ва II тур ускунанинг ўрнатилиши оқибатида ҳар сменада цех мос равишда 2 ва 4 бирлик маҳсулот кўпроқ ишлаб чиқаради. I тур ускунани ўрнатиш учун 2 $м^2$, II тур ускуна учун эса 1 $м^2$ майдон керак.

Қайси ускунадан қанчадан сотиб олинганда цехда ишлаб чиқарилган қўшимча маҳсулотларнинг миқдори максимал бўлади?

Ечиш. Цех I-тур ускунадан x_1 дона, II-тур ускунадан x_2 дона сотиб олсин, дейлик. У ҳолда масалани шартлари қуйидаги тенгсизликлар системаси орқали ифодаланади.

$$2x_1+x_2\leq 19/3,$$
$$x_1+3x_2\leq 10,$$
$$x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0,\quad x_1,\ x_2\text{-бутун}.$$

Масаланинг мақсади ишлаб чиқарилган қўшимча маҳсулотлар миқдорини максимал қилишдан иборат бўлиб, у қуйидаги функция кўринишида ёзилади.

$$Y=2x_1+4x_2\rightarrow max$$

Шундай қилиб, берилган масаланинг математик модели қуйидаги кўринишга эга бўлди.

$$\begin{cases}2x_1+x_2\leq 19/3\\ x_1+3x_2\leq 10\end{cases} \qquad (6.14)$$

$$x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0, \qquad (6.15)$$

$$x_1,\ x_2\text{-бутун}, \qquad (6.16)$$

$$Y=2x_1+4x_2\rightarrow max \qquad (6.17)$$

2-§. Бутун сонли дастурлаш масаласининг қўйилиши, турлари ва геометрик талқини

Бутун сонли дастурлаш масаласини умумий ҳолда қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = \overline{1, m}) \tag{6.18}$$

$$x_j \geq 0, \quad \text{бутун}, \quad (j = \overline{1, n}), \tag{6.19}$$

$$Y = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \min$$

ёки вектор формада

$$AX=b, \tag{6.21}$$

$$X \geq 0 \text{ ва бутун} \tag{6.22}$$

$$y=CX \to min \tag{6.20}$$

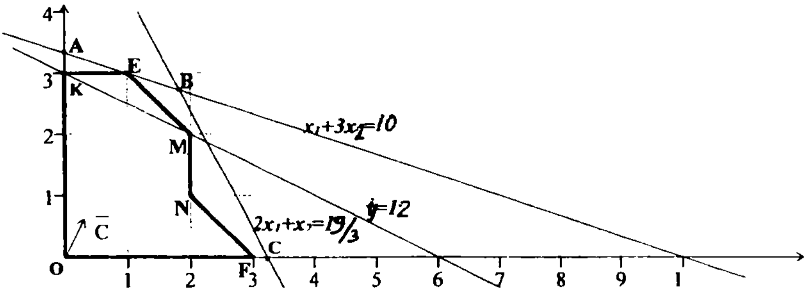
Бутун сонли дастурлаш масалаларидаги номаълумларнинг ҳаммаси учун бутун бўлишлик шарти қўйилса, бундай масалалар **тўла бутун сонли дастурлаш** масалалари деб аталади.

Номаълумларнинг маълум бир қисми учун бутун бўлишлик шарти қўйилган масалалар **қисман бутун сонли** дастурлаш масалалари деб аталади.

Агар бутун сонли дастурлаш масаласидаги номаълумлар фақат 0 ёки 1 қийматларни қабул қилиши мумкин бўлса, у ҳолда бу масала **Буль дастурлаш масаласи** деб аталади.

Бутун сонли дастурлаш масаласининг геометрик талқини билан танишамиз. Бунинг учун 1-§ да келтирилган (6.14). – (6.17) масалани график усулда ечиш жараёнини тасвирлаймиз.

Энг аввал масаланинг (6.14) ва (6.15) шартларини қаноатлантирувчи ечимлар тўпламидан иборат бўлган қавариқ *OABC* кўпбурчакни ясаймиз (6.1-шакл).



6.1-шакл.

OABC кўпбурчакнинг нуқталари ичида берилган бутун сонли дастурлаш масаласининг ечими бўла оладиган нуқтани топиш учун бу кўпбурчакни *OKEMNF* кўпбурчак билан алмаштирамиз. *OKEMNF* кўпбурчак координаталари бутун сонлардан иборат бўлган нуқталарни ўз ичига олади ва унинг бурчак нуқталарининг координаталари бутун сонлардан иборат бўлади.

Энди (6.17) функцияга максимум қиймат берувчи нуқтани *OKEMNF* кўпбурчакнинг бурчак нуқталари ичидан қидирамиз. Бу кўпбурчакнинг нуқталари ичида (6.17) функцияга максимум қиймат берувчи нуқта берилган масаланинг оптимал ечимини аниқлайди. Бундай нуқтани топиш учун Y га ихтиёрий, масалан, 12 қиймат берамиз ва

$$2x_1+4x_2=12$$

тўғри чизиқни ясаймиз. Бу чизиқни $\bar{C}(2;4)$ вектор йўналишида *OKEMNF* кўпбурчакнинг шу йўналишидаги четки нуқтаси билан кесишгунча силжитиб борамиз. Ана шу бурчак нуқтанинг координаталари берилган масаланинг ечимини аниқлайди, мақсад функциянинг шу нуқтадаги қиймати эса максимал бўлади. Шаклдан кўринадики, бундай нуқта $E(1;3)$ дан иборат. Демак берилган масаланинг ечими:

$$x_1=1, \quad x_2=3,$$
$$Y_{max}=14$$

бўлади.

Мисол. Берилган бутун сонли дастурлаш масаласини график усулда ечинг.

$$\begin{cases} x_1+x_2 \le 6, \\ 3x_1+10x_2 \le 26, \end{cases} \qquad (6.24)$$

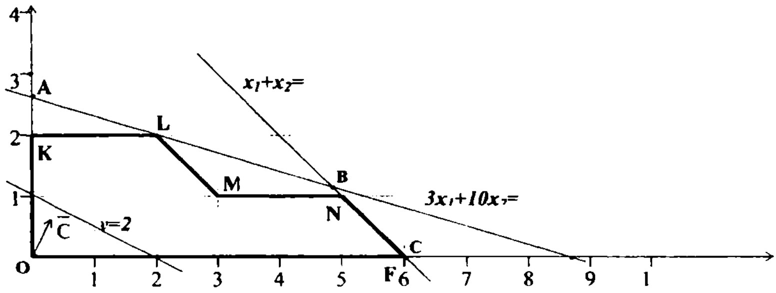
$$x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0, \qquad (6.25)$$

$$x_1,\ x_2\text{-бутун}, \qquad (6.26)$$

(6.27)

$$Y=x_1+2x_2 \rightarrow max$$

Ечиш. Масаладаги (6.24) тенгсизликлар системасининг (6.25) шартни қаноатлантирувчи номанфий ечимларини ўз ичига олувчи *OABC* кўпбурчак ясаймиз (6.2-шакл).



6.2-шакл.

OABC кўпбурчакни *OKLMNF* кўпбурчак билан алмаштирамиз. Бу кўпбурчак координаталари бутун сонлардан иборат бўлган 16 та нуқтани ўз ичига олади. Шу нуқталар ичида (6.2) функцияга максимум қиймат берувчи нуқтани топиш керак. Бунинг учун Y га ихтиёрий, масалан, 2 қиймат берамиз ва

$$x_1+2x_2=2$$

тўғри чизиқни ясаймиз. Бу чизиқни $\bar{C}(1;2)$ вектор йўналишида суриб бориб N(5;1) нуқта шу йўналишдаги энг четки нуқта эканлигини аниқлаймиз. Демак, бу нуқтанинг координаталари берилган масаланинг ечимини аниқлайди:

$$x_1=5, \quad x_2=1,$$

$$Y_{max}=7.$$

3 - §. Бутун сонли дастурлаш масаласини ечишнинг Гомори усули

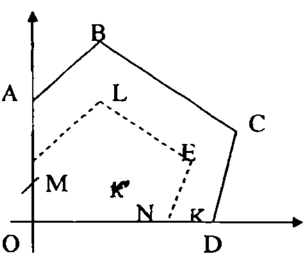
Бутун сонли дастурлаш масаласи чизиқли дастурлаш масаласидан қўшимча (6.3) ёки (6.19) кўринишдаги шартлар билан фарқ қилади. Бу шартларнинг қатнашиши бутун сонли дастурлаш масаласини ечиш жараёнини қийинлаштиради. Натижада чизиқли дастурлаш масаласини ечиш учун қўлланиладиган усулларни бутун сонли дастурлаш масалаларига қўллаш мумкин бўлмай қолади.

Бутун сонли дастурлаш масалаларни ечиш учун унинг хусусиятларини эътиборга олувчи усуллар яратилган бўлиб, улардан америка олими Р.Гомори яратган усул оптимал ечимни берувчи энг аниқ усул ҳисобланади. Р.Гомори тўлиқ бутун сонли ва қисман бутун сонли дастурлаш масалаларни ечиш усулини яратган.

Қуйида унинг фақат тўлиқ бутун сонли дастурлаш масалаларни ечиш учун мўлжалланган 1-алгоритми билан танишамиз.

Бу усулнинг ғояси қуйидагидан иборат. Берилган бутун сонли дастурлаш масаласида номаълумларнинг бутун бўлишлик шартига эътибор бермасдан, уларнинг оддий чизиқли дастурлаш масаласи сифатида симплекс усулидан фойдаланиб ечамиз. Агар ечим бутун сонлардан иборат бўлса, у бутун сонли дастурлаш масаласининг ҳам ечими бўлади. Акс ҳолда номаълумларнинг бутун бўлишлик шартини эътиборга олувчи ва «кесувчи тенглама» деб аталувчи қўшимча тенглама тузилади. Бу тенглама асосий тенгламалар системасига қўшиб ёзилади ва базис ечим алмаштирилади. Бунинг учун номаълумни кесувчи тенгламадан ажратилади ва унинг қийматини бошқа тенгламаларга қўйиб чиқилади. Бундай ишлар масаланинг бутун сонли ечими топилгунча ёки унинг мавжуд эмаслиги аниқлангунча такрорланади. Ҳар бир босқичда тузилган қўшимча тенглама кесувчи тенглама деб аталишига сабаб бу тенглама ёрдамида берилган (6.18)−(6.20) масаланинг режаларидан ташкил топган қавариқ тўпламининг каср сонли режаларини ўз ичига олган қисмини кесиб беради. Кесиш жараёни К тўпламининг фақат бутун сонли режаларини ўз ичига олган қисми К` топилгунча ёки бундай қисм мавжуд эмаслиги аниқлангунча такрорланади. Бунинг геометрик тасвирини қуйидаги шаклда (6.3-шакл) ифодалаш мумкин.

Бу шаклда К қавариқ тўплам OABCD кўпбурчак орқали ифодаланган. Бу кўпбурчакнинг бурчак нуқталари кесувчи тенгламалар ёрдами билан кесиб бориш натижасида OMLEN қавариқ кўпбурчак ҳосил бўладики, унинг четки нуқталарининг координаталари бутун сонларлар иборат бўлади.



6.3 шакл.

Кесувчи тенгламалар қуйидагича тузилади:

1. Фараз қилайлик, (6.18)-(6.20) масаладаги номаълумларнинг бутун бўлишлик шартини ташлаб юборишдан ҳосил бўлган масала ечилган ва унинг оптимал ечими $X=(x_1;x_2;...;x_i;...,x_m;...x_n)$ бўлсин. Охирги симплекс жадвалдаги базис векторлар P_1, P_2,... P_i,..., P_m

лардан иборат дейлик. Бу ҳолда бу симплекс жадвалининг кўриниши қуйидагича бўлади

$$\overline{X}=\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_{1,m+1} & x_{1j} & x_{1n} \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_{2,m+1} & x_{2j} & x_{2n} \\ \ldots & & & & & & & \\ x_i & 0 & 0 & 1 & 0 & & x_{ij} & x_{in} \\ \ldots & & & & & & & \\ x_m & 0 & 0 & 0 & 1 & x_{m,m+1} & x_{mj} & x_{mn} \end{vmatrix}$$

Агар барча x_i лар бутун сонлар бўлса, топилган ечим бутун сонли дастурлаш масаласининг ечими бўлади.

2. Фараз қилайлик, баъзи x_i лар каср сонлардан иборат бўлсин ҳамда баъзи x_{ij} лар ҳам каср сонлар бўлсин (акс ҳолда масала бутун сонли ечимга эга бўлмайди). x_i ва x_{ij} ларнинг бутун қисмларини мос равишда $[x_i]$ ва $[x_{ij}]$ билан белгилаймиз. У ҳолда бу сонларнинг каср қисмлари q_i, q_{ij} лар қуйидагича аниқланади:

$$\begin{cases} q_i = x_i - [x_i], \\ q_{ij} = x_{ij} - [x_{ij}]. \end{cases} \qquad (6.28)$$

Фараз қилайлик, баъзи $q_i \neq 0$ бўлсин. У холда $\overline{X}$ матрицанинг $\max\limits_{q_i \neq 0} q_i = q_k$ тенгликни қаноатлантирувчи k қатори учун кесувчи тенглама тузилади. Бунинг учун аввал

$$q_{k1}x_1 + q_{k2}x_2 + \ldots + q_{kn}x_n \geq q_k \qquad (6.29)$$

тенгсизлик тузилади, сўнгра уни (-1) га кўпайтириб x_{n+1} қўшимча ўзгарувчи киритиш натижасида қуйидаги тенглама ҳосил қилинади.

$$-q_{k1}x_1 - q_{k2}x_2 - \ldots - q_{kn}x_n + x_{n+1} = -q_k \qquad (6.30)$$

Бундай тузилган тенглама **кесувчи тенглама** дейилади.

3. Кесувчи тенгламани симплекс жадвалининг m+2 қаторига жойлаштирамиз. Бу тенгламадаги x_{n+1} ўзгарувчига мос келувчи P_{n+1} вектор базис вектор бўлади.

Базисдан P_{n+1} вектор чиқарилиб, унинг ўрнига

$$\min_{q_{kj}<0}\left(\frac{\Delta_j}{q_{kj}}\right) = \frac{\Delta_l}{q_{kl}}$$

шартни қаноатлантирувчи P_l вектор киритилади ва оддий симплекс усулдаги формулалар ёрдамида симплекс жадвал алмаштирилади. Агар ҳосил бўлган симплекс жадвалдаги барча x'_i лар бутун сонли (яъни хамма $q'_i = 0$) бўлса, топилган ечим берилган бутун сонли дастурлаш масаласининг ечими бўлади. Акс холда юқоридаги 2-3 пунктларда қилинган ишларни яна такрорлаймиз, умуман бу ишлар берилган масалаларнинг бутун сонли ечими топилгунча ёки масалаларнинг бутун сонли ечими мавжуд эмаслиги аниқлангунча такрорланади. Агар $max\ q_i = q_k$ $(q_i \neq 0)$ шартни қаноатлантирувчи к- қатордаги барча x_{ij} лар бутун сонли(демак барча $q_{kj}=0$) бўлса, у ҳолда берилган масала бутун сонли ечимга эга бўлмайди.

Мисол. қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласини бутун сонли ечимини топинг.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 \quad 3x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ бутун,$$

$$y = 8 - 3x_1 - x_2 \to min.$$

Ечиш. Масалани нормал ҳолга келтирамиз:

$$\begin{cases} 2x_1 \quad 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 \quad 3x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ бутун,$$

$$y = 8 - 3x_1 - x_2 \to min$$

Бу масалани номаълумларнинг бутун бўлишлик шартига эътибор бермасдан симплекс усул ёрдами билан ечамиз.

Бунинг учун x_3 ва x_4 қўшимча ўзгарувчиларга мос келувчи P_3 ва P_4 векторларни базис векторлар деб қабул қилиб, сиплекс жадвални тўлдирамиз ва симплекс жараённи амалга оширамиз.

I.

Б.в.	C	P_0	-3	-1	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_3	0	6	2	3	1	0
P_4	0	3	2	-3	0	1
		8+0	3	1	0	0

II.

Б.в.	C	P_0	-3	-1	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_3	0	3	0	6	1	-1
P_1	-3	3/2	1	-3/2	0	1/2
		7/2	0	11/2	0	-3/2

III.

Б.в.	C	P_o	-3	*-1*	*0*	0
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	-1	1/2	0	1	1/6	-1/6
P_1	-3	9/4	1	0	1/4	1/4
		3/4	0	0	11/12	-7/12

Шундай қилиб 3 – босқичда масаланинг оптимал ечими топилди, лекин бу ечим бутун сонли эмас. Ечимни бутун сонли ечимга айлантириш учун охирги симплекс жадвалнинг биринчи қаторига нисбатан кесувчи тенглама тузамиз. Бунинг учун, энг аввал, қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз

$$\frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Бу тенгсизликни икки томонини (-1) га кўпайтириб, x_5 қўшимча ўзгарувчи киритамиз ва қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз

$$-\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}.$$

Уни симплекс жадвалнинг 4- қаторига жойлаштирамиз.

Б.в.	C	P_o	-3	*-1*	*0*	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	-1	1/2	0	1	1/6	-1/6	0
P_1	-3	9/4	1	0	1/4	1/4	0
Δ_j		3/4	0	0	-11/12	-7/12	0
P_5	0	-1/2	0	0	-1/6	1/6	1

Базисдан P_5 ни чиқариб, унинг ўрнига P_3 ни киритамиз. натижада симплекс жадвал алмашади ва қуйидаги кўринишга келади:

Б.в.	C	P_o	-3	*-1*	*0*	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_6
P_2	-1	0	0	1	0	0	0
P_1	3	3/2	1	0	0	1/2	0
P_3	0	3	0	0	1	-1	0
Δ_j		7/2	0	0	0	-3/2	
P_6	0	-1/2	0	0	0	-1/2	1

Энди симплекс жадвалнинг 2-қаторига нисбатан кесувчи тенгламани тузамиз. Бунинг учун аввал қуйидаги тенгсизликни тузиб оламиз:

$$\frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Бу тенгсизликнинг икки томонини (-1) кўпайтириб топамиз:

$$-\frac{1}{2}x_4 \le -\frac{1}{2}.$$

Тенгсизликнинг кичик томонига x_6 қўшимча ўзгарувчи киритамиз ва қуйидаги кесувчи тенгламани тузамиз:

$$-\frac{1}{2}x_4 + x_6 = -\frac{1}{2}.$$

Бу тенгламани симплекс жадвалнинг 5- қаторига жойлаштирамиз. Сўнгра базисдан P_6 ни чиқариб, унинг ўрнига P_4 ни киритамиз.

Б.в.	C	P_o	-3	-1	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_6
P_2	-1	0	0	1	0	0	0
P_1	-3	1	1	0	0	0	1
P_3	0	4	0	0	1	0	1
P_4	0	1	0	0	0	1	-2
Δ_j		8-3=5	0	0	0	0	-3

Ҳосил бўлган симплекс жадвалдаги P_0 векторнинг координаталари бутун сонлардан иборат. Демак, бутун сонли дастурлаш масаласининг ечими топилган ва у X=(1;0;4;1) бўлиб, бу ечимдаги мақсад функциянинг қиймати Y_{min}=5 бўлади.

Таянч сўз ва иборалар

Бутун сонли дастурлаш; тўла бутун сонли дастурлаш; қисман бутун сонли дастурлаш; Буль ўзгарувчили дастурлаш; кесувчи тенглама; Гомори усули

Назорат саволлари

1. Бутун сонли дастурлаш масаласи қандай қўйилади?
2. Бутун сонли дастурлаш масалаларининг қандай турлари мавжуд?
3. Бутун сонли дастурлаш масаласининг геометрик талқини қандай?
4. Қандай иқтисодий масалаларнинг математик моделлари бутун сонли дастурлаш масаласига мисол бўла олади?
5. Сайёҳ ҳақидаги масаланинг математик моделини ёзинг.

6. Саноат корхоналарини оптимал жойлаштириш масаласининг математик модели қандай?
7. Тақсимот масаласининг математик моделини ёзинг.
8. Р.Гомори усулининг ғояси қандай?
9. Кесувчи тенглама нима ва у қандай тузилади?
10. Масаланинг бутун сонли ечимга эга бўлмаслик шарти қандай?
11. Бутун сонли ечимнинг оптималлик шарти қандай?

Масалалар

I. Берилган иқтисодий масалаларнинг математик моделини тузинг.

1 – масала. Тикув фабрикасида 4 хил кийим тайёрлаш учун 3 хил газмол ишлатилади. Ҳар бир кийимнинг биттасини тайёрлаш учун зарур бўлган газмолнинг миқдори, кийимнинг баҳоси ҳамда фабрикадаги газмоллар захираси хақида маълумотлар қуйидаги жадвалда келтирилган:

Газмол артикули	1 та кийим учун сарф қилинадиган газмол миқдори				Фабрикадаги газмол захираси (м)
	1	2	3	4	
I	1		2	1	180
II		1	3	2	210
III	4	2		4	800
Кийимлар баҳоси (минг сўм)	9	6	4	7	

Қайси кийимдан қанчадан тайёрланганда сарф қилинган газмолларнинг миқдори уларнинг захирасидан ошмайди ҳам корхонанинг ишлаб чиқарган кийимларининг умумий пул қиймати максимал бўлади?

2 – масала. Узунлиги 110 см. бўлган пўлат хипчинлардан узунликлари 45 см, 35 см ва 50 см бўлган хомаки маҳсулотлар тайёрлаш керак бўлсин. Талаб қилинган хомаки маҳсулотлар миқдори мос равишда 40, 30 ва 20 бирликни ташкил қилсин. Пўлат хипчинларни мумкин бўлган кесиш йўллари ва уларга мос келувчи хомаки маҳсулотлар ва чиқиндилар миқдори қуйидаги жадвалда келтирилган:

Хомаки маҳсулот узунликлари	Кесиш вариантлари					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	-	-	-
35	-	1	-	3	1	-
50	-	-	1	-	1	2
Чиқиндилар миқдори	20	30	15	5	25	10

Қанча пўлат хипчинларни қайси усул билан кесганда тайёрланган хомаки маҳсулотлар талабдагидан кам бўлмайди ва чиқиндиларнинг миқдори минимал бўлади?

II. Берилган бутун сонли дастурлаш масалаларини график усулда ечинг.

1) $$\begin{cases} x_1 & 2 \\ x_1 & \le 6 \\ 2x_1 & \le 10 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$, бутун ,

$y = x_1 - x_2 \to max$

2) $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 4x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$, бутун ,

$y = 8x_1 + 6x_2 \to max$

3) $$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$, бутун ,

$y = 8x_1 + 6x_2 \to max$

4) $$\begin{cases} 11x_1 + 4x_2 \le 44, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 30, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$, бутун ,

$y = 3x_1 + 3x_2 \to max$

III. Берилган бутун сонли дастурлаш масалаларини Р.Гомори усули билан ечинг.

1) $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 14, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 \le 11, \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}), \text{ бутун }, \end{cases}$$

$$y = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to max$$

2) $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \geq 14, \\ 8x_1 + 11x_2 + 9x_3 \geq 12, \\ 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 10, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3})$, бутун,

$$y = -10x_1 - 14x_2 - 21x_3 \to max$$

3) $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + 4x_2 \leq 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3})$, бутун,

$$y = 3x_1 - x_2 \to max$$

4) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3, \\ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq 16, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$x_j \geq 0, (j = \overline{1.3})$, бутун,

$$y = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to max$$

VII боб. ЧИЗИҚСИЗ ДАСТУРЛАШ МАСАЛАЛАРИ

1-§. Чизиқсиз дастурлаш масалаларининг қўйилиши ва турлари

Маълумки, математик дастурлаш масаласи деганда умумий ҳолда

$$g_i(x_1, x_2, \ldots x_n)\{\le, =, \ge\}\ b_i,\ i = \overline{1,m}$$

муносабатларни қаноатлантирувчи ва $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцияни максимумга (минимумга) айлантирувчи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларнинг қийматларини топиш масаласи назарда тутилади. Бу масала шартларини қисқача бундай ёзиш мумкин:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots x_n)\ \{\le, =, \ge\}\ b_i,\ i = \overline{1,m}, \qquad (7.1)$$

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min), \qquad (7.2)$$

бу ерда $g_i(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ва $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ берилган функциялар, b_i $(i = 1, \ldots, m)$ лар ўзгармас сонлар. (7.1) чекламалар масаланинг **чегаравий шартлари**, $Z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция эса **мақсад функцияси** деб аталади. (7.1) даги ҳар бир чеклама учун $\le, =, \ge$ белгилардан фақат биттаси ўринли бўлади.

Айрим чизиқсиз дастурлаш масалаларида x_1, x_2, $,x_n$ ўзгарувчиларнинг баъзиларига ёки ҳаммасига манфий бўлмаслик шарти қўйилган бўлади. Баъзи масалаларда эса номаълумларнинг бир қисми (ёки ҳаммаси) бутун бўлишлиги талаб қилинади.

(7.1), (7.2) масаладаги ҳамма $g_i(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциялар чизиқли бўлса ҳамда барча ўзгарувчиларнинг номанфий бўшлиги талаб қилинса, бу масала чизиқли дастурлаш масаласи бўлади.

(7.1), (7.2) масалада m=0 бўлса, яъни чегаравий шартлар қатнашмаса, у **шартсиз оптималлаштириш масаласи** дейилади. Бу ҳолда масала қуйидагича ёзилади:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min),$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n, \qquad (7.3)$$

бу ерда $(x_1, x_2, \ldots x_n)$-n ўлчовли вектор (нуқта), E_n – n ўлчовли Евклид фазоси, яъни векторларни қўшиш, сонга кўпайтириш ва икки векторнинг скаляр кўпайтмаси амаллари киритилган n ўлчовли $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ векторлар (нуқталар) тўплами.

Фараз қилайлик, (7.1) система фақат тенгламалар системасидан иборат бўлиб, номаълумларга номанфий бўлишлик шарти қўйилмасин ҳамда $m < n$ бўлиб, $g_i(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ва $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциялар узлуксиз ва камида иккинчи тартибли хусусий ҳосилага эга бўлсин. Бу ҳолда чизиқсиз дастурлаш масаласи қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$g_i(x_1, x_2,...x_n) = b_i,\ (i = \overline{1,m}) \qquad (7.4)$$

$$Z = f(x_1, x_2,...,x_n) \to \max(\min).$$

Бундай масала чекламалари тенгламалардан иборат бўлган **шартли максимум (минимум) масаласи** дейилади. (7.4) кўринишдаги масалаларни дифференциал ҳисобга асосланган классик усуллар билан ечиш мумкин бўлгани учун уларни **оптималлаштиришнинг классик масалалари** дейилади.

Агар (7.1) системадаги ҳамма чекламаларлар тенгсизликлардан иборат бўлса ҳамда уларнинг баъзиларига «≤», баъзиларига эса «≥», белгилар мос келса, бу тенгсизликларни осонлик билан бир хил кўринишга келтириш мумкин. Бундан ташқари

$$f(x_1, x_2,...,x_n) \to \max$$

шартни

$$-f(x_1, x_2,...,x_n) \to \min$$

кўринишида ёзиш мумкин. Шунинг учун, умумийликни бузмасдан, шартлари тенгсизликдан иборат бўлган чизиқсиз дастурлаш масаласини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$g_i(x_1,x_2,...x_n) \le b_i,\ (i = \overline{1,m}) \qquad (7.5)$$

$$x_j \ge 0\ (j=\overline{1,n}) \qquad (7.6)$$

$$Z = f(x_1, x_2,...,x_n) \to \min. \qquad (7.7)$$

Номаълумларнинг номанфийлик шарти қатнашмаган масалаларга бундай шартни осонлик билан киритиш мумкин.

Баъзи ҳолларда масаланинг (7.1) шартидаги айрим чекламалар тенгламалардан, айримлари эса тенгсизликлардан иборат бўлиши мумкин. Бундай масалаларни шартлари аралаш белгили бўлган минимум масаласи кўринишига келтириб ёзиш мумкин:

$$g_i(x_1,x_2,...x_n) \le b_i,\quad (i=\overline{1,m_1}) \qquad (7.8)$$

$$g_i(x_1,x_2,...x_n) = b_i,\quad (i = \overline{m_1+1,m}) \qquad (7.9)$$

$$Z = f(x_1, x_2,...,x_n) \to \min. \qquad (7.10)$$

Бунда (7.8), (7.9) чекламалар чегаравий шартлардан иборат бўлиб, номаълумларнинг номанфий бўлишлик шартини ҳам ўз ичига олади.

Энди қуйидаги кўринишда берилган масалани кўрамиз:

$$g_i(X) = g_i(x_1,x_2,...x_n) \le b_i,\ i = \overline{1,m} \qquad (7.11)$$

$$X = (x_1,x_2,...x_n) \in G \subset E_n, \qquad (7.12)$$

$$Z(X) = f(x_1, x_2,...,x_n) \to \max(\min). \qquad (7.13)$$

Бу масала чекли ўлчовли чизиқсиз дастурлаш масаласининг умумий кўринишидан иборат бўлиб, бунда f $(x_1, x_2,...,x_n)$ мақсад функцияси, g_i $(x_1,x_2,...x_n)$ чегаравий функционал, G масаланинг аниқланиш соҳаси, G тўпламнинг нуқталари масаланинг режалари деб, (7.11) шартларни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами эса масаланинг **жоиз режалар тўплами** деб аталади.

Чизиқсиз дастурлашда **маҳаллий** ва **глобал** оптимал режа тушунчаси мавжуд бўлиб, улар қуйидагича таърифланади.

Фараз қилайлик, X^* нуқта (7.11) (7.13) масаланинг жоиз режаси ва унинг кичик ε атрофидаги (ε ихтиёрий кичик мусбат сон) нуқталар тўплами ε (X^*) ∈G дан иборат бўлсин.

Агар

$$f(X^*)\le f(X) \quad [f(X^*)\ge F(X)] \tag{7.14}$$

муносабат ихтиёрий $X\in \mathcal{E}$ (X^*) учун ўринли бўлса, X* режа мақсад функцияга маҳаллий минимум (максимум) қиймат берувчи маҳаллий оптимал режа деб аталади.

Агар

$$f(X^*)\le f(X) \quad [f(X^*)\ge F(X)]$$

тенгсизлик ихтиёрий $X\in G$ учун ўринли бўлса, X* режа мақсад функцияга глобал (абсолют) минимум (максимум) қиймат берувчи **глобал оптимал режа** ёки **глобал оптимал ечим** деб аталади.

Юқоридаги (7.5)-(7.7) ва (7.10) масалаларни ечиш учун чизиқли дастурлашдаги симплекс усулга ўхшаган универсал усул кашф қилинмаган.

Бу масалалар g_i $(x_1,x_2,...x_n)$ ва f $(x_1, x_2,...,x_n)$ функциялар ихтиёрий чизиқсиз функциялар бўлган ҳолларда жуда кам ўрганилган. Ҳозиргача энг яхши ўрганилган чизиқсиз дастурлаш масалалари g_i $(x_1,x_2,...x_n)$ ва f $(x_1, x_2,...,x_n)$ функциялар қавариқ (ботиқ) бўлган масалалардир. Бундай масалалар **қавариқ дастурлаш масаласи** дейилади. Қавариқ дастурлаш масалаларининг асосий хусусиятлари шундан иборатки, уларнинг ҳар қандай маҳаллий оптимал ечими глобал ечимдан иборат бўлади.

Иқтисодий амалиётда учрайдиган кўп масалаларда g_i $(x_1,x_2,...x_n)$ функциялар чизиқли бўлиб, f $(x_1, x_2,...,x_n)$ мақсад функцияси квадратик формада яъни

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_ix_j$$

кўринишда бўлади. Бундай масалалар **квадратик дастурлаш масалалари** деб аталади. Чегаравий функция ёки мақсад функцияси, ёки уларнинг ҳар иккиси ҳам п та функцияларнинг йиғиндисидан иборат, яъни

$$g_1(x_1,x_2,\ldots x_n) = g_{i1}(x_1)+g_{i2}(x_2)+\ldots\ldots\ g_{in}(x_n) \qquad (7.15)$$

ва

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n) = f_1(x_1)+ f_2(x_2)+\ldots\ldots\ f_n(x_n) \qquad (7.16)$$

кўринишда бўлган масалалар **сеперабел дастурлаш масалалари** деб аталади. Квадратик ва сеперабел дастурлаш масалаларини ечиш учун симплекс усулга асосланган тақрибий усуллар яратилган.

Чизиқсиз дастурлаш масаласини, жумладан, квадратик дастурлаш масаласини тақрибий ечиш усулларидан бири градиент усулидир. Градиент усулини ҳар қандай чизиқсиз дастурлаш масаласини ечишга қўллаш мумкин. Лекин бу усул масаланинг маҳаллий оптимал ечимларини топишини назарга олиб уни қавариқ (ботиқ) дастурлаш масалаларини ечишга қўллаш мақсадга мувофиқдир.

Чизиқсиз дастурлашга оид ишлаб чиқаришни режалаштириш ва ресурсларни бошқаришдаги муҳим масалалардан бири **стохастик дастурлашдир.**

Бу масаладаги айрим параметрлар ноаниқ ёки тасодифий миқдорлардан иборат бўлади.

Чегаравий шартлари ҳақида тўлиқ маълумот бўлмаган оптималлаштириш масалаларини стохастик масалалар деб аталади. Стохастик масалаларни ечиш учун махсус стохастик дастурлашда актив ва пассив усуллар мавжуд бўлиб, уларнинг 1-си масала ноаниқлиқ ва рискка (таваккалчиликка) асосланганда, 2-си эса масаладаги параметрлар тасодифий миқдор бўлганда оптимал ечимни топиш усулидир.

Юқорида қайд этилган ҳар қандай чизиқли ва чизиқсиз дастурлаш масалаларини ҳамда барча параметрлари вақтга боғлиқ равишда ўзгармайдиган масалалар **статик масалалар** деб аталади. Бундай масалалар режалаштирилаётган давр давомида ишлаб чиқариш ҳам, истеъмол ҳам, ресурслар ҳам ўзгармас деб қараладиган иқтисодий масаланинг математик моделларидан иборат бўлади.

Параметрлари ўзгарувчан миқдор бўлиб, улар вақтнинг функцияси деб қаралган масалалар **динамик дастурлаш масалалари** дейилади. Бундай масалаларни ечиш усулларини ўз ичига олган математик дастурлашнинг тармоқи **динамик дастурлаш** деб аталади. Динамик дастурлаш усулларини фақат динамик дастурлаш масалаларини ечишда эмас, балки ихтиёрий чизиқсиз дастурлаш масалаларини ечишда ҳам қўллаш мумкин.

2 - §. Чизиқсиз дастурлаш масалаларининг геометрик талқини. График усул

Чизиқли дастурлаш масалаларининг хоссаларидан бизга маълумки, биринчидан, унинг жоиз режалари тўплами, яъни масаланинг чегаравий шартларини ва номаълумларнинг номанфийлик шартларини қаноатлантирувчи $X=(x_1, x_2,...,x_n)$ нуқталар тўплами қавариқ бўлади. Иккинчидан, $f(x_1, x_2,...,x_n)$ мақсад функциясини берилган қийматга эриштирадиган $X=(x_1, x_2,...,x_n)$ нуқталар тўплами n-ўлчовли фазонинг гипертекислигини ташкил қилади. Бундан ташқари, мақсад функциянинг турли қийматларига мос келувчи гипертекисликлар ўзаро параллел бўлади. Учинчидан, мақсад функциянинг мумкин бўлган режалари тўпламидаги маҳаллий минимуми (максимуми) глобал (абсолют) минимумдан (максимумдан) иборат бўлади. Тўртинчидан, агар мақсад функция чекли оптимал қийматга эга бўлса, жоиз режалар тўпламини ифодаловчи қавариқ кўпбурчакнинг камида бир учи оптимал ечимни беради. Мумкин бўлган режалар кўпбурчагининг учлари (бурчак нуқталари) базис ечимни ифодалайди. Базис ечимдаги ҳамма номаълумлар қатъий мусбат бўлган ҳолдаги ечим **хосмас базис ечим** ва агар улардан камида биттаси нолга тенг бўлса, **хос базис ечим** дейилади.

Ихтиёрий базис ечимдан бошлаб бошқа базис ечимга ўтиб бориб, чекли сондаги қадамдан сўнг функцияга экстремум қиймат берувчи базис ечим топилади.

Базис ечим оптимал ечим бўлиши учун мақсад функциянинг бу ечимдаги қиймати бошқа базис ечимдаги қийматларидан кам (кўп) бўлмаслиги керак.

Чизиқсиз дастурлаш масалаларида эса юқоридаги чизиқли дастурлашга доир хоссаларнинг айримлари (ёки ҳаммаси) бажарилмайди.

Масалан, чизиқсиз дастурлаш масаласининг мумкин бўлган режалар тўплами қавариқ тўплам бўлмаслиги ҳам мумкин. Буни чегаравий шартлари

$$\begin{cases} (x_1 - 1)x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 3{,}5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

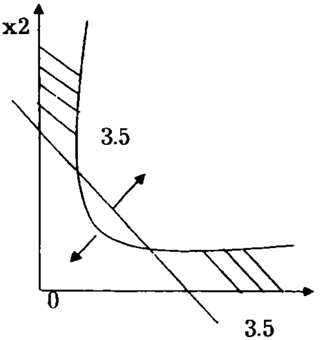
муносабатлардан иборат бўлган масалада кўриш мумкин. Масаланинг режалар тўплами иккита алоҳида қисмларга ажратилган бўлиб, уларнинг бирортаси ҳам қавариқ эмас (7.1 – шакл).

Агар жоиз режалар тўплами қавариқ бўлмаса, мақсад функция чизиқли бўлган ҳолда ҳам масаланинг глобал оптимал ечимидан фарқ қилувчи маҳаллий ечимлари мавжуд бўлади. Масалан, чегаравий шартлари чизиқли ва мақсад функцияси чизиқсиз бўлган қуйидаги масалани кўрамиз:

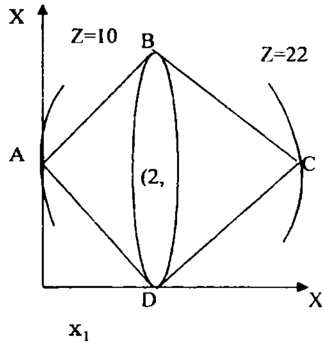
$$x_1 + x_2 \ge 2,$$
$$x_1 - x_2 \ge -2,$$
$$x_1 + x_2 \le 6,$$
$$x_1 - 3x_2 \le 2,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

$$Z = f(x_1, x_2,) = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to max.$$



7.1-шакл



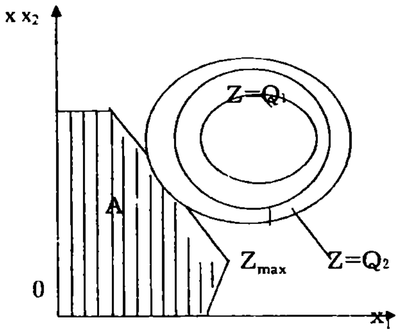
7.2 – шакл

Бу масаланинг чегаравий шартларини қаноатлантирувчи нуқталари тўплами қавариқ ABCD тўртбурчакдан иборат бўлади (7.2- шакл). Масаладаги мақсад функция маркази (2,2) нуқтадан иборат бўлган элипслар оиласидан иборат.

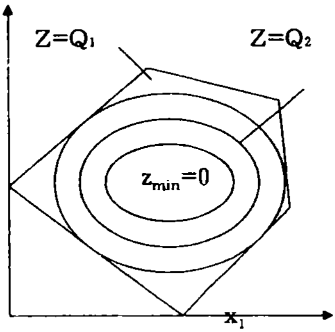
Z=4 да эллипс B ва D нуқталардан ўтади, A нуқтада Z=100 ва C нуқтада Z=226 бўлади. Бундан кўринадики, A нуқтада мақсад функциянинг қиймати унга яқин бўлган B ва D нуқталардаги қийматидан кичик. Демак, A нуқтада мақсад функция маҳаллий максимумга эришади. C нуқтада $Z = f(x_1, x_2,)$ функция энг катта Z=226 қийматга эришади. Мақсад функциянинг C нуқтадаги қиймати ABCD тўртбурчакка тегишли ҳамма нуқталардаги қийматидан катта бўлади. Демак, $Z = f(x_1, x_2,)$ функция C нуқтада глобал максимумга эришади.

Бу масаланинг оптимал ечими жоиз режалар тўплами C учининг координаталаридан иборат бўлди. Лекин умумий ҳолда, чизиқсиз дастурлаш масаласининг мақсад функциясига оптимал қиймат берувчи нуқта жоиз режалар тўпламининг бурчак нуқтаси бўлиши шарт эмас. Айрим ҳолларда оптимал режа жоиз режалар тўпламининг ички нуқтасидан ҳам, чегаравий нуқтасидан ҳам иборат бўлиши мумкин. Масалан, 7.3-шаклда тасвирланган масаладаги Z=
$f(x_1, x_2,)$ мақсад функция минимум қийматга мумкин бўлган режалар тўпламининг чегаравий нуқтасида эришади.

Умумий ҳолда (7.8)-(7.10) кўринишда берилган чизиқсиз дастурлаш масаласини кўрамиз ва бу масаланинг геометрик талқини билан танишамиз.



7.3-шакл



7.4-шакл

Масаладаги (7.8), (7.9) чекламаларни қанотлантирувчи нуқталар тўплами Евклид фазосида жоиз режалар тўпламини беради. Бу тўпламнинг нуқталари орасидан мақсад функцияга минимум қиймат берувчи нуқтани топиш керак. Бунинг учун жоиз режалар тўпламининг энг паст савияли $f(x_1, x_2,...,x_n)=Q$ гиперсирти билан кесишган нуқтасини топиш керак. Бу нуқта берилган (7.8) - (7.10) масаланинг оптимал ечимини беради.

(7.8)-(7.10) масаланинг оптимал ечимини геометрик талқинидан фойдаланиб топиш учун қуйидаги ишларни бажариш керак:

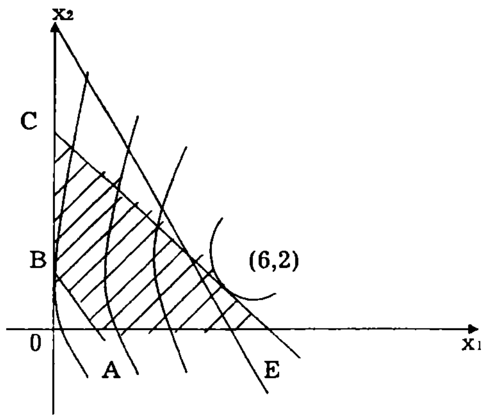
1. Масаланинг (7.8), (7.9) чегаравий шартларини қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини, яъни жоиз режалар тўпламини ясаш керак (агар бу тўплам бўш бўлса, масала ечимга эга бўлмайди).
2. $f(x_1, x_2,...,x_n)=Q$ гиперсиртни ясаш керак.
3. Q нинг қийматини ўзгартириб бориб, энг паст савияли гиперсирт топилади ёки унинг қуйидан чегараланмаганлиги аниқланади.
4. Мумкин бўлган режалар тўпламининг энг паст савияли гиперсирт билан кесишган нуқтаси аниқланади ва мақсад функциянинг бу нуқтадаги қиймати топилади.

Қуйидаги масалаларни геометрик талқинидан фойдаланиб ечамиз:

1-мисол.

$$x_1 + x_2 \le 8,$$
$$2x_1 + x_2 \le 15,$$
$$x_1 + x_2 \ge 1,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$Z = f(x_1, x_2,) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max(\min).$$



7.5-шакл

Масаланинг чегаравий шартларини қаноатлантирувчи нуқталар тўплами ABCDE бешбурчакдан иборат бўлади (7.5 шакл). Агар Z=Q (Q>0) деб қабул қилсак, $(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 = Q$ тенглама маркази M (6.2) нуқтада ва радиуси $\sqrt{Q}$ га тенг бўлган айланани ифода этади.

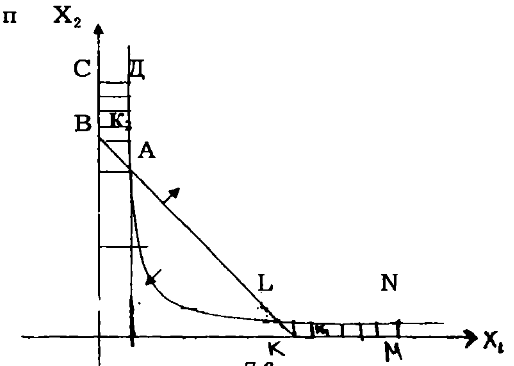
Q нинг қийматини орттириб ёки камайтириб бориш натижасида Z нинг қиймати ҳам ортиб ёки камайиб боради. M нуқтадан турли радиусли айланалар (параллел гиперсиртлар) ўтказиб бориб, Z функцияга энг кичик ёки энг катта қиймат берувчи нуқтани топиш мумкин.

2 – мисол.

$$
\begin{aligned}
&x_1\ x_2 \le 4,\\
&x_1 + x_2 \ge 5,\\
&x_1 \le 7,\\
&x_2 \le 6,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\\
&Z = x_1^2 + x_2^2 \ \to \max(\min).
\end{aligned}
$$

Бу масаланинг мумкин бўлган режалар тўплами қавариқ тўплам бўлмайди, аксинча, иккита айрим K_1 ва K_2 қисмлардан иборат бўлади (7.6 шакл). Мақсад функция ўзининг минимал қиймати Z=17 га A(1;4) ва L(4;1) нуқталарда эришади. $D(\frac{2}{3};6)$ ва $N(7;\frac{4}{7})$ нуқталарда эса функция маҳаллий максимум қийматларга эришади:

$$Z(D) = \frac{328}{9}, Z(N) = \frac{2417}{49}.$$



7.6-шакл

Маҳаллий максимум қийматларни солиштириш Z функциянинг N нуқтада глобал максимумга эришишини кўрсатади. D ва N нуқтанинг кординаталари ва улардаги Z функциянинг қиймати қуйидагича топилади:

$D(x^*_1, x^*_2)$ нуқта $x_2=6$ тўғри чизиқда ва $x_1=4/x_2$ эгри чизиқда ётгани учун унинг координаталари бу тенгламаларни қаноатлантириши керак, яъни

$$\begin{cases} x_2^* = 6 \\ x_1^* = \dfrac{4}{x_2^*} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{2}{3} \\ x_2^* = 6 \end{cases}$$

$$Z^* = x_1^{*2} + x_2^{*2} \qquad Z^* = Z(D) = \frac{328}{9}.$$

Худди шунингдек, N нуқта $x_1=7$ тўғри чизиқ ва $x_2=4/x_1$ эгри чизиқнинг кесишган нуқтаси бўлгани учун унинг x_1^0, x_2^0 координаталари бу тенгламаларни қаноатлантириш керак, яъни

$$\begin{cases} x_1^0 = 7, & x_1^0 = 7, \\ x_2^0 = \dfrac{4}{x_1^0}, & x_2^0 = \dfrac{4}{7}, \\ Z^0 = x_1^{0^2} + x_2^{0^2} & Z^0 = \dfrac{2417}{49}. \end{cases}$$

3-мисол. $x_1+x_2 \le 6,$

$x_1-x_2 \le 1,$

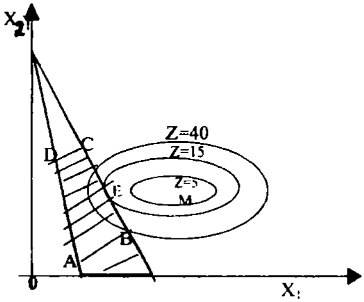
$2x_1+x_2 \ge 6,$

$0{,}5x_1-x_2 \ge -4,$

$x_1 \ge 1,\ x_2 \ge 0,$

$Z=100(x_1-3{,}5)^2+(x_2-4)^2 \to \min.$

Масаланинг режаларидан ташкил топган тўплам ABCD тўртбурчакдан иборат (7.7-шакл).



7.7- шакл.

Z га ихтиёрий Q (Q≥0) қиймат берамиз. Натижада $10(x_1-3,5)^2+$ $+20(x_2-4)^2=Q$ тенглама маркази M(3,5;4) нуқтада бўлган эллипсни ифодалайди. Q нинг қийматини ўзгартириб бориб,эллипсни ўзига паралел равишда силжитиб бориш мумкин. Натижада 7.7-шаклдан кўриш мумкинки,эллипснинг қаварик тўплам ABCD га уринган $E(x_1^*,x_2^*)$ нуқтаси оптимал нуқта бўлади. Бу нуқтадаги Z функциянинг қийматини Z^* билан белгилаймиз. x_1^* ,x_2^*,Z^*_1 номаълумлар қуйидаги шартларни қаноатлантириши керак:

$x_1^* + x_2^* = 6,$

$Z^* = 10(x_1^* - 3,5)^2 + 20(x_2^* - 4)^2.$

Бундан ташқари $10(x_1^*-3,5)^2+20(x_2^*-4)^2$ эллипснинг (x_1^*,x_2^*) нуқтадаги уринмаси оқиш бурчагининг тангенси эса -1 га тенг, чунки бу урунма $x_1+x_2=6$ тўғри чизиқ билан устма – уст тушади. Бу тўғри чизиқ оғиш бурчагининг тангенси эса – 1 га тенг. Иккинчи томондан,

$$Z^*=10(x_1^* - 3,5)^2+20(x_2^*-4)^2.$$

Эллипсга уринма оқиш бурчагининг тангенсини

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-20(x_1-3,5)}{40(x_2-4)}$$

формула орқали топиш мумкин. Демак,

$$\frac{-(x^*_1-3,5)}{2(x^*_2-4)} = -1,$$

яъни

$$x^*_2-4=0,5(x^*_1-3,5).$$

Шундай қилиб, масаланинг оптимал ечими қуйидаги системанинг ечимидан иборат бўлади:

$$\left.\begin{array}{r} x_1^* + x_2^* = 6, \\ x_2^* - 4 = 0{,}5(x_1^* - 3{,}5), \\ Z^* = 10(x_1^* - 3{,}5)^2 + 20(x_2^* - 4) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^* = 2{,}5, \\ x_2^* = 3{,}5, \\ Z^* = 15. \end{array}$$

3-§. Шартсиз оптималлаштириш масаласи

Фараз қилайлик, шартсиз экстремум масаласининг ечимини топиш талаб қилинган бўлсин, яъни $f(X)= f(x_1,x_2,...,x_n)$ функциянинг максимумини (минимумини) $X=(x_1,x_2,...,x_n)\in E_n$ нуқталарда қидириш керак бўлсин.

$f(X)$ функция биринчи тартибли ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлса, унинг экстремуми қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$\partial f(X)/\partial x_j=0, \quad j=\overline{1,n} \qquad (7.17)$$

Демак, берилган $f(X)$ функция X_0 нуқтада экстремумга эга бўлиши учун бу нуқта (7.17) системанинг ечими бўлиши керак.

Ҳақиқатан, агар $f(X)$ функция X_0 нуқтада маҳаллий максимумга эришса, шундай $\varepsilon>0$ сон мавжуд бўладики, ихтиёрий $X\in\varepsilon(X_0)$ нуқта учун ($\varepsilon(X_0)$ X_0 нуқтанинг кичик ε атрофидаги нуқталар тўплами)

$f(X) \leq f(X_0)$ тенгсизлик бажарилади.

$X\in\varepsilon(X_0)$ нуқтада $X=X_0+hl_j$, $0<|h|<\varepsilon$ кўринишда ёзамиз, бу ерда l_j ($j=\overline{1,n}$) бирлик векторлар. У ҳолда $0<|h|<\varepsilon$ шартни қаноатлантирувчи h учун

$$f(X_0+hl_j)- f(X_0)\leq 0,\ j=\overline{1,n} \qquad (7.18)$$

ўринли бўлади. Бундан

$$\frac{f(X_0+hl_j)-f(X_0)}{h} \leq 0,\ h>0, \qquad (7.19)$$

ва

$$\frac{f(X_0+hl_j)-f(X_0)}{h} \geq 0,\ h<0. \qquad (7.20)$$

(7.19) ва (7.20) тенгсизликлардан $h\to+0$ ва $h\to-0$ да лимитга ўтиб мос равишда $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j}\leq 0$, ва $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j}\geq 0$, тенгсизликларни ҳосил қилиш мумкин. Булардан эса

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j}=0,\ j=\overline{1,n} \qquad (7.21)$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Худди шундай йўл билан X_0 нуқта $f(X)$ функцияга маҳаллий минимум берувчи нуқта бўлган ҳолда ҳам (7.21) тенгликлар X_0 нуқтада $f(X_0)$ функция маҳаллий максимум ёки минимумга эга бўлиши учун, шу нуқтада ундан n та x_1, x_2, , x_n номаълумлар бўйича олинган хусусий ҳосилалар 0 га тенг бўлиши кераклигини кўрсатади. Лекин бундан (7.17) шартни қаноатлантирувчи ҳар қандай нуқта ҳам функцияга маҳаллий минимум ёки максимум қиймат беради деган хулоса келиб чиқмайди. Масалан, бир аргументли f (x) функция учун f'(x)=0 шарт эгилиш нуқтасида ҳам ўринли бўлиб, бу нуқтада функция экстремумга эга бўлмаслиги мумкин. Худди шунингдек, икки аргументли $f(x_1, x_2)$ функция учун $\frac{\partial f}{\partial x_1}=0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$ шартлар эгилиш нуқтасида ҳам бажарилиб, бу нуқтада функция экстремумга эга бўлмаслиги мумкин.

(7.17) системанинг ечимларини **стационар нуқталар** деб атаймиз. Берилган f(X) функция экстремумга эришадиган нуқта стационар нуқта бўлади, лекин ҳар қандай стационар нуқтада ҳам функция экстремумга эришавермайди.

Демак, (7.17) шарт функция экстремумининг мавжудлиги учун зарурий шарт, лекин у етарли шарт эмас. Қуйидаги теорема стационар нуқтанинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари узлуксиз бўлган n ўзгарувчили узлуксиз $f(X)=f(x_1, x_2, \quad , x_n)$ функциянинг экстремум нуқтаси бўлиши учун етарлилиқ шартини кўрсатади.

Теорема. X_0 стационар нуқта экстремум нуқта бўлиши учун шу нуқтада **Гессе матрицаси** деб аталувчи

$$H[X_0]=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ & & & \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

матрица мусбат аниқланган (бу ҳолда X_0 минимум нуқта) ёки манфий аниқланган (бу ҳолда X_0 максимум нуқта) бўлиши етарлидир.

Исботи. Тейлор теоремасига асосан, $0<\theta<1$ да

$$f(X_0+h)-f(X_0)=\nabla f(X_0)h+1/2\ h'H[X_0+\theta\ h]\cdot h, \qquad (7.22)$$

бу ерда $h=(h_1, h_2, ..., h_n)$ n ўлчовли вектор устун, h' эса n ўлчовли вектор қатор ва $|h_j|$ $(j=\overline{1,n})$ етарли даражада кичик сон, $H[X_0+\theta\ h]$ - Гессе матрицасининг $X_0+\theta h$ нуқтадаги қиймати. $\nabla f(X_0)=\left(\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_1};\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_2};...\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_n}\right)'$ - **n ўлчовли градиент** деб аталувчи вектор.

X_0 нуқта стационар нуқта бўлганлиги учун бу нуқтада (7.21) ўринли бўлади, демак, бу ҳолда

$$\nabla f(X_0)=0. \qquad (7.23)$$

(7.22) ва (7.23) дан

$$f(X_0+h)-f(X_0)= 1/2\ h'H[X_0+\theta\ h]\cdot h. \qquad (7.24)$$

Фараз қилайлик, X_0 минимум нуқта бўлсин. У ҳолда

$$f(X_0+h)>f(X_0)$$

тенгсизлик ихтиёрий $h\neq 0$ учун ўринли бўлади, демак, бу ҳолда

$$1/2\ h'H[X_0+\theta\ h]\cdot h>0.$$

$f(X)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи узлуксиз бўлгани учун $1/2\ h'Hh$ миқдор X_0 ва $X_0+\theta\ h$ нуқталарда бир хил ишорали бўлади ва $h'H[X_0]h$ квадратик формадан иборат бўлади. Шунинг учун бу форманинг (жумладан $h'H[X_0+\theta\ h]\cdot h$ форманинг) мусбат бўлиши $H[X_0]$ нинг мусбат аниқланган матрица бўлишига боқлиқ.

Демак, X_0 стационар нуқта минимум нуқта бўлиши учун шу нуқтадаги Гессе матрицаси ($H[X_0]$) мусбат аниқланган бўлиши етарли экан. Худди шундай йўл билан X_0 стационар нуқтанинг максимум нуқта бўлиши учун $H[X_0]$ нинг манфий аниқланган бўлиши етарли эканлигини кўрсатиш мумкин.

1-мисол. Берилган функция экстремумга текширилсин:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$$

Ечиш. Функция экстремуми мавжудлигининг зарурий шарти:

$$\nabla f(X_0)=\left(\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_1};\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_2};\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_3}\right)'=0$$

Бундан $\partial f/\partial x_1=0,\quad \partial f/\partial x_2=0,\quad \partial f/\partial x_3=0.$

Бу тенгламаларда тузилган системанинг ечими $X_0=(1/2,\ 2/3,\ 4/3)$ стационар нуқта бўлди. Етарлилик шартининг бажарилишни текшириш учун Гессе матрицасини X_0 нуқтада тузамиз:

$$H[X_0]=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Бу матрицанинг бош минорлари мос равишда 2, 4, -6. Маълумки, агар матрицанинг бош минорларидан тузилган сонлар кетма-кетлиги ишора алмашинувчи бўлса, берилган матрица манфий аниқланган бўлади. Бундан кўринадики, $H[X_0]$ матрица манфий аниқланган экан. Демак, X_0 нуқтада $f(x_1,x_2,x_3)$ функция максимумга эришади. Юқорида келтирилган мисолда $f(x_1,x_2,x_3)$ни $-f(x_1,x_2,x_3)$ га алмаштириб, $X_0=(1/2;2/3;4/3)$ нуқтани минимум нуқта эканлигини кўрсатиш мумкин.

Агар $H[X_0]$ ноаниқ матрица бўлса, X_0 нуқта эгилиш нуқта бўлади, яъни бу нуқтада функция экстремумга эришмайди. Буни қуйидаги мисолда кўрсатамиз.

2-мисол.

$$f(x_1,x_2)=8x_1x_2+3x_2^2$$

функция экстремумга текширилсин.

Ечиш. Экстремум мавжудлигининг зарурий шартига кўра $\nabla f(X_0)=0$. Демак $\partial f/\partial x_1=0$, $\partial f/\partial x_2=0$, яъни $8x_2=0$, $8x_1+6x_2=0$ бўлиши
керак. Бу тенгламалардан тузилган системани ечиб, $X_0=(0,0)$ стационар нуқтани ҳосил қиламиз. Бу нуқтани экстремал нуқта бўлишлик шартини текшириш учун Гессе матрицасини тузамиз

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

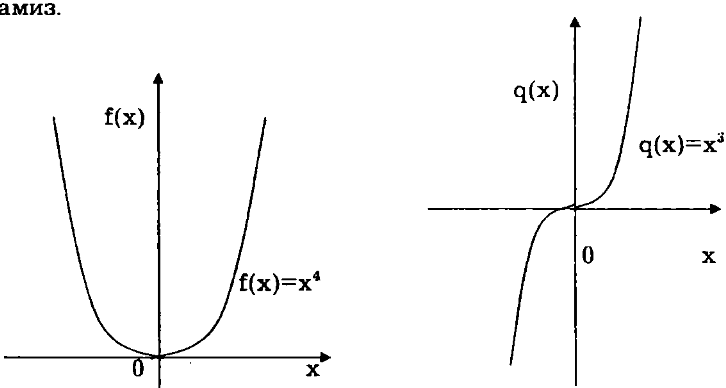
Бу матрицанинг бош минорлари: $M_{11}=6>0$, $M_{22}=0$. Матрица детерминанти эса $-64<0$. Демак Гессе матрицасининг ишораси аниқланмаган. Бу ҳолда $X_0=(0,0)$ нуқта эгилиш нуқта бўлади.

Юқорида кўрилган теоремадаги экстремум мавжудлигининг етарлилик шартлари бир аргументли $f(x)$ функция учун қуйидагича бўлади. Фараз қилайлик, x_0 стационар нуқта бўлсин, у ҳолда $f''(x_0)<0$ бўлса, x_0 стационар нуқтада функция максумимга, $f''(x^0)>0$ бўлганда эса минимумга эришади. Агар $f''(x_0)=0$ бўлса, юқори тартибли ҳосилаларнинг x_0 нуқтадаги қийматларини текшириш керак. Бу ҳолда қуйидаги теорема ўринлидир.

2-теорема. x_0 стационар нуқтада $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, $f^{(n-1)}(x_0)=0$ ва $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ бўлса, бу нуқта а) n тоқ сон бўлганда эгилиш нуқта;

б) n жуфт сон бўлганда экстремал нуқта бўлади ҳамда $f^{(n)}(x_0)<0$ да функция максимумга, $f^{(n)}(x_0)>0$ да минимумга эришади.

Бу теореманинг исботини ўқувчиларга машқ сифатида ҳавола қиламиз.



а) б)

7.8- шакл.

3-мисол.

1) $f(x)=x^4$ функциянинг экстремумга текширинг

$$f'(x)=4x^3$$

бундан x=0 стационар нуқта бўлади.

$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0; f^{(4)}(0)\neq 0.$

n=4 жуфт сон. Демак, x=0 нуқта функция учун экстремал нуқта бўлади.

$f^{(4)}(0)=24>0$ бўлгани учун x=0 нуқтада берилган функция минимумга эришади. (7.8 а-шакл).

2) $g(x)=x^3$,

$g'(x)=3x^2$, x=0 стационар нуқта

$g'(0)=g''(0)=0$, $g'''(0)=6\neq 0$

n=3 тоқ сон. Демак, x=0 нуқта функциянинг эгилиш нуқтаси бўлади (7.8 б-шакл).

Агар E_n да аниқланган f(X) функция X^* нуқтада глобал (абсолют) максимум (минимум)га эга бўлса, у шу нуқтада маҳаллий максимум (минимумга) эга бўлади. Демак, X^* (7.17) системанинг ечими бўлиши керак. Шунинг учун f(X) функцияга глобал максимум (минимум) қиймат берувчи нуқтани топиш учун (7.17) системанинг ҳамма ечимларини топиб, уларнинг ҳар бирида f(X) нинг қийматини ҳисоблаб солиштирилади. Шу қийматлар орасида энг каттаси (энг кичиги) функциянинг глобал максимуми (минимуми) бўлади.

Лекин номаълумлар сони кўп бўлиб, система ягона ечимга эга бўлмаса, (7.17) системани ечиш қийин масала ҳисобланади ва умуман (7.17) системани ихтиёрий кўринишда бўлган ҳол учун ечиш схемасининг ўзи мавжуд эмас. Шунга кўра бу системани ечиш учун турли тақрибий усулларни қўллаш мумкин. Улардан бири қуйидаги Ньютон-Рафсон усулидир. Бу усул чизиқсиз тенгламалар системасини сонли ечиш усулидан иборат.

Фараз қилайлик, умумий ҳолда $\varphi_i(X)=0,\quad i=\overline{1,m}$; $X=(x_1, \quad x_n)$ тенгламалар системаси ва ихтиёрий X^k нуқта (маълум яқинлашиш) берилган бўлсин. У ҳолда Тейлор формуласига кўра

$$\varphi_i(X)\approx\varphi_i(X^k)+[\nabla\varphi_i(X^k)]'(X-X^k), i=\overline{1,m}.$$

Демак, берилган тенгламалар сисмемасини қуйидаги системага алмаштириш мумкин:

$$\varphi_i(X^k)+[\nabla\varphi_i(X^k)]'(X-X^k)=0, i=\overline{1,m}$$

ёки матрица формулада

$$A_k+B_k(X-X^k)=0.$$

Бу ерда барча $\varphi_i(X^k)$лар ўзаро боғлиқ эмас деб фараз қилинса, B_k махсус матрица бўлади. Бу ҳолда юқоридаги тенгламадан

$$X=X^k-B_k^{-1}A_K$$

ҳосил бўлади.

Ньютон-Рафсон усулининг ғояси қуйидагидан иборат. Биринчи қадамда бошланғич нуқта X^0 берилади. Агар $X^к$ топилган бўлса юқоридаги тенгламадан фойдаланиб, янги $X^{к+1}$ нуқтани координаталарини топилади. $X^m \approx X^{m-1}$ бўлганда ҳисоблаш жараёни тўхтатилади ва X^m системанинг тақрибий ечими бўлади. Усулнинг яқинлашиши бошланғич X^0 нуқтани танлашга боғлиқ. Агар бу нуқта нотўғри танланса, итерациялаш жараёни узоқлашувчи бўлиши ҳам мумкин. Ньютон усулининг камчилиги шундан иборатки, унда яхши бошланғич нуқтани танлаш йўллари кўрсатилмаган.

4-§. Шартлари тенгламалардан иборат бўлган шартли экстремум масаласи ва уни ечиш учун Лагранж усули

Фараз қилайлик (7.2), (7.4) масалани ечиш талаб қилинсин, яъни $g_i(x_1,\ x_2,\ \ \ x_n)=b_i\ \ i=\overline{1,m}$ тенгламалар системасини қаноатлантирувчи ва $Z=f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ функцияга максимум (минимум) қиймат берувчи $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$ нуқтани топиш керак бўлсин. $g_i(x_1,\ x_2,\ \ x_n)$ ва $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциялар ва уларнинг ҳаммасидан $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ номаълумлар бўйича олинган хусусий ҳосилалари узлуксиз деб фараз қиламиз. Номаълумларга номанфийлик шарти қўйилмаганда масалани Лагранжнинг аниқмас кўпайтирувчилар усулини қўллаб ечиш мумкин. Лагранж усулининг ғоясини қуйидаги хусусий ҳолда кўрамиз. Фараз қилайлик, қуйидаги масала берилган бўлсин

$$g(x_1,\ x_2)=b,$$
$$Z=f(x_1,\ x_2)\to \max(\min). \qquad (7.25)$$

Бунда $g(x_1,\ x_2)$ ва $f(x_1,\ x_2)$ функциялар узлуксиз ва дифференциалланувчи функциялар.

$X^0=(x_1^0,x_2^0)$ нуқта $g(x_1,x_2)=b$ тенгламани қаноатлантириб, $Z=f(x_1,x_2)$ функцияга маҳаллий максимум (минимум) қиймат бериш учун қандай зарурий шартни қаноатлантириш керак эканлигини кўрамиз.

$X^0=(x_1^0,x_2^0)$ нуқтада $\partial g(X^0)/dx_1$, $\partial g(X^0)/\partial x_2$ хусусий ҳосилалардан камида бири нолдан фарқли, масалан, $\partial g(X^0)/\ \partial x_2 \neq 0$ бўлсин. У ҳолда ошкормас функциялар ҳақидаги теоремага асосан x_1^0 нинг кичик $\varepsilon>0$ атрофи мавжуд бўладики, бу атрофда $g(x_1,x_2)=b$ тенгламани x_2 га нисбатан ечиш мумкин, яъни $x_2=\varphi(x_1)$, бу ерда φ функция $(x_1^0,\ \ \varphi(x_1^0))$ нуқта атрофида узлуксиз дифференциалланувчидир.

Ҳар бир $(x_1,\ \varphi(x_1))$ нуқта масаланинг жоиз ечимлар тўплами G га тегишли. Шунинг учун $f(x_1,\ x_2)$ функциядан ҳам x_2 ни йуқотиш мумкин, яъни

$$Z=F(x_1)=f(x_1,\ \varphi(x_1)),\ |x_1-x_1^0|<\varepsilon.$$

Лекин, X^0 нуқтада f функция g(x)=b шартни қаноатлантирувчи маҳаллий максимумга (минимумга) эга бўлса, x_1^0 нинг $\varepsilon_0(0<\varepsilon_0<\varepsilon)$ атрофидаги ҳар қандай x_1 учун $F(x_1) \le F(x_1^0)$ $[F(x_1) \ge F(x_1^0)]$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ҳолда $F(x_1)$ функция x_1^0 да шартсиз максимум (минимум) га эришади.

$F(x_1)$ функция x_1^0 нинг ε_0 атрофида дифференциалланувчи ва x_1^0 да шартсиз экстримумга эришгани учун

$$\frac{df(x_1^0)}{dx_1}=0$$

бўлади. F функцияни мураккаб функция сифатида дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dF}{dx_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\bullet\frac{d\varphi}{dx_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_2}\bullet\frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2},$$

бунда ошкормас функцияларга доир теоремага асосан:

$$\frac{d\varphi}{dx_1}=-\frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2}.$$

эканлиги назарга олинади. X^0 нуқтада $F(X^0)$ функция экстремумга эришиши учун қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}-\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\bullet\frac{\partial g(X^0)/\partial x_1}{\partial g(x^0)/\partial x_2}=0.$$

Агар

$$\lambda=\frac{\partial g(X^0)/\partial x_1}{\partial g(X^0)/\partial x_2}\left(\frac{\partial g(X^0)}{\partial x_2}\neq 0\right)$$

белгилаш киритсак, X_0 нуқтанинг экстремал нуқта бўлиши учун қуйидаги зарурий шартларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}-\lambda\dfrac{\partial g(X^0)}{\partial x_1}=0,\\ \dfrac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}-\lambda\dfrac{\partial g(X^0)}{\partial x_2}=0,\\ g(X^0)=b\end{cases} \qquad (7.26)$$

Ҳосил бўлган система учта номаълумли учта тенгламалар системасидан иборат. Бу системанинг ечимидан иборат бўлган $X\in G$ нуқтада f функция маҳаллий максимумга (минимумга) эришмаслиги ҳам мумкин, лекин f функцияга g(x)=b шарт бажарилганда маҳаллий максимум (минимум) қиймат берувчи нуқта албатта (7.26) системанинг ечими бўлиши керак. Демак, (7.25) масаланинг ечимини топиш учун (7.26) системанинг ҳамма ечимларини топиш керак. Бу система X^0 нуқтанинг тенгламалари берилган (7.25) шаклда бўлган масала ечими бўлишининг зарурий шартларидир. Бу шартларни қуйидаги формал усул билан ҳам ҳосил қилиш мумкин. Бунинг учун

$$F(X,\lambda)=f(X)+\lambda(b-g(X))$$

функцияни тузамиз. Бу функциядан x_1, x_2 ва λ лар бўйича хусусий ҳосилалар олиб уларни 0 га тенглаймиз:

$$\begin{cases} \partial F/\partial x_j=\partial f/\partial x_j-\lambda g\ /\partial x_j=0; j=1,2,3,... \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=b-g(X)=0 \end{cases}$$

Ҳосил бўлган система (7.26) системанинг ўзидан иборат. Бу ерда F- Лагранж функцияси, λ - Лагранж кўпайтувчилари деб аталади. Энди умумий ҳолни, яъни номаълумлар сони n та ва тенгламалар сони m (m<n) та бўлган (7.2), (7.4) масалани кўрамиз. Бу масала учун Лагранж функцияси

$$F(X,\Lambda)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b-g_i(X))$$

кўринишда бўлади. Бу ерда $X=(x_1,x_2, \quad .x_n)$; $\Lambda=(\lambda_1,...\lambda_m)$. Маҳаллий экстремум мавжудлигининг зарурий шарти

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(X,\Lambda)}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f(X)}{\partial x_j}-\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}=0 \\ \dfrac{\partial F(X,\Lambda)}{\partial x_j}=b_i-g_i(X)=0 \end{cases} \qquad (7.27)$$

тенгламалар системасидан иборат. Агар f(X) функция X_0 (x_1^0, x_n^0) нуқтада экстремумга эга бўлса, шундай $\Lambda^0=(\lambda_1^0; \quad \lambda_m^0)$ вектор мавжуд бўладики, унинг учун (x_1^0; $\quad x_n^0$; λ_1^0; $\quad$; λ_m^0) нуқта (7.27) системанинг ечими бўлади. Ҳақиқатдан ҳам X^* (7.2) – (7.4) масаланинг экстремум ечими бўлсин. У ҳолда g_i $(X^*)=b_i$, $i=\overline{1,m}$. Бундан

$F(X^*, \Lambda)=f(X^*)$, демак,

$$\frac{\partial F(X^*,\Lambda)}{\partial x_j}=\frac{\partial f(X^*)}{\partial x_j}=0,\quad j=\overline{1,n}.$$

f(X) функция X* нуқтада экстремал қийматга эришса, бу нуқта (7.27) системанинг ечими бўлиши керак. Лекин (7.27) шарт етарли эмас. (7.27) системанинг ечими f(X) функцияга экстремум қиймат бермаслиги ҳам мумкин.

Лагранж усулининг амалий аҳамияти шундан иборатки, бунда бир ўзгарувчиларни бошқалари орқали ифодалаш ёки ҳамма ўзгарувчиларни ўзаро боғлиқ эмаслигини назарга олиш талаб қилинмайди ҳамда шартли оптималлаштириш масаласи шартсиз оптималлаштириш масаласига келтирилади. Бу усулнинг камчилиги (7.27) системанинг ечиш мураккаблиги билан боғлиқ. Бундан ташқари шундай масалалар ҳам учрайдики, уларнинг экстремал режалари мавжуд бўлишига қарамай уларга мос келувчи (7.27) система ечимга эга бўлмайди. Масалан, қуйидаги масалани қарайлик,

$$x_1^2+x_2^2=0,$$
$$z=x_1\to\min.$$

Бу масаланинг аниқланиш соҳаси ягона X=(0,0) нуқтадан иборат бўлиб, шу нуқтанинг ўзи экстремал нуқта бўлади. Лекин бу масала учун мос бўлган (7.27) системанинг ечиб буни аниқлаш қийин. Ҳақиқатдан, Лагранж функцияси $F(x_1,x_2,\ \lambda_1)=x_1+\lambda_1(x_1^2+x_2^2)$ дан $x_1,x_2,\ \lambda_1$ лар бўйича хусусий ҳосилалар олиб уларни 0 га тенгласак,

$$\begin{cases}1+2x_1\lambda_1=0,\\ 2\lambda_1x_2=0,\\ x_1^2+x_2^2=0.\end{cases}$$

тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу системанинг ечими эса X=(0,0) нуқтани бермайди.

Бундай ҳолларнинг олдини олиш ва Лагранж усулини кенгроқ қўллашга имкон яратиш учун Лагранж функциясини қуйидаги

$$F(X,\Lambda)=\lambda_0 f(x^0)\ +\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-g_i(x))\quad(7.28)$$

кўринишда ёзиш мақсадга мувофиқ эканлиги аниқланган. Бу ҳолда (7.27) системани ечишдаги формал қийинчиликлар енгиллашади ва $\lambda_0=0$ да берилган масала хос чегаравий шартли бўлади. Юқоридаги мисолда бунга ишонч ҳосил қилиш мумкин. Агар f(X) функция X_0 нуқтада экстремумга эришса, у

$$\lambda_0(\partial f(X^0)/\partial x_j)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\partial g_i(X^0)/\partial x_j=0,\qquad j=\overline{1,n}$$

$$g_i(X^0)=b_i,\qquad i=\overline{1,m}\qquad\qquad(7.29)$$

тенгламалар системасини қаноатлантириш керак. ($\lambda_i(i=\overline{1,m})$ лардан камида биттаси нолдан фарқли). Бу m+n та тенгламалар системаси шартли оптималлаштириш масаласининг ечими мавжудлигининг зарурий шарти ҳисобланади. Бу шартни (7.28) Лагранж функциясининг $x_j(j=\overline{1,n})$ ва $\lambda_i(i=\overline{1,m})$ лар буйича хусусий ҳосилаларни 0 га тенглаб ҳосил қилиш мумкин. Умумийликни бузмасдан (7.29) да λ_0 ни 0 ёки 1 га тенг деб қабул қилиш мумкин. Бу ўринда қуйидагиларга эътибор бериш керак:

1. Агар X^0 нуқтада $Q=\left(\dfrac{\partial gi}{\partial x_j}\right)$ матрицанинг r (Q) ранги ва $Q_f=(Q/f)$ матрицанинг ранги $r(Q_f)$ $[r(Q_f<m+1)]$ тенг бўлса, яъни $r(Q)=r(Q_f)$ бажарилса, берилган масала нормал масала бўлади ва $\lambda_0=1$ деб қабул қилиш мумкин.
2. X_0 нуқтада $r(Q_f)>r(Q)$ тенгсизлик, бажарилганда (7.29) шартни қаноатлантирувчи $\lambda_i(i=\overline{1,m})$ лар орасида 0 дан фарқлилари бўлиши учун $\lambda_0=0$ деб қабул қилиш мумкин.

3. Агар X_0 нуқтада $r(Q_f)$ = $r(Q)$ = m тенглик бажарилса, $\lambda_i (i=\overline{1,m})$ бир қийматли аниқланади.
4. X_0 нуқтада $r(Q_f) > r(Q)$ ёки $r(Q_f) = r(Q) < m$ тенгсизликлар ўринли бўлганда эса $\lambda_i (i=\overline{1,m})$лар кўп қийматли аниқланади.

Лагранж кўпайтувчилари иқтисодий маънога эга эканини кўрсатиш учун (7.4) тенгламалар системасининг $b_i (i=\overline{1,m})$ озод ҳадлари маълум бир интервалда ўзгарувчан бўлсин деб фараз қиламиз. У ҳолда f(X) функцияга экстремал қиймат берувчи нуқта ҳам ўзгаради. Бу нуқтанинг координатлари $b(b_1, \ldots, b_n)$ векторнинг функциясидан иборат, яъни $x_j(b)=x_j(b_1, b_2, \ldots b_m)$, $j=\overline{1,n}$.

Буни назарга олиб тузилган Лагранж функцияси ҳам b векторининг функциясидан иборат бўлади, яъни

$$F(b)=f(X(b))+\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b)[b_i-g_i(X(b))]$$

Бу функциядан b_i бўйича ҳосила олиб

$$\frac{\partial F(b)}{\partial b_i}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m} \lambda i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial b_i}+\sum_{i=1}^{m}[b_i-g_i(X(b))]\frac{\partial \lambda_i}{\partial b_i}+\lambda_i, i=\overline{1,m}$$

эга бўламиз. Бундан (7.27) га асосан

$$\frac{\partial F(b)}{\partial b_i}=\lambda_i, i=\overline{1,m}.$$

$F(X^*,\Lambda)=f(X^*)$ тенглик ўринли бўлганлиги сабабли

$$\partial f(X^*)/\partial b_i=\lambda_i, \quad (i=\overline{1,m}).$$

Бу тенгликка асосан λ_i b_i озод ҳадларнинг (ресурсларинг) ўзгариши мақсад функциясига қандай таъсир кўрсатишини билдиради. λ_i нинг миқдорига қараб ҳар бир b_i параметрни оптимал ечимга қўшган ҳиссасини аниқлаш мумкин

$$\frac{\partial f(X)}{\partial b_i} \cong \frac{\Delta f}{\Delta b_i}=\lambda_i \quad \text{ёки} \quad \Delta f=\lambda_i \Delta b_i$$

Агар $\Delta b=1$ бўлса $\Delta f=\lambda_i$, яъни b_i параметрни бир бирликка ўзгартириш натижасида мақсад функциянинг қиймати λ_i бирликка ўзгаради.

Шундай қилиб, λ_i ларнинг $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$ қийматлари маълум бўлса, масаланинг ҳар бир чегаравий шартининг оптимал ечими $f(X^0)$ га қўшган ҳиссасини аниқлаш мумкин. Жумладан, $\lambda_i^0=0$ бўлганда тегишли тенглама масала учун аҳамиятсиз бўлади. Бундай тенгламани ташлаб юбориш ҳам мумкин. Агар $\lambda_i^0>0$ бўлса, у ҳолда

$$g_i(X)=b_i$$

тенгламадаги озод ҳадни бир бирликка ўзгартирсак, Z=f(X) функциянинг қиймати λ_i^0 миқдорга ўзгаришини кўрсатади.

Классик оптималлаштириш масаласи (7.2)-(7.4) учун яратилган Лагранж усулини номаълумларга номанфийлик шарти қўйилган ҳол учун ҳамда шартлари тенгсизликлардан иборат бўлган шартли оптималлаштириш масалалари учун ҳам умумлаштириш мумкин.

Фараз қилайлик, (7.2)-(7.4) масалада номаълумларга номанфийлик шарти киритилган бўлсин, яъни қуйидаги масалани ечиш талаб қилинсин:

$$g_1(x_1,x_2,\quad .,x_n)=b_i,\ i=\overline{1,m},\ m<n, \qquad (7.30)$$

$$x_j \geq 0,\ j=\overline{1,n}, \qquad (7.31)$$

$$Z=f(x_1,x_2,\quad .,x_n)\to \max(\min) \qquad (7.32)$$

Бу ерда f ва g_i функциялар узлуксиз ва биринчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга. Мақсад функция $x_j \geq 0$ шарт бажариладиган соҳанинг ички нуқталарида ёки чегарасида экстремумга эришиши мумкин.

Экстремум нуқтани X* билан белгилаймиз. Агар X* мумкин бўлган режалар тўпламининг ички нуқтаси бўлса, у ҳолда экстремум мавжудлигининг зарурий шарти (7.29) дан иборат бўлади. Демак, биринчи қадамда (7.29) системанинг $x_j \geq 0$ соҳада ётувчи ҳамма ечимларини топиб, улар учун Z функциянинг қийматини аниқлаш, сўнгра $x_j \geq 0$ соҳанинг чегарасини текшириш керак. Чегарада камида битта $x_j=0$ бўлади. Фараз қилайлик фақат битта x_j, масалан $x_k=0$ бўлсин. бу ҳолда m та тенгламали ва n-1 ўзгарувчили масалани кўрамиз. Бу масала учун (7.29) системани ечиб, $x_j \geq 0$ соҳанинг ичида ётувчи ҳамма ечимларини топамиз ва ҳар бир ечимдаги Z функциянинг қийматини аниқлаймиз. Ҳар бир номаълумни 0 га тенглаш мумкин бўлганлиги учун n-1 ўзгарувчили ва m та тенгламали системани ечиш керак. Сўнгра 2 та ўзгарувчини 0 га тенг деб қабул қиламиз ва n-2 ўзгарувчили m та тенгламали масалани ечамиз. Бундай масалалар сони C_n^2 га тенг.

Бундан сўнг 3 та ўзгарувчини 0 га тенг деб қабул қиламиз ва ҳоказо, охирида n-m та номаълумга 0 қиймат берамиз ва m ўзгарувчили m та тенгламалар системасидан иборат масалани ечамиз ва қолган m та номаълумнинг қийматларини топамиз. Бу нуқталарнинг ҳар бирида Z функциянинг қийматини ҳисоблаймиз. У қийматлар ичида энг каттаси Z функциянинг глобал максимумини, энг кичиги эса глобал минимумини беради. Энди ноъмалумларга номанфийлик шартлари қўйилмаган, лекин чегаравий шартларнинг базилари тенгсизликлардан иборат бўлган қуйидаги масалани кўрамиз:

$$g_i(x_1,x_2,\quad ,x_n)\leq b_i, i=\overline{1,m_1},$$

$$g_i(x_1,x_2,\quad ,x_n)\geq b_i, i=\overline{m_1+1,m_2},$$

$$g_i(x_1,x_2,\quad ,x_n)=b_i, i=\overline{m_2+1,m},$$

$$Z=f(x_1,x_2,\quad ,x_n)\to \max(\min)$$

Масаладаги тенгсизликларга $x_{si}(i=\overline{1,m_2})$ қўшимча ўзгарувчиларни киритиб, қуйидаги тенгламлар системасини ҳосил қиламиз:

$$g_i(x_1,x_2,\quad ,x_n)+x_{si}=b_i,\ i=\overline{1,m_1},$$

$$g_i(x_1,x_2,\quad ,x_n)-x_{si}=b_i,\ i=\overline{m_1+1,m_2},$$

$$g_i(x_1,x_2,\quad,x_n)= b_i,\ i=\overline{m_2+1,m},$$
$$x_{si}\geq 0,\ i=\overline{1,m_2},$$
$$f(x_1,x_2,\quad,x_n)\to \max(\min).$$

Берилган масаладаги $g_i(x_1,x_2,\quad,x_n)\leq b_i$ шарт $x_{si}\geq 0,\ i=\overline{1,m}$ шартга, $g_i(x_1,x_2,\quad,x_n)\geq b_i$, шарт эса $\chi_{si}\leq 0$ $i=\overline{m_1+1,m_2}$, шартга тенг кучлидир.

Z функциянинг глобал экстремумини топиш учун E_n фазодаги номанфий октантнинг ҳамма ички нуқталарини ($x_{si}\geq 0$) ва чегаравий нуқталарини (бунда баъзи $x_{si}=0$) текширишимиз керак бўлади: $x_{si}>0(i=\overline{1,m})$ бўлган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда Лагранж функцияси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$F(X,X_s,\Lambda)=\lambda_0 f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-x_{si}-g_i(X))+\sum_{i=m_1+1}^{m_2}\lambda_i(b_i+x_{si}-g_i(X))+\sum_{i=m_2+1}^{m}\lambda_i(b_i-g_i(X))$$

(7.29) га асосан бу функциядан x_i,λ_i ва x_{si} лар бўйича олинган барча хусусий ҳосилалар 0 га тенг бўлиши керак. Жумладан, бу функциядан x_{si} лар бўйича олинган хусусий ҳосилаларни 0 га тенглаб, қўйидагига эга бўламиз:

$$-\lambda_i=0, i=\overline{1,m};$$
$$\lambda_i=0. i=\overline{m_1+1,m_2}$$

Бундан кўринадики, агар экстримал нуқтада $x_{si}>0(i=\overline{1,m_2})$ бўлса, унга тегишли $\lambda_i=0$ бўлади. Демак, тенгсизлик кўринишидаги шартларни экстримал нуқталарни қидириш жараёнида ташлаб юбориш мумкин. Бошқача айтганда, f(X) функция глобал максимум ёки минумимга эришадиган нуқтада бирор чегаравий шарт қатъий тенгсизликлардан иборат бўлса, бу шартга қарамаслик мумкин.

Номанфий октантнинг чегаравий нуқталарида баъзи $x_{si}=0$ бўлиши мумкин бўлганлиги учун бундай x_{si} га тегишли шарт тенгламадан иборат бўлади, демак, мос λ_i 0 дан фарқли бўлиши мумкин, лекин $\lambda_i^0\cdot x_{si}^0=0$ бўлади $(i=\overline{1,m_2})$. Бу ҳолда f(X) функциянинг глобал экстремумини қўйидаги йўл билан топиш керак.

Энг аввал (7.29) системани тенгсизликлардан иборат шартлар ташлаб юборилган ҳол учун ечамиз. Топилган ҳар бир ечим учун Z функциянинг қийматини топамиз. Сўнгра, масалан, битта тенгсизлик киритиб, бу жараённи такрорлаймиз. Бу ишни ҳар бир тенгсизлик учун бажарамиз. Бундай масалалар сони m_2 та бўлади. Кейин эса масалага 2 тадан тенгсизлик киритиб ечамиз (ҳаммаси бўлиб C^2_n та масала). Жараён масалага ҳамма тенгсизликлар киритулгунча давом эттирилади. Ҳамма шартларни қаноатлантирувчи ечимлар орасида Z га энг катта (энг кичик) қиймат берувчи ечим берилган масаланинг глобал максимуми (минимуми) бўлади.

Юқоридаги мулоҳазалардан шуни кўриш мумкинки, агар X^* нуқта f(X) функциянинг глобал экстремуми бўлиб, унга тегишли қўшимча ўзгарувчиларнинг қийматлари x_{si} ва Лагранж кўайтувчилари $\Lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*)$ бўлса, $x_{si}^* = 0$ ёки $\lambda_i^* = 0$ $(i = \overline{1, m_2})$ яъни $\lambda_i^* \cdot x_{si}^* = 0$ бўлади.

Мисол. Лагранж усулидан фойдаланиб, қуйидаги чизиқсиз дастурлаш масаласи ечилсин:

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$Z = x_1 x_2 \to \max.$$

Ечиш. Лагранж функциясини тузамиз:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1).$$

Бу функциядан x_1, x_2 ва λ лар бўйича хусусий хосилалар олиб уларни нолга тенглаймиз. Натижада қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Системани ечиш натижасида берилган масаланинг оптимал ечимини аниқлаймиз:

$$\lambda^* = -\frac{1}{2}, x_1^* = x_2^* = \frac{1}{2}, Z = \frac{1}{4}.$$

Таянч сўз ва иборалар

Чизиқсиз дастурлаш; шартсиз оптималлаштириш масаласи; маҳаллий оптимал ечим; глобал оптимал ечим; сепарабел дастурлаш масаласи; статик масалалар; гипертекислик; гиперсирт; стационар нуқта; Гессе матрицаси; n-ўлчовли градиент; мусбат аниқланган матрица; манфий аниқланган матрица; ноаниқ матрица; эгар нуқта; Ньютон-Рафсон усули; Лагранж кўпайтувчилари; Лагранж функцияси

Назорат саволлари

1. Чизиқсиз дастурлаш масаласи қандай қўйилади?
2. Чизиқли ва чизиқсиз дастурлаш орасидаги фарқ нимадан иборат?
3. Шартсиз оптималлаштириш масаласи нима?
4. Оптималлаштиришнинг классик масаласи нима?
5. Маҳаллий ва глобал оптимал ечим деганда нимани тушунамиз?
6. Сепарабел дастурлаш масаласи қандай ёзилади?
7. Стационар нуқта нима?
8. Функция экстремуми мавжудлигининг зарурий шарти нимадан иборат?
9. Гессе матрицаси қандай матрица?
10. Функция экстремуми мавжудлигининг етарлилик шарти қандай?

11. Шартлари тенгламалардан иборат чизиқсиз дастурлаш масаласини ечишда Лагранж усулининг ғояси қандай?
12. Лагранж функцияси нима ва у қандай тузилади?
13. Лагранж кўпайтувчиларининг иқтисодий маъноси нима?
14. Номаълумларга номанфийлик шарти қўйилган отималлаштиришнинг классик масаласини ечиш учун Лагранж усулининг ғояси нимадан иборат?
15. Шартларида тенгсизликлар қатнашган, лекин номаълумларга номанфийлик шарти қўйилмаган чизиқсиз дастурлаш масаласи Лагранж усули билан қандай ечилади?

Масалалар

График усулидан фойдаланиб, қуйидаги чизиқсиз дастурлаш масаласини ечинг.

1.
$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ & x_1 \geq 0 x_2 \geq 0 \\ & Z = 2(x_1 - 7)^2 + 4(x_2 - 3)^2 \to \min(\max) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0 x_2 \geq 0 \\ & Z = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} & 0.5x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & \geq 0 x_2 \geq 0 \\ & Z = 4(x_1 - 6)^2 + 6(x_2 - 2)^2 \to \min \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 \geq 0 x_2 \geq 0 \\ & Z = x_1^2 + x_2^2 \to \min(\max) \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0 x_2 \geq 0 \\ & Z = x_1^2 + x_2^2 \to \max \end{aligned}$$

Қуйидаги иқтисодий масалаларнинг математик моделини тузинг.

а) n та корхонада бир хил маҳсулот ишлаб чиқарилади. Ҳамма корхоналарда ишлаб чиқариладиган маҳсулотнинг миқдори b бирликдан кам бўлмаслиги керак. Ҳар бир $j(j:\overline{1,n})$ корхонада x_j миқдорида маҳсулот ишлаб чиқаришга сарф қилинадиган ҳаражат ишлаб чиқариладиган маҳсулот миқдорига боғлиқ ва $f(x_j)$ функция кўринишида ифодаланади. Корхоналарнинг ишлаб чиқариш режасини шундай аниқлаш керакки, натижада олинадиган умумий даромад максимал бўлсин.

б) харидорнинг b сўм пули бор. У шу пулга баҳоси P_1, P_2, P_3 сўмдан бўлган 3 хил маҳсулот сотиб олиши мумкин.

Харидорнинг даромад функцияси

$Y(X) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} (\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0)$ кўринишида берилган. Бунда x_1, x_2, x_3 – харидор сотиб оладиган маҳсулотларнинг мос равишдаги миқдори. Қайси маҳсулотдан қанча сотиб олганда, харидорнинг сарф қилган ҳаражати ўзида бор пулдан ошмайди ва унинг даромади максимал бўлади?

Қуйидаги масалаларни Лагранж усули билан ечинг.

7. $x_1 + x_2 = 2$
$x_2 + x_1 = 2$
$Z = x_1 \; x_2 + x_2 \to \max$

8. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$
$Z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \max$

9. $x_1^2 + x_2^2 = 1$
$Z = x_1 + x_2 \to \max$

10. $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 0$
$Z = x_1^2 + x_2^2 \to \max$

11. $x_1^2 + x_2^2 = 1$
$Z = x_1 \cdot x_2 \to \max$

12. $x_1 + x_2 = 200$
$x_1 \geq 0 x_2 \geq 0$
$Z = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2 \to \min$

13. $x_1 + x_2 + x_3 = 4$
$2x_1 - 3x_2 = 12$
$Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3 \to \max(\min)$

14. $2x_1 \cdot x_2 + x_2 \; x_2 = 12$
$2x_1 - x_2 = 8$
$Z = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \to \max(\min)$

VIII БОБ. ҚАВАРИҚ ДАСТУРЛАШ

1-§. Қавариқ тўплам. Қавариқ функциялар

Қавариқ тўплам ҳақидаги баъзи тушунчалар дарсликнинг I боб,2-§ келитирилган. Уларни қуйидаги тушунчалар билан тўлдирамиз. Маълумки

$$X=\{X\in E_n / X=\lambda X_2+(1-\lambda)X_1,\ -\infty<\lambda<+\infty\} \qquad (8.1)$$

нуқталар тўплами X_1, $X_2\in E_n$ нуқталар орқали ўтувчи чизиқни аниқлайди. $0\le\lambda\le 1$ шартни қаноатлантирувчи λ учун (8.1) X_1, $X_2\in E_n$ нуқталарни туташтирувчи кесмани ифодалайди. $0\le\lambda\le 1$ шартни қаноатлантирувчи λ учун $X=\lambda X_2+(1-\lambda)X_1$ нуқта X_1 ва X_2 нуқталарнинг қавариқ комбинациясидан иборат бўлади.

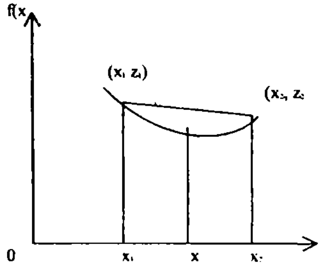
Агар $G\subset E_n$ тўплам ўзининг ихтиёрий X_1 ва X_2 нуқталари билан бирга бу нуқталарнинг қавариқ комбинациясини ҳам ўз ичига олса, бундай тўплам **қавариқ тўплам** дейилади. $G\subset E_n$ қавариқ тўпламга тегишли X нуқтани ихтиёрий X_1, $X_2\in G$ нуқталарнинг қавариқ комбинацияси орқали ифода этиб бўлмаса, бу нуқта G тўпламнинг бурчак нуқтаси дейилади. Бурчак нуқта чегаравий нуқта бўлиши керак, лекин ҳар қандай чегаравий нуқта бурчак нуқта бўлмайди. Баъзи чегаравий нуқталар бурчак нуқталарни туташтирувчи кесмада ётиши мумкин. Агар G тўплам қавариқ тўплам бўлса, у ихтиёрий сондаги X_1, X_2, ..., $X_n\in G$ нуқталарнинг қавариқ комбинациясидан иборат бўлган X нуқтани ҳам ўз ичига олади, яъни агар $X_1\in G$, $X_2\in G$, ..., $X_n\in G$, бўлса,

$$X=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j,\ X\in G,\ \lambda_j\ge 0,\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$$

бўлади.

1-таъриф. Агар $f(X)$ функция $G\subset E_n$ қавариқ тўпламда аниқланган бўлиб, ихтиёрий $X_1\in G$, $X_2\in G$, нуқталар ва $0\le\lambda\le 1$ сон учун

$$f(\lambda X_2+(1-\lambda)X_1)\le\lambda f(X_2)+(1-\lambda)f(X_1) \qquad (8.2)$$

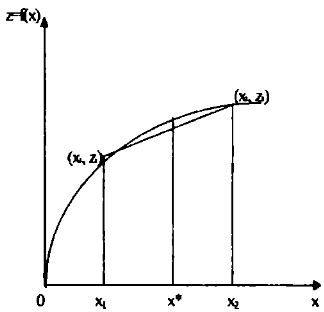


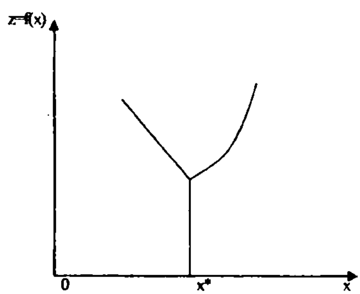
8.1. шакл

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(X)$ функция **пастга қавариқ функция** дейилади. Бошқача айтганда $Z=f(X)$ гипертекслик пастга қавариқ бўлиши учун унинг ихтиёрий иккита (X_1Z_1) ва (X_2Z_2) нуқталарни туташтирувчи кесма гипертекисликнинг сиртида ёки ундан юқорида ётиши керак (8.1-шакл). Агар $f(X)$ функция $G \subset E_n$ қавариқ тўпламда аниқланган бўлиб, ихтиёрий $X_1 \in G$, $X_2 \in G$, нуқталар ва λ сон $(0 \leq \lambda \leq 1)$ учун

$$f(\lambda X_2+(1-\lambda)X_1)\geq \lambda f(X_2)+(1-\lambda)f(X_1) \qquad (8.3.)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(X)$ функцияни **юқорига қавариқ функция** деб аталади. Z=f(X) гипертекислик юқорига қавариқ бўлса, унинг ихтиёрий иккита (X_1 ,Z_1) ва (X_2,Z_2) нуқталарни туташтирувчи кесма шу гипертекисликнинг сиртида ётади ёки унинг пастидан ўтади.





8.2- шакл

8.3-шакл

Агар ихтиёрий иккита X_1 , $X_2 \in G$ нуқталар ва λ сон $(0 \leq \lambda \leq 1)$ учун

$$f(\lambda X_2+(1-\lambda)X_1)<\lambda f(X_2)+(1-\lambda)f(X_1) \qquad (8.4.)$$

ёки

$$f(\lambda X_2+(1-\lambda)X_1)>\lambda f(X_2)+(1-\lambda)f(X_1) \qquad (8.5.)$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, $G\in E_n$ қаварик тўпламда аниқланган $f(X)$ функция қатъий пастга қаварик ёки қатъий юқорига қаварик бўлади.

Геометрик нуқтаи назардан қатъий пастга (юқорига) қаварик функциянинг икки нуқтасини туташтирувчи кесма унга нисбатан юқоридан (пастдан) ўтади.

Агар $f(X)$ функция $G\in E_n$ да қатъий юқорига қаварик бўлса, $f(X)$ функция шу тўпламда қатъий пастга қаварик бўлади ва аксинча. 8.3. шаклда $f(X)$ функция $X>X^*$ да қатъий пастга қаварик бўлиб, $X<X^*$ қатъий пастга қаварик эмас.

1-мисол. $Z=CX$ чизиқли функция E_n фазонинг ҳар қандай нуқтасида пастга (юқорига) қаварик бўлади. Ҳақиқатан, $X_1X_2\in E_n$ ва ихтёрий сон учун

$$C(\lambda X_2+(1-\lambda)X_1)= \lambda CX_2+(1-\lambda)CX_1 \qquad (8.6)$$

ўринли, лекин (8.6) дан кўринадики, чизиқли функция қатъий юқорига ҳам, пастга ҳам қаварик бўла олмайди.

Агар $f(X)$ функция G қаварик тўпламда аниқланган пастга қаварик функция бўлса, ихтиёрий сондаги $X_1X_2,...,X_n\in G$ нуқталар учун қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\begin{aligned} &f\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j\right)\le\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(X_j),\\ &\lambda_j\ge 0, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1. \end{aligned} \qquad (8.7)$$

Худди шунингдек, агар $f(X)$ функция G қаварик тўпламда аниқланган юқорига қаварик функция бўлса, ихтиёрий сондаги $X_1X_2,...,X_n\in G$ нуқталар учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$\begin{aligned} &f\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j\right)\ge\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(X_j),\\ &\lambda_j\ge 0, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1. \end{aligned} \qquad (8.8)$$

Қаварик функцияларнинг айрим **хоссалари** билан танишамиз.

1-хосса. G қаварик тўпламда берилган $f(X)$ функция пастга қаварик бўлса, ихтиёрий ҳақиқий b сон учун $f(X)\le b$ тенгсизликни каноатлантирувчи нуқталар тўплами қаварик бўлади.

Исботи. Фараз қилайлик $X_1X_2,...,X_n \in G$ нуқталар берилган бўлиб, улар $f(X_1) \leq b$ ва $f(X_2) \leq b$ тенгсизлигини қаноатлантирсин. У ҳолда

$$X=(1-\lambda)X_1+\lambda X_2\ ,\ X \in G,$$

нуқта учун $f(X)= f((1-\lambda)\ X_1+\lambda X_2) \leq b$ тенгсизлик ўринли бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $f(X)$ пастга қаварик функция бўлганлиги сабабли:

$$f(X)= f((1-\lambda)\ X_1+\lambda X_2) \leq (1-\lambda)f(X_1)+\lambda f(X_2) \leq b.$$

2-хосса. G қаварик тўпламда берилган $f(X)$ функция юқорига қаварик бўлса, b ихтиёрий сон бўлганда

$$f(X) \geq b$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами юқорига қаварик бўлади.

3-хосса. Иккита G_1 ва G_2 қаварик тўпламнинг кесишмаси ҳам қаварик тўплам бўлганлиги сабабли юқоридаги 1-2 хоссалардан қуйидаги хулосани чиқариш мумкин: G қаварик тўпламда аниқланган $g_i(X)(i=\overline{1,m})$ функциялар пастга (юқорига) қаварик бўлиб, b_i $(i=\overline{1,m})$ ихтиёрий сонлар бўлганда $g_i(X) \leq b_i (g_i(X) \geq b_i), i=\overline{1,m}$ тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи нуқталар тўплами пастга (юқорига) қаварик бўлади.

4-хосса. G қварик тўпламда аниқланган $g_i(X)(i=\overline{1,m})$ функциялар пастга (юқорига) қаварик бўлса, уларнинг номанфий чизиқли комбинациясидан иборат бўлган

$$g(X)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X), \lambda_i \geq 0, i=\overline{1,m}, \qquad (8.9)$$

функция ҳам пастга (юқорига) қаварик бўлади.

Исботи. Фараз қилайлик $g_i(X)$ функциялар пастга қаварик функциялар бўлсин,яъни

$$g_i(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2) \leq \lambda g_i(X_1)+(1-\lambda)g_i(X_2) \qquad (8.10)$$

тенгсизлик ихтиёрий ҳақиқий сон $0 \leq \lambda \leq 1$ учун ўринли бўлсин.

У ҳолда

$$g(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2).$$

Бундан (8.10) га асосан

$$g\ (\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(\lambda g_i(X_1+(1-\lambda)g_i(X_2))$$

$$0 \leq \lambda_i \leq 1, i=\overline{1,m}$$

ёки

$$g\ (\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)\le\lambda\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X_1)+$$
$$+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X_2)=\lambda g(X_1)+(1-\lambda)g(X_2). \qquad (8.11)$$

(8.11) дан $g(X)$ функциянинг пастга қавариқ эканлиги келиб чиқади. Худди шунингдек, юқорига қавариқ функцияларнинг чизиқли комбинацияси ҳам юқорига қавариқ бўлишини исбот қилиш мумкин.

5-хосса. G қварик тўпламда аниқланган $f(X)$ функция пастга (юқорига) қавариқ бўлиши учун у ўз ичига олган номаълумларнинг ихтиёрий бири бўйича, қолганларнинг тайин қийматларида, пастга (юқорига) қавариқ бўлиши зарур ва етарлидир (исботсиз қабул қиламиз).

6-хосса. Агар $f_1(X)$, $f_2(X)$,..., $f_n(X)$ функциялар қавариқ G тўпламда аниқланган қавариқ функциялар бўлса,

$$f(X)=\max_{1\le i\le m} f_i(X)$$

функция ҳам қавариқ бўлади.

2-§. Қавариқ функциянинг экстремуми

$f(X)$ қавариқ функциянинг $G\subset E_n$ тўпламдаги глобал максимуми (минимуми) деб, ихтиёрий $X\in G$ нуқтада ҳам

$$f(X^0)\ge f(X)\ (f(X^0)\le f(X))$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $X^0\in G$ нуқтага айтамиз. Агар бу тенгсизлик $X^0\in\varepsilon(X^0)$ ($\varepsilon(X^0)=\{X\mid X-X^0\mid<\varepsilon\}$) нуқтада ўринли бўлса, X^0 нуқта $f(X)$ функцияга **маҳаллий максимум (минимум) қиймат берувчи нуқта** бўлади.

Қавариқ функциянинг экстремумига доир қуйидаги теоремаларни келтирамиз:

1-теорема. Агар $f(X)$ функция G қавариқ тўпламда аниқланган пастга қавариқ функция бўлса, унинг ихтиёрий маҳаллий минимуми глобал минимум бўлади.

Исботи. Фараз қилайлик, $f(X)$ функция ва $X^0\in G$ да маҳаллий $X^*\in G$ нуқтада глобал минимумга эришсин. У ҳолда

$$f(X^0)>f(X^*).$$

$f(X)$ функция пастга қавариқ бўлганлиги сабабли, ихтиёрий $0\le\lambda\le1$ учун

$$f(\lambda X^*+(1-\lambda)X^0)>\lambda f(X^*)+(1-\lambda)f(X^0) \qquad (8.12)$$

G тўпламнинг қавариқлигидан эса

$$X=\lambda X^*+(1-\lambda)X^0\in G,\ \lambda\in[0.1].$$

(8.12) даги $f(X^*)$ ни $f(X^0)$ га алмаштирсак,

$$f(\lambda X^{*}+(1-\lambda)X^{0}) \leq \lambda f(X^{*})+(1-\lambda)f(X^{0})= f(X^{0}) \quad (8.13)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. λ сонни шундай танлаб оламизки, натижада $X=\lambda X^{*}+(1-\lambda)X^{0}$ нуқта X^{0} нуқтага иложи борича яқин, яъни $|X-X^{0}|< \varepsilon$ бўлсин. Лекин, бу ҳолда (8.13) дан кўринадики, X^{0} нуқтада $f(X)$ функция маҳаллий минимумга эришмайди. Бу теорема шартига қарама-қаршидир. Демак, $X^{*} = X^{0}$ бўлиши керак.

2-теорема. Агар $f(X)$ функция G қаварик тўпламда пастга (юқорига) қаварик бўлиб, бу тўпламга тегишли иккита $X_1,X_2 \in G$ нуқталарда глобал экстремумга эришса, шу нуқталарнинг қаварик комбинациясидан иборат бўлган ихтиёрий нуқтада ҳам глобал экстремумга эришади.

Исботи. Фараз қилайлик, берилган $f(X)$ функция иккита X_1 ва X_2 нуқталарда глобал минимумга эришсин. У ҳолда ихтиёрий $X \in G$ нуқта учун $m=f(X_1) =f(X_2)< f(X)$ ўринли бўлади. Бу ерда m $f(X)$ функциясининг глобал минимум қиймати. Энди X_1 ва X_2 нуқталарнинг қаварик комбинациясидан иборат бўлган $\hat{X}$ нуқтани оламиз:

$$\hat{X}=\lambda X_2+(1-\lambda)X_2$$

ҳамда бу нуқтадаги $f(X)$ функциянинг қийматини аниқлаймиз:

$$f(\hat{X})= f(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2).$$

$f(X)$ функция пастга қаварик функция бўлгани учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(\hat{X})=f(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)\leq \lambda f(X_1)+(1-\lambda)f(X_2).$$

Бундан $f(X_1)= f(X_2)=m$ эканини ҳисобга олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(\hat{X})= f(X_1)=m.$$

Демак, $\hat{X}$ нуқтада ҳам $f(X)$ функция глобал минимумга эришади. Шу билан теорема исбот қилинди.

Худди шундай йўл билан юқорига қаварик $f(X)$ функция G қаварик тўпламда қаварик бўлиб, унга тегишли иккита X_1 ва X_2 нуқталарда глобал максимумга эришса, у шу нуқталарнинг ихтиёрий қаварик комбинациясидан иборат бўлган X нуқтада ҳам глобал максимумга эришишини кўрсатиш мумкин.

3-теорема. Агар $f(X)$ функция G қаварик тўпламда аниқланган қатъий пастга қаварик функция бўлса, у ўзининг глобал минимумга шу тўпламнинг фақат битта нуқтасида эришади.

Исботи. Фараз қилайлик, $f(X)$ функция иккита $X_1, X_2 \in G$ нуқталарда глобал минимумга эришсин, яъни

$$f(X_1)= f(X_2)=m \qquad (8.14)$$

бу ерда m $f(X)$ функциянинг глобал минимум қиймати. Энди X_1 ва X_2 нуқталарнинг қаварик комбинациясидан иборат бўлган

$$\hat{X}=\lambda X_1-(1-\lambda)X_2.$$

нуқтани қараймиз. Юқорида исбот қилинган тиоремага асосан

$$f(\hat{X})=m. \qquad (8.15)$$

Иккинчи томондан $f(X)$ функция қатъий пастга қаварик бўлганлиги сабабли

$$f(\hat{X})=f(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)< \lambda f(X_1)+(1-\lambda)f(X_2)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан (8.14) га асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$f(\hat{X})=f(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)<m.$$

Шундай қилиб, (8.15) га зид бўлган хулосага келдик. Шунинг учун фаразимиз нотўғри бўлиб, теорема шартини қаноатлантирувчи $f(X)$ функция G тўпламнинг фақат битта нуқтасида глобал минимумга эришади деган хулосага келамиз.

4-теорема. Агар $f(X)$ функция G қаварик тўпламда аниқланган қатъий юқорига қаварик функция бўлса, у ўзининг глобал максимумига шу тўпламнинг фақат битта нуқтасида эришади.

Бу 3-теорема каби исбот қилинади.

5-теорема. Агар $f(X)$ функция G қаварик тўпламда аниқланган пастга қаварик ва дифференциалланувчи функция бўлса, ихтиёрий ички $X^0 \in G$ ва $X \in G$ нуқталар учун

$$[\nabla f(X^0)]'(X-X^0)\le f(X)- f(X^0)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ерда $\nabla f(X^0)$ функциясининг X^0 нуқтадаги градиенти:

$$\nabla f(X^0)=\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n}\right)'$$

Исботи. $f(X)$ функция пастга қаварик бўлганлиги сабабли ихтиёрий $0\le \lambda \le 1$ сон учун

$$f(\lambda X+(1-\lambda)X^0)\le \lambda f(X)+(1-\lambda)f(X^0)$$

ёки

$$f(X^0+\lambda(X- X^0))\le f(X^0)+\lambda(f(X)- f(X^0)).$$

Бундан

$$f(X^0+\lambda(X- X^0))- f(X^0)\le \lambda(f(X)- f(X^0)),$$

ёки

$$\frac{f(X^0+\lambda(X-X^0))-f(X^0)}{\lambda}\le f(X)-f(X^0). \qquad (8.16)$$

У ҳолда Тейлор формуласига асосан

$$f(X^0+\lambda(X-X^0))=f(X^0)+\nabla f(X^0+\theta\lambda(X-X^0))\lambda(X-X^0),\quad 0\le\theta\le 1$$

муносабат ўринли бўлганлиги сабабли ихтиёрий $\lambda\neq 0$ учун (8.16) қуйидагига тенг кучли бўлади:

$$[\nabla f(X^0+\theta\lambda(X-X^0))]'(X-X^0)\le f(X)-f(X^0)$$

Бунда $\lambda\to 0$ да исботлаш талаб қилинган

$$[\nabla f(X^0]'(X-X^0)\le f(X)-f(X^0),\forall X\in G$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Шундай йўл билан, $f(X)$ юқорига қавариқ функция бўлган ҳол учун

$$[\nabla f(X^0]'(X-X^0)\ge f(X)-f(X^0)$$

тенгсизликнинг ўринли эканлигини кўрсатиш мумкин.

6-теорема. Агар $F(X)$ функция G қавариқ тўпламда аниқланган пастга қавариқ ва дифференциалланувчи функция бўлиб, ихтиёрий $X^0\in G$ нуқтада $\nabla f(X^0)=0$ бўлса, $f(X)$ функция X^0 нуқтада глобал минимумга эришади.

Исботи. $f(X)$ функция G қавариқ тўпламда аниқланган пастга қавариқ ва дифференциалланувчи бўлгани учун юқоридан исбот қилинган 5-теоремага асосан

$$[\nabla f(X^0]'(X-X^0)\le f(X)-f(X^0),\quad \forall X\in G. \qquad (8.17)$$

Бундан ташқари теорема шартига кўра

$$\nabla f(X^0)=0.$$

У ҳолда (8.17) дан

$$f(X)-f(X^0)\ge 0,$$

яъни

$$f(X^0)\le f(X),\ \forall X\in G.$$

Демак, X^0 нуқтада $f(X)$ функция энг кичик қийматга (глобал минимумга) эришади.Шу билан теорема исбот қилинди.

7-теорема. Агар $f(X)$ функция G қавариқ тўпламда аниқланган юқорига қавариқ ва дифференциалланувчи функция бўлиб, ихтиёрий $X^0\in G$ нуқтада $\nabla f(X^0)=0$ бўлса, $f(X)$ функция X^0 нуқтада глобал максимумга эришади.

Бу теорема юқоридаги 6-теорема каби исбот қилинади.

3-§. Қавариқ дастурлаш. Кун-Таккер шартлари

Қавариқ дастурлаш оптималлаштириш масаласининг бир бўлими бўлиб, у пастга (юқорига) қавариқ тўпламда минималлаштириш (максималлаштириш) назариясини ўргатади. Бошқача қилиб айтганда, қавариқ дастурлаш масаласи деганда

$$g_i(X)=g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\le b_i,\quad i=\overline{1,m} \qquad (8.18)$$

$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,n}, \qquad (8.19)$$

$$Z=f(X)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)\to\max(\min) \qquad (8.20)$$

кўринишдаги масала назарда тутилади, бунда $g_i(X)$, $f(X)$ функциялар $G \in E_n$ қавариқ тўпламда аниқланган пастга қавариқ функциялар. Агар $f(X)$, $g_i(X)$ функциялар G да аниқланган юқорига қавариқ функциялар бўлса, қавариқ дастурлаш масаласи қуйидаги кўринишда бўлади

$$g_i(X)= g_i(x_1,x_2,...,x_n) \ge b_i, i=\overline{1,m}, \quad (8.21)$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \quad (8.22)$$

$$Z=f(X)= f(x_1,x_2,...,x_n) \to \max. \quad (8.23)$$

(8.18)-(8.20) ва (8.21)-(8.23) масалаларнинг ечимини аниқлашда классик Лагранж усулини (VII-боб 4-§) чегаравий шартлари орасида тенгсизликлар қатнашган масалалар учун умумлаштиришга кўмаклашувчи Кун-Теккер теоремаси марказий ўрин эгаллайди. Кун-Теккер теоремаси (8.18)-(8.20) ёки (8.21)-(8.23) масаланинг оптимал ечими билан бу масала учун тузилган Лагранж функциясининг эгар нуқтаси орасидаги муносабатни ўргатади. (8.18)-(8.20), (8.21)-(8.23) масалаларга мос келувчи Лагранж функциясини юқорида (VII-боб 4-§) кўрилган усул ёрдамида тузамиз:

$$F(x_1,x_2,...,x_n, \lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)= \lambda_0 f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i (b_i-g_i(x_1,x_2,...,x_n))$$

ёки вектор формада

$$F(X,\Lambda)= \lambda_0 f(X)+ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X), \quad (8.24)$$

бу ерда $\lambda_i(i=\overline{0,m})$ Лагранжнинг номаълум кўпайтувчилари бўлиб,

$$\Lambda=(\lambda_0\lambda_2,...,\lambda_m); \quad X=(x_1,x_2,...,x_n)'.$$

1-таъриф. Агар $X^0=(x^0_1,x^0_2,...,x^0_m)$ нуқтада $F(X^0, \Lambda)$ функция минимумга эришиб, $\Lambda^0=(\lambda^0_0, \lambda^0_1,..., \lambda^0_m)$ нуқтада $F(X, \Lambda^0)$ функция максимумга эришса, (X^0, Λ^0) нуқта Лагранж функцияси $F(X, \Lambda)$ нинг эгар нуқтаси бўлади. Агар (X^0, Λ^0) нуқта Лагранж функцияси $F(X, \Lambda)$ нинг эгар нуқтаси бўлса, у ҳолда X^0 нинг кичик мусбат ε атрофидаги $(\varepsilon(X^0)=\{X|X-X^0|<\varepsilon\})$ ихтиёрий $X \ge 0$ учун ва Λ^0 нинг ε атрофидаги $(\varepsilon(\Lambda^0)=\{ \Lambda / (|\Lambda-\Lambda^0|<\varepsilon)\}$ ихтиёрий $\Lambda \ge 0$ учун

$$F(X^0,\Lambda) \le F(X^0,\Lambda^0) \le F(X,\Lambda^0) \quad (8.25)$$

муносабат ўринли бўлади. Агар $F(X, \Lambda)$ Лагранж функцияси (8.21-8.23) масала учун тузилган бўлса, бу муносабат қуйидаги кўринишда ифодаланади:

$$F(X,\Lambda^0) \le F(X^0,\Lambda^0) \le F(X^0,\Lambda) \qquad (8.26)$$

(8.25), (8.26) муносабатлар Лагранж функцияси (8.24) нинг эгар нуқтасининг мавжудлиги ҳақидаги, $f(X)$ ва $g_i(X)$ $(i=\overline{1,m})$ функциялар дифференциалланувчи бўлмаган ҳол учун, зарурий ва етарлилик шартларидан иборат.

$f(X)$ ва $g_i(X)$, $(i=\overline{1,m},)$ функциялар дифференциалланувчи бўлган ҳолда Лагранж функцияси (8.24) нинг эгар нуқтаси мавжудлигининг зарурий ва етарлилик шартлари (8.18)-(8.20) масала учун қуйидагича ифодаланади:

$$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial x_j \ge 0, \qquad (8.27)$$

$$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial x_j = 0,\ x_j^0 \ge 0, \qquad (8.28)$$

$$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial \lambda_i \le 0, \qquad (8.29)$$

$$\lambda_i^0\, \partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial \lambda_i = 0,\ \lambda_i^0 \ge 0. \qquad (8.30)$$

Мақсад функциясининг максимуми қидирилган (8.21)-(8.23) масала учун эса бу шартлар қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial x_j \le 0, \qquad (8.31)$$

$$x_j^0\, \partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial x_j = 0,\ x_j^0 \ge 0, \qquad (8.32)$$

$$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial \lambda_i \ge 0, \qquad (8.33)$$

$$\lambda_i^0 \partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial \lambda_i = 0,\ \lambda_i^0 \ge 0. \qquad (8.34)$$

Осонлик билан кўрсатиш мумкинки, агар (8.27)-(8.30) ва (8.31)-(8.34) муносабатлар бажарилса, (8.25)- (8.26) муносабат ўз ўзидан бажарилади. Шунинг учун, бундан кейин Лагранж функциясининг эгар нуқтаси мавжудлиги ҳақида Кун-Таккер шартлари сифатида (8.27) -(8.30) ва (8.31)-(8.34) шартларни тушунамиз. Бунда қуйидаги теорема ўринли бўлади.

Теорема. $F(X,\Lambda)$ функция эгар нуқтага эга бўлиши учун мақсад функциянинг минимуми қидириладиган (8.18) - (8.20) масала учун (8.27) (8.30) шартларнинг, мақсад функциянинг максимуми қидирилаётган (8.21) - (8.23) масала учун (8.31) - (8.34) шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Теоремани исботсиз қабул қиламиз.

Қавариқ дастурлаш масаласи (8.18) (8.20) учун экстремум мавжудлигининг зарурий ва етарлик шартлари қандай ҳосил бўлиши билан танишамиз. Бунинг учун масалага m+n та s_i $(i=\overline{1,m})$ ва t_j $(j=\overline{1,n})$ қўшимча ўзгарувчилар киритиб, уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$g_i(x_1,x_2,...,x_n)+s_i=b_i\ ,\ i=\overline{1,m}, \qquad (8.35)$$

$$x_j-t_j=0,\ j=\overline{1,n}, \qquad (8.36)$$

$$s_i \geq 0,\ \ t_j \geq 0\ , \qquad (8.37)$$

$$Z=f(x_1,x_2,...,x_n) \to \min. \qquad (8.38)$$

(8.37) тенгсизликлар берилган масаланинг чегаравий шартларидан иборат бўлиб, номаълумларга номанфийлик шарти қўйилганлигидан далолат беради. (8.35-8.38) масала учун Лагранж функциясини тузамиз:

$$F(X,\ \Lambda) = \lambda_0 f(x_1,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,[(b_i-s_i-g_i(x_1,...,x_n)]+\sum_{j=1}^{n}\bar{\lambda}_j(t_j-x_j) \qquad (8.39)$$

Маҳаллий экстремум мавжудлигининг зарурий шартидан:

$$\partial F(X^0,\ \Lambda^0)/\partial x_j=0,\ j=\overline{1,n}. \qquad (8.40)$$

$$\partial F(X^0,\ \Lambda^0)/\partial \lambda_i=0,\ \ \partial F(X^0,\ \Lambda^0)/\ \partial\bar{\lambda}_i=0,\ i=\overline{1,m}.\ j=\overline{1,n}. \qquad (8.41)$$

(8.40) тенгликни таҳлил қиламиз. Уни қуйидагича ёйиб ёзиш мумкин:

$$\lambda_0^0\, \partial f(X^0)/\partial\, x_j\ \ -\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0\partial g_i\,(X^0)/\partial x_j-\bar{\lambda}_i^0=0. \qquad (8.42)$$

Бундан ташқари

$$\begin{cases} b_i-s_i-g_i(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ \qquad t_j-x_j^0=0 \end{cases} \qquad (8.43)$$

тенгликлар ўринли t_j^0 номаълумлар билан боғлиқ бўлган $\bar{\lambda}_j^0$ Лагранж кўпайтувчиси учун

$$\bar{\lambda}_j^0\ t_j^0=0$$

шарт бажарилиши керак (VII боб, 4-§ га қаранг). Агар $t_j^0>0$ (демак $x_j^0=0$) бўлса, $\bar{\lambda}_i^0=0$ бўлади ва (8.42) га асосан

$$\lambda_0^0\ \ \partial f(X^0)/\partial\, x_j\ \ -\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0\partial g_i\,(X^0)/\partial x_j=0. \qquad (8.44)$$

Агар $t_j^0=0$ (демак, $x_j^0=0$) бўлса, у ҳолда $\bar{\lambda}_i^0$ нолдан фарқли бўлиши ҳам мумкин. Унинг ишораси қуйидаги мулоҳаза орқали аниқланади: агар $x_j-t_j=0$ тенгликнинг ўнг томонини манфий сонга ўзгартирсак, (8.18)-(8.20) масаланинг аниқланиш соҳаси кенгаяди, чунки ихтиёрий $x_j \geq 0$ миқдор $x_j \geq b_j (b_j < 0)$ тенгсизликни қаноатлантиради ва $Z^0 = f(X^0)$ миқдор ўзгармайди (ортмайди), демак, $\partial f(X^0)/\partial b_j \geq 0$ ёки $\overline{\lambda}_i^0 \geq 0$. Шундай қилиб, $x_j = 0$ да зарурий шарт қуйидагидан иборат бўлади:

$$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial x_j = \lambda_0^0 \; \partial f(X^0)/\partial x_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \; \partial g_i(X^0)/\partial x_j \geq 0, \qquad (8.45)$$

$$x_j^0 \; \partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial x_j = [\lambda_0^0 \; \partial f(X^0)/\partial x_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \; \partial g_i (X^0)/\partial x_j] X^0 = 0. \qquad (8.46)$$

Энди $\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial \lambda_i = 0$, $i = \overline{1,m}$, тенгликни худди юқоридагидек таҳлил қилиб, қуйидаги зарурий шартларни ҳосил қиламиз:

$$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial \lambda_i \leq 0, \qquad (8.47)$$

$$\lambda_i^0 \; \partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial \lambda_i = 0, \; \lambda_i^0 \geq 0. \qquad (8.48)$$

(8.45)-(8.48) шартлар (8.21)-(8.25) масала учун қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\partial F(X^0,\Lambda^0/\partial x_j \leq 0, \qquad (8.49)$$

$$x_j^0 \; (\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial x_j) = 0, \; x_j^0 \geq 0, \qquad (8.50)$$

$$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial \lambda_i \geq 0, \qquad (8.51)$$

$$\lambda_i^0 \quad \partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial \lambda_i = 0, \; \lambda_j^0 \geq 0 \qquad (8.52)$$

Юқоридаги (8.45)-(8.48),(8.49)-(8.52) шартлар берилган қавариқ программалаш масаласининг экстремуми мавжудлгининг зарурий ва етарлилик шартидан иборатдир.

4 - §. Кун - Таккер теоремаси

Юқоридаги (8.21)-(8.23) қавариқ дастурлаш масаласини кўрамиз.

Агар камида битта $X \in G$ нуқтада $g_i(X) > b_i (i = \overline{1,m})$ тенгсизлик бажарилса (бунга Слейтер шарти дейилади),Кун-Таккернинг қуйидаги теоремаси ўринли бўлади.

Теорема. $X^0 \geq 0$ нуқта (8.21)-(8.23) масалининг оптимал ечими бўлиши учун бу нуқтада (8.49)-(8.52) шартларининг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Зарурийликнинг исботи 3-§ даги (8.45)-(8.48) ва (8.49)-(8.52) шартларини келтириб чиқариш жараёнида кўрсатилган.

Етарлилиги: Фараз қилайлик X^0 нуқтада (8.49)-(8.52) шартлар бажарилсин. У ҳолда шундай $\Lambda^0 \geq 0$ мавжуд бўлиб, (X^0, Λ^0) нуқта $F(X, \Lambda)$ Лагранж функциясининг эгар нуқтаси бўлади, яъни бу нуқтада (8.26) муносабат ўринли бўлади, яъни

$$F(X, \Lambda^0) \leq F(X^0, \Lambda^0) \leq F(X^0, \Lambda).$$

Бу ерда

$$F(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(X) - b_i). \tag{8.53}$$

(8.53) дан фойдаланиб, (8.26) ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 (g_i(X) - b_i) \leq f(X^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 (g_i(X^0) - b_i) \leq$$
$$\leq f(X^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(X^0) - b_i), \quad X \geq 0, \ \Lambda \geq 0. \tag{8.54}$$

(8.54) нинг ўнг томонидаги

$$f(X^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 (g_i(X^0) - b_i) \leq f(X^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(X^0) - b_i)$$

муносабат ихтиёрий $\Lambda \geq 0$ учун ўринли. Бундан (8.51) ва (8.52) га асосан

$$g_i(X^0) - b_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 (g_i(X^0) - b_i) = 0. \tag{8.55}$$

Энди (8.54) нинг чап томонидаги тенгсизликдан, (8.55) га асосан,

$$f(X^0) \geq f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 (g_i(X) - b_i), \quad \forall X \geq 0,$$

бу ерда $g_i(X) > b_i$ (Слейтер шарти) ва $\lambda_i^0 \geq 0$, демак,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 (g_i(X) - b_i) \geq 0.$$

Шунинг учун $f(X^0) \geq f(X)$, $\forall X \geq 0$. Бундан X^0 берилган масаланинг оптимал ечими эканлиги кўринади. Шу билан теорема исботланди.

1-мисол. Масалани график усулда ечинг ва топилган ечим учун Кун-Таккер шартларининг бажарилишини текширинг.

$2x_1+x_2 \geq 2,$

$2x_1+x_2 \leq 8,$

$x_1+x_2 \leq 6,$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$

$Z=f(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2 \rightarrow max$

Масаланинг график усулда ечиб, унинг оптимал ечими $X_0=(0{,}8;0{,}4)$ ва $f(0{,}8;0{,}4)=0{,}8$ эканини кўришимиз мумкин.

Энди шундай $\Lambda^0 \geq 0$ мавжуд бўлиб, (X^0, Λ^0)да Кун-Таккер шартларининг бажарилишини кўрамиз.

Берилган масала учун Лагранж функциясини тузамиз:

$$f(X, \Lambda)=-x_1^2-x_2^2+\lambda_1(2x_1+x_2-2)+\lambda_2(8-2x_1-x_2)+\lambda_3(6-x_1-x_2)$$

X^0 нуқтада масаланинг 2-чегаравий шарти қатъий тенгсизликка айланади. Демак, бу масала учун Стейлер шарти бажарилади. Бу ҳолда масала нормал бўлиб, $\lambda_0 \neq 0$ бўлади. Шунинг учун $\lambda_0=1$ деб қабул қилинади.

Лагранж функциясидан x_1, x_2, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ лар бўйича хусусий ҳосилалар оламиз ва $X_0=(0{,}8;0{,}4)$ нуқтада Кун-Таккер шартларининг бажарилишини текширамиз:

$\partial F/\partial x_1=-2x_1+2\lambda_1-\lambda_3-2\lambda_2,$ $\quad\quad$ $\partial F/\partial x_2=-2x_2+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3,$

$\partial F/\partial \lambda_1=2x_1+x_2-2,$ $\quad\quad$ $\partial F/\partial \lambda_2=8-2x_1-x_2,$ $\quad$ $\partial F/\partial \lambda_3=6-x_1-x_2.$

$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\ \partial \lambda_2=8-2\ \ 0{,}8-0{,}4=6>0,$

$\partial F(X^0, \Lambda^0)/\ \partial \lambda_3=6-0{,}8-0{,}4=4{,}8>0,$

$\lambda^0_i\ \partial F(X^0, \Lambda^0)/\ \partial \lambda_i=0.$

Шартга кўра λ_2 ва λ_3 ларнинг қийматлари нолга тенг.

$\partial F(X^0, \Lambda)/\partial \lambda_1=\ 2*0{,}8+0{,}4-2=0$

бўлгани учун λ_1 нолга тенг бўлмаган қиймат қабул қилиши ҳам мумкин.

$x_j^0\ \partial F(X^0, \Lambda^0)/\ \partial x_j=0,\ \ x_j^o>0.$

Демак,

$\partial F(X^0, \Lambda^0)/\ \partial x_j=0$, $j=1,2$ бўлиши керак, яъни

$-2*0{,}8+2\lambda_1-\lambda_3=0$

$-2*0,4 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3=0$

λ_2, $\lambda_3=0$ бўлгани учун $\lambda_1=0,8$ ва $\Lambda^0=(0,8,0,0)$. Демак $(X_0, \Lambda_0)= (0,8;0,4; 0,8;0,0)$ нуқтада хақиқатдан ҳам, Кун-Таккер шартлари бажариляпти, яъни у эгар нуқта бўлаяпти.

2-мисол. Кун-Таккер шартларидан фойдаланиб, $X_0=(0,1)$ нуқта қуйидаги чизиқсиз дастурлаш масаласининг ечими эканлигини кўрсатилсин:

$$4x_1+5x_2 \le 8,$$
$$2x_1+x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$
$$Z = f(x) = x_1^2-2x_1+3x_2^2 \to \min.$$

Ечиш. $X^0=(1,0)$ нуқтада чегаравий шартлар қатъий тенгсизликка айланади, демак, Слейтер шарти бажарилади. Бу холда $\lambda_0=1$ деб қабул қилишимиз мумкин. Шунинг учун Лагранж функцияси қуйидаги кўринишда бўлади.

$$F(x_1,x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2-2x_1+3x_2^2 + \lambda_1(4x_1+5x_2-8)+ \lambda_2(2x_1+x_2-4).$$

$$x_1 \ge 0.\ x_2 \ge 0.\ \lambda_1 \ge 0.\ \lambda_2 \ge 0.$$

Кун-Таккер шартларининг бажарилишини текширамиз:

$$\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial x_1 = (2x_1-2+4\lambda_1+2\lambda_2)_{X_0} \ge 0,$$

$$(\partial F(X^0, \Lambda^0)/ \partial x_1)\ x_1^0=0,$$

$$\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial x_2 = (6x_2+5\lambda_1+\lambda_2)_{X_0} \ge 0$$

$$(\partial F(X^0, \Lambda^0)/ \partial x_2)\ x_2^0=0,\ x_1,\ x_2 \ge 0,$$

$$\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial \lambda_1 = (4x_1- 5x_2-8)_{X_0} = -4<0,$$

$$(\partial F(X^0, \Lambda^0)/ \partial \lambda_1)\ \lambda_1^0=0 \Rightarrow \lambda_1^0 =0,$$

$$\partial F(X^0\Lambda^0)/ \partial \lambda_2 = (2x_1+x_2- 4) \quad =-2<0,$$

$$(\partial F(X^0, \Lambda^0)/ \partial \lambda_2) \cdot \lambda_2^0=0 \Rightarrow \lambda_2^0 =0$$

Шундай қилиб, $(X_0, \Lambda_0) = (1; 0; 0; 0;)$ нуқта Кун-Таккернинг ҳамма шартларини қаноатлантиради. Демак, у Ланграж функциясининг эгар нуқтаси бўлади. Шунинг учун X_0 (1,0) нуқта берилган чизиқсиз дастурлаш масаласининг ечимидан иборат.

Таянч сўз ва иборалар

Қавариқ тўплам; қавариқ функция; пастга қавариқ функция; юқорига қавариқ функция; қатъий қавариқ функция; қавариқ дастурлаш; Ланграж функцияси; эгар нуқта; Кун-Таккер шартлари; Кун-Таккер теоремаси;

Назорат саволлари

1. Қавариқ тўплам деганда қандай тўпламни тушунасиз?
2. Қавариқ тўпламнинг ички ва чегаравий нуқтаси тушунчаси нимадан иборат?
3. Пастга (юкорига) қавариқ функция деб қандай функцияга айтилади?
4. Агар f(X) пастга (юқорига) қавариқ функция бўлиб қавариқ G тўпламда аниқланган бўлса ва b - ихтиёрий хақиқий сон бўлса $f(x)<-b$ $(f(x)>-b)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами қандай тўплам бўлади?
5. Қавариқ функциянинг қавариқ тўпламдаги глобал максимуми (минимуми) нима?
6. Қавариқ тўпламда аниқланган қавариқ функциянинг маҳаллий ва глобал экстемумлари орасида қандай муносабат ўринли бўлади?
7. Қавариқ дастурлаш масаласининг умумий кўриниши қандай?
8. Лагранж функциясининг эгар нуқтаси нима?
9. f(x) ва $g_i(x)$ функциялари дифференциалланувчи бўлган ҳол учун Лагранж функцияси эгар нуқтаси мавжудлигининг зарурий ва етарлилик шарти қандай?
10. Лагранж функциясининг эгар нуқтаси мавжудлигини зарурий ва етарлилик шартини f(x) ва $g_i(x)$ функциялар дифференциалланувчи бўлган ҳол учун изоҳланг.
11. Кун- Таккер теоремасини таърифланг?
12. Слейтер шарти қандай ва у қачон ишлатилади?

Масалалар.

1. Кун-Таккер шартларидан фойдаланиб, $X_0=(0,8;\ 0,4)$ нуқтанинг қуйидаги қавариқ дастурлаш масаласининг ечими эканлигини аниқланг:

$$2x_1+x_2\geq 2,$$
$$2x_1+x_2\leq 8,$$
$$x_1+x_2\leq 6,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,$$
$$Z=f(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2\to \max.$$

2. График усулини қўллаб, қуйидаги масалаларнинг ечинг ва ечимни Кун-Таккер шартларини қаноатлантиришини текширинг:

а) $2x_1+5x_2\geq 20,$
$x_1-2x_2=5,$
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$
$Z=f(x_1,x_2)=3x_1x_2-x_2^2\to \max.$

б) $x_2+x_2\leq 5,$
$0,3x_1+x_2\leq 3,$
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$
$Z=f(x_1,x_2)=5\ x_1^2-3x_1-4x_2^2\to \max.$

в) $3x_1+2x_2\leq 9,$
$0,5x_1+x_2\leq 4,$
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$
$Z=f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2\to \max.$

3. Координата бошидан

$$x_1+x_2\geq 4,$$
$$2x_1+x_2\geq 5.$$

тенгсизликлар орқали аниқланган қавариқ тўпламгача бўлган минимал масофани аниқланг. Ечимни график усулда аниқлаб, унинг учун Кун-Таккер шартлари ўринли эканлигини текширинг.

IX-БОБ. КВАДРАТИК ДАСТУРЛАШ

Квадратик дастурлаш масаласи чизиқсиз (қаварик) дастурлаш масаласининг хусусий ҳолидан иборатдир. Унинг математик моделидаги чегаравий шартлар чизиқли тенглама ва тенгсизликлардан, мақсад функцияси умумий ҳолда чизиқли ва квадратик формаларнинг йиғиндисидан иборат бўлади:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i\{\le,=,\ge\}b_i,\ i=\overline{1,m}, \qquad (9.1)$$

$$_i \ge 0,\ j=\overline{1,n}, \qquad (9.2)$$

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} C_j x_j + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + \ldots + d_{nn}x_n^2 \to \max(\min) \qquad (9.3)$$

ёки матрица формада:

$$AX\{\le,=,\ge\}B, \qquad (9.4)$$

$$X \ge 0, \qquad (9.5)$$

$$Z = C'X + X'DX \to \max(\min), \qquad (9.6)$$

бу ерда A mxn ўлчовли матрица, D n ўлчовли квадрат матрица, B m ўлчовли, X, C n ўлчовли векторлар. Шундай қилиб, (9.1)-(9.3) ёки (9.4)-(9.6) кўринишда берилган масалани **квадратик дастурлаш масаласи** деб атаймиз.

Бу масала чизиқли дастурлаш масаласидан шуниси билан фарқ қиладики, унинг мақсад функциясида квадратик форма $X'DX$ қатнашади. Бу квадратик формага боғлиқ равишда $f(X)$ мақсад функция пастга ёки юқорига қаварик бўлиши мумкин. Ана шундай ҳоллар учун, яъни квадратик дастурлаш масаласи ягона оптимал (глобал) ечимига эга бўлган ҳоллар учун масалани ечиш усуллари яратилган.

Дарсликнинг ушбу бобида квадратик формалар ва уларнинг хоссалари ва бу хоссаларнинг $f(X)$ мақсад функциясига таъсири, квадратик дастурлаш масаласини ечиш усуллари келтирилган.

1-§. Квадратик формалар ва уларнинг каноник кўриниши

Квадратик формалар ва уларнинг каноник шакли қуйидагича бўлсин. У ҳолда

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} = d_{11}x_1^2 + d_{22}x_2^2 + \ldots + d_{nn}x_n^2 + 2d_{12}x_1x_2 + 2d_{13}x_1x_3 + \ldots + 2d_{n-1,n}x_{n-1} = X'DX \qquad (9.7)$$

кўринишдаги функцияга квадратик форма дейилади, бу ерда

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & d_{2n} \\ \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{nn} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$X'=(x_1,x_2,...,x_n),(d_{ij}=d_{ji}), \qquad i,j=\overline{1,n}$$

(9.3) квадратик функциянинг пастга (юқорига) қавариқ бўлиши (9.7) квадратик форманинг пастга (юқорига) қавариқ бўлишлигига боғлиқдир. Бу эса ўз навбатида $X'DX$ форманинг манфий ёки мусбат, номанфий ёки номусбат аниқланганлигига, ёки умуман, ишораси аниқланмаганлигига боғлиқдир.

1-таъриф. $X=0$ дан бошқа барча X лар учун $X'DX<0$ ўринли бўлса, $X'DX$ **манфий аниқланган квадратик форма** дейилади.

2-таъриф. Агар $X'DX\leq 0$ тенгсизлик барча $X\neq 0$ лар учун тўғри бўлса ва $X\neq 0$ мавжуд бўлиб, унинг учун $X'DX=0$ тенглик бажарилса, $X'DX$ **номусбат аниқланган квадратик форма** дейилади

Агар-$X'DX$ квадратик форма номусбат аниқланган бўлса $X'DX$ квадратик форма номанфий аниқланган бўлади.

X нинг баъзи қийматлари учун $X'DX$ мусбат, баъзилари учун манфий қиймат қабул қилиши мумкин. У ҳолда $X'DX$ аниқмас квадратик форма дейилади.

Квадратик формани чизиқли алмаштиришлар ёрдами билан фақат номаълумларнинг квадратларидан тузилган формага келтириш мумкин. Бундай кўринишдаги квадратик форма **каноник кўринишдаги квадратик форма** деб аталади.

(9.7)ни каноник кўринишга келтириб, унинг қандай аниқланган эканлигини, шу билан бир қаторда унинг пастга ёки юқорига қавариқ эканлигини аниқлаш мумкин.

Ҳақиқатдан ҳам, агар квадратик форма

$$Q(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j$$

кўринишга келтирилган бўлиб, $a_j>0, j=\overline{1,n}$ бўлса, квадратик форма мусбат аниқланган, $a_j<0, j=\overline{1,n}$да эса манфий аниқланган бўлади.

Агар $a_j>0,(j=\overline{1,n_1})$ ва $a_j<0,(j=\overline{n_1+1,n})$ бўлса, квадратик форманинг ишораси аниқланмаган бўлади.

Мисол. Берилган

$$Q(x_1x_2x_3)=-3x_1^2+2x_1x_2-\frac{5}{4}x_2^2-x_2x_3+\frac{1}{2}x_1x_3-\frac{5}{4}x_3^2$$

квадратик форма каноник кўринишга келтирилсин.

Берилган квадратик формага мос келувчи D матрица

$$D=\begin{pmatrix} -3 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1- & \frac{5}{4}- & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}- & \frac{1}{2}- & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлади. $Q(x_1x_2x_3)$ формадаги x_1 қатнашган ҳадларни ажратиб ёзамиз:

$$Q(x_1x_2x_3)=-3(x_1^2-2x_1\frac{4x_2+x_3}{12})-\frac{5}{4}x_2^2-x_2x_3-\frac{5}{4}x_3^2.$$

Қавс ичидаги ифодани тўла квадратга келтирамиз:

$$Q(x_1x_2x_3)=-3(x_1-\frac{4x_2+x_3}{12})^2-x_2x_3-\frac{5}{4}x_3^2+\frac{(4x_2+x_3)^2}{48}$$

ёки

$$Q(x_1x_2x_3)=-3(x_1-\frac{4x_2+x_3}{12})^2-\frac{11}{12}x_2^2-\frac{5}{6}x_2x_3-\frac{59}{48}x_3^2$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$x_1'=x_1-\frac{4x_2+x_3}{12}$$
$$x_2'=$$
$$x_3'=x_3.$$

Булардан

$$\begin{aligned} x_1&=x_1'+\frac{1}{3}x_2'+\frac{1}{12}x_3' \\ x_2&=x_2' \\ x_3&=x_3'. \end{aligned} \qquad (1)$$

У ҳолда $Q(x_1,x_2,x_3)$ квадратик форма қуйидаги кўринишга келади:

$$Q(x_1,x_2,x_3)=-3x_1^2+Q_1$$

бу ерда

$$Q_1=-\frac{11}{12}x_2'^2-\frac{5}{6}x_2'x_3'-\frac{59}{48}x_3'^2$$

Энди Q_1 формани ўзгартирамиз:

$$Q_1=-\frac{11}{12}x_2'^2-\frac{5}{6}x_2'x_3-\frac{59}{48}x_3'^2=$$
$$=-\frac{11}{12}(x_2'^2+2\cdot\frac{5}{11}x_2'x_3)-\frac{59}{48}x_3'^2=$$
$$=-\frac{11}{12}(x_2+\frac{5}{11}x_3)^2-\frac{59}{48}x_3'^2+\frac{25}{132}x_3'^2=$$
$$=-\frac{11}{12}\left(x_2+\frac{5}{11}x_3\right)^2-\frac{183}{176}x_3'^2$$

яна қайтадан белгилашлар киритамиз

$$x_1^{*} = x_1', x_2 = x_2 + \frac{5}{11}x_3, x_3' = x_3.$$

Булардан

$$x_1 = x_1'.$$

$$x_2' = x_2^{*} - \frac{5}{11}x_3' \qquad (2)$$

$$x_3 = x_3'$$

Натижада қуйидагига эга бўламиз

$$Q_1 = -\frac{11}{12}x_2'^2 - \frac{183}{176}x_3'^2,$$

у ҳолда

$$Q = -3x_1'^2 - \frac{11}{12}x_2'^2 - \frac{183}{176}x_3'^2.$$

x_1, x_2, x_3 номаълумларнинг қийматларини x_1', x_2', x_3' лар орқали ифодалаш мумкин. Бунинг учун (1) ва (2) алмаштиришларга мос келувчи матрицани ўзаро кўпайтириш керак, яъни агар (1) алмаштиришга

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрица, (2) алмаштиришга

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрица мос келса у ҳолда

$$C = C_1C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{3}{44} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

бўлади. Демак,

$$x_1 = x_1' + \frac{1}{3}x_2' - \frac{3}{44}x_3'$$

$$x_2 = x_2' - \frac{5}{11}x_3'$$

$x_3 = x_3^{*}$.

Энди $D_1 = C'DC$ матрицани аниқлаймиз:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{44} & -\frac{5}{11} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{3}{44} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{11}{12} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & -\frac{183}{176} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{3}{44} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{183}{176} \end{pmatrix}.$$

D_1 матрица $Q(x_1^{*}, x_2, x_3)$ квадратик формага мос келади

$$Q(x_1^{*}, x_2^{*}, x_3^{*}) = -3x_1^{*} - \frac{11}{12}x_2^{*} - \frac{183}{176}x_3^{*}.$$

Агар С матрица хосмас матрица бўлса, мусбат (манфий) аниқланган форма мусбат (манфий) аниқланганича қолади. $Q(x_1, x_2, x_3)$ формада коэффициентлар манфий ва С хосмас матрица. $|C| = 1$ бўлганлиги сабабли $Q(x_1, x_2, x_3)$ манфий аниқланган форма бўлади.

Энди квадратик формани каноник формага келтирмасдан унинг қандай аниқланган форма эканлигини аниқлаш мумкинми?- деган савол туғилади. Бу саволга жавоб бериш учун қуйидаги теоремаларни исбот қиламиз.

1-теорема. Агар

$$Q = (x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_i x_j,$$ квадратик формадаги.

$$D_1 = d_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, ..., D_n = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & ...d_{1n} \\ ... & & \\ d_{n1} & d_{n2} & ...d_{nn} \end{vmatrix} \qquad (9.8)$$

детерминантлар нолдан фарқли бўлса, $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ни қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$Q = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + ... + a_n y_n^2,$$

бу ерда

$$a_i = \frac{D_i}{D_{i-1}}, i = \overline{1,n}.$$

Исбот. Теорема шартига кўра $a_{11} = D_1 \neq 0$ бўлгани сабабли Q формада x_1 ни ажратиб, уни қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$Q = a_{11}x_1'^2 + Q(x_2,...,x_n').$$

$D_2 \neq 0$ бўлганлиги учун x_2' нинг олдидаги коэффициент нолдан фарқли. Шунинг учун учбурчакли алмаштиришни бажариб, иккинчи квадратни ажратиш мумкин. Фараз қилайлик, k та квадрат ажратилган бўлсин. У ҳолда Q форма қуйидаги кўринишга келтирилган бўлади

$$Q = a_1t_1^2 + a_2t_2^2 + ... + a_kt_k^2 + Q_k(t_{k+1},...,t_n).$$

$D_{k+1} \neq 0$ бўлгани учун учбурчакли алмаштиришни яна бир марта бажариб, яна бир квадратни ажратиш мумкин. Шундай қилиб, учбурчакли алмаштиришни n марта бажариб $Q(x_1,...,x_n)$ формани каноник кўринишга келтирилади. (9.8) детерминантлар учбурчакли алмаштиришга нисбатан инвариант бўлганликлари учун $a_i = \frac{D_i}{D_{i-1}}$ ни ҳосил қилиб, D матрицани шундай диагонал кўринишга келтирамизки, у қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$a_{11} = d_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & o \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & & 0 \\ ... & & & & ... \\ 0 & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & & d_{2n} \\ ... & & & \\ d_{n1} & d_{n2} & & d_{nn} \end{vmatrix},$$

бу ерда

$$a_1 = d_{11}, \quad a_2 = D_2, a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = D_3,..., \qquad ...a_n = D_n$$

$...a_n$ ларнинг ҳар бири нолдан фарқли бўлганлиги учун

$$a_1 = d_{11}, a_2 = \frac{D_2}{D_1}, a_3 = \frac{D_3}{D_2},..., a_n = \frac{D_n}{D_{n-1}}.$$

Демак теорема исботланди.

Шундай қилиб, a_i коэффициентларнинг ишораси D_i детерминантларнинг ишораларига боғлиқ экан.

Квадратик форманинг кўринишини аниқлашда қуйидаги ҳоллар рўй бериши мумкин:

1-ҳол. Агар $D_1, D_2, ... D_n$ детерминантларнинг ҳар бири мусбат бўлса, a_i коэффициентлар ҳам мусбат бўлиб, Q квадратик форма мусбат аниқланган бўлади.

2-ҳол. Агар $1, D_1, D_2, ... D_n$ сонлар кетма-кетлигида ишоралар навбат билан алмашиб келса, a_i коэффициентлар манфий бўлиб, Q форма манфий аниқланган бўлади.

3-ҳол. Агар D матрицанинг ранги $r<n$ бўлса ҳамда $D_1, D_2, ... D_r$ детерминантлар мусбат ишорали бўлиб, қолганлари нолга тенг бўлса, Q квадратик форма номанфий аниқланган бўлади.

4-ҳол. Агар D матрицанинг ранги $r<n$ бўлиб, $1, D_1, D_2, ... D_n$ қаторда ишоралар алмашиб келса ҳамда $D_{r+1} = D_{r+2} = ... = D_n = 0$ бўлса Q квадратик форма номусбат аниқланган бўлади.

5-ҳол. Агар $1, D_1, D_2, ... D_n$ сонлар кетма-кетлигида ишоралар алмашмаса ҳамда манфий ишорали D_i детерминантлар мавжуд бўлса, Q квадратик форманинг ишораси аниқланмаган бўлади.

Мисол. Квадратик форманинг кўриниши аниқлансин:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2\, x_3 - 4x_3^2$$

Ечиш:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3/2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, D_1 = -2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3/2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -11/4$$

$1, D_1, D_2 D_3$ сонлар кетма-кетлигида ишоралар навбат билан алмашувчи бўлганлиги сабабли $Q(x_1, x_2, x_3)$ форма манфий анқланган бўлади

2-теорема. Номанфий $Z = X'DX$ квадратик форма E_n Евклид фазосида қаварик функциядир. Агар квадратик форма мусбат аниқланган бўлса, у **қатъий қаварик функция** бўлади.

Исбот. Ихтиёрий X_1, X_2 нуқталар ва λ сонни $(0 \le \lambda \le 1)$ олиб,

$$\hat{X} = \lambda X_2 + (1-\lambda) X_1$$

нуқтани тузамиз ва бу нуқтада $Z = X'DX$ квадратик форманинг қийматини текширамиз:

$$\begin{aligned} \hat{X}'D\hat{X} &= (\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1)'D(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) = (X_1 + \lambda(X_2 - X_1))'D(X_1 + \\ &+ \lambda(X_2 - X_1)) = X_1'DX_1 + 2\lambda(X_2 - X_1)'DX_1 + \lambda^2(X_2 - X_1)'D(X_2 - X_1). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Теоремани шартига кўра ихтийрий X учун $(X \ne 0)$ $X'DX \ge 0$. Шунинг учун

$$\lambda X'DX \geq \lambda^2 X'DX, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad (9.10)$$

(9.10) га асосан (9.9) дан қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$\hat{X}'D\hat{X} \leq X_1'DX_1 + 2\lambda(X_2 - X_1)'DX_1 + \lambda(X_2 - X_1)'D(X_2 - X_1), \qquad (9.11)$$

ёки

$$\hat{X}'\hat{D}X \leq X_1'DX_1 + \lambda(X_2 - X_1)'DX_1 + \lambda(X_2 - X_1)'DX_2 \leq \lambda X_2'DX_2 + (1-\lambda)X_1'DX_1. \qquad (9.12)$$

(9.12) тенгсизлик $X'DX$ квадратик форманинг қаварик функцияси эканлигини кўрсатади.

Энди $Z = X'DX$ квадратик форма мусбат аниқланган деб фараз қиламиз. У ҳолда ихтиёрий $0<\lambda<1$ учун

$$\lambda(X_2 - X_1)'D(X_2 - X_1) > \lambda^2(X_2 - X_1)'D(X_2 - X_1) \qquad (9.13)$$

тенгсизлиқ ўринли бўлади. Демак, (9.11) да ишорани < билан алмаштириш мумкин, яъни

$$\hat{X}'D\hat{X} < X_1'DX_1 + 2\lambda(X_2 \quad X_1)'DX_1 + \lambda(X_2 \quad X_1)'D(X_2 - X_1) \qquad (9.14)$$

Бундан

$$\hat{X}'D\hat{X} < \lambda X_2'DX_2 + (1-\lambda)X_1'DX_1 \qquad (9.15)$$

(9.15) тенгсизлик $Z = X'DX$ квадратик форманинг қатъий қаварик эканлигини кўрсатади. Шу билан теорема исбот бўлди.

Худди шундай мулоҳазалар ёрдамида қуйидаги теоремани ҳам исбот қилиш мумкин.

3–теорема. Номусбат $Z = X'DX$ квадратик форма E_n Евклид фазосида юқорига қаварик функциядир. Агар квадратик форма манфий аниқланган бўлса, у қатъий **юқорига қаварик функция** бўлади.

2-§. Квадратик дастурлаш масалалари учун Кун-Таккер шартлари

Квадратик дастурлаш масаласи ((9.1)-(9.3)) берилган бўлсин. Мақсад функциянинг минимуми қидириладиган масалани унинг максимуми қидириладиган масалага келтириш мумкин бўлгани сабабли (9.3) нинг ўрнига бундан кейин

$$Z = f(X) = c_1x_2 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + ... + d_{mn}x_n^2 \rightarrow \max \qquad (9.16)$$

функцияни ёки матрицали формадаги

$$Z = f(x) = C'X + X'DX \rightarrow \max \qquad (9.17)$$

функцияни кўрамиз.

Бундан кейин $f(X)$ функцияни юқорига қавариқ функция, яъни $Z = X'DX$ квадратик формани юқорига қавариқ ($X'DX$-манфий аниқланган форма) деб фараз қиламиз. Бу ҳолда (9.1)-(9.2) шартларни қаноатлантирувчи режалар тўплами қавариқ тўплам бўлгани учун квадратик дастурлаш масаласи ягона (глобал) оптимал ечимга эга бўлади.

Масаланинг (9.1) шартларини қўшимча ўзгарувчилар киритиш мумкин бўлгани учун (9.1)-(9.3) масалани қуйидаги кўринишда ифодалаймиз:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1,m} \qquad (9.18)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n} \qquad (9.19)$$

$$Z = f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}x_k x_j \to \max, \qquad (9.20)$$

ёки матрица формада

$$AX=B, \qquad (9.21)$$

$$X \geq 0, \qquad (9.22)$$

$$Z = f(X) = C'X + X'DX \to \max \qquad (9.23)$$

Бу масаланинг ечими оптимал ечим бўлишининг зарурий ва етарлилик шартларини аниқлаймиз. Бунинг учун Лагранж функциясини тузамиз:

$$F(X,\Lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}x_k x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j), \qquad (9.24)$$

ёки матрицали формада

$$F(X,\Lambda) = C'D + X'DX + \Lambda'(B - AX) \qquad (9.25)$$

$F(X,\Lambda)$ функциядан x_j $(j=\overline{1,n})$ λ_i $(i=\overline{1,m})$ бўйича хусусий ҳосилалар оламиз:

$$\frac{dF}{dx} = c_i + 2\sum_{k=1}^{n} x_k d_{kj} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij}, \qquad (9.26)$$

ёки

$$\frac{\partial F}{\partial X} = C' + 2DX - A'\Lambda, \qquad (9.27)$$

$$\frac{dF}{\partial \lambda_i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (9.28)$$

$$\frac{dF}{d\Lambda} = B - AX. \qquad (9.29)$$

Энди (9.26)-(9.29) муносабатларга асосланиб, Кун-Таккернинг шартларини ёзамиз:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_{X^0,\Lambda^0} \leq 0, \qquad X^0 \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_{X^0,\Lambda^0} = 0, \quad X^0 \geq 0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}\right)_{X^0,\Lambda^0} \geq 0, \qquad \lambda_i^0 \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}\right)_{X^0,\Lambda^0} = 0, \quad \lambda_i^0 \geq 0.$$

Бундан (9.26), (9.28) га асосан:

$$c_j + 2\sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k^o - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 a_{ij} \leq 0 \qquad (9.31)$$

$$x_j^o\left(c_j + 2\sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k^o - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 a_{ij}\right) = 0 \qquad (9.32)$$

$$_j^o \geq 0, j = \overline{1,n}, \qquad (9.33)$$

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \geq 0, \qquad (9.34)$$

$$\lambda_i^0 (bi - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0) = 0, \qquad (9.35)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}. \qquad (9.36)$$

(9.31)-(9.36) шартлар матрицали формада қуйидагича ифодаланади:

$$C' + 2DX^0 - A'\Lambda^0 \leq 0, \qquad (9.31)$$

$$X^0\,(C' + 2DX^0 - A'\Lambda^0) = 0, \qquad (9.32)$$

$$X^0 \geq 0, \qquad (9.33)$$

$$B - AX^0 \geq 0, \qquad (9.34)$$

$$\Lambda^0 (B - AX^0) = 0, \qquad (9.35)$$

$$\Lambda^0 \geq 0 \qquad (9.36)$$

Агар шундай Λ^0 вектор мавжуд бўлиб, X^0, Λ^0 лар учун (9.31)-(9.36) шартлар ўринли бўлса, X^0 вектор берилган квадратик дастурлаш масаласи (9.21)-(9.23) нинг оптимал ечими бўлади.

Энди (9.31) тенгсизликни қўшимча ўзгарувчилар киритиш ёрдамида тенгламага айлантирамиз

$$C' + 2DX^0 - A'\Lambda^0 + V^* = 0.$$

Бундан

$$V^* = A'\Lambda^0 - 2DX^0 - C' \qquad (9.37)$$

Бу ҳолда квадратик дастурлаш масаласи ечимининг оптимал ечим бўлишлик шарти қуйидагича бўлади:

$$C' + 2DX^* - A'\Lambda + V^* = 0. \qquad (9.38)$$

$$X^*V^* = 0, \; X^* \geq 0, \; V^* \geq 0. \qquad (9.39)$$

Берилган масаладаги (9.21) шартлар тенглама кўринишда бўлганлиги сабабли Λ га мусбат бўлишлик шарти қўйилмайди. Бундан ташқари, (9.34)-(9.35) шартлар ихтиёрий базис режалар учун ўринли бўлганлиги сабабли уларни ташлаб юбориш мумкин. Демак, хулоса қилиб шуни айтиш мумкинки, қуйидаги

$$\begin{cases} AX=B & (9.40) \\ 2DX-A'\Lambda^0+V+C'=0, & (9.41) \\ X'V=0, & (9.42) \\ X \geq 0,\ V \geq 0. & (9.43) \end{cases}$$

шартларни қаноатлантирувчи ҳар қандай $X \geq 0$, $V \geq 0$ векторлар берилган (9.21)-(9.22) масаланинг ечимини билдиради. Агар бу (9.40)-(9.43) система ягона ечимга эга бўлса, берилган квадратик дастурлаш масаласи ҳам ягона (глобал) оптимал ечимга эга бўлади. Агар (9.40)-(9.43) система биргаликда бўлмаса, берилган квадратик дастурлаш масалаcи ҳам ечимга эга бўлмайди. Шундай қилиб, берилган (9.21)-(9.23) квадратик дастурлаш масаласини ечимини (9.40)-(9.43) системанинг ечими орқали топиш мумкин. Бу системанинг ечимини топиш масаласи қуйидагича қуйилади: (9.40)-(9.41) тенгламалар системасининг шундай номанфий $(X \geq 0,\ \Lambda \geq 0)$ базис ечимини топиш керакки, у $X'V$ кўпайтмани нолга айлантирсин. Демак, хулоса қилиб айтиш мумкинки, агар квадратик дастурлаш масаласи ((9.21)-(9.23)) оптимал ечимга эга бўлса, бу ечим (9.40)-(9.41) тенгламалар системасининг базис ечимларининг биридан иборат бўлади.

1-масала. Қуйидаги квадратик дастурлаш масаласининг ечимини Кун-Таккер шартларидан фойдаланиб топинг:

$$x_1+2x_2 \leq 13,$$
$$2x_1+x_2 \leq 9,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \qquad (9.44)$$
$$Z = f(x) = -4x_1^2 - 6x_2^2 + 8x_1 + 44x_2 + 2x_1x_2 \to \max.$$

Ечиш. Лагранж функциясини тузамиз:

$$F(X,\Lambda) = -4x_1^2 - 6x_2^2 + 8x_1 + 44x_2 + 2x_1x_2 +$$
$$+ \lambda_1(13 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(9 - 2x_1 - x_2).$$

Бу функциядан x_1, x_2, λ_1 ва λ_2 лар бўйича хусусий ҳосилалар оламиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -8x_1 + 8 + 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -12x_2 + 44 + 2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 13 - x_1 - 2x_2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 9 - 2x_1 - x_2.$$

Энди Кун-Таккер шартларини ёзамиз:

$$\begin{cases} -8x_1 + 8 + 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 0, \\ -12x_2 + 44 + 2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0, \\ 13 - x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ 9 - 2x_1 - x_2 \geq 0, \end{cases} \qquad (9.45)$$

$$\frac{dF}{dx_1}\cdot x_1 = 0,$$
$$\frac{dF}{dx_2}\cdot x_2 = 0,$$
$$\frac{dF}{d\lambda_1}\cdot \lambda_1 = 0, \qquad (9.46)$$
$$\frac{dF}{d\lambda_2}\cdot \lambda_2 = 0.$$

(9.45) системанинг ечимлари орасидан (9.46) ни қаноатлантирувчисини аниқлаш керак. (9.45) системага ўзгарувчилар киритиб, уни қуйидаги тенгламалар системасига келтирамиз:

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 = 8, \\ -2x_1 + 12x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 = 44, \\ x_1 + 2x_2 + v_3 = 13. \\ 2x_1 + x_2 + v_4 = 9 \end{cases} \qquad (9.47)$$

(9.46)га асосан v_1, v_2, v_3, v_4 қўшимча ўзгарувчилар қуйидаги шартларни қаноатлантириши керак:

$$x_1v_1 = 0,\ x_2v_2 = 0,\ \lambda_1v_3 = 0,\ \lambda_2v_4 = 0 \qquad (9.48)$$

(9.47) системага w_1, w_2 сунъий базис ўзгарувчиларни киритб, уни қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласи кўринишда ифодалаймиз:

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 + \omega_1 = 8, \\ -2x_1 + 12x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 + \omega_2 = 44 \\ x_1 + 2x_2 + v_3 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + v_4 = 9, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \\ v_1 \ge 0, v_2 \ge 0, v_3 \ge 0, v_4 \ge 0, \end{cases} \qquad (9.49)$$

$$Z = M\omega_1 + M\omega_2 \to \min \qquad (9.50)$$

(9.49)-(9.50) масалани симплекс жадвалга жойлаштирамиз (9.1-жадвал). Бунинг учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$P_0=\begin{pmatrix}8\\44\\13\\9\end{pmatrix},\ P_1=\begin{pmatrix}8\\-2\\1\\2\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}-2\\12\\2\\1\end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},P_4=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ P_5=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ P_6=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ P_7=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$P_8=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},P_9=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},P_{10}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

бу белгилашларда ҳамма номаълумлар симплекс жадвалга $x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2,v_1,v_2,v_3,v_4,w_1,w_2$. тартибда жойлаштирилган. Масалани симплекс усулда ечиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$x_1^*=2,x_2^*=4,v_3^*=3,v_4^*=1.$$

Топилган ечим (9.49)-(9.50) масаланинг базис ечими бўлади. Бу ечим (9.48) шартларни қаноатлантиради:

$$x_1v_1=0,x_2v_2=0,\lambda_1v_3=0,\lambda_2v_1=0,$$

шунинг учун у берилган (9.44) квадратик дастурлаш масаласининг ечимидан иборат.

$$x_2^*=2,x_2^*=4,Z=f(X^*)=96.$$

9.1-жадвал

Б. В.	$c^б$	P_0	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
P_9	M	8	8	-2	1	2	-1	0	0	0	1	0
P_{10}	M	44	-2	12	2	1	0	-1	0	0	0	1
P_7	0	13	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
P_8	0	9	2	1	0	0	0	0	0	1	0	0
Δ		52M	6M	10M	3M	3M	-M	-M	0	0	0	0
P_9	M	$\frac{46}{3}$	$\frac{23}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{13}{6}$	-1	$-\frac{1}{6}$	0	0	1	
P_2	0	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{12}$	0	0	0	
P_7	0	$\frac{17}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	1	0	0	
P_8	0	$\frac{16}{3}$	$\frac{13}{6}$	0	$\frac{-1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	0	1	0	
Δ	0	$\frac{46}{3}M$	$\frac{23}{3}M$	0	$\frac{4}{3}M$	$\frac{13}{6}M$	-M	$-\frac{M}{6}$	0	0	0	

P1	0	2	1	0	$\frac{4}{23}$	$\frac{13}{46}$	$-\frac{3}{23}$	$-\frac{1}{46}$	0	0		
P2	0	4	0	1	$\frac{4}{46}$	$\frac{13}{92}$	$-\frac{3}{138}$	$-\frac{2}{23}$	0	0		
P7	0	3	0	0	$-\frac{13}{23}$	$-\frac{25}{46}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{9}{46}$	1	0		
P8	0	1	0	0	$-\frac{45}{46}$	$-\frac{16}{23}$	$\frac{13}{46}$	$\frac{13}{92}$	0	1		
		0	0	0	0	0	0	0	0	0		

3-§. Квадратик дастурлаш масаласини ечиш учун Баранкин-Дорфман усули

Баранкин-Дорфман усули (9.21)-(9.23) масаланинг ечимини (9.40)-(9.43) системасини ечиш орқали топишга мўлжалланган бўлиб, унинг ғояси қуйидагидан иборат. Энг аввал (9.40)-(9.41) системанинг ихтиёрий базис режаси топилади. Бу базис режа асосида қатор симплекс алмаштиришлар бажариб $X' V$ кўпайтманинг базис қиймати камайтириб борилади. Натижада $X' V=0$ тенгликка мос келувчи базис ечим топилади. Фараз қилайлик, (9.40)-(9.43) системанинг ихтиёрий базис ечими топилган бўлсин. Бу ҳолда базис ўзгарувчилар озод ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида ифода қилинади. Қулайлик учун x_j, λ_i, v_i базис ўзгарувчиларни y_j билан ($v_i = y_{i+n}$), озод ўзгарувчиларни эса t_k лар билан белгилаймиз. У ҳолда қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 = b_{10} + a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots + a_{1n}t_n, \\ y_2 = x_2 = b_{20} + a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{2n}t_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = x_n = b_{n0} + a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \ldots + a_{nn}t_n, \\ y_{n+1} = v_1 = b_{n+1,0} + a_{n+1,1}t_1 + a_{n+1,2}t_2 + \ldots + a_{n+1,n}t_n, \\ y_{n+2} = v_2 = b_{n+2,0} + a_{n+2,1}t_1 + \ldots + a_{n+2,n}t_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{2n+m} = \lambda_m = b_{2n+m,0} + a_{2n+m,1}t_1 + \ldots + a_{2n+m,n}t_n, \end{cases} \qquad (9.51)$$

ёки

$$y_j = b_{j0} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}t_k, \quad j = \overline{1,2n+m} \qquad (9.52)$$

Агар y_j ўзгарувчи озод ўзгарувчи t_k га мос қўйилган бўлса, у қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y_j = t_k = 0 + 0 \cdot t_1 + \ldots + 0 \cdot t_{k-1} + 1 \cdot t_k + 0 \cdot t_{k+1} + \ldots + 0 \cdot t_n \qquad (9.53)$$

(9.52) белгилашлар ёрдамида номаълумларни қуйидаги тартибда жойлаштириш мумкин:

$$x_1, x_2, \ldots x_n, v_2, \ldots y_n, \lambda_1, \ldots \lambda_m$$

Бу ҳолда базис ечим учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$y_j = b_{j0}, t_k = 0$$

$$T = X'V = \sum_{j=1}^{n} b_{j0} \cdot b_{m+j,0}. \qquad (9.54)$$

Энди фараз қилайлик, базисга янги $t_k = \theta_k > 0$ ўзгарувчи киритилсин. У ҳолда, агар қолган $t_h (h \neq k)$ ўзгаручиларни нолга тенг деб қараганда базис ўзгарувчиларнинг қиймати қуйидагига тенг бўлади:

$$y_j = b_{j0} + \theta_k a_{jk}$$

t_k ўзгарувчининг қиймати қуйидагича танланади:

$$t_k = \theta_k = \min_{a_{jk}<0} \left\{ \frac{b_{j0}}{a_{jk}} \right\}.$$

Бунда янги базис ечим топилган бўлади ва бу ечим учун $T = X'V$ қуйидаги қийматни қабул қилади:

$$Tk = X'V = \sum_{j=1}^{n} (b_{j0} + \theta_k a_{jk})(b_{n+j,0} + \theta_k a_{n+j,k}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{j0} b_{n+j,0} + \theta_k \left(\sum_{j=1}^{n} b_{j0} a_{n+j,k} + \sum_{j=1}^{n} a_{jk} b_{n+j,0}\right) + \theta_k^2 \sum_{j=1}^{n} a_{jk} a_{n+j,k} = T + \theta_k R_k, \qquad (9.55)$$

бу ерда

$$T = \sum_{j=1}^{n} b_{j,0} b_{n+j,0}, \qquad (9.56)$$

$$R_k = a_k + \theta_k \beta_k, \qquad (9.57)$$

$$a_k = \sum_{j=1}^{n} b_{j,0} a_{n+j,k} + \sum_{j=1}^{n} a_{jk} b_{n+j,0}, \qquad (9.58)$$

$$\beta_k = \theta_k \sum_{j=1}^{n} a_{jk} a_{n+j,k} \qquad (9.59)$$

Симплекс алмаштиришлар натижасида $T=X'V$ нинг қиймати камая бориши керак. Шунинг учун базисга $R_k<0$ га мос келувчи t_k ўзгарувчи киритилади. Агар манфий R_k лар бир нечта бўлса, у ҳолда базисга $\min_{R_k<0} R_k \cdot \theta_k$ га мос келувчи t_k вектор киритилади.

Маълумки, β_k ифода Т дан t_k бўйича олинган икккинчи тартибли ҳосилидан иборат. Т қавариқ бўлганлиги сабабли ҳар доим $\beta_k > 0$ бўлади. Демак, R_k ишораси a_k нинг ишорасига боғлиқ бўлади. Шунинг учун $a_k \geq 0$ бўлганда β_k, θ_k ва R_k ларни ҳисобламаслик мумкин. Агар барча t_k лар учун $T>0$, $R_k>0$ бўлса, Баранкин-Дорфман усулини қўллаб бўлмайди.

1-мисол.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 6,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$$
$$Z = f(X) = 10x_1 - x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 \to \max$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix},$$

Бу масала учун (9.40)-(9.43) система қуйидагича ёзилади:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 6,$$
$$-2x_1 + 2x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 + v_1 = -10,$$
$$2x_1 - 4x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + v_2 = 0,$$
$$-\lambda_1 + v_3 = 0,$$
$$-\lambda_2 + v_4 = 0,$$
$$x_j \geq 0, v_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,4}.$$

Бу системанинг бошланғич базис ечимини аниқлаймиз. Бунинг учун биринчи тенгламадан x_3 ни, иккинчисидан x_4 ни, тўртинчисидан v_2, бешинчисидан v_4 ни ажаратамиз ҳамда учинчи тенгламани λ_2 га нисбатан ечамиз:

$$\begin{aligned} &x_3 = 10 - x_1 - 2x_2 \\ &x_4 = 6 - x_1 - x_2, \\ &\lambda_2 = 10 - 2x_1 + 2x_2 - \lambda_1 + v_1 \qquad (9.60) \\ &v_2 = -2x_1 + 4x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2, \\ &v_3 = \lambda_1, v_4 = \lambda_2. \end{aligned}$$

λ_2 қийматини v_2, v_4 ларга мос келувчи ифодаларга қўямиз.

Натижада қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_3 = 10 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 6 - x_1 - x_2 \\ \lambda_2 = 10 - 2x_1 + 2x_2 - \lambda_1 + v_1, \\ v_2 = 10 - 4x_1 + 6x_2 + \lambda_1 + v_1, \\ v_3 = \lambda_1, \\ v_4 = 10 - 2x_1 + 2x_2 \quad \lambda_1 + v_1. \end{cases} \qquad (9.61)$$

(9.61) системага

$$x_1 = 0 + x_1 + 0 + \ldots + 0,$$
$$x_2 = 0 + 0 + x_2 + \ldots + 0,$$
$$v_1 = 0 + 0 + \ldots + v_1$$

тенгламаларни қўшиб тўлдирамиз ва 9.2-жадвалга жойлаштирамиз. Жадвалга базисга киритиладиган номаълумни аниқлашга кўмаклашувчи қўшимча қисм киритилган. Бу қўшимча жадвалнинг $\alpha_k, \beta_k, \theta_k$ *ва* R_k элементлари юқоридаги (9.52),(9.54),(9.56)-(9.59) формулалар орқали аниқланади.

9.2-жадвал

y_i \ t_k	x_0	x_1	x_2	v_1	λ_1
x_1	0	1	0	0	0
x_2	0	0	1	0	0
x_3	10	-1	-2	0	0
x_4	6	-1	-1	0	0
v_1	0	0	0	1	0
v_2	10	-4	6	1	1
v_3	0	0	0	0	1
v_4	10	-2	2	1	-1
λ_2	10	-2	2	1	-1
α_k	60	-22	12	6	4
β_k		2			
θ_k		2,5			
R_k		-17			

(9.56) ва (9.58) формулаларга кўра:

$$\alpha_0 = T_0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 10 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 10 = 60,$$
$$\alpha_1 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) + 10 \cdot 0 + 6 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 10 + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 10 = -22,$$
$$\alpha_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 10 + (-2) \cdot 0 + (-!) \cdot 10 = 12,$$
$$\alpha_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 10 = 6,$$
$$\alpha_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 4.$$

9.2-жадвалдан кўринадики, α_k нинг фақат битта қиймати манфий ($\alpha_1=-22$). Демак, x_1 номаълумни базисга киритиш натижасида Т нинг қийматини камайтириш мумкин. Шунинг учун β_k,θ_k,R_k ларни фақат x_1 га мос келувчи устун учун ҳисоблаш керак:

$$\beta_1=1\cdot0+0\cdot(-4)+(-1)\cdot0+(-1)\cdot(-2)=2,$$

$$\theta_1=\min\left\{\frac{10}{1},\frac{6}{1},\frac{10}{4},\frac{10}{2},\frac{10}{2}\right\}=2{,}5,$$

$$R_1=\alpha_1+\theta_1\beta_1=-17,$$

$$T_1=T_0+\theta_1R_1=60-17\cdot2{,}5=17{,}5.$$

Бу ерда $T_1\neq0$. Шунинг учун x_1 номаълумни базисга киритиб, υ_1 ни базисдан чиқарамиз.

Натижада 9.3-жадвални ҳосил қиламиз.

9.3-жадвалдан (9.56),(9.58) формулаларга асосан $\alpha_k(k=\overline{0,4})$ нинг қийматларини ҳисоблаймиз:

$$\alpha_{r.}=\frac{5}{2}\cdot0+0\cdot0+\frac{15}{2}\cdot0+\frac{7}{2}\cdot5=\frac{35}{2},$$

$$\alpha_0=\frac{5}{2}\cdot0+0\cdot1+\frac{15}{2}\cdot0+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot0+0\cdot0+\frac{1}{4}\cdot0+\frac{1}{4}\cdot5=3,$$

$$\alpha_1=\frac{5}{2}\cdot0+0\cdot0+\frac{15}{2}\cdot0+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}+(-1)+\frac{3}{2}\cdot0+1\cdot0+\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot0+\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot5=-16,$$

$$\alpha_3=\frac{5}{2}\cdot1+0\cdot0+\frac{15}{2}\cdot0+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot0+0\cdot0+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot0+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot5=3,$$

$$\alpha_4=\frac{5}{2}\cdot0+0\cdot0+\frac{15}{2}\cdot1+\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{4}\cdot0+0\cdot0+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot0+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot5=1$$

9.3- жадвал.

	x_0	υ_2	x_2	υ_1	λ_1
x_1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_2	0	0	1	0	0
x_3	$\frac{15}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_4	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
υ_1	0	0	0	1	0
υ_2	0	1	0	0	0
υ_3	0	0	0	0	1
υ_4	5	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
λ_2	5	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
α_k	$\frac{35}{2}$	3	-16	3	1
β_k			$\frac{5}{2}$		
θ_k			$\frac{7}{5}$		
R_k			$-\frac{25}{2}$		

Булардан кўринадики, фақат битта $\alpha_k(\alpha_2=-16)$ манфий қийматга эга. Шунинг учун бу ерда ҳам β_k,θ_k,R_k ларни υ_2 га мос келувчи устун учун ҳисоблаймиз:

$$\beta_2=\frac{3}{2}\cdot 0+1\cdot 0+\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot 0+\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot(-1)=\frac{5}{2},$$

$$\theta_2=\min\left(\frac{15/2}{7/2},\ \frac{7/2}{5\ 2},\ \frac{5}{1},\ \frac{5}{1}\right)=\frac{7}{5}=1{,}4$$

$$R_2=\alpha_2+\theta_2\beta_2=-\frac{25}{2},$$

$$T_2=T_1+\theta_1R_1=17{,}5-\frac{35}{2}=0$$

$T_2=0$ бўлганлиги сабабли базис ўзгарувчиларнинг қийматини (9.53) га асосан топамиз:

$$x_1 = \frac{5}{2} + 0\cdot\frac{3}{2} = \frac{5}{2} + \frac{7}{5}\cdot\frac{3}{2} = \frac{23}{5},$$
$$x_2 = \frac{7}{5},$$
$$x_3 = \frac{15}{2} - \frac{7}{5}\cdot\frac{7}{2} = \frac{13}{5},$$
$$x_4 = \frac{7}{2} - \frac{7}{5}\cdot\frac{5}{2} = 0,$$
$$v_4 = 5 - \frac{7}{5} = \frac{18}{5}$$
$$\lambda_2 = 5 - \frac{7}{5} = \frac{18}{5},$$
$$v_1 = v_2 = v_3 = 0.$$

бу ҳолда берилган квадратик дастурлаш масаласининг оптимал ечими қуйидагидан иборат бўлади:

$$x_1^* = \frac{23}{5}, x_2^* = \frac{7}{5}, x_3^* = \frac{13}{5}, x_4^* = 0, \; Z(X^*) = \frac{169}{5}.$$

4-§. Квадратик дастурлаш масалаларини ечиш учун Бил усули

Фараз қилайлик, юқоридаги (9.21)-(9.23) масала берилган бўлсин. Бу масалада $X'DX$ квадратик форма манфий аниқланган, яъни $f(X)$ юқорига қавариқ функция деб фараз қиламиз.

$AX=B, X\geq 0$ система берилган m та ўзгарувчига нисбатан ечилган бўлсин. У ҳолда бу системани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n, \\ x_2 = b_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = b_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}, \end{cases} \qquad (9.62)$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0, \\ b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \ldots, b_m \geq 0. \end{cases} \qquad (9.63)$$

Энди (9.62) га асосланиб, масаланинг мақсад функциясини

$$f(X) = C'X + X'DX = cx_1 + \ldots + c_nx_n + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}x_ix_j$$

формадан қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$f(x_{m+1},x_{m+2},...,x_n)=C_{00}^1+2\sum_{j=m+1}^{n}C_{oj}^1x_j+\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=m+1}^{n}C_{ij}^1x_ix_j=$$

$$=(C_{00}^1+\sum_{j=m+1}^{n}C_{0j}^1x_j)\cdot 1+\sum_{i=m+1}^{n}(C_{i0}^1+\sum_{j=m+1}^{n}C_{ij}^1x_j)x_i$$

ёки бундан

$$\begin{cases} f(X)=(C_{00}^1+C_{0m+1}^1x_{m+1}+...+C_{0n}^1x_n)\cdot 1+ \\ +(C_{m+1,0}^1+C_{m+1,m+1}^1,x_{m+1}+...+C_{m+1,n}^1x_n)x_{m+1}+ \\ +\text{...} \\ C_{i0}^1+C_{i,m+1}^1x_{m+1}+...+C_{in}x_n)x_1+ \\ \text{...} \\ +(C_{n0}^1+C_{nm+1}^1 \quad ...+C_{nn}^1x_n)x_n, \end{cases} \qquad (9.64)$$

(бу ерда барча i ва j лар учун $C_{ij}^1=C_{ji}^1$). (9.64) даги ҳар бир x_j номаълум олдидаги қавс ичида ёзилган ифода $f(x)$ функциядан x_j номаълум бўйича олинган хусусий ҳосиланинг ярмига тенг бўлади, яъни масалан, $j=1$ да

$$C_{10}^1=C_{i,m+1}x_m+...+C_{1n}x_n=\frac{1}{2}\frac{\partial f(x_{m+1},...,x_n)}{\partial x_i} \qquad (9.65)$$

Маълумки, $x_1,x_2,...,x_m$ базис ўзгарувчилар учун

$$\frac{\partial f(x_{m+1},...,x_n)}{\partial x_j}=0, \quad j=\overline{1,m}$$

тенглик тўғридир. Шунинг учун берилган масала режасининг оптималлигини кўрсатувчи Кун-Таккер шартларини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\frac{\partial f(x_{m+1},...,x_n)}{\partial x_j}\le 0, \qquad \frac{\partial f(x_{m+1},...,x_n)}{\partial x_j}x_j=0$$

$$x_j\ge 0, j=\overline{m+1,n} \qquad (9.66)$$

Энди (9.62) да озод ўзгарувчиларнинг нолга тенглаб,

$$X^{(0)}=(b_1,b_2,...,b_m,0,0,...,0) \quad (b_i\ge 0, i=\overline{1,m})$$

базис ечимни ҳосил қиламиз. Агар

$$\frac{\partial f(x_{m+1}^{(0)},...,x_n^{(0)})}{\partial xj}\le 0$$

шарт барча j = m+1,...,n учун ўринли бўлса, топилган

$$X^0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_m^{(0)},x_{m+1}^{(0)},...,x_n^{(0)})$$

базис ечим масаланинг ечими бўлади.

Фараз қилайлик,

$$\frac{\partial f\left(x_{m+1}^{(0)},...,x_n^{(0)}\right)}{\partial xj} > 0$$

шартни қаноатлантирувчи камида битта j, масалан, $j = m+1$ мавжуд бўлсин. У ҳолда x_{m+1} номаълумнинг қийматини орттира бориб, $f(x)$ функцияни қийматини орттира бориш мумкин, лекин x_{m+1} нинг қийматини чексиз равишда орттириш мумкин эмас, чунки унинг маълум қийматларида $x_1, x_2, ..., x_m$ номаълумлардан бирортаси ёки

$$\frac{\partial f(x_{m+1},...,x_n)}{\partial x_j}\left(j = \overline{m+1, n}\right)$$

ифода нолга айланиши мумкин. Буларнинг қайси бири биринчи бўлиб нолга айланишига боғлиқ равишда x_{m+1} ўзгарувчи қўйидаги икки усул билан базисга киритилади.

1-усул. x_{m+1} нинг қиймати орттириб борилганда $x_1, x_2, ..., x_m$ номаълумлардан бирортаси, масалан $x_к$ биринчи бўлиб нолга айлансин. Бунда $x_к$ учун

$$\theta = \min_{\substack{a_{i,m+1}<0 \\ C_{m+1,m+1}<0}} \left\{\frac{b_i}{|a_{i,m+1}|}, \frac{C_{m+1,0}}{|C_{m+1,m+1}|}\right\} = \frac{b_k}{|a_{k,m+1}|}$$

ўринли бўлади. У ҳолда

$$x_k = b_k + a_{k,m+1}x_{m+1} + a_{k,m+2}x_{m+2} + ... + a_{kn}x_n$$

ифодадан x_{m+1} ни ажратамиз ($x_к$ нинг ўрнига x_{m+1} ни базисга киритамиз).

Топилган x_{m+1} нинг қийматини (9.62) системага қўямиз. Юқорида кўрган алмаштиришларни бажариб, $f(x_k, x_{m+2}, ..., x_n)$ функцияни (9.64) кўринишда ифодалаймиз. Натижада янги базис ечим

$$X^{(1)} = (b_1, b_2, ..., b'_{k-1}, b_{k+1}, ..., b'_m, b_{m+1}, 0, ..., 0)$$ топилади.

2-усул. x_{m+1} номаълумнинг қиймати орттириб борилганда $\frac{\partial f(x_{m+1},...,x_n)}{\partial x_{m+1}}$ ифода биринчи бўлиб нолга айлансин, яъни қуйидаги муносабат ўринли бўлсин:

$$\theta = \min_{\substack{a_{i,m+1}<0 \\ C_{m+1,m+1}<0}} \left(\frac{b_i}{|a_{i,m+1}|}, \frac{C_{m+1,0}}{|C_{m+1,m+1}|}\right) = \frac{C_{m+1,0}}{|C_{m+1,m+1}|} \qquad (9.67)$$

У ҳолда x_{m+1} номаълумни базисга киритиш учун янги

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f(x_{m+1},...,x_n)}{\partial x_{m+1}} = C_{m+1,0} + C_{m+1,m+1}x_{m+1} + ... + C_{m+1,n}x_n \qquad (9.68)$$

ўзгарувчи танлаймиз ҳамда (9.68) дан x_{m+1} ни ажратиб, янги системанинг биринчи тенгламасини тузамиз:

$$ {}_{+1} = \frac{C_{m+1,0}}{C_{m+1,m+1}} - \frac{C_{m+1,m+2}}{C_{m+1,m+1}} x_{m+2} - \ldots - \frac{C_{m+1,n}}{C_{m+1,m+1}} x_n + \frac{u_1}{C_{m+1,m+1}}. $$

Топилган номаълумнинг қиймати масала шартлари (9.62) га ва мақсад функцияга қўямиз ва янги система ҳосил қиламиз. Янги системада $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}$ ўзгарувчилар ажратилган (боғлиқ) ўзгарувчилар бўлиб, $u_1, x_{m+2}, \ldots, x_n$ лар эса озод ўзгарувчилар бўлади. озод ўзгарувчиларни нолга тенглаб, янги

$$ X^{(1)} = (b_1, b_2, \ldots, b_m, b_{m+1}, 0, \ldots, 0) $$

базис ечимини ҳосил қиламиз.

k-қадамда масала x_j ва u_i номаълумларни ўз ичига олиши мумкин. x_j u_i дан шуниси билан фарқ қиладики, x_j нинг ишорасига чегара қўйилади $\left(x_j \geq 0, j = \overline{1,n}\right)$, u_i га эса бундай чегара қўйилмайди. Демак, у мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мукин. Бундай ўзгарувчилар учун Кун-Таккернинг оптималлик шарти $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$ бўлади.

Масаланинг базис ечимида $u_i = 0$ бўлиши керак. Агар $u_i \neq 0$ бўлса, тегишли тенглама ва u_i ўзгарувчи масала шартларидан ўчириб ташланади.

Алгоритмнинг k-қадамида қуйидаги ишлар бажарилади:

1. k-1-қадамда топилган $X^{(k-2)}$ базис ечим учун оптималлик шар-ти текширилади. Агар x_j озод ўзгарувчилар учун $\frac{\partial f}{\partial xj} \leq 0$ бўлиб, янги киритилган барча u_i ўзгарувчилар учун $\frac{\partial f}{\partial xj} = 0$ бўлса топилган ечим оптимал ечим бўлади.

2. Агар оптималлик шарти бажарилмаса, у ҳолда $\frac{\partial f}{\partial u} \neq 0$ шартни қаноатлантирувчи камида битта u_i аниқланади. Бу ерда қуйидаги 3 ҳол рўй бериши мумкин:

а) $\frac{\partial f}{\partial u_i} < 0$. Бу ҳолда u_i нинг қийматини камайтириш керак. Натижада мақсад функциянинг қиймати ортади.

б) $\frac{\partial f}{\partial u_i} > 0$. Бу ҳолда u_i нинг қийматини орттириш натижасида мақсад функциянинг қиймати ортади.

в) $\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$. Бу ҳолда $\frac{\partial f}{\partial x_t} > 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x_t номаълум танланади. Бу номаълум ёки базисга киритилади ва унинг қиймати

$$\theta = \min\left\{\frac{bi}{|a_{i,l}|}, \frac{Ct_{,0}}{|Ct_{,l}|}\right\}$$

формула орқали топилади, ёки бўлмаса, масаланинг мақсад функцияси юқоридан чегараланмаган эканлиги $a_{i,l} > 0 C_{i,l} > 0$. (барча j лар учун) аниқланади. Агар k-қадамда янги базис ечим $X^{(k-1)}$ топилган бўлса, k+1 қадамга ўтилади. Мақсад функциянинг юқоридан чегараланмаган эканлиги аниқлинган бўлса, масаланинг ечиш жараёни тўхтатилади.

Таққослаш учун юқорида Баранкин-Дорфман усули билан ечилган масалани кўрамиз ва уни Билл усули билан ечамиз.

Масала. Қуйидаги масала ечилсин:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 6,$$
$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4},$$
$$Z = \max = f(X) = 10x_1 - x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Ечими. Масала шартидаги биринчи тенгламадан x_3 ни, иккинчисидан x_4 ни ажратамиз ва f(x) мақсад функцияни (9.64) кўринишда ёзамиз. Натижада берилган масалани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$x_3 = 10 - x_1 - 2x_2,$$
$$x_4 = 6 - x_1 - x_2 \qquad (9.69)$$
$$f(X) = (0 + 5 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2) \cdot 1 + (5 + x_1 + x_2) \cdot x_1 + (0 + x_1 - 2x_2) \cdot x_2$$

(9.69) дан кўриш мумкинки,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f(X)}{\partial x_1} = 5 - x_1 + x_2,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f(X)}{\partial x_2} = 0 + x_1 - 2x_2,$$

Озод ўзгарувчилар (x_1,x_2) га нол қиймат бериб, бошланғич базис ечимини аниқлаймиз:

$$X^{(0)} = (0;0;10;6), f(X^{(0)}) = 0$$

Энди

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f\left(X^{(0)}\right)}{\partial x_1} = 5 > 0$$

бўлганлиги сабабли x_1 номаълумни базисга киритамиз. Бунинг учун

$$\theta = \min\left\{\frac{10}{2}, \frac{6}{1}, \frac{5}{1}\right\} = 5$$

сонни аниқлаймиз ва

$$u_1 = 5 - x_1 + x_2$$

белгилаш киритамиз. (9.70) дан x_1 ни ажратиб, базис ўзгарувчиларни алмаштирамиз:

$$x_1 = 5 + x_2 - u_1 \qquad (9.72)$$

Топилган x_1 нинг қийматини масаланинг шартлари ва мақсад функцияга қўямиз ҳамда (9.71) ни (9.69) системага қўшиб ёзамиз. Натижада қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} & x_1 = 5 + x_2 + u_1, \\ & x_3 = 5 - 3x_2 + u_1, \\ & x_4 = 1 - 2x_2 + u_1, \\ & f(x_2, u_1) = (25 + 5x_2) * 1 + (5 - x_2) * x_2 + (0 - u_1) * u_1 \end{aligned} \qquad (9.73)$$

(9.72)-(9.73) масаладаги x_2, u_1 озод ўзгарувчиларга нол қиймат бериб, янги базис ечимни топамиз:

$$X^{(1)} = (5;0;5;1;0), \qquad f(X^{(1)}) = 25.$$

(9.73)дан кўринадики,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f\left(X^{(1)}\right)}{\partial x_2} = 5 > 0.$$

Демак, базисга x_2 номаълумни киритиш керак.

$$\theta = \min\left\{\frac{5}{3}, \frac{1}{2}, 5\right\} = \frac{1}{2}$$

бўлганлиги сабабли x_2 ни базисга киритиб, базисдан x_4 ни чиқариш керак. Демак, $x_4 = 1 - 2x_2 + u_1$ тенгламадан x_4 ни x_2 га алмаштирамиз:

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x_4 + \frac{1}{2} u_1 \qquad (9.74)$$

Ҳосил бўлган (9.74) тенгламани янги системанинг биринчи тенгламаси деб қараймиз. Сўнгра топилган x_2 нинг қийматини масаланинг шартлари (9.72) га мақсад функция (9.73) га қўйиб, янги системанинг қолган тенгламалари ва мақсад функциясини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x_4 + \frac{1}{2} u_1, \\ x_2 = \frac{11}{2} - \frac{1}{2} x_4 - \frac{1}{2} u_1, \\ x_3 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} x_4 - \frac{1}{2} u_1, \end{cases} \qquad (9.75)$$

$$f(x_4, b_1) = \left(\frac{119}{4} - \frac{9}{4} x_4 + \frac{9}{4} u_1\right) \cdot 1 + \left(-\frac{9}{4} - \frac{1}{4} x_4 + \frac{1}{4} u_1\right) \cdot x_4 + \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4} x_4 - \frac{5}{4} u_1\right) \cdot u_1.$$

(9.76)

Янги базис ечим. $u_1 = 0$ да

$$\frac{\partial f\left(X^{(2)}\right)}{\partial u_1} = \frac{9}{4} > 0.$$

Шунинг учун топилган ечим базис ечим бўлмайди. Демак, базис ечимни оптималлаштириш керак. Бунинг учун u_1 ни базисга киритамиз.

$$\theta = \min\left\{\frac{\frac{11}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{4}}\right\} = \frac{9}{5} \text{ бўлганлиги сабабли}$$

$$_2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x_4 - \frac{5}{4}u_1 \qquad (9.77)$$

янги номаълумни киритамиз. (9.77) дан u_1 ни ажратиб, янги системанинг биринчи тенгламасини тузамиз:

$$_1 = \frac{9}{5} + \frac{1}{5}x_4 - \frac{4}{5}u_2 \qquad (9.78)$$

(9.78)ни (9.75) ва (9.76) га қўйиб топамиз:

$$x_1 = \frac{23}{5} - \frac{3}{5}x_4 + \frac{2}{5}u_2,$$

$$x_2 = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}x_4 - \frac{2}{5}u_2, \qquad (9.79)$$

$$x_3 = \frac{13}{5} + \frac{7}{5}x_4 + \frac{2}{5}u_2,$$

$$f(x_4, u_2) = \left(\frac{169}{5} - \frac{9}{5}x_4\right)\cdot 1 + \left(-\frac{9}{5} - \frac{1}{5}x_4\right)\cdot x_4 + \left(-\frac{4}{5}u_2\right)\cdot u_2. \qquad (9.80)$$

Янги базис ечим ($u_2 = 0$ да):

$$X^{(3)} = \left(\frac{23}{5}, \frac{7}{5}, \frac{13}{5}, 0\right),$$

$$f\left(X^{(3)}\right) = \frac{169}{5}.$$

(9.80)дан кўринадики,

$$\frac{\partial f\left(X^{(3)}\right)}{\partial x_4} < 0, \left(\frac{\partial f\left(X^{(3)}\right)}{\partial u_2}\right)_{u_2=0} = 0, \qquad \frac{\partial f\left(X^{(2)}\right)}{\partial x_4} \cdot x_4 = 0.$$

Демак, $X^{(3)}$ учун Кун-Таккер шартлари бажарилади. Шунинг учун бу ечим оптимал ечим бўлади. Шундай қилиб, масаланинг оптимал ечими:

$$X^* = \left(\frac{23}{5}, \frac{7}{5}, \frac{13}{5}, 0\right),$$

$$f\left(X^*\right) = \frac{169}{5}.$$

Бу ечимни Баранкин-Дорфман усули бўйича топилган ечим билан солиштириб, уларнинг бир хил эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Таянч сўз ва иборалар

Квадратик дастурлаш, квадратик форма, мусбат аниқланган квадратик форма, манфий аниқланган квадратик форма, номусбат аниқланган квадратик форма, номанфий аниқлинган квадратик форма, аниқмас квадратик форма; каноник кўринишдаги квадратик форма, Кун-Таккер шартлари

Назорат саволлари

1. Квадратик дастурлаш масаласи қандай қўйилади ва у чизиқли дастурлаш масаласидан нима билан фарқ қилади?
2. Квадратик форма деганда нимани тушунасиз?
3. Квадратик функциянинг пастга (юқорига) қавариқ бўлишлиги нимага боғлиқ бўлади?
4. Қандай квадратик форма манфий (мусбат) аниқланган квадратик форма дейилади?
5. Аниқмас квадратик форма қандай бўлади?
6. Квадратик форманинг каноник кўриниши қандай бўлади?
7. Номанфий (номусбат) квадратик форма Евклид фазосида қандай функцияни ифодалайди?
8. Квадратик дастурлаш масаласи учун Кун-Таккер шартлари қандай ёзилади?
9. Квадратик дастурлаш масаласини ечиш учун Баранкин-Дорфман усулининг ғояси нима?
10. Бил усулининг алгоритми қандай?

МАСАЛАЛАР.

1. Масалани 3-§ да изоҳланган симплекс усули бўйича ечинг.

$$x_1 + 4x_2 \le 4,$$
$$x_1 + +x_2 \le 2,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$Z\max = f(x) = 2x_1 + 3x_2 - 2x_2^2.$$

2. Масалани Баранкин-Дорфман усули билан ечинг.

$$x_1 + 3x_2 \ge 5,$$
$$2x_1 + 0.5x_2 \ge 2,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$Z\min = 4x_1^2 + 3x_2^2.$$

3. Масалани Бил усули бўйича ечинг.

$$x_1 + 3x_2 \le 9,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 12,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$Z\max = 5x_1 + 6x_2 - x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2..$$

4. Масалани график усулда, Баранкин-Дорфман усули бўйича ечиб, ечимларини солиштиринг.

$$3x_1 + 2x_2 \le 16,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$Z\max = 8x_1 + 10x_2 -$$

X БОБ. ГРАДИЕНТ УСУЛЛАР

Чизиқсиз дастурлаш масалаларини, жумладан, қавариқ дастурлаш ва квадратик дастурлаш масалаларини ечиш учун юқорида кўрилган (VIII, IX боблар) усулларнинг асосини симплекс усул ташкил этади, яъни оптимал ечим режалардан ташкил топган тўпламнинг бурчак нуқталари орасидан қидирилади. Лекин бу усул чекли имкониятга эга бўлганлиги учун уни чекламалари ва мақсад функцияси мураккаб шаклда бўлган масалаларга қўллаб бўлмайди. Шунинг учун бундай масалаларнинг оптимал ечимини топишда мақсад функциясининг **градиенти** тушунчасига асосланган ва **градиент усуллар** деб аталувчи усуллар кенг қўлланилади. Бу усуллар ёрдамида масаланинг мақсад функциясига максимал (минимал) қиймат берувчи нуқтага градиент йўналиши бўйича ҳаракат қилиб яқинлашиб борилади ва ҳар бир қадамда функциянинг максимал ўсиб (камайиб) бориши таъминланади. Градиент усуллар ёрдамида ҳар қандай чизиқли бўлмаган дастурлаш масаласини ечиш мумкин. Лекин, умумий ҳолда, бу усуллар масаланинг фақат маҳаллий оптимумини беради. Фақат режалардан ташкил топган G тўплам қавариқ бўлиб мақсад функцияси қавариқ ёки ботиқ бўлган масалалардагина градиент усул ёрдамида глобал (абсолют) оптимумни топиш мумкин. Шунинг учун бу усулларни қавариқ ва квадратик дастурлаш масалаларини ечишга қўллаш мақсадга мувофиқдир. Лекин шуни қайд этиб ўтиш керакки, градиент усул бўйича оптимал нуқтага жуда секинлик билан яқинлашиш мумкин. Фақат айрим хусусий ҳоллардагина, масалан, бу усулни чизиқли дастурлаш масалаларига қўллаганда оптимал ечимга чекли сондаги итерация ёрдамида эришиш мумкин.

Дарсликнинг ушбу бобида квадратик ва қавариқ дастурлаш масалаларига градиент усулни қўллаш ва унга доир баъзи қўшимча тушунчалар ва масалалар билан танишамиз.

1 - §. Функция градиенти тушунчаси

n ўлчовли Евклид фазоси E_n нинг бирор соҳасида ўзларининг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлган функциялар тўпламини C' билан белгилаймиз.

n ўлчовли $f \in C'$ функциянинг градиент проекциялари $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ лардан иборат бўлган вектор устун бўлиб, $grad\ f$ ёки ∇f символлар орқали белгиланади ва қуйидагича аниқланади:

grad $f = \nabla f = (\partial/\partial x_1)\ \vec{e}_1 + (\partial f/\partial x_2)\ \vec{e}_2 + \quad + (\partial f/\partial x_2)\ \vec{e}_n$, бу ерда $\vec{e}_1$, $_2$, $\vec{e}_n$ ортлар, ∇f символ "набла f" деб ўқилади.

Градиентни координата ўқларига проекциялари орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$f = \nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)',$$

$f(X)= f(x_1,\ x_2,\ \ \ \ x_n)$ функциянинг берилган X^0 нуқтадаги градиенти

$$\nabla f(X^0) = \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n}\right)$$

кўринишда ёзилади.

Берилган X^0 нуқтада $f(X)$ функциядан градиент йўналиши бўйича олинган ҳосила энг катта қийматга эришади ва

$$|\nabla f(X^0)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n}\right)^2}$$

га тенг бўлади. Демак, бундан градиент йўналиши бўйича олинган ҳосила энг тез ўсиш йўналишидир деган хулосага келиш мумкин.

$f(X)$ функциянинг X^0 нуқтадаги градиенти $\nabla f(X^0)$ нуқтадан ўтувчи юксаклик сирти (f(X)=const) га перпендикуляр бўлади.

$$-\nabla f(X^0) = \left(-\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, -\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}, \ldots, -\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n}\right)$$

вектор $f(X)$ функциянинг X^0 нуқтадаги тезлик билан камайиш йўналишини кўрсатади ва унинг X^0 нуқтадаги **антиградиенти** деб аталади.

Агар $X= (x_1,\ x_2,\ \ \ \ x_n)$ нуқта $f(X)$ функциянинг стационар нуқтаси бўлса $\nabla f(X)= 0$ тенглик бажарилади.

Юқорида $f(X)$ функциянинг берилган X^0 нуқтада градиент йўналиши бўйича олинган ҳосиласи ҳақида гапирдик. Буни тасаввур қилиш учун n ўзгарувчили $f(X)\in C'$ функциядан ихтиёрий $S= (s_1,\ s_2,\ \ \ \ s_n)$ йўналиш бўйича олинган ҳосила тушунчасини киритамиз.

Берилган X^0 нуқтада $f(X)= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C'$ функциядан $S= (s_1,\ s_2,\ \ \ \ s_n)$ ($\|S\|=1$) йўналиши бўйича олинган ҳосила қуйидаги лимит орқали аниқланади:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{f(X^0 + \lambda S) - f(X^0)}{\lambda}. \qquad \|S\| = 1.$$

Агар $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ $(j = \overline{1,n})$ ҳосилалар мавжуд бўлса, у ҳолда $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ ҳосилани қуйидаги формула ёрдамида топиш мумкин:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1} s_1 + \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} s_2 + \ldots + \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n} s_n, \qquad (10.1)$$

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2 = \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \cos^2 x_n = 1.$$

Агар f(X) функция X^0 нуқтада дифференциалланувчи функция бўлса, ихтиёрий S ($\|S\|=1$) учун $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ мавжуд бўлади ҳамда

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = (\nabla f(X^0), S)$$

ўринли бўлади. Ҳақиқатдан ҳам ихтиёрий кичик $\lambda>0$ учун

$$f(X^0 + \lambda S) - f(X^0) = (\nabla f(X^0), (X^0+\lambda S - X^0)) + 0(\|X^0+\lambda S - X^0\|).$$

Бундан $f(X^0+\lambda S) = f(X^0) + \lambda(\nabla f(X^0), S) + 0(\|\lambda S\|)$ ва

$$\lim_{\lambda\to+0}\frac{f(X^0+\lambda S)-f(X^0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to+0}\frac{\lambda(\nabla f(X^0),S)+0(\|\lambda S\|)}{\lambda} = (\nabla f(X^0),S).$$

Маълумки, $(\nabla f(X^0), S)=\|\nabla f(X^0)\|\,\|S\|\cos(\nabla f(X^0),S)$.

Демак, $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = \|\nabla f(X^0)\|\,\|S\|\cos(\nabla f(X^0), S)$.

Бундан кўринадики, $f(X)$ функциядан X^0 нуқтада S йўналиш бўйича олинган ҳосила $\cos(\nabla f(X^0), S) = 1$ бўлганда максимал қийматга эришади. Демак, S йўналиш X^0 нуқтадаги $f(X)$ функциянинг $\nabla f(X^0)$ градиенти йўналиши билан бир хил бўлганда $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ максимал қийматга эришади. Шунинг учун ҳам градиент бўйлаб йўналиш $f(X)$ функциянинг X^0 нуқтадаги энг тез ўсиш йўналиши бўлади. Худди шунингдек, антиградиент бўйлаб йўналиш $f(X)$ функциянинг X^0 нуқтадаги энг тез камайиш йўналиши бўлишини кўрсатиш мумкин.

1 мисол. $f(X)=x_1^2+2x_2^2$ функциядан $X^0=(3;4)$ нуқтада $S=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, ($\|S\|=1$) йўналиши бўйича олинган ҳосила топилсин.

Ечиш. Энг аввал $\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_j}$ $(j=1,2)$ қийматларни аниқлаймиз:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(3,4)} = \left.2x_1\right|_{(3,4)} = 6;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(3;4)} = \left.4x_2\right|_{(3,4)} = 16;$$

Сўнгра (10.1) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = 6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 16\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{22}{\sqrt{2}}.$$

Бу натижани (10.2) га асосан ҳам топиш мумкин:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = (\nabla f(X^0),\ S) = (6;16)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{22}{\sqrt{2}}.$$

2 - мисол. $f(X)=3x_1^2+2x_2^2$ функциянинг $X^0 = (1;\ 2)$ нуқтадаги энг тез ўсиш йўналиши аниқлансин.

Ечиш. Маълумки, $f(X)$ функциянинг X^0 нуқтадаги энг тез ўсиш йўналиши:

$$S=\nabla f(X^0).$$

Демак,

$$S=\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right)' = (6;8)'$$

Жавоб. $S=(6,8)'$ йўналиши берилган $f(X)$ функциянинг $X^0=(1;2)$ нуқтадаги энг тез ўсиш йўналиши бўлади.

3 мисол. $f(X)=3x_1^2+2x_2^2$ функциянинг $X^0=(3;4)$ нуқтадаги $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}\le 0$ шартларни қаноатлантирувчи барча S йўналишлар топилсин.

Ечиш. $S=(X - X^0)=(x_1\text{-}3;\ x_2\text{-}4)$.

Шартга кўра $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}\le 0$, демак

$$(\nabla f(X^0),\ S)\le 0,$$

$$\nabla f(X^0)=\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right)' = (6;16)'.$$

Демак,

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = ((6;16)',\ (x_1-3;\ x_2-4))\le 0.$$

Бундан

$$6\ (x_1-3)\ +16(x_2-4)\le 0,$$

ёки

$$3x_1+8x_2-41\le 0$$

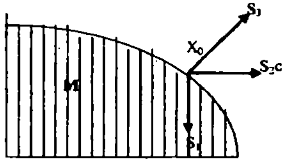
тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай нуқталар тўплами $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}\le 0$ қаноатлантирувчи йўналишларни аниқлайди.

2 - §. Мумкин бўлган йўналишлар

1 - таъриф. Шундай $\bar{\lambda}$ сон мавжуд бўлиб, ҳар қандай $\lambda\in[0,\ \bar{\lambda}]$ учун $X^0+\lambda S\in M$ ўринли бўлса, $X^0\in M$ нуқтадан бошланадиган йўналиш **мумкин бўлган йўналиш** деб аталади.

Шундай қилиб, мумкин бўлган йўналишни қуйидагича изоҳлаш мумкин. Агар S мумкин бўлган йўналиш бўлса, бу йўналиш бўйича X^0 нуқтадан бошлаб λS масофага силжиш натижасида топиладиган $X^0+\lambda S$ нуқта ҳам М тўпламга тегишли бўлади. Шаклда кўрсатилган S_1 мумкин бўлган йўналиш, S_2, S_3

мумкин бўлган йўналиш эмас (10.1 - шакл). Агар X^0 М тўпламнинг ички нуқтаси бўлса, ундан бошланадиган ихтиёрий йўналишлар **мумкин бўлган йўналишлар** бўлади.



10.1 шакл

1 - теорема. Агар M тўплам

$$g_i(X) \le 0 \ (i = \overline{1,m})$$

тенгсизликлар орқали аниқланган тўплам бўлиб, $X^0 \in M$ ва $g_i(X^0)=0$ шартни бажарувчи i индекслар тўплами $I\ (X^0)$ бўлса, у ҳолда

$$(\nabla g_i(X^0),S) + \varepsilon \le 0, \ (i \in I(X^0)) \qquad (10.2)$$

тенгсизликлар системасини баъзи $\varepsilon > 0$ да қаноатлантирувчи s йўналиш мумкин булган йўналиш бўлади.

Исботи. Бу ерда икки ҳолни кўрамиз:

а) $i \notin I\ (X^0)$. Бу ҳолда $g_i(X^0)<0$.

X^0 нуқтадан ихтиёрий S йўналиш бўйича етарли даражада қисқа $\varepsilon > 0$ масофага силжиш натижасида бу тенгсизлик бузилмайди. Демак, S йўналиш мумкин бўлган йўналиш бўлади.

б) $i \in I(X^0)$. Бу ҳолда S (10.2) шартни қаноатлантириб, мумкин бўлган йўналиш бўлмасин дейлик. У ҳолда ихтиёрий $\lambda>0$ учун

$$g_i(X^0 + \lambda S)>0$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

$$g_i(X^0)=0, \ i \in I(X^0)$$

бўлгани учун, ихтиёрий $\lambda>0$ да

$$\frac{1}{\lambda}(g_i(X^0 + \lambda S) - g_i(X^0)) > 0 \quad (i \in I\,(X^0))$$

ва

$$\lim_{\lambda \to +0} \frac{g_i(X^0 + \lambda S) - g_i(X^0)}{\lambda} = (\nabla g_i(X^0), S) \ge 0 \text{ бўлади.}$$

Бу эса (10.2) шартга зид натижадир. Демак, S йўналиш мумкин бўлган йўналиш бўлади.

2- теорема. Агар $X^0 \in M$ нуқтадаги S йўналиш мумкин бўлган йўналиш бўлса, у ҳолда ҳар қандай $i \in I(X^0)$ учун

$$(\nabla g_i(X^0),S) \le 0 \qquad (10.3)$$

тенгсизлик ўринлидир.

Исботи. Теоремани тескари мулоҳаза қилиш йўли билан исбот қиламиз. Фараз қилайлик, S мумкин бўлган йўналиш бўлиб, шундай $i \in I(X^0)$ мавжуд бўлсинки, унда

$$(\nabla g_i(X^0), S) > 0$$

бўлсин. У ҳолда ихтиёрий кичик λ сон учун

$$g_i(X^0+\lambda S) - g_i(X^0) = (\nabla g_i(X^0), \lambda S) + 0(\lambda) = \lambda(\nabla g_i(X^0), S) + 0(\lambda) > 0$$

Бундан $g_i(X^0)=0$ $(i \in I(X^0))$ бўлганлиги сабабли:

$$g_i(X^0+\lambda S) > 0 \ (i \in I(X^0)).$$

Бу тенгсизлик эса S йўналишнинг мумкин бўлган йўналиш эмаслигини кўрсатади. Бу эса теорема шартига зид. Демак S йўналиш мумкин бўлган йўналиш бўлишлиги учун (10.3) шартнинг бажарилиши зарур экан.

3 - теорема. Агар М тўплам

$$g_i(X) = a_i X - b_i \leq 0, \ (i=\overline{1,m}) \qquad (10.4)$$

тенгсизликлар системаси орқали аниқланган тўплам бўлиб,

$$g_i(X^0)=0, \ X^0 \in M$$

шартларни каноатлантирувчи i индекслар тўплами $I(X^0)$ бўлса, у ҳолда S йўналиш X^0 нуқтадаги мумкин бўлган йўналиш бўлиши учун ҳар қандай $i \in I(X^0)$ да

$$(a_i, S) \leq 0 \qquad (10.5)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исботи. **Зарурлиги**. Фараз қилайлик, X^0 нуқтадан чиқувчи S йўналиши мумкин бўлган йўналиш бўлсин. У ҳолда ихтиёрий кичик $\lambda>0$ сон учун

$$g_i(X^0+\lambda S) = a_i(X^0+\lambda S) - b_i \leq 0 \ (i=\overline{1,m})$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан

$$a_i X^0 + \lambda(a_i, S) - b_i \leq 0,$$

ёки

$$(a_i X^0 - b_i) + \lambda(a_i, S) \leq 0.$$

Бунда $a_i X^0 - b_i = 0$ $(i \in I(X^0))$ бўлгани учун

$$\lambda(a_i, S) \leq 0$$

тенгсизликдан $\lambda>0$ га асосан

$$(a_i, S) \leq 0, \ (i \in I(X^0)).$$

Етарлилиги. Фараз қилайлик, ихтиёрий i учун $(a_i, S) \leq 0$ бажарилсин. У ҳолда икки ҳолни кўриш мумкин:

1) $i \notin I(X^0)$. Бу ҳолда $a_i X^0 - b_i < 0$ ва X^0 нуқтадан ихитиёрий S йўналишда етарли даражада қисқа масофага силжиш натижасида бу тенгсизлик бузилмаслиги мумкин.

2) $i\in I(X^0)$. Бу ҳолда ихтиёрий кичик $\lambda>0$ сон учун

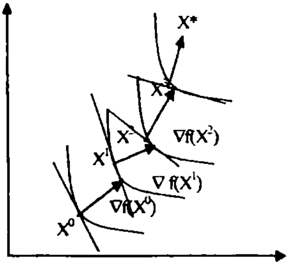
$$g_i(X^0+\lambda S) = a_i(X^0+\lambda S) - b_i = (a_iX^0 - b_i) + \lambda(a_i,S) \le 0. \quad (10.6)$$

Шартга кўра $a_iX^0 - b_i=0$ ва $(a_i,S)\le 0$. Бундан (10.6) тенгсизлик ихтиёрий кичик $\lambda>0$ сонда S йўналишнинг X^0 нуқтадаги мумкин бўлган йўналиш эканлигини кўрсатади. Шу билан теорема исбот бўлди.

3 - §. Функциянинг шартсиз экстремумини градиент усуллар билан аниқлаш

Фараз қилайлик, дифференциалланувчи чизиқсиз функциянинг шартсиз экстремумини топиш масаласи қўйилган бўлиб, X^* нуқта $f(X)$ функцияга максимум қиймат берувчи нуқта бўлсин.

Градиент усул билан ана шу экстремал X^* нуқтани қидириш масаласи қуйидагича ҳал қилинади: ихтиёрий X^0 нуқта олинади ва бу нуқтада топилган $\nabla f(X^0)$ градиент ёрдамида $f(X)$ функциянинг максимум тезлик билан ўсиш йўналиши аниқланади (10.2 шакл). Бу йўналиш бўйича маълум бир λ_1 қадамга силжиб X^1 нуқтага ўтилади. Сўнгра $\nabla f(X^1)$ градиентни ҳисоблаб X^1 нуқтадан бошлаб $f(X)$ функциянинг максимал тезлик билан ўсиш йўналиши аниқланади. Бу йўналиш бўйича X^1 нуқтадан λ_2 масофага силжиш натижасида X^2 нуқтага ўтилади ва ҳоказо. Ана шундай йўл билан жараён X^* нуқта топилгунча такрорланади.



10.2 – шакл

Шаклда X^* нуқтани қидириш траекторияси кўрсатилган бўлиб, у шундай $X^0, X^1, X^2,.\quad, X^k$ кетма-кетликдан иборатки, унда

$$f(X^0) < f(X^1) < \quad < f(X^k) < \quad (10.7)$$

ўринли бўлади. Бунда X^k нуқтадан X^{k+1} нуқтага ўтиш учун

$$X= X^k +\lambda\nabla f(X^k) \quad (10.8)$$

тўғри чизиқ бўйлаб λ қадамга силжиш керак. λ соннинг қиймати $\lambda=\lambda_k$ аниқланганда

$$X^{k+1} = X^k+\lambda_k\nabla f(X^k)$$

нуқта топилган бўлади.

Градиентга асосланган кўп усуллари бир-биридан асосан $\lambda=\lambda_k$ ни танлаш усуллари билан фарқ қилади. Масалан, бир нуқтадан иккинчисига ўтишда ҳар доим бир хил масофага кўчиб бориш мумкин, яъни ихтиёрий k да

$$X^{k+1} = X^k+\lambda \nabla f(X^k).$$

Агар X^{k+1} нуқтада $f(X)$ функциянинг ўсиши таъминланмаса, яна қайтадан X^k нуқтага қайтиб, λ нинг қиймати (масалан, $\lambda/2$) камайтирилади. Баъзан λ_k ни $|\nabla f(X^k)|$ га пропорционал қилиб танлаб олинади.

Оптимал нуқтани қидириш жараёнининг ҳар бир қадамида $f(X)$ функциянинг ўзгариши (ўсиши) текширилиб борилади. Агар k қадамдан сўнг $f(X)$ функциянинг ўсиш миқдори олдиндан берилган кичик $\delta>0$ сондан ортмаса, нуқтани қидириш жараёни тугатилади ва $f(X)$ функциянинг эришган $f(X^k)$ қиймати унинг оптимал қиймати ва X^k нуқтани эса оптимал X^* нуқта деб қабул қилинади.

Агар $f(X)$ функция қаварик ёки ботиқ функция бўлса, X^* нуқтанинг экстремум нуқта эканлигининг зарурий ва етарлилик шарти

$$\nabla f(X^*) = 0 \qquad (10.9)$$

бўлади.

Юқорида изоҳланган усул функциянинг шартсиз экстремумини топишда энг кўп қўлланиладиган градиент усуллардан бири бўлиб, у функция қийматини тезлик билан кўтариш (агар X^k нуқтадан X^{k+1} га $\nabla f(X^k)$ градиент йўналиши бўйича силжиш натижасида ўтилса) ёки функция қийматини тезлик билан пасайтириш усули (агар X^k нуқтадан X^{k+1} га антиградиент $(-\nabla f(X^k))$ йуналиш бўйича силжиш натижасида ўтилса) деб аталади.

Тезлик билан кўтариш усули бўйича X^k нуқтадаги $\nabla f(X^k)$ градиент топилгандан сўнг

$$X= X^k+ \lambda \nabla f(X^k)$$

тўғри чизиқ бўйлаб силжиб бориб, шу йуналишда $f(X)$ функцияга энг катта қиймат берувчи X^{k+1} нуқта топилади. Сўнгра бу нуқтадаги $\nabla f(X^{k+1})$ градиент ҳисобланади ва

$$X= X^{k+1}+\lambda_{k+1} \nabla f(X^{k+1})$$

тўғри чизиқ бўйлаб силжиб бориб, ушбу йуналишда $f(X)$ функцияга энг катта қиймат берувчи X^{k+2} нуқта топилади ва ҳ.к. Бу жараён $f(X)$ функцияга энг катта (максимал) қиймат берувчи X^* нуқта топилгунга қадар давом эттирилади. Ҳар бир X^k нуқтадан $X^{k+1}= X^k+ \lambda_k \nabla f(X^k)$ нуқтага ўтиш натижасида $f(X)$ функциянинг қиймати

$$\Delta f(X^k) = f(X^{k+1}) -f(X^k) = f(X^k + \lambda_k f(X^k)) -f(X^k) =$$

$$= f\left(x_1^k + \lambda_k \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_1}, x_2^k + \lambda_k \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_2}, \ldots, x_n^k + \lambda_k \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_n}\right) - f(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \quad (10.10)$$

миқдорга ўзгаради.

(10.10) дан кўринадики, функциянинг Δf орттирмаси λ_k нинг функциясидан иборат. Шунинг учун $f(X)$ функциянинг $\nabla f(X^k)$ йўналишдаги максимал қийматини топиш учун Δf (λ_k) функцияга максимал қиймат берувчи λ_k сонни топиш масаласини ечиш керак. Бошқача айтганда $\nabla f(X^k)$ йўналиш бўйича шундай λ_k масофага силжиш керакки, натижада Δf (λ_k) функция максимумга эришсин. λ_k нинг қиймати қуйидаги тенгламани ечиш натижасида топилади:

$$\frac{d(\Delta f(\lambda_k))}{d\lambda_k} = 0. \qquad (10.11)$$

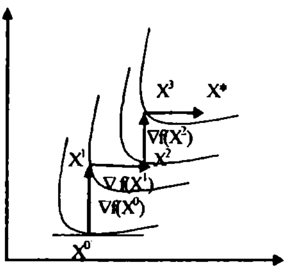
(10.10) ни λ_k бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{d(\Delta f(\lambda_k))}{d\lambda_k} = \frac{\partial f(X^{k+1})}{\partial x_1}\frac{\partial f(X^k)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f(X^{k+1})}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial f(X^k)}{\partial x_n} = (\nabla f(X^{k+1}), \nabla f(X^k)). \qquad (10.12)$$

Бунда (10.11) га асосан

$$\frac{d(\Delta f(\lambda_k))}{d\lambda_k} = (\nabla f(X^{k+1}), \nabla f(X^k)) = 0 \qquad (10.13)$$

тенгликка эга бўламиз. (10.13) ифода X^k ва X^{k+1} нуқталардаги градиентни ўзаро ортогонал бўлиши кераклигини кўрсатади (10.3-шакл).



10.3 - шакл.

4-§. Қаварик дастурлаш масаласини ечиш учун градиент усуллар. Тезлик билан кўтарилиш усули

Фараз қилайлик, чизиқсиз дастурлаш масаласи қуйидаги кўринишда берилган бўлсин:

$$g_i(x, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \quad i = \overline{1,m}, \qquad (10.14)$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}, \qquad (10.15)$$

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to max. \qquad (10.16)$$

Бу ерда (10.14)-(10.16) шартларни қаноатлантирувчи G тўплам қаварик тўплам ва $Z= f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ботиқ функция бўлган ҳолни кўрамиз. Бундан ташқари $f(X)= f(x_1, x_2,...x_n)$, $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциялар узлуксиз, дифференциалланувчи бўлиб, G тўпламнинг ички нуқталари мавжуд деб фараз қиламиз.

Градиент усул ёрдамида $f(X)$ функцияга максимал қиймат берувчи $X^* \in G$ нуқтани топиш жараёни билан танишамиз. Масалани ечиш ихтиёрий $X^0 \in G$ нуқтадан бошланади. Итератив жараён натижасида X^k нуқтадан X^{k+1} нуқтага ўтиш учун X^k нуқтадан бошланувчи шундай s_k мумкин бўлган йўналишни аниқлаймизки, ихтиёрий кичик $\lambda_k>0$ сон учун $X^k + \lambda_k s_k$ нур G тўпламга тегишли бўлсин. Бунда λ_k сон X^k нуқтадан s_k йўналиш бўйича силжиш масофасидан иборат. Уни аниқлаш учун турли усуллар мавжуд. Масалан, λ_k ни қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$\lambda_k=min\ (\lambda', \lambda''),$$

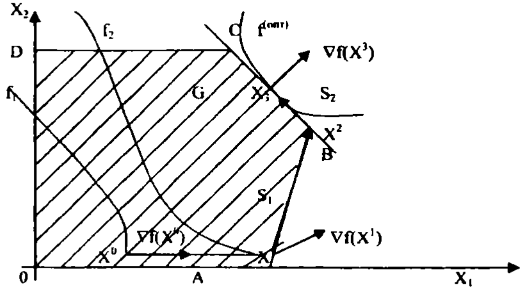
бу ерда λ' сон $X^k+ \lambda_k S_k$ нур билан G тўпламнинг кесишган нуқтасига мос келувчи λ_k нинг қиймати, λ'' эса функциянинг $X^k +\lambda_k s_k$ нурдаги максимумига мос келувчи λ_k нинг қиймати. Агар $\lambda_k \to \infty$ бўлса, берилган масаланинг мақсад функцияси (10.16) юқоридан чегараланмаган бўлади. Акс ҳолда, навбатдаги, яъни $X^{k+1}=X^k+\lambda_k s_k$ нуқтага ўтилади.

Мавжуд градиент усуллар бир-биридан s_k йўналишни ва λ_k параметрни танлаш усуллари билан фарқ қилади. Масалан, оптимал ечим томон тезлик билан кўтарилиш усулида $X^k \in G$ нуқтадан $X^{k+1} \in G$ га s_k йўналиш бўйича силжиш натижасида ўтилганда $Z=f(X)$ функция қиймати $\Delta Z= \lambda_k\ s_k$ миқдорга ўзгаради (ортади), s_k йўналишни шундай танлаш керакки, бу йўналишдаги ΔZ нинг қиймати максимум бўлсин. Маълумки (2-§), агар X^k G тўпламнинг ички нуқтаси бўлса, бу нуқтадан бошланувчи ва берилган $f(X)$ функциянинг максимал ўсишини таъминловчи s_k йўналиш $\nabla(X^k)$ градиент йўналишдан иборат бўлади, яъни $s_k = \nabla f(X^k)$, $X^k \in G$ (ички нукта). Демак, бу ҳолда X^k нуқтадан $\nabla f(X^k)$ градиент бўйлаб λ_k масофага силжиш натижасида $f(X)$ функцияга ушбу йўналишдаги энг катта қиймат берувчи $X^{k+1} \in G$ нуқтага ўтилади:

$$X^{k+1}= X^k+\lambda_k s_k.$$

X^k нуқта G тўпламнинг чегаравий нуқтаси бўлиб, $\nabla f(X^k)$ градиент шу тўпламдан ташқарига йўналган ҳолда навбатдаги $X^{k+1} \in G$ нуқтага $\nabla f(X^k)$ градиент йўналиши бўйлаб силжиш натижасида эришиш мумкин эмас, чунки бу йўналиш мумкин бўлган йўналиш бўлмаслиги мумкин. Бу ҳолда $f(X)$ функциянинг максимал ўсишини ҳамда $X^k+\lambda_k s_k$ нурнинг G тўпламга тегишли бўлишини таъминловчи s_k йўналишни аниқлаш керак бўлади.

Агар топилган $X^{k+1}=X^k+\lambda_k s_k$ нуқтада $f(X)$ функция максимумга эришса, оптимал қидириш жараён тўхтатилади, акс ҳолда X^{k+1} нуқтага бошланғич нуқта деб қараб, юқорида қайд қилинган жараён яна қайтадан такрорланади. Умуман, бу жараён масаланинг оптимал ечими X^* топилгунча ёки мақсад функциянинг чекли максимумга эга эмаслиги аниқлангунча такрорланади.



10.4 – шакл.

Қавариқ дастурлаш масаласини градиент усул билан ечиш жараённи юқоридаги 10.4-шакл ёрдамида кўрсатамиз. Бунда чекламалари чизиқли бўлиб, мақсад функция ботиқ бўлган масала тасвирланган. Шаклда G тўплам қавариқ тўпламдан (*OABCD* кўпбурчакдан) иборат ва $X^0 \in G$ ички нуқта. Бу нуқтадан $\nabla f(X^0)$ градиент бўйлаб йўналиб X^1 нуқтага ўтамиз. Навбатдаги нуқтага $\nabla f(X^1)$ градиент йўналиш бўйича ўтиш мумкин эмас, чунки *G* тўпламдан ташқарига чиқиб кетиш мумкин. Шунинг учун шундай йўналишни аниқлаш керакки, у $X^1+\lambda_1 s_1$ нурни *G* тўпламдан ташқарига чиқиб кетмаслигини ва $f(X)$ функциянинг максимал ўсишини таъминласин. Бу йўналиш $\nabla f(X^1)$ градиент билан энг кичик бурчак ташкил қилувчи s_1 векторни аниқлайди.

Аналитик нуқтаи назардан бундай вектор $\nabla f(X^1)$ ва s_1 векторларнинг скаляр кўпайтмасини максимум бўлишлик шартидан топилади:

$$max\ (\nabla f(X^1)\ ,\ s_1) > 0.$$

Шаклда s_1 вектор G тўпламнинг чегараси (AB) билан устма-уст тушади. Кейинги қадамларда чегаравий тўғри чизиқ AB бўйлаб $f(X)$ функция энг катта қийматга эришгунча силжиб борилади.

Шаклда кўринадики, B нуқтада (уни X^2 билан белгилаймиз) $f(X)$ функция s_1 йўналишдаги ҳар қандай нуқталарга нисбатан энг катта қийматга эришди. Бу нуқтадан навбатдаги нуқтага ўтиш учун $\nabla f(X^2)$ градиент бўйлаб йўналиш мумкин эмас, чунки бу ҳолда *G* тўпламдан четга чиқиб кетиш мумкин. Шунинг учун

$$max(\nabla f(X^2),\ s_2) > 0$$

шартни қаноатлантирувчи s_2 йўналиш топилади. Бу йўналиш *G* тўпламнинг чегараси *BC* билан устма-уст тушади. Шаклдан кўринадики, X^3 нуқтада $f(X)$ функция s_2 йўналишдаги энг катта қийматга эришди. Бундан ташқари X^3 нуқта $f(X)$ функцияга G тўпламда энг катта (оптимал) қиймат берувчи нуқтадир, чунки бу нуқтадан $\nabla f(X^3)$ градиент шу нуқтадан чиқувчи ва G тўпламда ётувчи ихтиёрий вектор билан ўтмас бурчак, чегаравий чизиқ BC билан устма-уст тушган s_3 вектор билан эса 90° ли бурчак ташкил қилади. Шунинг учун

$$(\nabla f(X^3), s_3)=0 \qquad (10.17)$$

тенглик бажарилади. Бу тенглик X^3 нуқтада $f(X)$ функциянинг максимумга эришганлигини кўрсатади. Шундай қилиб X^3 нуқтада $f(X)$ функция оптимал қийматга эришади, X^3 нуқтанинг координаталари эса берилган масаланинг оптимал ечимини аниқлайди.

Энди қавариқ дастурлаш масаласи (10.14)-(10.16) ни градиент усул билан ечиш жараёнини аналитик равишда тасвирлаймиз. Фараз қиламиз, оптимал ечимни қидириш жараёни G тўпламнинг ички X^0 нуқтасидан бошлансин. У ҳолда $X^*\in G$ оптимал ечимга, юқорида кўрсатилгандек, градиент бўйлаб йўналиб бориб эришиш мумкин. Лекин бунда

$$X^{k+1}=X^k+\lambda_k \nabla f(X^k)$$

нурни аниқловчи λ_k ни танлаш шу билан қийинлашадики, ундаги $X^{k+1}\in G$ бўлиб, $f(X^{k+1})$ миқдор $f(X)$ функциянинг $\nabla f(X^k)$ йўналишдаги энг катта қийматидан иборат бўлиши керак. Демак, X^{k+1} нуқтанинг координаталари (10.14)-(10.15) шартларни қаноатлантириши керак, яъни

$$\begin{cases} g_i(X^k+\lambda_k \nabla f(X^k))\le b_i, \ i=\overline{1,m}, \\ X^k+\lambda_k \nabla f(X^k)\ge 0. \end{cases} \qquad (10.18)$$

Бу системани ечиш натижасида λ_k нинг шундай мумкин бўлган қийматлар оралиғи $[\lambda'_k, \lambda''_k]$ аниқланадики, ундаги ҳар бир $\lambda_k\in[\lambda'_k, \lambda''_k]$ учун $X^{k+1}\in G$ бўлади. Топилган оралиқдаги λ_k лар орасида қўйилган шартларни қаноатлантирувчи λ_k^* ни топиш учун қуйидаги тенгламани ечамиз:

$$(\nabla f(X^k+\lambda_k \nabla f(X^k)), \nabla f(x^k)) = 0. \qquad (10.19)$$

Бу тенгламанинг $\lambda_k^*\in[\lambda'_k, \lambda''_k]$ ечимида $X^{k+1}\in G$ ҳамда $f(X^{k+1})$ миқдор $f(X)$ функциянинг $\nabla f(X^k)$ йўналишдаги энг катта қийматдан иборат бўлади.

Агар $\lambda_k^*\notin[\lambda'_k, \lambda''_k]$ бўлса, $\lambda_k^*=\lambda''_k$ деб қабул қилинади. Бундай λ_k^* га мос келувчи X^{k+1} нуқта G тўпламнинг чегарасида ётади.

Агар оптимал қидиришни G тўпламнинг чегаравий X^k нуқтасидан бошласак ёки, агар қидириш траекториясининг навбатдаги нуқтаси G тўпламнинг чегарасида ётса, оптимал қидиришни давом эттириш учун шундай s_k йўналишни аниқлаш керакки, у биринчидан, ушбу нуқтадаги $\nabla f(X^k)$ градиент йуналишдан фарқли бўлиши керак, иккинчидан, бу йўналиш бўйича λ_k масофага силжиш натижасида эришилган X^{k+1} нуқта G тўпламга тегишли бўлиши керак. Ана шу шартларни қаноатлантирувчи s_k йўналиш қуйидаги математик дастурлаш масаласини ечиш орқали топилади:

$$g_i(s_k) \le 0, \ \ i \in I, \qquad (10.20)$$

$$T_k = (\nabla f(X^k), s_k) \to max, \qquad (10.21)$$

буерда I қуйидаги шартлар ўринли бўлган i индекслар тўплами:

$$g_i(X^k) = b_i, \ i = \overline{1,m}$$

$$|s_k| = 1, \ s_k = (s_{k1}, ..., s_{kn}) \qquad (10.22)$$

$$|s_k| = \sqrt{s_{k1}^2 + s_{k2}^2 + ... + s_{kn}^2}. \qquad (10.23)$$

(10.20)-(10.23) масалани ечиш натижасида $\nabla f(X^k)$ вектор билан энг кичик ўткир бурчак ташкил қилувчи s_k вектор аниқланади. Бунда (10.22) шарт X^k нуқтанинг чегаравий нуқта эканлигини кўрсатади. (10.20) шарт эса X^k нуқтадан бошланадиган s_k йўналиши G тўпламнинг ичкарисида ёки унинг чегараси бўйлаб бажарилиши кераклигини кўрсатади. (10.23) шарт нормаллаштириш шарти бўлиб, у s_k векторнинг узунлигига қўйилган чегарадан иборат. Бу шарт қўйилмаганда (10.21) функцияни чексиз равишда орттириш мумкин. Адабиётда турли нормаллаштириш шартлари мавжуд. Уларнинг турларига қараб (10.20) (10.23) масала чизиқли ёки чизиқсиз дастурлаш масаласи бўлиши мумкин.

S_k вектор топилгач, X^{k+1} нуқтани аниқловчи $\lambda_k^* \in [\lambda'_k, \lambda''_k]$ ни топамиз. Бунинг учун

$$(\nabla f(X^{k+1}), s_k) = 0 \qquad (10.24)$$

шартдан фойдаланамиз.

Оптимал қидириш жараёнини

$$max \ T_k = (\nabla f(X^k), s_k) = 0 \qquad (10.25)$$

шартни қаноатлантирувчи X^* нуқта топилгунча давом эттирамиз.

Мисол.

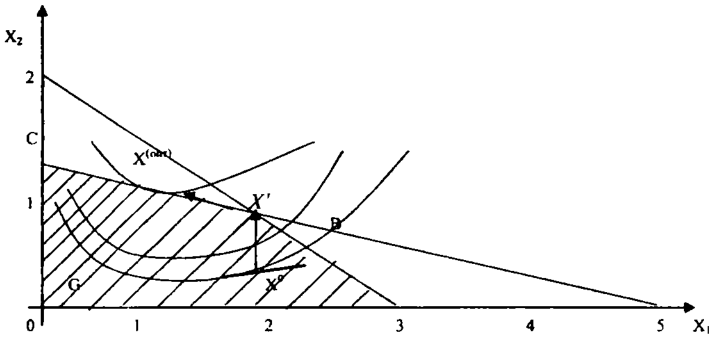
$2x_1 + 3x_2 \le 6,$

$x_1 + 4x_2 \le 5,$

$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0,$

$Z = f(X) = x_1 + 2x_2 - 0,5x_1^2 - 0,5x_2^2 - 5. \to max$

Ечиш. Оптимал ечимни қидиришни $X^0 = (1,5; \ 0,5)$ нуқтадан бошлаймиз. 10.5-шаклдан кўринадики, режалардан ташкил топган G тўплам $OABC$ тўртбурчакни ташкил этади ва $X^0 \in G$-ички нуқта. Демак, X^1 нуқтага томон $\nabla f(X^0)$ градиент бўлиб йўналиш керак. X^0 нуқтадаги градиент



10.5-шакл

$$\nabla f(X^0)=\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right)'=(-0,5;1,5)'$$

X^1 нуқтанинг координаталарини x_{11}, x_{12} билан белгилаймиз,

$X^1=(x_{11},\ x_{12})$.

$X^1=X^0+\lambda_0\nabla f(X^0)$,

$X^1=(1,5;\ 0,5)+\lambda^0(-0,5;1,5)'$,

$x_{11}=1,5-0,5\lambda_0$,

$x_{12}=0,5+1,5\lambda_0$.

Энди λ_0 нинг мумкин бўлган қийматлар оралиғини аниқлаймиз. Бунинг учун қуйидаги системани тузамиз:

$$\begin{cases}2(1,5-0,5\lambda_0)+3(0,5+1,5\lambda_0)\le 6,\\ 1,5-0,5\lambda_0+4(0.5+1,5\lambda_0)\le 5,\\ 1,5-0,5\lambda_0\ge 0\\ 0,5+1,5\lambda_0\ge 0.\end{cases} \qquad (10.26)$$

Бу системани ечиб,

$$[\lambda'_0,\ \lambda''_0]=[-0,3333;\ 0,2727]$$

аниқлаймиз.

Энди

$$X^1=X^0+\lambda_0^*\nabla f(X^0),\ X^1\in G$$

шартларни қаноатлантирувчи $\lambda_0\in[\lambda'_0,\ \lambda''_0]$ ни топамиз.

Бунинг учун

$$(\nabla f(X^1),\nabla f(X^0))=0$$

тенгламани ечамиз. Бунда қуйидагиларга эътибор берамиз:

$$\nabla f(X^1)=(-0,5+0,5\lambda_0;\ 1,5-1,5\lambda_0),$$

$$\nabla f(X^0)=(-0,5;1,5).$$

Демак,

$$(\nabla f(X^1), \nabla f(X^0))=(-0,5+0,5\lambda_0;\ 1,5-1,5\lambda_0),(0,5;1,5))=0$$

Бунда

$$0,25-0,25\lambda_0^*+2,25-2,25\lambda_0^*=0,$$

ёки

$$2,5\lambda_0^*=2,5$$

$$\lambda_0^*=1.$$

Лекин $\lambda_0^* \notin [-0,3333;\ 0,2727]$.

Шунинг учун $\lambda_0^*=0,2727$.

λ_0^*нинг топилган қийматида навбатдаги X^1 нуқта қуйидагича аниқланади:

$$X^1= X^0 +\lambda_0 \nabla f(X^0) =(1,5;0,5)+0,2727(-0,5;1,5)=(1,3636;\ 0,9091).$$

X^1 нуқтада $f(X)$ функция

$$f(X^1)=-3,1621> f(X^0)=-3,75$$

қийматга эришади.

$f(X)$ функциянинг X^1 нуқтадаги градиентини топамиз:

$$\nabla f(X^0)=(\ -0,3636;1,0909)'.$$

X^1 нуқтадан навбатдаги X^2 нуқтадага ўтиш учун бу градиент бўйлаб силжиш мумкин эмас, чунки *ABCD* тўпламидан ташқарига чиқиб кетиш мумкин. Энг қулай s_1 йўналишни аниқлаш учун юқоридаги (10.20)-(10.23) масалани тузамиз. Бу масалани тузишда X^1 нуқта *ABCD* тўрбурчакнинг чегаравий нуқтаси эканлигини ва у $x_1+4x_2=5$ туғри чизиқда ётишини ва демак, X^1 нуқтада берилган масаланинг иккинчи шарти $(i=2)$ тенгликка айланишини назарга оламиз. Биз кўраётган ҳолда бу масала қуйидаги кўринишда ифодаланади:

$$T_1=(\nabla f(X^1),s_1)=((\ -0,3636;1,0909)(s_{11};s_{12}))=$$

$$=0,3636\ s_{11}+1,0909\ s_{12} \rightarrow max, \qquad (10.27)$$

$$g_i(s_1)=(1;4)(s_{11};s_{12})=s_{11}+4s_{12}=0 \qquad (10.28)$$

$$|s_1| = \sqrt{s_{11}^2 + s_{12}^2} = 1, \qquad (10.29)$$

яъни

$$\begin{aligned} T_1=-0,3636s_{11}&+1,0909s_{12} \rightarrow max,\\ s_{11}&+4s_{12}=0,\\ s^2_{11}&+s^2_{12}=1. \end{aligned} \qquad (10.30)$$

(10.30) масалани ечиб топамиз:

$$s_1= (s_{11},\ s_{12})=(\ -0,9700;0,2425\ );$$

$$T_{max}=1,1464.$$

Демак, $s_1=(-0,97;0,2425)$ йўналиши бўйича кўтарилиб бориб

$$X_2=(x_{21},\ x_{22})$$

нуқтага эришиш мумкин.

$$X^2=X^1+\lambda_1 s_1=(1,3636;\ 0,9091)+\ \lambda_1(-0,9700;0,2425).$$

Бундан $X_{21}=1,3636\ -\ 0,9700\lambda_1$, $x_{22}=0,9091-0,2425\lambda_1$ (10.31)

λ_1 нинг аниқланиш оралиғини топамиз. Бунинг учун қуйидаги системадан фойдаланамиз:

$$\begin{cases} 2(1{,}3636-0{,}97\lambda_1)+3(0{,}9091+0{,}2425\lambda_1)\le 6, \\ 1{,}3636-0{,}97\lambda_1+4(0{,}9091+0{,}2425\lambda_1)\le 5, \\ 1{,}3636-0{,}97\lambda_1\ge 0, \\ 0{,}9091+0{,}2425\lambda_1\ge 0. \end{cases}$$

Системани ечиб $\lambda_1 \in [0{,}927;\ 5{,}621]$ эканини аниқлаймиз. λ^*_1 ни топиш учун $(\nabla f(X^2), s_1)=0$ тенгламани ечамиз. Бунда

$$\nabla f(X^2)=(-0{,}3636+0{,}9700\lambda_1;\ 1{,}0909-0{,}2425\lambda_1),$$
$$s_1=(\ -0{,}9700;0{,}2425\ ).$$

Демак,

$$((-0{,}3636+0{,}9700\lambda_1;\ 1{,}0909-0{,}2425\lambda_1)\times(0{,}9700;\ 0{,}2425))=0.$$

Бунда

$$\lambda_1=0{,}6172.$$

Демак, $\lambda_1 \in[-0{,}927;5{,}621]$ бўлиши керак. Шунинг учун

$$\lambda_1^*=\lambda_1=0{,}6172.$$

(10.30) дан

$$\begin{cases} x_{21}=0{,}7647, \\ x_{22}=1{,}0588 \end{cases} \Rightarrow X^2=(0{,}7647;1{,}0589)$$

Бу X^2 нуқтадаги $f(X)$ функциянинг қиймати

$$f(X^2)=-2{,}9708>f(X^1)=-3{,}1621.$$

X^2 нуқтадаги градиент:

$$\nabla f(X^2)=(0{,}2351;0{,}9412).$$

10.5-шаклдан кўринадики, X^2 нуқтада $f(X)$ функция энг катта қиймати эришади. Аналитик нуқтаи назардан буни кўрсатиш учун X^2 нуқтадан чиқувчи ва $\nabla f(X^2)$ градиент билан энг кичик ўткир бурчак ташкил қилувчи s_2 йўналишни топамиз.

Бунинг учун қуйидаги масалани ечамиз:

$$T_2=(\nabla f(X^2),s_2)=(0{,}2351;\ 0{,}9412)(s_{21},s_{22})=0{,}2351s_{21}+0{,}9412s_{22}\rightarrow max,$$
$$s_{21}+4s_{22}=0,$$
$$\sqrt{s_{21}^2+s_{22}^2}=1.$$

Натижада:

$$\begin{cases} s_{21}=-0{,}9700, \\ s_{22}=0{,}2425 \end{cases} \Rightarrow s_2=(-0{,}9700;0{,}2425).$$

Топилган s_2 йўналиши учун

$$T_2=(\nabla f(X^2),s_2)=0$$

шарт бажарилади. Ҳақиқатдан ҳам,

$$T_2=((0{,}2353;0{,}9412),(-0{,}97;0{,}2425))=-0{,}228241+0{,}228241=0.$$

Демак, (10.17) га асосан X^2 нуқта оптимал нуқта бўлади. Шундай қилиб, масаланинг оптимал ечими:

$$X^2=(x_1=0;7647;\ x_2=1,0588),$$
$$Z_{max} = f(X^2)=-2,9708.$$

5-§. Квадратик дастурлаш масаласини градиент усул билан ечиш. Зойтендейкнинг мумкин бўлган йўналишлар усули

Фараз қилайлик, қуйидаги квадратик дастурлаш масаласи берилган булсин:

$$A_iX\le b_i,\ i=\overline{1,m} \qquad (10.33)$$
$$X\ge 0, \qquad (10.34)$$
$$Z=f(X)=C'X+X'DX\rightarrow max \qquad (10.35)$$

бу ерда X'DX - номанфий аниқланган квадратик форма; A_i n-ўлчовли вектор қатор ($A(a_{i1}, ..., a_{in})$, X- n-ўлчовли вектор устун, C-n-ўлчовли вектор устун. (10.33)-(10,34) шартлар орқали аниқланган қавариқ тўпламни G билан белгилайлик. Ҳар қандай градиент усул сингари мумкин бўлган йўналишлар усули ҳам ихтиёрий $X^0\in G$ нуқтадан бошланади. X^k нуқтадан X^{k+1} нуқтага ўтиш учун S_k йўналиши танланади. Бу йўналишни шундай танлаш керакки, ихтиёрий $\lambda_k>0$ да

$$X^k+\lambda_k s_k$$

нур G тўпламдан ташқарига чиқмасин. Бунинг учун s_k йўналиш $A'_iX^k=b_i$ шартлар ўринли бўлган барча i индекслар учун

$$A'_is_k\le 0 \qquad (10,36)$$

тенгсизликни қаноатлантириш керак. Бундай i индекслар тўпламини I билан белгилаймиз ва s_k йўналиши мумкин бўлган йўналиш деб атаймиз. Агар λ_k нинг ҳеч бўлмаганда кичик қийматлари учун $X^k+\lambda_k s_k$ нур бўйича йўналган $f(X)$ функциянинг ўсиши рўй берса, s_k йўналиш мувофиқ (мос) йўналиш деб аталади.

Зойтендейк усули (10.36) шарт бажарилганда ва қуйидаги нормаллаштириш шартларидан

$$s_k's_k\le 1, \qquad (10.37)$$
$$-1\le s'_{kj}\le 1,\ j=\overline{1,n}, \qquad (10.38)$$
$$s_{kj}\le 1,\ \nabla f(X^j)>0, \qquad (10.39)$$
$$s_{kj}\ge -1,\ \nabla f(X^j)<0,$$

$$(\nabla f(X^k),s_k)\le 1, \qquad (10.40)$$
$$A'_i(s_k+X^k)\le b_i,\qquad i=\overline{1,m} \qquad (10.41)$$

бирортаси ўринли бўлганда оптимал s_k йўналишни топишга ёрдам беради. Бунда s_k йўналишни оптимал йўналиш бўлиш критерийси

$$(\nabla' f(X^k),s_k)=0 \qquad (10.42)$$

дан иборат, бу ерда

$$\nabla' f(X^k)=\left(\frac{\partial f(X^k)}{\partial x_1},...,\frac{\partial f(X^k)}{\partial x_n}\right)$$

n ўлчовли вектор қатор,

$$\nabla f(X^k)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f(X^k)}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \frac{\partial f(X^k)}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

n ўлчовли вектор устун.

Демак, бу усул бўйича X^k нуқтадан чиқувчи мувофиқ s_k йўналишни аниқлаш учун (10.36) шартни ($i\in I$ бўлганда) ва (10.37)-(10.41) шартларнинг бирортасини ўз ичига олувчи ҳамда шу шартларни қаноатлантирувчи базис ечимлар орасида

$$T=\nabla f(X^k)s_k=C+2DX^k$$

функцияга максимум қиймат берувчисини топиш масаласи қўйилади. Бунда (10.37) (10.41) шартлар чизиқли бўлганлиги сабабли тузилган қўшимча масала чизиқли дастурлаш масаласи бўлади.

Фақат бир ҳолда, яъни нормаллаштириш шарти сифатида (10.38) шарт ишлатилганда қўшимча масала қуйидаги кўринишдаги квадратик дастурлаш масаласига келтирилади:

$$\begin{cases}Ps_k+Y=0,\\ Y\geq 0,\\ (\nabla' f(X^k),s_k)=1,\\ T=s'_k s_k\to \min,\end{cases} \qquad (10.44)$$

бу ерда P матрица $A_i\,(i\in I)$ нинг қаторларидан тузилган.

Энди боғлиқлик принципи деб аталувчи принцип билан танишамиз. Агар X^{k+1} нуқта G тўпламнинг ички нуқтаси бўлса $(\lambda_k=\lambda'')$, янги S_{k+1} йўналиш учун қуйидаги шарт ўринли бўлиши керак:

$$S'_k DS_{k+1}=0 \qquad (10.45)$$

Бу шарт S_k ва S_{k+1} йўналишларни ўзаро боғловчи шарт бўлганлиги учун уни боғлиқлик принципи деб ҳам аташ мумкин. Агар боғлиқлик принципини (10.45) дан S_k йўналишни аниқлашда фойдаланилган бўлса, (10.45) шартдан ташқари қуйидаги шартлар ҳам ишлатилади.

$$S'_k Ds_{k+1}=0, t=k-1,k-2,. \qquad (10.46)$$

Агар X^{k+1} нуқта чегаравий нуқта, яъни $\lambda_k=\lambda'$ бўлса, боғлиқлик принципи, яъни (10.45)-(10.46) шартлар ишлатилмайди. Зойтендейкнинг мумкин бўлган йўналишлар усулини ҳар қандай чизиқсиз дастурлаш масалаларини ечиш учун қўллаш мумкин. Лекин боғлиқлик принципи (10.45)-(10.46) бу усул билан квадратик дастурлаш масаласини ечиш жараёнини осонлаштиргани ва чекли сондаги интерациядан сўнг унинг ечимини топишга ёрдам бергани учун уни квадратик дастурлашга қуллаш мақсадга мувофиқдир.

Берилган масаланинг чекламаларидан баъзилари $A'_k X^k = b_i$ тенглама кўринишда бўлган ҳолда $A'_k s_k = 0$ бўлади.

X^k G тўпламнинг ички нуқтаси бўлсин. У ҳолда (*10.36*) шарт ишлатилмайди ва $Z= C'X + X'DX$ функциянинг шартсиз экстремумини берувчи нуқтани топиш керак бўлади. Бунинг учун

$$2DX=-C \qquad (10.47)$$

системани қўшимча йўналишлар усули билан ечиш керак.

(10.47) системани бу усул билан ечиш учун энг аввал X^0 нуқта ва ундан бошланадиган s_0 йўналиш танланади ва янги

$$X^1=X^0+\lambda_0 s_0 \qquad (10.48)$$

нуқтага ўтилади. λ_0 қуйидагича топилади:

$$\lambda_0 = \lambda_0 = \frac{(\nabla f(X^0), s_0)}{-2s'_0\ Ds_0} \qquad (10.49)$$

s_1 йўналишни аниқлаш учун боғлиқлик принципидан, яъни

$$s'_1\ Ds_o=0 \qquad (10.50)$$

шартдан фойдаланилади. Навбатдаги $X^k (k=2,3,...)$ нуқталар учун s_k йўналиш s_0, s_1'..., s_{k-1} йўналишлар билан боғлиқ бўлиш керак, яъни

$$s'_1 Ds_j=0,\ (j=0,\ 1,\ \ .,k-1). \qquad (10.51)$$

Агар X^k нуқтадан чиқувчи янги s_k йўналишни топиш мумкин бўлмаса, масалани ечиш жараёни тўхтатилади ва X^k (10.47) системанинг ечими бўлади.

Зойтендейк усулининг k қадамида қилинадиган ишлар билан танишамиз.

Фараз қилайлик , $X^k \in G$ топилган бўлсин.

1. X^k нуқтада $\nabla f(X^k)$ градиент топилади.
2. Мувофиқ (мос) s_k йўналиш аниқланади. Бунда қуйидаги икки ҳол бўлиши му.мкин.

а) X^k ички нуқта. Бу ҳолда (10.51) боғлиқлик принципидан ёки бўлмаса (10.37)-(10.41) нормаллаштириш шартларидан бирортаси(масалан,10.40) ни қаноатлантирувчи ва мақсад функция $T=(\nabla' f(X^k),s_k)$га максимум қиймат берувчи s_k топилади. Демак, s_k йўналишни топиш учун қуйидаги қўшимча масала ечилади:

$$(\nabla' f(X^k),s_k) \le 1, \qquad (10.52)$$
$$T= (\nabla f(X^k),s_k) \to max$$

б) X^k чегаравий нуқта. Бу ҳолда s_k ни қуйидаги қўшимча масаланинг ечими сифатида аниқланади:

$$\begin{cases} A'_i\ s_k \le 0, i \in I, \\ (\nabla' f(X^k), s_k) \le 1, \\ T = (\nabla' f(X^k), s_k) \to \max. \end{cases} \qquad (10.53)$$

Топилган s_k йўналиш учун оптималлик критерийси текширилади. Агар

$$(\nabla f(X^k), s_k) = 0$$

бўлса, s_k оптимал йўналиш ҳамда X^k масалани оптимал ечими бўлади. Бу ҳолда масалани ечиш жараёни тўхтатилади. Акс ҳолда навбатдаги 2-пунктга ўтилади.

3. λ_k топилади. Агар X^k ички нуқта бўлса, λ_k ни топиш учун қуйидаги формула ишлатилади:

$$\lambda_k = \lambda_k'' = \frac{(\nabla f(X^k), s_k)}{2 s_k D s_k} \qquad (10.54)$$

X^k чегаравий нуқта бўлганда эса қуйидаги муносабатлардан фойдаланиш мумкин:

$$\lambda_k = \lambda_k'' = min\ (\lambda_i / \lambda_i > 0),$$

бунда:

$$\lambda_i = -\frac{A_i X^k - b_i}{A_i' s_k}. \qquad (10.55)$$

Янги $X^{k+1} = X^k + \lambda_k s_k$ нуқта топилади ҳамда $k+1$ қадамга ўтилади.

Мисол. Зойтендейкнинг мумкин бўлган йўналишлар усулидан фойдаланиб, қуйидаги квадратик дастурлаш масаласини ечинг.

$$Z = f(X) = 10x_1 - x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 \rightarrow max.$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ечиш. Масалада қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_1' = (1;\ 2),\ A_2' = (1;\ 1),$$

$$C = (10;0),\ C' = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ X' = (x_1;\ x_2).$$

Бу белгилашларда масала қуйидагича кўринишга келади:

$$A_1'X \le 10,$$
$$A_2'X \le 6,$$
$$X \ge 0,$$
$$Z = f(X) = C'X + X'DX \rightarrow max.$$

Бошланғич нуқта X^0 ни $X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ кўринишда оламиз. Шунингдек $\nabla f(X^0)$ градиентни ҳисоблаб, уни

$$\nabla f(X^0) = \nabla f_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

кўринишда ёзамиз. X^0 нуқтада чегаравий шартларнинг бирортаси ҳам тенгликка айланмайди, демак I бўш тўплам.
Шунинг учун қўшимча масалада (10.36) шартлар қатнашмайди. Нормаллаштириш шарти сифатида (10.40) ни оламиз. Шундай қилиб, қўшимча масала қуйидаги кўринишда бўлади.

$$T=(\nabla' f(X^0),s_0) \to max.$$

$$(\nabla' f(X^0),s_0) \le 1,$$

яъни

$$\begin{cases} T = 10s_{01} \to \max \\ 10s_{01} \le 1, \end{cases} \qquad (10.56)$$

бу ерда $s_0= \begin{pmatrix} s_{01} \\ s_{02} \end{pmatrix}$.

(10.56) масалани ечиб, $s_0=\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ни ҳосил қиламиз. Энди λ_0 ни аниқлаймиз, унинг учун λ''_0, λ'_1 ларни топамиз:

$$\lambda_0'' = \frac{(\nabla' f(X^0), s_0)}{-2s_0' D s_0}.$$

$$\lambda_0' = \min_{\lambda_i>0}\left\{\lambda_i = \frac{A_i' X^0 - b_i}{A_i' s_0}\right\}.$$

Бу ифодаларда:

$$(\nabla' f(X^0),s_0) = ((10;0)\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix})= 1,$$

$$-2s'_0 D s_0 = -2(0,1,0)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,02,$$

$$\lambda_1 = -\frac{A_1' X^0 - b_1}{A_1' s_0} = -\frac{(1;2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 10}{(1;2)\begin{pmatrix} 0;1 \\ 0 \end{pmatrix}} = -\frac{(-10)}{0,1} = 100,$$

$$\lambda_2 = -\frac{A_2' X^0 - b_2}{A_2' s_0} = -\frac{(1;1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 6}{(1;1)\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}} = -\frac{-6}{0,1} = 60.$$

Демак,

$$\lambda'_0=min\{100;60\} = 60,$$

$$\lambda''_0=\frac{1}{0,02}=50,$$

$$\lambda_0= \min\{\lambda''_0,\ \lambda'_0\} = 50.$$

Энди янги X^1 нуқтани топамиз:

$$X^1 = X^0 + \lambda_0 s_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 50\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

II.

$$\nabla f(X^1)=C'+2DX^1=\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix}. \quad (10.57)$$

Бу қадамда ҳам I бўш тўплам, чунки X^1 нуқтада бирорта чегаравий шарт тенгламага айланмайди. Шунинг учун X^1 нуқтадан чиқувчи мувофиқ (мос) йўналиш s_1 ни аниқлаш учун қуйидаги қўшимча масалани тузамиз:

$$T=(\nabla'f(X^1),s_1)\to max,$$
$$(\nabla'f(X^1),s_1)\le 1. \quad (10.58)$$

Бу ерда $s_1=\begin{pmatrix}s_{11}\\s_{12}\end{pmatrix}$. (10.58) масалани (10.51) га асосан қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\begin{cases}T=10s_{12}\to \max,\\10s_{12}\le 1.\end{cases}$$

Бундан

$$s_1=\begin{pmatrix}0\\0.1\end{pmatrix}.$$

Энди λ_1 ни аниқлаймиз:

$$\lambda_1=\min\{\lambda''_1,\ \lambda'_1\},$$
$$\lambda_1''=\frac{(\nabla'f(X^1),s_1)}{-2s_1'\ Ds_1},$$

бу ерда

$$(\nabla f(X^1)=(0;10),$$
$$(\nabla f(X^1),\ s_1)=(0;10)\begin{pmatrix}0\\0.1\end{pmatrix}=1$$
$$2s_1'Ds_1=0{,}04.$$

Демак,

$$\lambda''_1=\frac{1}{0{,}04}=25,$$
$$\lambda_1'=\min\{\lambda_1,\ \lambda_2\},$$

$$\lambda_1=-\frac{A_1'\ X^1-b_1}{A_1'\ s_1}=-\frac{(1;2)\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}-10}{(1;2)\begin{pmatrix}0\\0{,}1\end{pmatrix}}=-\frac{5-10}{0{,}2}=25,$$

$$\lambda_2=-\frac{A_2'\ X^1-b_2}{A_2'\ s_1}=-\frac{(1;1)\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}-6}{(1;1)\begin{pmatrix}0\\0{,}1\end{pmatrix}}=-\frac{5-6}{0{,}1}=10,$$

$\lambda_1' = min\{25,10\} = 10,$

$\lambda_1 = min\{\lambda_1''; \lambda_1'\} = min\{25;10\} = 10.$

X^2 нуқтани топамиз:

$$X^2 = X^1 + \lambda_1 s_1 = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix}0\\0{,}1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}.$$

III. Бу ерда $\lambda_1 = \lambda_1'$ Шунинг учун $X^2 = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ нуқта тўпламнинг чегаравий нуқтаси бўлади ва у $x_1 + x_2 = 6$ тўғри чизиқда ётади. Демак, чегаравий шарт $(i=2)$ $x_1 + x_2 \leq$ 6 X^2 нуқтада тенгламага айланади. Шунинг учун қўшимча масала (10.36) шартни ўз ичига олиши керак. Қўшимча масалани тузишдан олдин бу нуқтадаги градиентни топамиз:

$$\nabla f(X^2) = C' + 2DX^2 = \begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}.$$

s_2 йўналишни аниқлаш учун $i=2$ да (14.36) шартни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$A_2'(X^2 + s_2) \leq 6.$$

Бунда $X^2 + s_2 = k$ белгилаш киритиб,

$A_2' k \leq 6$, $k = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$ тенгсизликни ҳосил қиламиз, яъни

$$(1;1)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix} \leq 6 \qquad (10.59)$$

ёки

$$k_1 + k_2 \leq 6.$$

Энди $(\nabla' f(X^2),\ s_2)$ ифодада s_2 ни k га алмаштирамиз. Бунинг учун қуйидаги муносабатлардан фойдаланамиз:

$$s_2 = k - X^2$$
$$s_{21} = k_1 - 5, \qquad (10.60)$$
$$s_{22} = k_2 - 1$$

$$(\nabla' f(X^2),\ s_2) = (2;6)\begin{pmatrix}s_{21}\\s_{22}\end{pmatrix} = (2;6)\begin{pmatrix}k_1 - 5\\k_2 - 1\end{pmatrix}.$$

Демак,

$$(\nabla' f(X^2), s_2) = 2(k_1 - 5) + 6(k_2 - 1),$$

ёки

$$(\nabla' f(X^2), s_2) = 2k_1 + 6k_2 - 16. \qquad (10.61)$$

Энди қўшимча масала тузамиз:

$$\begin{cases} A_i s_2 \le 0, \quad i \in I, \\ (\nabla'(f(X^2), s_2)) \le 1, \\ T = \nabla'(f(X^2), s_2) \to \max. \end{cases} \qquad (10.62)$$

(10.59)-(10.61) га асосан қўшимча масала қуйидаги кўринишга келади:

$k_1+k_2 \le 6$,
$2k_1+6k_2 \le 17$,
$k_1 \ge 0, k_2 \ge 0$,
$T=2k_1+6k_2-16 \to max$

Бу масала шартларини тенгламага айлантириш учун қўшимча k_3, k_4 ўзарувчилар киритамиз ва $T \to max$ ни $T \to min$ га ўзгартирамиз. Натижада

$k_1+k_2+k_3=6$,
$2k_1+6k_2+k_4=17$,
$k_1 \ge 0$, $k_2 \ge 0$, $k_3 \ge 0$, $k_4 \ge 0$
$T=16-2k_1-6k_2 \to min$

ифодаларни ҳосил қиламиз. Ҳосил бўлган масалада k_3 ва k_4 номаълумларни базис ўрганувчилар деб қабул қиламиз.

$k_3=6-k_1-k_2$,
$k_4=17-2k_1-6k_2$,
$T=16-2k_1-6k_2 \to min$.

Симплекс усулни қўллаб, олдин k_1 ни, сўнгра k_2 ни базисга киритамиз ва натижада

$$k_2=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}k_3-\frac{1}{4}k_4,$$
$$k_1=\frac{19}{4}-\frac{3}{2}k_3+\frac{1}{4}k_4$$
$$T=-1+k_4 \to min$$

ифодалар ҳосил бўлади.

Оптимал ечим:

$$k_1=\frac{19}{4},\ k_2=\frac{5}{4},$$
$$T_{max}=1.$$

Бундан (10.60) га асосан

$$s_{21}=\frac{19}{4}-5=-\frac{1}{4},$$
$$s_{22}=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}.$$

Демак, $s_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $(\nabla' f(X^2), s_2)=T_{max}=1$. Энди λ_2 ни аниқлаймиз:

$$\lambda_2 = min\ (\lambda_2'', \lambda_1'),$$

бунда

$$\lambda_2'' = \frac{(\nabla' f(X^2), s_2)}{-2 s_2 D s_2},\quad (\nabla' f(X^2), s_2) = T_{max} = 1$$

$$-2 s_2^1 D s_2 = -2\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{5}{8}$$

Демак,

$$\lambda_2'' = \frac{1}{\frac{5}{8}} = 1{,}6$$

$$\lambda_2' = \lambda_1 = \frac{A_1 X^2 - b_1}{A_1' s_2} = \frac{(1;2)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - 10}{(1;2)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}} = 12,$$

$$\lambda_2' = min\ \{\lambda_2', \lambda_2''\} = 1{,}6.$$

Бундан фойдаланиб, янги X^3 нуқтани топамиз:

$$X^3 = X^2 + \lambda_2 s_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1{,}6\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}6 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}.$$

IV. $\nabla f(X^3)$ градиентни топамиз:

$$\nabla f(X^3) = C' + 2DX^3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4{,}6 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 3{,}6 \end{pmatrix}.$$

X^3 нуқта чегаравий нуқта, чунки X^3 нуқтада иккинчи ($i=2$) чеклама шарт ($x_1 + x_2 \leq 6$) тенгламага айланади. Қўшимча масала III босқичдагидек тузилади. Бунда чегаравий шартлардан бири

$$k_1 + k_2 \leq 6$$

кўринишда бўлади. Иккинчи чекламани

$$(\nabla' f(X^3), s_3) \leq 1$$

тенгсизликдан фойдаланиб аниқлаймиз.

$$(3{,}6; 3{,}6)\begin{pmatrix} s_{31} \\ s_{32} \end{pmatrix} \leq 1.$$

Бундан қўшимча масаланинг иккинчи чекламаси

$$3{,}6 s_{31} + 3{,}6 s_{32} \leq 1$$

келиб чиқади. Бунда

$$s_{31}=k_1-4,6,$$
$$s_{32}=k_2-1,4$$

белгилаш киритамиз. Натижада $3,6k_1+3,6k_2-21,6\leq 1$ га эга бўламиз. Қўшимча масаланинг мақсад функцияси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$T=(\nabla f(X^3),s_3)=3,6k_1+3,6k_2-21,6\rightarrow max.$$

Шундай қилиб,

$$k_1+k_2\leq 6,$$
$$3,6k_1+3,6k_2\leq 22,6,$$
$$k_1\geq 0,\ k_2\geq 0,$$
$$T=3,6k_1+3,6k_2-21,6\rightarrow max$$

масалани ҳосил қиламиз. Бу масалага симплекс усулни қўллаб ечамиз ва оптимал ечимни топамиз:

$$k_1=6,\ k_2=0.$$
$$T_{max}=0.$$

Бундан $(\nabla f(X^3),s_3)=T_{max}=0$

Демак, X^3 нуқта оптимал нуқта бўлади. Шундай қилиб оптимал ечим:

$$x_1=4,6,\ x_2=1,4,$$
$$Z_{max}=33,8.$$

Таянч сўз ва иборалар

Функция градиенти, градиент йўналиши, функциянинг энг тез ўсиш йўналиши, мумкин бўлган йўналиш, градиент усул, тезлик билан кўтарилиш усули, мумкин бўлган йўналишлар усули, мувофиқ йўналиш, боғлиқлик принципи, қўшимча йўналишлар усули, нормаллаштириш шарти.

Назорат саволлари

1. Функция градиенти нима ?
2. Функциянинг энг тез ўсиш йўналиши деганда қандай йўналишни тушунасиз?
3. Функциянинг энг тез камайиш йўналиши қандай?
4. Мумкин бўлган йўналиш нима?

5. Функциянинг шартсиз экстремуми градиент усул билан қандай аниқланади?

6. Градиентга асосланган усулларнинг ғояси ва фарқи нимадан иборат?

7. Градиент усул билан қавариқ дастурлаш масаласи қандай ечилади?

8. Тезлик билан кўтарилиш усули қандай?

9. Градиент усул билан квадратик дастурлаш масаласи қандай ечилади?

10. Зойтендейкнинг мумкин бўлган йўналишлар усулнинг ғояси қандай?

11. Мувофиқ йўналиш нима?

12. Зойтендейк усулидаги дастурлаш шартлари қандай?

13. Мумкин бўлган йўналишнинг оптимал йўналиш бўлиш мезони қандай?

14. Боғлиқлик принципи нима?

15. Зойтендейк усулининг алгоритми қандай?

Масалалар

I. Қуйидаги қавариқ дастурлаш масалаларини жоиз ечими берилган ҳолда градиент усул билан оптимал ечим топилсин.

1) $x_1+2x_2+3x_3.\le 15,$
$3x_1+x_2+x_3\le 12,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,$
$X^0=(1;2;3),$
$Z=x_1+2x_1^2+2x_2+4x_3\to min.$

2) $2x_1\ge 2,$
$4x_1-4x_2\le 0$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ X^0=(2;2),$
$Z=x_1^2+x_2^2\to min.$

3) $-x_1+x_2\le 1$
$x_1\le 3$

$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ X^0=(2;1)$
$Z=8x_1+6x_2-x_1^2-x_2^2 \rightarrow max.$

4) $x_1+3x_2+x_3 \leq 15$
$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$
$x^0=(4;2;1),$
$Z=x_1+2x_2^2+x_3^2 \rightarrow min.$

II. Қуйидаги чизиқсиз функциянинг экстремумини градиент усулни қўллаб топинг. Экстремал нуқтага яқинлашиш жараёнини графикда тасвирланг:

1) $f=4x_1^2+x_2^2-4x-2x_2 \rightarrow max,$
$X^0=(1;3).$
2) $f=5x_1+8x_2-2x_1^2-2x_2^2 \rightarrow max,$
$X^0=(3;1).$
3) $f=8x_1+6x_2-2x_1^2-x_2^2 \rightarrow max,$
$X^0=(1;.0,5).$
4) $f=2x_1+4x_2-x_1^2-x_2^2 \rightarrow max,$
$X^0=(4;4).$
5) $f=x_1^2+x_2^2-6x_1-4x_2+13 \rightarrow min,$
$X^0=(1;1).$

III. Қуйидаги дастурлаш масаларини Зойтендейкнинг мумкин бўлган йўналишлар усулидан фойдаланиб ечинг:

1. $x_1+2x_2 \leq 16,$
$5x_1+2x_2 \leq 0,$
$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ X^0=(2;3),$
$Z=2\ 0x_1+16x_2-2x_1^2-x_2^2 \rightarrow max$

2. $2x_1+x_2+3x_3 \leq 28,$
$x_1+2x_2+x_3 \leq 20,$
$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$
$X^0=(1;2;3)$
$Z=x_1+2x_1^2+2x_2+4x_3 \rightarrow min.$

XI-БОБ. ДИНАМИК ДАСТУРЛАШ

1-§. Динамик дастурлаш ҳақида асосий тушунчалар. Оптималлик принципи

Чизиқли ва чизиқсиз дастурлаш масалаларида иқтисодий жараён вақтга боғлиқ эмас деб қаралади, шунинг учун масаланинг оптимал ечими режалаштиришнинг фақат бир босқичи учун топилади. Бундай масалалар **бир босқичли масалалар** номи билан аталади.

Динамик дастурлаш масалаларида иқтисодий жараён вақтга боғлиқ деб қаралади ҳамда бутун жараённниг оптимал ривожини таъминловчи бир қатор (кетма-кет, ҳар бир босқич учун алоҳида) оптимал ечимлар топилади. Динамик дастурлаш масалалари **кўп босқичли** ёки **кўп қадамли** деб аталади.

Динамик дастурлаш – вақтга боғлиқ ва кўп босқичли бошқарилувчи иқтисодий жараёнларни оптимал режалаштириш усулларини ўрганувчи математик дастурлашнинг бир бўлимидир.

Агар иқтисодий жараённинг кечишига таъсир кўрсатиш мумкин бўлса, бундай жараён **бошқарилувчи** деб аталади. Жараённинг кечишига таъсир этиш учун қабул қилинувчи қарорлар (ечимлар) тўпламига **бошқариш** деб аталади. Иқтисодий жараёнларда бошқаришни режалаштиришнинг ҳар бир босқичида воситаларни тақсимлаш, маблағ ажратиш ва шу кабилар билан ифодаланиши мумкин. Масалан, ихтиёрий корхонада ишлаб чиқариш – бошқарилувчи жараёндир, чунки у ишлаб чиқариш воситаларининг таркиби, хом ашё таъминоти, молиявий маблағлар миқдори ва ҳоказо билан аниқланади. Режалаштириш даврндаги ҳар бир йил бошида хом ашё билан таъминлаш, ишлаб чиқариш жиҳозларини алмаштириш, қўшимча маблағлар миқдори ҳақида қарорлар қабул қилинади. Бундай қарорлар тўплами бошқаришдан иборатдир. Бир қарашда, энг кўп миқдорда маҳсулот ишлаб чиқариш учун корхонага мумкин бўлган воситаларнинг ҳаммасини бериш ва ишлаб чиқариш жиҳозларидан (станокларидан, техникадан ва ҳоказолардан) тўла фойдаланиш зарурдек туюлади. Лекин бу жиҳозларни тезда эскиришига (ишдан чиқишга) ва келгусида маҳсулот ишлаб чиқариш ҳажмининг камайишига олиб келиши мумкин. Демак, корхонанинг фаолиятида номаъқул оқибатлардан холи бўлган холда эскирган жиҳозларни алмаштириш ёки ўрнини тўлдириш чоралари белгиланиши лозим бўлади. Бу эса дастлабки даврда маҳсулот ишлаб чиқариш камайса ҳам, кейинги даврларда корхонанинг бутун ишлаб чиқариш фаолиятини кучайишига олиб келиши мумкин. Шундай қилиб, юқоридаги иқтисодий жараён, ҳар бир даврда унинг ривожланишига таъсир этувчи, бир қанча босқичлардан иборат деб қаралиши мумкин. Кўп босқичли иқтисодий жараёнларни режалаштириш учун, ҳар бир оралиқ босқичда алоҳида қарор қабул қилишда, бутун жараённинг туб мақсади кўзланади. Бутун жараённинг ечими ўзаро боғланган ечимлар кетма-кетлигидан иборат бўлади. Ўзаро боғланган бундай ечимлар кетма-кетлиги **стратегия** деб аталади. Олдиндан танланган мезонга нисбатан энг яхши натижани таъминловчи стратегия **оптимал стретагия** деб аталади. Бошқача айтганда оптимал стратегия кўп босқичли иқтисодий жараённинг оптимал ривожланишини таъминловчи стратегиядир.

Динамик дастурлаш кўп босқичли тузилишга эга бўлган ёки бундай тузулишга келтириладиган масалаларнинг оптимал ечимини топиш учун ишлатиладиган математик воситадир.

Кўп иқтисодий жараёнлар ўз ўзидан босқичларга бўлинадиган бўлади. Масалан 5 йиллик, I йиллик режаларни тузишда ҳар бир босқич сифатида I йил, квартал, декадаларни кўрсатиш мумкин. Лекин баъзи масалалар вақтга боғлиқ бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан, энг қисқа йўл билан кўзланган маррага (жойга) бориш масаласи вақтга боғлиқ эмас. Лекин бу масалани кўп босқичли масалага айлантириб, уни динамик дастурлаш усули билан ечиш мумкин.

Кўп босқичли иқтисодий масалаларни ечиш учун уларни ягона математик моделини ёки бўлмаса, ҳар бир босқичга мос келувчи статик моделлар тизимини тузиб сўнгра уни динамик дастурлаш усуллари билан ечиш керак.

Шундай қилиб, кўп босқичли жараён сифатида ифодаланувчи математик дастурлаш масалаларини ечиш динамик дастурлашнинг предметини ташкил этади.

Кўп босқичли жараён деганда вақтга боғлиқ равишда ривожланувчи ва ўз тарақиётида бир неча босқичларга бўлинувчи жараённи тушуниш керак.

Динамик дастурлаш қуйидаги хусусиятларга эга:

1) динамик дастурлаш кўп босқичли жараённинг бирдан-бир ягона ечимини эмас, балки ҳар бир босқичга мос келувчи ва туб манфаатни кўзловчи ечимлар кетма-кетлигини топишга ёрдам беради;

2) динамик дастурлаш ёрдами билан ечилаётган кўп босқичли масаланинг маълум бир босқичи учун топилган ечими ундан олдинги босқичларда топилган ечимга боғлиқ бўлмайди. Унда фақат шу босқични ифодаловчи фактлар назарга олинади;

3) динамик дастурлаш ёрдами билан кўп босқичли масалани ечиш жараёнининг ҳар бир босқичида туб мақсадни кўзловчи ечимни аниқлаш керак, яъни ечимлар орасида провард мақсадга эришишга максимал ҳисса қўшувчи ечимни топиш керак.

Демак, маълум бир босқичда топилган оптимал режа фақат шу қадам нуқтаи назаридан эмас, балки бутун жараённинг туб (провард) мақсади нуқтаи назаридан оптимал режа бўлиши керак.

Бундай принцип **«динамик дастурланинг оптималлик принципи»** деб аталади.

Оптималлик принципига амал қилиш ҳар қадамда қабул қилинган ечимни келгусида қандай оқибатларга олиб келишини назарга олиб бориш демакдир. Бундан ташқари оптималлик принципини яна қуйидагича талқин қилиш мумкин.

Ҳар бир босқичдан аввал системанинг ҳолати қандай бўлишидан қатъий назар шу босқичдаги оптимал ютуқ билан ундан кейинги босқичлардаги оптимал ютуқларнинг йиғиндисини максималлаштирувчи бошқаришни танлаш керак.

Демак, бошқаришнинг оптимал стратегиясини топиш учун энг аввал n-қадамдаги оптимал стратегияни топиш керак, кейин n ва n-1-қадамлардаги оптимал стратегияни ва ҳоказо, барча қадамлардаги оптимал стратегияни топиш керак.

Бу принципга асосан динамик дастурлаш масаласини охирги n-қадамдаги оптимал стратегияни топишдан бошлаш керак. Бунинг учун ундан олдинги қадамдаги ечим ҳақида айрим тахминлар қилинади ва бу асосда W мезонни максималлашувчи U^0_n бошқариш танланади. Бундай бошқариш **шартли бошқариш** деб аталади.

Демак, оптималлик принципи ҳар қадамда ундан олдинги қадамнинг мумкин бўлган ихтиёрий бир натижаси учун шартли оптимал бошқаришни топишни талаб қилади.

2-§. Динамик дастурлаш усуллари билан ечиладиган иқтисодий масалалар

1. Саноат бирлашмасини оптимал режалаштириш масаласи

Фараз қилайлик, n та корхонани ўз ичига олувчи саноат бирлашмасининг T йиллик ишлаб чиқариш режасини тузиш талаб қилинсин. Режалаштирилаётган T даврнинг бошида бирлашма учун K_0 миқдорда маблағ ажратилган бўлсин. Бу маблағ корхоналараро тақсимланади. Корхоналар ажратилган маблағни тўла ёки қисман ишлатади ва маълум миқдорда даромад олади. Кейинги босқичларда маблағлар корхоналараро қайта тақсимланиши мумкин. Шундай қилиб, қуйидаги масала ҳосил бўлади: корхоналараро капитал маблағни шундай тақсимлаш ва қайта тақсимлаш керакки, натижада бирлашманинг T йил давомида олган даромадларининг йиғиндиси максимал бўлсин.

Ҳар йилнинг бошида бирлашмадаги ҳар бир корхонага ажратиладиган хом ашё, капитал маблағ ва янгиланиши керак бўлган ускуналарнинг сони ҳақида ечим қабул қилинади. Бу ечимлар тўплами **бошқариш** деб аталади. Демак t-қадамдаги бошқариш

$$U^t=(U^t_1,\ U^t_2,\dots,U^t_n)$$

вектор орқали ифодаланади, бу ерда U^t_j (j=1,...,n) j корхона учун t қадамнинг бошида ажратилган хом ашё, капитал маблағ ва ҳоказоларнинг миқдорини кўрсатувчи вектор.

Бутун бирлашманинг T давр ичида бошқаришни

$$U=(U^1, U^2,...,U^T)$$

вектор орқали ифодалаш мумкин. Бундан ташқари бирлашмадаги ҳар бир j-корхонанинг ҳолатини кўрсатувчи X_j векторни киритамиз.

$$X_j=(X^1_j, X^2_j,..., X^T_j) \qquad (j=1,...,n)$$

Бу ерда X^t_j t (j=1,...,T) қадамнинг бошидаги j-корхонанинг моддий-ашёвий ва молиявий аҳвол даражасини кўрсатувчи вектор бўлиб, унинг компоненталари корхонадаги меҳнат ресурслари, асосий фондлар, молиявий аҳвол даражасини кўрсатади, яъни

$$X^t_j=(X^t_{j1}, X^t_{j2},..., X^t_{jl})$$

Демак, юқоридагилардан хулоса қилиб айтиш мумкинки, бошқариш вектори бирлашмадаги корхоналар системасининг t қадам бошидаги ҳолатини кўрсатувчи вектордир, яъни

$$U^t=U^t(X^{t-1}).$$

Системанинг бошланғич ҳолати X_0 берилган деб фараз қиламиз. Мақсад функция сифатида бирлашманинг T давр ичида оладиган даромадлари йиғиндисини ифодаловчи

$$Z=\sum_{t=1}^{T} Z^t \to \max$$

функцияни киритамиз. Ҳар бир t қадамнинг бошида системанинг X^t ҳолат даражасига ва U^t бошқариш векторига маълум бир чегараловчи шартлар қўйилади. Бу шартлар бирлашмасини G билан белгилаймиз ва уни **жоиз бошқаришлар тўплами** деб атаймиз.

Шундай қилиб, қуйидаги динамик дастурлаш масаласига эга бўламиз:

$$U^t \in G, \qquad (11.1)$$

$$Z=\sum_{t=1}^{T} Z^t \to \max \qquad (11.2)$$

Ҳосил бўлган (11.1)-(11.2) модел ишлаб чиқаришнинг динамик модели деб аталади. Бу моделга асосан ҳар бир t қадамдаги U^t бошқаришни шундай аниқлаш керакки, натижада системанинг режалаштирилаётган давр ичида эришган даромадлари йиғиндиси максимал бўлсин.

2. Маҳсулот ишлаб чиқиш ва уни сақлашни режалаштиришнинг динамик модели

Вақтга боғлиқ равишда ўзгарувчан талабни қондиришга қаратилган ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласини кўрамиз. Режалаштирилаётган даврнинг узунлиги T бўлсин. Бу даврнинг ҳар бир t-қадамида (t=1,...,T) маҳсулотга бўлган талаб V(t) маълум деб фараз қиламиз. Худди шунингдек, t қадамдаги ишлаб чиқариш режасини X(t) билан белгилаймиз. T давр давомида корхонадаги маҳсулотлар заҳираси камайиб ёки ортиб бориши мумкин. Фараз қилайлик, бошланғич (t=0) қадамда корхонадаги маҳсулот заҳираси Z(0) бўлсин. У ҳолда X(t)>V(t) бўлганда t-қадамдаги маҳсулот заҳираси қуйидагича аниқланади

$$Z(t)=X(t)-V(t)+Z(0)\geq 0$$

Агар t қадамда ишлаб чиқарилган маҳсулот талабдан кам бўлса, яъни

$$X(t)<V(t)$$

бўлса, у ҳолда t-қадамнинг бошида корхонада мавжуд бўлган маҳсулот заҳираси V(t)−X(t) га камаяди, яъни

$$Z(t)=Z(t-1)-V(t)+X(t)$$

бўлади.

Ихтиёрий қадамдаги маҳсулот заҳираси нолдан кичик эмас деб фараз қиламиз ҳамда t=0 бошланғич қадам билан t-қадам орасидаги маҳсулотга бўлган умумий талабни $\overline{V}(t)$ билан, умумий

$$\overline{V}(t)=\int_0^t V(t)dt$$

$$\overline{X}(t)=\int_0^t X(t)dt$$

ишлаб чиқариш ҳажмини $\overline{X}(t)$ билан белгилаймиз. У ҳолда юқоридаги
тенгликлар ўринли бўлади.

Фараз қилайлик, маҳсулотни бир бирлигини сақлаш учун сарф қилинган ҳаражат c бирлик ва ишлаб чиқариш ҳаражатлари функцияси K(t) бўлсин. Ишлаб чиқариш ҳаражатлари функцияси K(t) ишлаб чиқарилган маҳсулотлар миқдори X(t) га боғлиқ бўлади, яъни K(t)=f(X(t)). Ишлаб чиқаришни шундай режалаштириш керакки, натижада маҳсулот ишлаб чиқариш ва сақлаш усун сарф қилинган ҳаражатлар минимал бўлсин, яъни

$$Y=\int_0^t f(X(t))dt+c\int_0^t (X(t)-V(t)+Z(0))dt\to\min \qquad (11.3)$$

Мақсад функция икки қисмдан иборат бўлиб, унинг биринчи қисми маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун кетган ҳаражатларни, иккинчи қисми эса маҳсулотларни сақалаш учун сарф қилинган ҳаражатларни кўрсатади.

Бундан ташқари масаладаги номаълумлар қуйидаги шартларни қаноатлантириши керак:

$$Z(0)\geq 0 \qquad (11.4)$$

$$X(t)-V(t)+Z(0)\geq 0 \qquad (11.5)$$

$$X(T)-V(T)=Z(T) \qquad (11.6)$$

Бунда (11.4) шарт режалаштирилаётган даврнинг бошидаги маҳсулот заҳираси манфий эмаслигини кўрсатади. (11.5) шарт ихтиёрий t босқичдаги маҳсулот заҳирасининг манфий эмаслигини кўрсатади. (11.6) шарт режалаштирилаётган даврнинг охирида корхонада ортиб қолган маҳсулот миқдори Z(T) га тенг эканлигини кўрсатади.

Ҳосил бўлган (11.3)-(11.6) модел маҳсулот ишлаб чиқариш ва сақлашни режалаштиришнинг **динамик модели** дейилади.

Бу моделга асосан ҳар бир қадамдаги маҳсулот ишлаб чиқаришни шундай режалаштириш керакки, натижада уни ишлаб чиқариш ва сақлаш учун сарф қилинган ҳаражатлар йиғиндиси минимал бўлсин.

Мисол. Харидоргир маҳсулот ишлаб чиқаришни кенгайтириш учун бу маҳсулот ишлаб чиқарувчи n та корхоналарга S минг сўм капитал маблағ ажратилган.

Агар i-корхонага x_i минг сўм капитал маблағ ажратилса, у ҳолда бу корхонадаги маҳсулот ишлаб чиқариш ҳажми $f_i(x_i)$ миқдорга ошади.

Барча корхоналарда ишлаб чиқариладиган маҳсулот ҳажмини максимал ошириш учун капитал маблағни корхоналарга қандай тақсимлаш керак?

Ечими. Масаланинг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S,$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,n})$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max. \qquad (3)$$

бу ерда $f_i(x_i)$ − x_i капитал маблағнинг чизиқсиз функцияси.

Агар $f_i(x_i)$−қавариқ функция бўлса, у ҳолда масалани V-бобда танишган усуллардан бирини қўллаб ечиш мумкин. Агар $f_i(x_i)$− ихтиёрий чизиқсиз функция бўлса, у ҳолда бу масалани динамик дастурлаш усулини қўллаб ечиш мақул. Бунинг учун масалани кўп босқичли масала сифатида ифодалаш керак. Капитал маблағни n та корхонага тақсимлаш вариантларини ўрганиш ва ҳар бир вариантга мос келувчи самарадорлик даражасини аниқлаш ўрнига S миқдордаги капитал маблағни аввал битта корхонага, кейин иккита, ва ҳоказо, n та корхонага тақсимлаш самарадорлигини аниқлаймиз. Шундай йўл билан масала кўп босқичли динамик дастурлаш масаласига айланади.

Ҳар бир k-корхонага ажратиладиган капитал маблағ ҳақидаги қарор бошқариш бўлади. Шундай бошқаришлар ичида F функцияга максимал қиймат берувчисини топиш керак.

3-§. Динамик дастурлаш масаласининг умумий қўйилиши. Беллманнинг функционал тенгламалари

Вақтга боғлиқ равишда ўзгарувчан ва бошқариш мумкин бўлган системани кўрамиз. Бу системани T та босқичларга ажратиш мумкин деб фараз қиламиз t=1,...,T. ҳар бир босқичнинг бошидаги системанинг ҳолатини X_t билан белгилаймиз.

$$X_t=(X_{1t}, X_{2t},..., X_{mt}).$$

Тараққиёт жараёнида системанинг ҳолати ўзгаради. Унинг X_{t-1} ҳолатдан X_t ҳолатга ўтишга U_t бошқариш таъсир қилади. Демак, X_t X_{t-1} ва U_t ўзгарувчиларнинг функциясидан иборат бўлади, яъни

$$X_t=\varphi(X_{t-1}, U_t).$$

Бу ерда U_t мумкин бўлган бошқаришлар тўплами G_t га тегишли, яъни

$$U_t \in G_t$$

Бундай аниқлашларда системанинг бутун [0,T] давр ичидаги тараққиёти X_0, $X_1,...,$ X_{T-1}, X_T векторлар кетма-кетлиги оркали аниқланади. ($X_t \in \bar{X}_t$) $\bar{X}_t$ –системанинг t босқичда мумкин бўлган ҳолатлар тўплами. Системани бошланғич X_0 ҳолатдан X_T ҳолатга ўтказиш учун U_0, $U_1,...,$ U_{T-1}, U_T бошқаришлар кетма-кетлиги, яъни стратегиялар ҳизмат қилади. Системани энг яхши X_T ҳолатга ўтишини таъминлаш учун $f_T(X)$ мақсад функцияни киритамиз.

$$f_T(X)=\sum_{t=1}^{T} Z_t(X_{t-1}, X_t),$$

бу ерда $Z_t=(X_{t-1}, X_t)$ системанинг X_{t-1} ҳолатдан X_t ҳолатига ўтишида ҳисобланадиган ва бу ҳолатларни солиштириб баҳоловчи функциядир.

Агар системанинг t босқичдаги ҳолатлар тўплами $\bar{X}_t$, мумкин бўлган бошқаришлар тўплами G ҳамда системани бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтказиш қоидаси, ҳамда бу ҳолатларни солиштирувчи функция $Z_t=(X_{t-1}, X_t)$ берилган бўлса, T босқичли система тўла аниқланган бўлади. Бундай системани ифодаловчи динамик дастурлаш масаласи қуйидагича ёзилади.

Системани бошланғич ҳолати X_0 маълум бўлганда шундай

$$U_t=(U_1, U_2,..., U_T)$$

стратегияни танлаш керакки, у

$$X_t=\varphi(X_{t-1}, U_t),\ X_t \in \bar{X}_t,\ U_t \in G_t,\ t=1,...,T \qquad (11.7)$$

шартларни қаноатлантириб

$$f_t(X)=\sum_{t=1}^{T} Z_t(X_{t-1}, X_t) \qquad (11.8)$$

функцияга экстремал қиймат берсин.

Ушбу муносабатлардан кўринадики, динамик дастурлаш масаласи кўп босқичли танлаш масаласи бўлиб, унинг U* оптимал ечими бир нечта босқичларда топилган мумкин бўлган U_t бошқаришлар асосида танланади.

Геометрик нуқтаи назардан, динамик дастурлаш масаласини қуйидагича талқин қилиш мумкин:

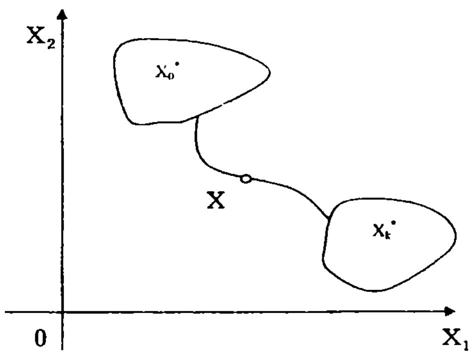
Умумий ҳолда системанинг бошланғич X_0 ҳолати ва охирги X_k ҳолати аниқ берилмайди, ҳамда бошланғич холатнинг бутун бир X_0^* соҳаси ва охирги холатларнинг X_k^* соҳаси кўрсатилади.

Умумий ҳолда динамик дастурлаш масаласи қуйидагича таърифланади:

Бирор бошқарилувчи X система бошланғич $X_0 \in X_0^*$ ҳолатда бўлсин. Вақт ўтиши билан системанинг ҳолати ўзгаради ва у $X_k \in X_k^*$ охирги ҳолатга ўтади, деб ҳисоблайлик. Система ҳолатларининг ўзгариши бирор миқдорий W-мезон (критерий) билан боғлиқ дейлик. Системанинг ўзгариш жараёнини шундай ташкил этиш керакки, бунда W-мезон ўзининг оптимал қийматига эришсин.

U-мумкин бўлган бошқарувлар тўплами бўлсин. У ҳолда, масала X системани $X_0 \in X_0^*$ ҳолатдан $X_k \in X_k^*$ ҳолатга ўтказишга имкон берувчи шундай $U^* \in U$ бошқарувни топишдан иборатки, бунда W(U) мезон ўзининг $W^* = W(U^*)$ оптимал қийматига эришсин.

Одатда системанинг X_0 ҳолатини сонли параметрлар билан, масалан ажратилган фондлар миқдори, жалб қилинган инвестициялар миқдори, сарфланган ёнилғи миқдори ва ҳ.к. билан ифодалаш мумкин. Бу параметрларни системанинг координаталари деб атаймиз. У ҳолда системанинг ҳолатини X нуқта билан ва унинг X_1 ҳолатдан X_2 ҳолатга ўтишини X нуқтанинг траекторияси билан ва унинг X_0 ҳолатдан X_k ҳолатга ўтишини X нуқтанинг траекторияси билан тасвирлаш мумкин.



11.1-шакл.

(11.7)-(11.8) масалани ечишдан аввал

$$G_T,\ G_{T-1,T},\ \dots,\ G_{1,2,\dots,T}=G$$

белгилашлар киритамиз. Бу ерда G_T – масаланинг охирги T босқичдаги аниқланиш соҳаси, $G_{T-1,T}$ – T ва T-1 босқичлардаги аниқланиш соҳа, $G_{1,2,...,T}=G$ – берилган масаланинг аниқланиш соҳаси.

Мақсад функциянинг охирги босқичдаги оптимал қийматини $f_1(x_{T-1})$ билан белгилаймиз:

$$f_1(X_{T-1}) = \max_{U_{T-1}\in G_T}(\min)[Z_T(X_{T-1},U_T)] \qquad (11.9)$$

$$f_2(X_{T-2}) = \max_{U_{T-1}\in G_{T-1}}(\min)[Z_{T-1}(X_{T-2},U_{T-1}) + f_1(X_{T-1})] \qquad (11.10)$$

Худди шунингдек, T-1 қадамдаги шартли оптимал қийматни $f_2(x_{T-2})$ билан белгилаймиз. У ҳолда

Худди шунингдек,

$$f_3(X_{T-3}) = \max_{\in G_T}(\min)[Z_{T-2}(X_{T-3},U_{T-2}) + f_2(X_{T-2})] \qquad (11.11)$$

$$f_k(X_{T-k}) = \max_{U_{T-k}\in G_{T-k}}(\min)\ [Z_{T-k+1}(X_{T-k},U_{T-k+1}) + f_{k-1}(X_{T-k+1})],(k=\overline{1,T-1})$$

$$f_T(X_0) = \max_{U_1\in G}(\min)[Z_1(X_0,U_1) + f_{T-1}(X_1)] \qquad (11.13)$$

Бу ерда (11.9)-(11.13) ифодалар оптималлик принципининг математик формадаги ёзилишидан иборат бўлиб, улар **«Беллманнинг функционал тенгламалари»** ёки **«динамик дастурлашнинг асосий функционал тенгламалари»** деб аталади.

Бу тенгламалар ёрдамида динамик дастурлашнинг T-1 босқичдаги ечимини сўнги T босқичдаги ечим орқали топилади. Шунинг учун юқоридаги муносабатлар Беллманнинг реккурент муносабатлари деб аталади.

4-§. Динамик дастурлаш усули

Динамик дастурлашнинг оптималлик принципига асосан ҳар бир қадамда топилган ечим фақат шу қадам нуқтаи назаридан эмас, балки сўнги, туб мақсад нуқтаи назаридан оптимал бўлиши керак эканлигини кўрган эдик. Динамик дастурлаш масалаларини ечиш усуллари учун ана шу принцип асос қилиб олинган.

Фараз қилайлик, биринчи қадамдаги бошқариш U_1 бўлсин. Бунинг таъсирида система X_0 ҳолатдан X_1 ҳолатга ўтади ва натижада $Z_1(X_0, U_1)$ ютуқ келтиради. Иккинчи қадамда U_2 бошқариш системани X_1 ҳолатдан X_2 ҳолатга ўткизади ва натижада $Z_2(X_1, U_2)$ фойда келтиради ва ҳоказо. K қадамда U_k бошқариш системани X_{k-1} ҳолатдан X_k ҳолатга кўчиради ва $Z_k(X_{k-1}, U_k)$ ютуғ келтиради.

Демак, системани X_0 ҳолатдан X_T ҳолатга кўчириш учун шундай $\bar{U}=(U_1, U_2,...\ U_T)$ бошқариш (стратегияни) танлаш керакки, ундаги $Z_T(X_0, \bar{U})$ ютуқ (зарар) максимал (минимал) бўлсин, яъни

$$f_T(X_0)=Z(X_0,\ \bar{U})\to\max(\min).$$

Агар $Z_T(X_0,\ \bar{U})$ ни

$$Z_T(X_0,\ \bar{U})=Z_1(X_0,\ U_1)+Z_2(X_1,\ U_2)+\ldots+Z_T(X_{T-1},\ U_T)$$

йиғинди кўринишида ифодаласак, динамик дастурлаш масаласи

$$f_T(X_0)=Z(X_0,\ \bar{U})=Z_1(X_0,\ U_1)+Z_2(X_1,\ U_2)+\ldots+Z_T(X_{T-1},\ U_T)$$

функцияга максимум (минимум) қиймат берувчи

$$\bar{U}=(U_1,\ U_2,\ldots,\ U_T)$$

бошқаришни топишга келтирилади.

Бундай бошқаришни топиш жараёни эса, қуйидагича амалга оширилади:

Энг аввал жараённи тескари йўналишда (X_{T-1} дан X_0 га томон) таҳлил қиламиз. Бунинг учун охирги Т босқич учун функционал тенглама

$$f_1(X_{T-1})=\max_{U_{T-1}\in G_T}(\min)[Z_T(X_{T-1},U_T)]$$

кўринишда бўлади.

Охирги Т босқичнинг бошида жараён $X_{T-1,1}$, $X_{T-1,2}$, ..., $X_{T-1,k}$ ҳолатларда бўлиши мумкин бўлсин деб фараз қиламиз. Соддалик учун фақат бутун сонли $X_{T-1,k}\in\bar{X}_{T-1}$ ҳолатларни кўрамиз.

Бу ҳолатларнинг ҳар бири учун Т босқичдаги шартли оптимал $U_{T,1}$, $U_{T,2},\ldots$, $U_{T,k}$ ечимлар ва уларга мос келувчи $Z_{T,1}$, $Z_{T,2},\ldots$, $Z_{T,k}$ даромад (чиқим)лар топилади. $U_{T,1}$, $U_{T,2},\ldots$, $U_{T,k}$ ечимлар орасида $f_1(X_{T-1})$ функцияга максимум (минимум) қиймат берувчи ва оптимал U^* стратегиянинг таркибига кирувчи U^*_T ечим топилади. Лекин бу ечим масалани ечиш жараёнининг иккинчи босқичида, яъни жараён тўғри йўналишда (X_0 дан X_{T-1} га томон) текширилганда топилади.

Шундай қилиб, охирги қадам оптималлаштирилади, яъни бу қадамнинг бошида система қандай бўлишидан қатъий назар қабул қилинадиган ечим аниқланади.

Сўнгра Т-1 босқичга ўтилади. Бу қадам учун функционал тенглама

$$f_2(X_{T-2})=\max_{U_{T-1}\in G_{T-1,T}}(\min)[Z_{T-1}(X_{T-2},U_{T-1})+f_1(X_{T-1})]$$

тузилади.

Бу босқичда ҳам, худди юқоридагидек ҳар бир мумкин бўлган $X_{T-2,k}\in\bar{X}_{T-2}$ ҳолат учун мумкин бўлган $U_{T-1,k}\in G_{T-1}$ ечим ва унга мос келувчи $Z_{T-1,k}$ даромад (чиқим) топилади. Сўнгра $Z_{T-1,k}+f_1$ йиғиндиларни ўзаро солиштириб, ҳар бир $X_{T-2,k}$ ҳолатга мос келувчи йиғинди ва унга мос келувчи шартли оптимал ечим $u_{T-1,k}$ топилади. Бу ечимлар орасида $f_2(X_{T-2})$ функцияга экстремал қиймат берувчи ва оптимал U^* стратегиянинг таркибига кирувчи U^*_{T-1} топилади.

Шундай йўл билан давом этиб, жараённинг биринчи босқичига ўтилади. Бу қадамда жараён фақат битта аниқ ҳолатда бўлиши мумкин. Шунинг учун бу босқичда олдинги босқичларда топилган барча шартли оптимал ечимларни назарга олувчи ва X_0 ҳолатга мос келувчи оптимал ечим топилади.

Шундай қилиб, ҳамма мумкин бўлган ҳолатлар учун биринкетин f_1, f_2,..., f_{T-1}, f_T функцияларнинг қийматлари ва турли босқич ва ҳолатларга тегишли ечимлар, шу жумладан U^* оптимал стратегиянинг таркибига кирувчи оптимал U^*_T, U^*_{T-1},..., U^*_1 ечимлар топилади. Бу ечимлар асосида тузилган U^* стратегия $f_T(X_0)$ функцияга экстремал қиймат беради. Оптимал

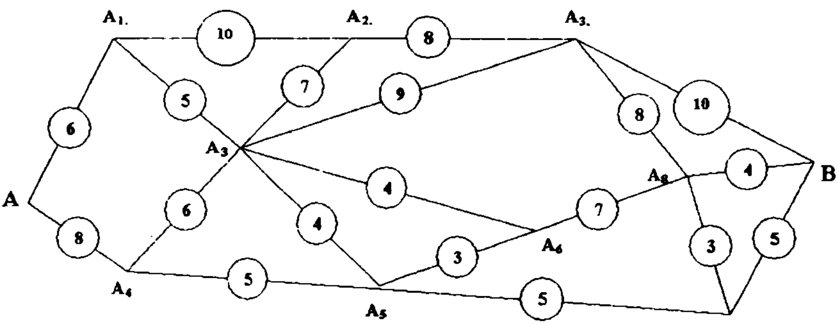
$$U^*=(U^*_1, U^*_2,..., U^*_{T-1}, U^*_T)$$

стратегияни аниқлаш учун жараённи тўғри йўналишда (X_0 дан X_{T-1} га томон) яни бир бор текшириб чиқиш керак. Бунда, энг аввал аниқ бошланғич X_0 ҳолатдан ва топилган $f_T(X_0)$ функциянинг қийматидан фойдаланиб, U^*_1 топилади. Сўнгра U^*_1ва $f_{T-1}(X_1)$ функциянинг қиймати орқали U^*_2 топилади ва ҳоказо. Энг охирида U^*_{T-1} ва $f_{T-}(X_1)$ орқали U^*_T топилади.

Динамик дастурлаш масаласини ечиш жараёнини қуйидаги мисолда яққол кўрсатиш мумкин.

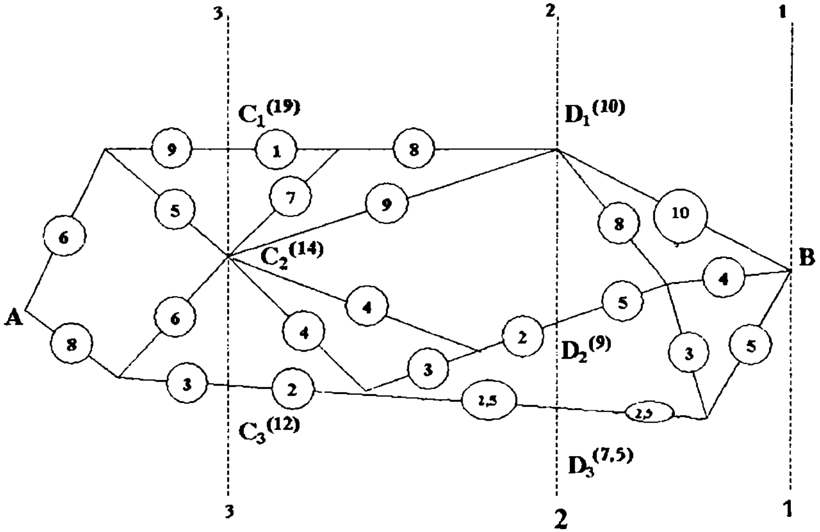
1. Энг қисқа йўлни танлаш масаласи.

Фараз қилайлик, А ва В пунктларни ўзаро боғловчи темир йўллар тўри берилган бўлсин (2-шакл). Бу пунктлар орасида темир йўл билан боғланган жуда кўп пунктлар мавжуд бўлиши мумкин. Бунда ҳар қандай икки пункт орасидаги масофа маълум деб фараз қиламиз. Масалан, бу масофанинг узунлиги 2-шаклдаги ҳар икки нуқтани туташтирувчи кесма устига ёзилган сонлардан иборат бўлсин. А ва В пунктларни энг қисқа йўл билан туташтирувчи маршрутни аниқлаш масаласи қўйилади.



11.2-шакл

Масалани ечиш учун (1-1), (2-2), (3-3) чизиқлар ёрдамида берилган темир йўллар тўрини айрим қисмларга (босқичларга) ажратамиз(11.3-шакл).



11.3-шакл.

(2-2) чизиқнинг транспорт йўллари тўри билан кесишган нуқталарини D_1, D_2, D_3 лар билан, (3.3) чизиқнинг кесишган нуқталарини эса C_1, C_2, C_3 лар билан белгилаймиз. Биринчи қадамда B нуқтадан D_1, D_2, ва D_3 нуқталаргача бўлган энг қисқа масофани аниқлаймиз.

$B-D_1$: min (10, 8+4, 5+3+8)=10,

B–bD_2: min (10+8+5, 4+5, 5+3+5)=9,

B–bD_3: min (5+2,5, 4+3+2,5)=7,5.

11.3-шаклда D_1, D_2, D_3 нуқталардан сўнгги B пунктгача бўлган энг қисқа масофа қавс ичида ёзилган. Сўнгра (3-3) чизиқнинг транспорт йўллари тўри билан кесишган C_1, C_2, C_3 нуқталарни кўрамиз. Бу нуқталардан B нуқтагача бўлган энг қисқа масофани аниқлаймиз. Бу масофа

C_1 нуқта учун min (1+8+10, 1+7+4+2+9, 1+7+2+3+2+9,
1+7+2+2,5+7,5)=
=min(19,23,24,20)=19

C_2 нуқта учун min(7+8+10, 9+10, 4+2+9, 2+3+2+9, 4+2,5+7,5)=
=min(25, 19, 15, 16, 14)=14

C_3 нуқта учун min(2+2,5+7,5, 2+3+2+9)=12

Бу масофалар шаклда қавс ичида ёзилган. 3 босқичда A нуқтадан B гача бўлган энг қисқа масофа топилади. Бу масофа қуйидагича аниқланади:

min(6+9+19, 6+5+14, 8+6+14, 8+3+12)=23

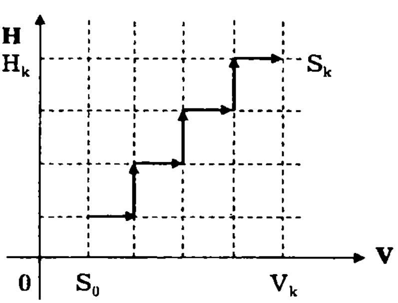
Сўнгра А нуқтадан энг қисқа масофа бўйлаб В нуқтага борадиган йўлни белгилаймиз.

$$A \to C_3 \to D_3 \to B.$$

2. Самолётнинг учиш баландлиги ва тезлигини оширишда сарф қиладиган ёқилғи миқдорини минималлаштириш масаласи.

Самолёт дастлаб H_0 баландликда V_0 тезлик билан учаётган бўлсин. Унинг учиш баландлигини H_k ва тезлигини V_k гача кўтариш керак бўлсин. Демак, самолётнинг учиш баландлигини H_0 дан H_k гача, тезлигини эса V_0 дан V_k гача оширишда сарф қиладиган ёқилғи миқдорини минималлаштириш масаласини ҳал қилиш талаб этилади. Бунда аниқ бир тезлик билан учаётган самолётнинг H_1 баландликдан $H_2 > H_1$ баландликкача кўтарилиши учун ҳамда аниқ бир баландликда учаётган самолётнинг тезлигини V_1 дан $V_2 > V_1$ гача кўтариш учун сарф қилинадиган ёқилғи миқдорлари маълум деб қаралади. Ушбу масала динамик дастурлаш масаласи сифатида қуйидагича тавсифланади: Самолётнинг учиш баландлиги ва тезлиги кўрсаткичлари тўпламини шундай бошқариш керакки, натижада сарф қилинган ёқилғи миқдори минимал бўлсин.

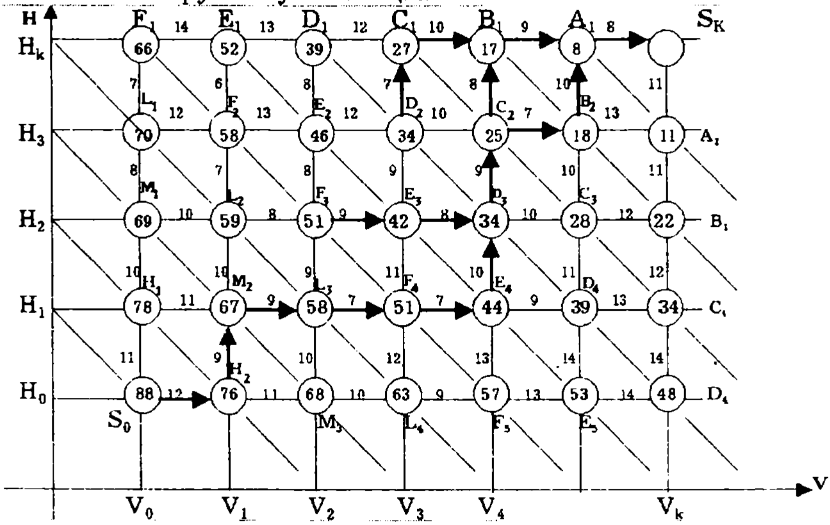
Ечими. Самолётнинг фазодаги ҳолати иккита параметр – тезлик (V) ва баландлик (H) билан аниқланади. Шунинг учун ечимни VOH текисликда қидирамиз. Аниқроғи, шу текисликдаги $H=H_0$, $H=H_k$ ва $V=V_0$, $V=V_k$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакка қараймиз. Самолётни S_0 (V_0 , H_0) ҳолатдан S_k (V_k , H_k) ҳолатга, энг кам харажат қилиб, ўтказиш масаласи қўйилади. Бу масалани динамик дастурлаш усуллари билан ечиш учун (H_k-H_0) кесмани n_1 та тенг кесмачаларга, (V_k-V_0) кесмани эса n_2 та тенг кесмачаларга бўламиз, ҳамда ҳар бир қадамда самолёт ё баландлигини ($\Delta H = (H_k - H_0)/n_1$ бирликка), ёки тезлигини ($\Delta V = (V_k - V_0)/n_2$ бирликка) оширади, деб қабул қиламиз. S нуқтани S_0 ҳолатдан S_k ҳолатга турли йўллар билан ўтказиш мумкин (~~8~~ 11.4-шакл). Бу йўллар ичида энг кам ёқилғи миқдорига мос келувчисини танлаш керак.



11.4. – шакл.

Масалани ечиш жараёнини қуйидаги мисолда кўрсатамиз:

Мисол. Масаладаги аниқ маълумотлар қуйидаги 4-шаклда тасвирланган. Самолётнинг H_k баландликка кўтарилиши ва тезлигини V_k гача оширишда сарф қилинадиган ёқилғи миқдорини минималлаштирувчи йўлни аниқланг.



11.5 -шакл.

Ушбу шаклдаги вертикал чизиқлардаги сонлар самолёт баландлигини оширгандаги, горизонтал чизиқлардаги сонлар эса у тезлигини оширгандаги сарф қиладиган ёқилғи миқдорини кўрсатади.

Масалани ечиш жараёнини $n_1 + n_2 = 4+6=10$ қадамларга бўламиз.

Оптималлаштириш жараёнини энг охирги қадамдан бошлаймиз. Бунда S_k ни ўз ичига олувчи ўнг томондаги энг юқори тўртбурчакка қараймиз. Шаклдан кўринадики, S_k нуқтага A_1 ва A_2 нуқталардан ўтиш мумкин. Агар A_1 дан S_k га ўтилса (тезлик оширилса), у ҳолда 8 бирлик ёқилғи сарф қилинади. Агар A_2 нуқтадан S_k га ўтилса (баландлик оширилса), у ҳолда 11 бирлик ёқилғи сарф қилинади. Ушбу рақамларни A_1 ва A_2 нуқталар қошидаги айланачаларга ёзамиз. Бу қадамда энг кам ёқилғи сарфига мос келувчи $A_1 \to S_k$ йўналиш шартли оптимал ечим деб қабул қилинади ва стрелка билан белгиланади.

9 қадамда B_1, B_2, B_3 нуқталардан S_k нуқтага энг кам ёқилғи сарф қилиб ўтиш йўлини аниқлаймиз. Агар B_1 нуқтадан S_k га $B_1 \to A_1 \to S_k$ йўналиши орқали ўтиб 17 бирлик ёқилғи сарф қилиш мумкин. B_2 нуқтадан S_k га иккита йўл билан ўтиш мумкин:

I. $B_2 \to A_1 \to S_k$

II. $B_2 \to A_2 \to S_k$

Бунда I йўлда 18 бирлик, II йўлда эса 24 бирлик ёқилғи сарф қилинади. B_3 нуктадан S_k га ягона $B_3 \to A_2 \to S_k$ йўл билан ўтиш ва 22 бирлик B_1, B_2, B_3 нуқталар қошидаги айланачаларга улардан S_k нуқтагача сарф қилинадиган харажатлардан энг ками ёзилади. Энг кам харажат билан боғлиқ бўлган $B_1 \to A_1 \to S_k$ йўналиш шартли оптимал йўналиши сифатида стрелка билан белгиланади.

8- қадамда C_1, C_2, C_3, C_4 нуқталардан S_k нуқтагача энг кам харажат сарф қилиб ўтиладиган йўл қидирилади. Бунда C_1 нуқтадан S_k га ягона

$$C_1 \to B_1 \to A_1 \to S_k$$

йўналиш орқали ўтиб, 27 бирлик ёқилғи сарфлаш мумкин.

C_2 нуқтадан B_1 ва B_2 нуқталар орқали S_k нуқтага ўтилганда тенг миқдордаги (25 бирлик) ёқилғи сарф қилинади.

C_3 нуқтадан S_k га иккита йўл билан ўтиш мумкин:

I. $C_3 \to B_2 \to A_1 \to S_k$

II. $C_3 \to B_3 \to A_2 \to S_k$

Бунда I йўл билан ўтилганда 28 бирлик ва II йўл билан ўтилганда эса 24 бирлик ёқилғи сарф қилинади.

C_4 нуқтадан S_k нуқтага ягона

$$C_4 \to B_3 \to A_2 \to S_k$$

йўл билан ўтилади ва 34 бирлик ёқилғи сарф қилинади.

Бу босқичда шартли оптимал бошқариш энг кам ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган $C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$ ва $C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$ йўналишлардан иборат бўлади. Бу йўналишлар стрелка билан кўрсатилади.

Шундай йўл билан давом этиб, 7 қадамда 34 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган 3 та шартли оптимал йўналиш аниқланади:

а) $D_2 \to C_1 \to B_1 \to A_1 \to S_k$

б) $D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$

в) $D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$

6- қадамда 42 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган 2 та шартли оптимал йўналишлар аниқланади:

а) $E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$

б) $E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$

5- қадамда 51 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган шартли оптимал йўналишлар қуйидагилар бўлади:

I. $F_3 \to E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

II. $F_3 \to E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

III. $F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

IV. $F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$

4- қадамда 58 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган шартли оптимал йўналиш топилади:

$L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_4 \to C_3 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

3- қадамда 67 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган

$M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

$M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

шартли оптимал йўналишлар аниқланади.

2- қадамда 76 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган

$H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

$H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

шартли оптимал йўналишлар аниқланади.

Ва ниҳоят 1- қадамда 88 бирлик ёқилғи сарфи билан боғлиқ бўлган

$S_0 \to H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

$S_0 \to H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

шартли оптимал йўналишлар аниқланади.

Бу йўналишлар оптимал йўналиш бўлади.

Сптимал ечимга, асосан, самолғт 1- қадамда тезлигини $V_0 + \Delta V$ даражагача оширади, 2- қадамда у баландлигини $H_0 + \Delta H$ гача оширади. 3, 4, 5- қадамларда самолётнинг тезлиги мос равишда $V_0 + 2\Delta V$ $V_0 + 3\Delta V$ $V_0 + 4\Delta V$ га ошиши, 6, 7, 8- қадамларда эса унинг баландлиги мос равишда $H_0 + 2\Delta H$, $H_0 + 3\Delta H$, $H_0 + 4\Delta H$ даражагача ошиши керак.

9 ва 10 қадамларда самолёт тезлигини мос равишда $V_0 + 5\Delta V$ ва $V_0 + 6\Delta V$ даражагача ошиши керак. Натижада у энг кам, яъни 88 бирлик ёқилғи сарф қилади.

5-§. Инвестицияни оптимал тақсимлаш масаласини динамик дастурлаш усули билан ечиш

Инвестор X_0 миқдордаги капитал маблағни n (i=1,2,...,n) та корхонани ўз ичига олувчи бирлашмага сарф қилаётган бўлсин. Бу маблағ бирлашмадаги п та корхонага тақсимланади. Агар i-корхонага x_i миқдорда капитал маблағ ажратилса, у $Z_i(x_i)$ миқдорда даромадга эга бўлади.

Бирлашманинг умумий даромади корхоналар даромадлари йиғиндисидан иборат бўлади.

$$Z=Z_1(x_1)+Z_2(x_2)+....+Z_n(x_n) \qquad (11.14)$$

Инвестицияни оптимал тақсимлаш масаласининг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади.

$$x_1+x_2+....+x_n=X_0 \qquad (11.15)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1,...,n) \qquad (11.16)$$

$$Z=Z_1(x_1)+Z_2(x_2)+....+Z_n(x_n) \to \max. \qquad (11.17)$$

Бу ердаги (11.15)-шарт бирлашмага ажратилган X_0 капитал маблағ тўла тақсимланиши кераклигини; (11.16)–шарт масаланинг шартига кўра номаълумлар номанфий бўлишлигини ва (11.17)–мақсад функция бирлашманинг умумий даромади максимал бўлишлигини кўрсатади.

Берилган (11.15)-(11.17) масалада ажратилган капитал маблағ X_0 га ва корхоналар сони n га тенг. Бу масалани ечишни кўп босқичли жараён деб қараймиз. Ҳар бир босқичда ажратилган капитал маблағ нолдан X_0 гача, корхоналар сони эса, нолдан n гача ўзгарувчан миқдорлар деб қаралади. Масалан, биринчи босқичда $0\leq x\leq X_0$ маблағ фақат битта корхонага, иккинчи босқичда 2 та корхонага ва ҳоказо, n- босқичда n та корхонага тақсимланади деб қаралади. Шундай қилиб, капитал маблағни тақсимлашнинг статик масаласи динамик дастурлаш масаласига айланади.

Бундай динамик дастурлаш масаласини ечиш учун $F_1(x)$, $F_2(x)$,..., $F_n(x)$ функциялар кетма-кетлигини киритамиз. Бу ерда:

$F_1(x)$ – $0\leq x\leq X_0$ миқдордаги маблағни фақат 1та корхонага тақсимлаганда олинадиган максимал даромад, $F_2(x)$ – $0\leq x\leq X_0$ миқдордаги маблағни 2 та корхонага тақсимлашдан олинадиган максимал даромад ва ҳоказо, $F_n(x)$ – $0\leq x\leq X_0$ миқдордаги маблағни n та корхонага тақсимлашдан олинадиган даромад.

Маълумки, $F_n(x_0)=Z_{max}$ бўлади. Қуйидаги икки ҳолда $F_i(x)$ функциялар осонгина топилади:

1) $F_i(0)=0, \quad i=1,...,n$

2) $F_1(x)=Z_1(x), \quad 0\leq x\leq X_0$

Демак, агар капитал маблағ тақсимланмаса, у ҳолда даромад ҳам нолга тенг бўлади. Агар капитал маблағ битта корхонага тақсимланса, бирлашманинг даромади ана шу битта корхона даромадидан иборат бўлади (капитал маблағ ажратилмаган корхоналар даромад келтирмайди деб фараз қилинади).

Энди $0\leq x\leq X_0$ миқдордаги капитал маблағ 2 та корхона орасида тақсимланган ҳолни кўрамиз. Агар x_2–иккинчи корхонага ажратилган маблағ бўлса, у ҳолда қолган $x-x_2$ миқдордаги маблағ биринчи корхонага ажратилади. Бу икки корхонадан олинадиган умумий даромад қуйидаги функционал тенглама ёрдамида топилади

$$F_2(x)=\max_{\substack{0\leq x_2\leq x\\ 0\leq x\leq X_0}}[Z_2(x_2)+F_1(x-x_2)]$$

Фараз қилайлик, $0\leq x\leq X_0$ миқдордаги маблағ k та корхона орасида тақсимланган бўлсин. Агар k-корхонага x_k миқдорда маблағ ажратилган бўлса, ундан олинган даромад $Z_k(x_k)$ га тенг бўлади. Қолган $x-x_k$ маблағ k-1 та корхоналар орасида тақсимланади ва ундан олинадиган даромад $F_{k-1}(x-x_k)$ га тенг бўлади. Бу ҳолда олинадиган умумий даромад

$$F_k(x) = \max_{\substack{0\le x_k\le x \\ 0\le x\le X_0}} [Z_k(x_k) + F_{k-1}(x - x_k)]$$

функционал тенглама ёрдамида топилади. Дастлаб берилган масаланинг ечимини $X=X_0$ ва $k=n$ бўлган ҳолда қуйидаги

$$F_n(X) = \max_{0\le x_n\le X} [Z_n(X_N)+F_{n-1}(X_0 \quad X_N)]$$

функционал тенгламадан фойдаланиб топамиз.

Инвестицияни тақсимлаш масаласини динамик дастурлаш усули билан ечиш жараёни билан танишамиз.

Энг аввал $0\le X\le X_0$ оралиқ n та тенг интервалларга (қадамлар) бўлинади. ҳар бир қадамнинг узунлиги Δ га тенг деб қабул қилинади. Бундан ташқари $Z_i(X)$ ва $F_i(X)$ функциялар фақат шу нуқталарда, яъни, $X=0$, Δ, 2Δ, $n\Delta=X_0$ да аниқланган деб қабул қилинади

$i=1$ да $F_i(X)$ қуйидаги тенглик ёрдамида аниқланади $F_1(X)=Z_1(X)$, $F_1(k\Delta)=Z_1(k\Delta)$, $k=0,...,n$ тенгликнинг қийматлари жадвалга жойлаштирилади. $F_1(k\Delta)$ нинг қийматидан фойдаланиб $F_2(k\Delta)$ ҳисобланади:

$$F_2(X_0)=\max_{k=0,n}[Z_2(k\Delta)+F_1(X_0-k\Delta)]$$

Ҳисоблаш жараёнида $F_2(X)$, $(X=k\Delta,\ k=0,...,n)$ нинг қийматидан ташқари

$Z_2(k\Delta)+F_1(X_0\text{-}k\Delta)$ фойдани максималлаштирувчи x_2 нинг қиймати ҳам топилади. Сўнгра $F_3(X)$ топилади ва ҳоказо, ҳамма босқичлардаги $F_i(x)$ ларни ҳисоблашни бажариб

$$F_n(X_0) = \max_{0\le X_n\le X} [Z_n(X_n)+F_{n-1}(X_0 - X_n)]$$

тенглик ёрдамида $F_n(X_0)=\max Z$ топилади.

Шундай қилиб, охирги босқичда мақсад функциянинг максимал қиймати $F_n(X_0)$ ҳамда n-корхона учун ажратиладиган инвестиция миқдори, яъни X_n^* топилади.

Сўнгра ҳисоблаш жараёни тескари тартибда бажарилади. Бунда охирги қадамдан биринчи қадамгача бир марта қараб чиқилади:

n-корхонага ажратиладиган X_n^* капитал маблағни билган ҳолда қолган n-1 корхоналар орасида тақсимланадиган $X_0-X_n^*$ топилади. Сўнгра олдин топилган

$$F_{n-1}(x) = \max_{\substack{0\le x_{n-1}\le x \\ 0\le x\le}} [Z_{n-1}(x_{n-1}) + F_{n-2}(x - x_{n-1})]$$

дан $F_{n-1}(X_0-x_n^*)$ ни, ва демак, x^*_{n-1}ни топамиз, ва ҳоказо. Шундай йўл билан давом этиб охирида x_1^* ни топамиз.

Шу билан чегараланган инвестиция бирлашманинг n та корхоналари орасида оптимал тақсимланган бўлади.

1-мисол. Инвестор 200 бирлик капитал маблағни бирлашмадаги 4та корхонага сарф қилмоқчи бўлсин. ҳар бир корхона ўзига ажратилган маблағнинг миқдорига боғлиқ равишда турли миқдордаги даромадга эришади. Бу даромадлар қуйидаги 1-жадвалга жойлаштирилган.

1-жадвал

Корхоналарга ажратилган маблағлар миқдори	Корхоналар даромади			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
200	90	85	92	66

Инвестицияни корхоналараро оптимал тақсимлаш режасини тузинг.

Ечими. Масалани 4та босқичга бўлиб ечамиз. Дастлаб n=1, яъни капитал маблағ фақат битта корхонага берилган ҳолни кўрамиз. Бунда

$$F_1(x)=Z_1(x)$$

бўлади. $0\leq x\leq 200=X_0$ оралиқдаги ҳар бир $x_{1k}=k\Delta$ лар учун $F_1(x_{1k})$ қийматларни 2-жадвалга жойлаштирамиз.

2-жадвал

x_{1k}	$F_1(x_{1k})$
0	0
40	15
80	28
120	60
160	75
200	90

Энди n=2 бўлган ҳолни, яъни X_0=200 бирлик капитал маблағни 2 та корхонага тақсимланган ҳолни кўрамиз.

Бу ҳолда олинадиган даромад

$$F_2(x)=\max_{\substack{0\leq x_2\leq x\\ 0\leq x\leq X_0}}[Z_2(x_2)+F_1(x-x_2)]$$

функционал тенглама орқали топилади. Бу функциянинг қийматлари қуйидагича топилади.

$0 \le x \le 200 = X_0$ ораликдаги ҳар бир x учун $0 \le x_2 \le X_0$ топилади ва унга тегишли бўлган

$$Z_2(x_2)+F_1(x-x_2)$$

ҳисобланади. Сўнгра

$$F_2(x) = \max_x [Z_2(x_2) + F_2(x - x_2)]$$

топилади.

Масалан, x=0 да $x_2=0$ бўлади;

x =40 да $x_2=0$; 40 бўлади;

$$\left.\begin{array}{ll} x_2 = 0, & Z_2(0) + F_1(40) = 15 \\ x_2 = 40, & Z_2(40) + F_1(0) = 14 + 0 \end{array}\right\} \quad F_2(x = 40) = 15$$

$$x = 80 \text{да} \quad x_2 = 0; 40; 80$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_2 = 0, & Z_2(0) + F_1(80) = 0 + 28 \\ x_2 = 40, & Z_2(40) + F_1(40) = 14 + 15 \\ x_2 = 80, & Z_2(80) + F_1(0) = 30 + 0 \end{array}\right\} \quad F_2(x = 80) = 30$$

Ва ҳоказо, шундай йўл билан X=120, 160 ва 200 га тенг бўлган ҳоллар учун $F_2(x=120)$, $F_2(x=160)$, $F_2(x=200)$ ларни топамиз. $F_2(x)$ функцияни ҳисоблаш жараёнини қуйидаги 3-жадвалда кўрсатамиз.

3-жадвал

x_2 / x	0	40	80	120	160	200	$F_2(x)$	x_2^*
0	0						0	0
40	0+15	14+0					15	0
80	0+28	14+15	30+0				30	80
120	0+60	14+28	30+15	55+0			60	0
160	0+75	14+60	30+28	55+15	73+0		75	0
200	0+90	14+75	30+60	55+28	73+15	85+0	90	0

3 босқичда n=3 бўлган ҳолни, яъни X_0=200 капитал маблағ 3та корхона ўртасида бўлинган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда эришиладиган даромадни ҳар бир $0 \le x_3 \le x$, $0 \le x \le X_0$ =200 учун қуйидаги функционал тенглама орқали ҳисоблаш керак

$$F_3(x) = \max_{\substack{0 \le x_3 \le x \\ 0 \le x \le 200}} [Z_3(x_3) + F_2(x - x_3)]$$

Бу функцияни ҳисоблаш жараёнини қуйидаги 4-жадвалда кўрсатамиз.

4-жадвал

x_3 / x	0	40	80	120	160	200	$F_3(x)$	x_3^*
0	0						0	0
40	0+15	17+0					17	40
80	0+30	17+15	33+0				33	80
120	0+60	17+30	33+15	58+0			60	0
160	0+74	17+60	33+30	58+15	73+0		77	40
200	0+90	17+74	33+60	58+30	73+15	92+0	93	80

4 босқичда n=4 бўлган ҳолни, яъни X_0=200 капитал маблағ 4та корхонага бўлинган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда эришиладиган даромад

$$F_4(x) = \max_{\substack{0 \le x_4 \le x \\ 0 \le x \le 200}} [Z_4(x_4) + F_3(x - x_4)]$$

функционал тенглама орқали топилади. Бу функцияни ҳисоблаш жараёни 5-жадвалда кўрсатилган.

5-жадвал

x_4 / x	0	40	80	120	160	200	$F_4(x)$	x_4^*
0	0						0	0
40	0+17	13+0					17	0
80	0+33	13+17	35+0				35	80
120	0+60	13+33	35+17	57+0			60	0
160	0+77	13+60	35+33	57+17	76+0		77	0
200	0+93	13+77	35+60	57+33	76+17	60+0	95	80

1-5 жадваллардаги $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_4(x)$ ларни ва уларга мос равишда x_1^*, x_2^*, x_3^* ва x_4^* векторларни қуйидаги 6-жадвалга жойлаштирамиз.

6-жадвал

x_i^* / x	x_1^*	$F_1(x)$	x_2^*	$F_2(x)$	x_3^*	$F_3(x)$	x_4^*	$F_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	40	15	0	15	40	17	0	17
80	80	28	80	30	80	33	80	35
120	120	60	0	60	0	60	0	60
160	160	75	0	75	40	77	0	77
200	200	90	0	90	80	93	80	95

Бу жадвалдан капитал маблағни оптимал тақсимлаш режасини топамиз. 200 бирлик маблағни 4 та корхонага тақсимлаш натижасида бирлашма 95 бирлик даромад олади.

$$\max_{i=1,4} F_i(x = 200) = \max(90,90,93,95) = 95$$

Бунда тўртинчи корхонага 80 бирлик маблағ берилади ва ортиб қолган 120 бирлик маблағ қолган 3 та корхонага тақсимланади. Бундан бирлашма

$$\max_{i=1,3} F_i(x=220)=\max(60,60,60)=60$$

бирлик даромад олади. Бунда учинчи корхонага маблағ берилмайди ($x_3^*=0$). Демак 120 бирлик маблағ биринчи ва иккинчи корхоналарга тақсимланади. Лекин иккинчи корхонага ҳам маблағ берилмайди ($x_2^*=0$). Шундай қилиб қолган 120 бирлик маблағ биринчи корхонага берилади. Бундан бирлашма 60 бирлик даромад олади

$$x_1=120,\ F_1(x)=60$$

Шундай қилиб капитал маблағлар тақсимлашнинг оптимал режасини топдик:

$$\mathbf{X^*=(x_1^*,\ x_2\ ,\ x_3^*,\ x_4^*)=(120;\ 0;\ 0;\ 80)}$$

Бу режага мос келувчи умумий даромад 95 бирликни ташкил қилади. Бунда 4 корхона 35 бирлик биринчи корхона эса 60 бирлик даромад келтиради

Таянч сўз ва иборалар

Динамик дастурлаш, кўп босқичли жараён, бошқариш, бошқарилувчи жараён, стратегия, оптимал стратегия, оптималлик принципи, шартли бошқариш, Беллманнинг функционал тенгламалари.

Назорат саволлари

1. Динамик дастурлашнинг предмети нимадан иборат?
2. Динамик дастурлашнинг чизиқли дастурлашдан қандай фарқи бор?
3. Динамик дастурлашнинг қандай хусусиятларини биласиз?
4. Динамик дастурлашнинг оптималлик принципи нимадан иборат?
5. Саноат бирлашмасини оптимал режалаштириш масаласининг динамик модели қандай?
6. Маҳсулот ишлаб чиқариш ва уни сақлашни оптималлаштириш масаласининг динамик модели қандай?
7. Динамик дастурлаш масаласи умумий ҳолда қандай қўйилади?
8. Динамик дастурлаш масаласининг геометрик талқини қандай?
9. Беллманнинг функционал тенгламалари қандай?
10. Динамик дастурлаш усулининг ғояси қандай?

11.Инвестицияларни оптимал тақсимлаш масаласининг математик модели қандай?

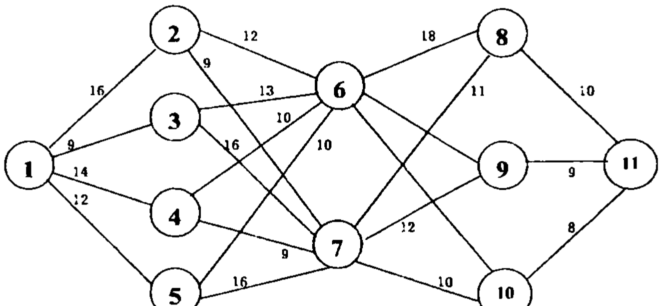
12.Инвестицияларни оптимал тақсимлаш масаласини қандай йўл билан кўп босқичли динамик дастурлаш масаласига айлантириш мумкин?

Масалалар

1. Берилган масалани динамик дастурлаш масаласи сифатида ифодаланг.

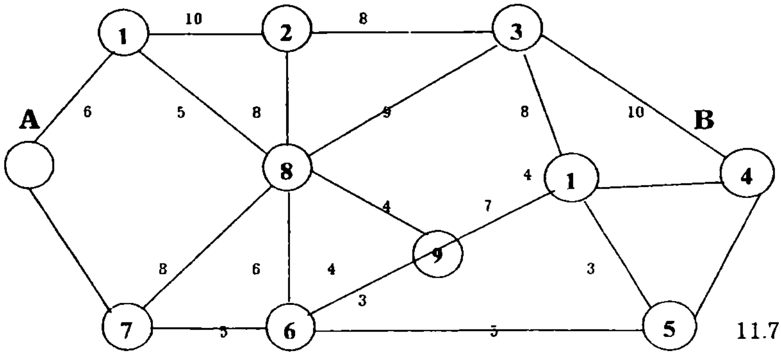
Бирлашма m та корхонани ўз ичига олади. Бу корхоналарни техник жиҳатдан таъмирлаш мақсадида марказлаштирилган жамғарма ташкил этилган. Бу жамғармага биринчи йили А минг сўм маблағ ажратилган. Кейинги йилларда эса, бу жамғарма корхоналар даромадидан ажратилган маблағлар ҳисобига тўлдириб борилади. Ушбу жамғармадан i-корхонага ажратилган x_i маблағ унга $f_i(x_i)$ миқдорда қўшимча даромад келтиради. n йил ичида корхоналарнинг топган қўшимча даромадлари максимал бўлиши учун жамғармадаги маблағ қандай тақсимланиши керак?

2. А ва В пунктлар ўзаро бир неча йўллар ёрдамида боғланган. Йўлнинг ҳар бир бўлагида бир бирлик маҳсулотни ташиш учун сарф қилинадиган транспорт ҳаражатлари маълум ва улар қуйидаги шаклда кўрсатилган. Маҳсулотни А пунктдан В пунктга оптимал ташиш маршрутини аниқланг.



11.6-шакл.

3. А ва В пунктлар ўзаро бир неча йўллар билан боғланган бўлсин. Йўлнинг ҳар бир бўлагида бир бирлик маҳсулотни ташиш учун сарф қилинадиган транспорт ҳаражатлари маълум ва улар қуйидаги шаклда кўрсатилган. Маҳсулотни оптимал ташиш маршрутини аниқланг.

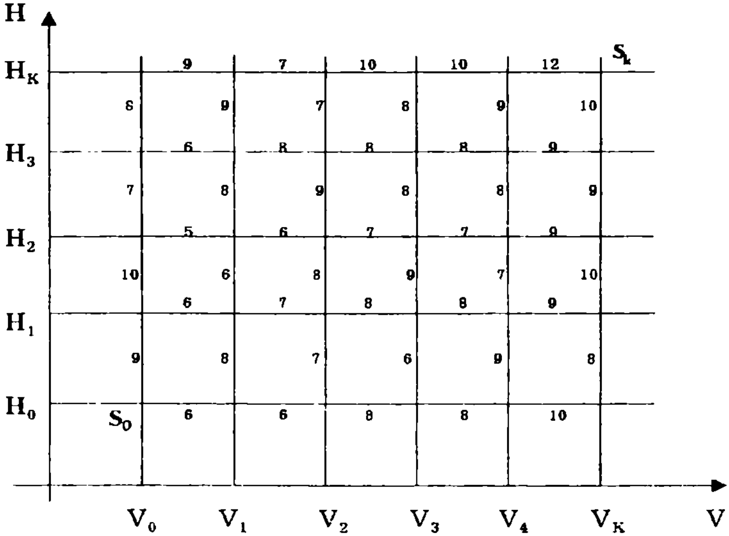


11.7-шакл.

4. 120 минг сўмлик инвестицияни 4 та корхона ўртасида тақсимлаш режасини топинг. Корхоналардаги ишлаб чиқариладиган маҳсулотнинг ҳажми ажратилган маблағга боғлиқ равишда ўзгариши қуйидаги жадвалда келтирилган.

Инвестиция миқдори	Корхоналарда маҳсулот ҳажми ўсиши			
	I	II	III	IV
20	9	11	13	12
40	17	33	29	35
60	28	45	38	40
80	38	51	49	54
100	46	68	61	73
120	68	80	81	92

5. Самолётнинг тезлиги ва баландлигини бошқариш масаласини қуйидаги шаклда тасвирланган маълумотлар асосида ечинг ва сарф қилинадиган энг кам ёқилғи миқдорини аниқланг.



11.8- шакл.

6. 5- § да келтирилган масалани $X_0 = 120$ ва $n=4$ бўлиб, x_l ва $F(x_l)$ лар қуйидаги жадвалда келтирилган қийматларни қабул қилган ҳол учун ечинг.

Корхоналарга берилган капитал маблағлар	Даромадлар (Корхоналар даромади)			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	12
30	17	11	13	35
60	28	33	29	40
90	38	45	38	54
120	50	55	46	60

XII БОБ. ЎЙИНЛАР НАЗАРИЯСИ

Чизиқли, чизиқсиз ва динамик дастурлаш масалаларида ечимлар қабул қилиш маълумотларнинг тўлалигини назарда тутган ҳолда амалга оширилади. Бошқача айтганда, масаладаги номаълум параметрларни топиш учун зарур бўлган дастлабки маълумотлар аниқ бўлади. Бу масалаларда ечимлар қабул қилиш аниқлик шароитида амалга оширилади.

Иқтисодий амалиётдаги кўп масалаларда ноаниқликда ечим қабул қилиш зарурияти туғилади. Ноаниқликда ечим қабул қилиш икки хил ҳолатда амалга оширилиши мумкин:

1. Ечим қабул қилувчи шахс (ЕҚҚШ) об-ҳавога, инфляция даражасига, бозордаги нарх-навога, давлатдаги сиёсий ҳолатга ва бошқа «табиат» ҳолатларига қараб ечим қабул қилади. Бу ерда «табиат» деганда ечим қабул қилиш учун зарур бўлган ташқи ҳолатлар мажмуасини тушунамиз. ЕҚҚШнинг «табиат»ни турли ҳолатига қараб ечим қабул қилиш жараёнини ўйин деб қараш мумкин. Бундай ўйин, яъни рақобат мавжуд бўлмагандаги ечимлар қабул қилиш назарияси «табиатга қарши ўйин» деб аталади. Бу ўйинда «табиат» ечим қабул қилувчи шахс учун рақиб ролини бажарса ҳам, у онгли рақиб бўла олмайди, у ўз ютуғига бефарқ бўлади ва ўз рақиби хатоларидан фойдаланиш нияти ҳам бўлмайди.

2. Ечимлар қабул қилиш рақобат мавжуд бўлган вазиятда амалга оширилади. Бу ҳолда икки ёки ундан кўпроқ қатнашувчилар ўзаро рақобатда бўлиб, уларнинг ҳар бири рақибидан иложи борича кўпроқ ютуқ олишга ҳаракат қилади. Улардан ҳар бирининг эришган натижалари қолган томонларнинг ўз мақсадига эришиш йўлидаги ҳаракатига боғлиқ бўлади. Бундай иқтисодий жараёнлар «рақобатли» деб аталади.

Шахмат, шашка, домино ва бошқа ўйинлар рақобатли жараёнларни ифодаловчи ўйинлар ҳисобланади. Бундай ўйиндаги ҳар бир юришда бир ўйновчининг ютуғи иккинчисининг юришига боғлиқ бўлади. Ўйиннинг мақсади ўновчиларнинг биттасини ютишидан иборат.

Иқтисодиётдаги рақобатли ҳолатларга таъминотчи ва истеъмолчилар, сотувчилар ва харидорлар, банклар ва мижозлар ораларидаги муносабатлар мисол бўла олади. Бу муносабатлардаги рақобатли ҳолатлар томонларнинг интилишлари зидлигидан келиб чиқади. Рақобатли ҳолатларда ечим қабул қилувчи шахс фақат ўз мақсадини кўзлашдан ташқари рақибининг мақсадини назарга олиши ҳамда унинг қабул қилиши мумкин бўлган ечимини олдиндан кўра билиши керак. Шундай қилиб, рақобатли ҳолатлардаги масалаларни ечиш учун илмий асосланган усуллар талаб қилинади.

Рақобатли ҳолатларнинг математик назарияси **«Ўйинлар назарияси»** деб аталади.

1- §. Ўйинлар назариясининг асосий тушунчалари

Математиканинг рақобатли ҳолатларини, яъни қанташувчиларнинг манфаатлари қарама-қарши ёки бир-бирига мос келмайдиган ҳолатларни ўрганувчи бўлими – **«ўйинлар назарияси»** деб аталади. Ўйинлар назарияси – рақобатли ҳолатда қатнашаётган ҳар бир ўйинчига энг катта ютуққа (ёки энг кичик ютқазишга) эришиш учун қилинадиган ҳаракатларнинг энг яхшисини (оптималини) аниқлаш учун йўлланма беришга имкон берувчи математик назариядир.

Кўпгина иқтисодий жараёнларга ҳам ўйинлар назарияси нуқтаи-назаридан қараш мумкин. Масалан, ўйин иштирокчилари – бир хил турдаги маҳсулот ишлаб чиқарувчи корхоналар, таъминотчилар ва истеъмолчилар бўлиб, ўйининг ютуғи – ишлаб чиқариш фондларининг самарадорлиги, даромад маблағлари, маҳсулотнинг баҳоси ёки таннархи бўлиши мумкин.

Ўйинлар назарияси нисбатан ёш фанлар қаторига киради. Унинг пайдо бўлиши Нейман ва Моргенштернларнинг 1944 йил нашр этилган «Иқтисодий жараёнлар ва ўйинлар назарияси» монографияси билан боғлиқ. Кейинчалик ўйинлар назарияси амалий татбиқларга эга бўлган мустақил йўналиш сифатида ривожланди.

Шуни таъқидлаш лозимки, ўйинлар назариясининг усуллари ва хулосалари кўп марта такрорланадиган рақобатли ҳолатларга нисбатан ишлатилади.

Амалда, рақобатли ҳолатларни математик усуллар ёрдамида тадқиқ этишда, муҳим бўлмаган фактларни ташлаб юбориб, ҳолатларнинг содда модели тузилади.

Ўйин- рақобатли ҳолатларни ифодаловчи моделдан иборат бўлиб, унинг ҳақиқий рақобатдан фарқи шундан иборатки, у маълум бир қоида асосида амалга оширилади.

Ҳар бир ўйновчининг маълум мақсадга эришиш ниятида бажариши мумкин бўлган ҳаракатлари **ўйиннинг қоидалари** деб аталади.

Ўйиннинг натижаларини миқдорий баҳолаш **тўлов** деб аталади. Ўйиннинг моҳияти шундан иборатки, унда ҳар бир ўйновчи ўзига энг яхши натижа берувчи ечимни танлашга ҳаракат қилади.

Ўйинда иккита ёки ундан кўп иштирокчиларнинг манфаатлари тўқнашиши мумкин. Шунга муофиқ, у **икки ўйновчили** ва **кўп ўйновчили** бўлиши мумкин.

Агар ўйинда фақат иккита ўйновчи қатнашса, бундай ўйин **«жуфтли ўйин»** деб аталади.

Агар жуфтли ўйинда бир ўйновчининг ютуғи иккинчи ўйновчининг ютқазувига тенг бўлса, бундай ўйин **«0- суммали ўйин»** деб аталади. 0- суммали ўйинда ўйинчиларнинг умумий капитали ўзгармайди, фақат ўйин давомида қайта тақсимланади ва шу сабабли ютуқлар йиғиндиси нолга тенг бўлади, яъни

$$V_1+V_2+...+V_n=0$$

бу ерда v_j – j-ўйновчининг ютуғи.

Нол суммали бўлмаган ўйинда ўйновчилар ютуқлари йиғиндиси нолдан фарқли бўлади. Масалан, лоторея ўйинида, ўйновчилар қўйган бадалнинг бир қисми лоторея ташкилотчиларига берилади. Шунинг учун

$$V_1+V_2+...+V_n<0$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Биз бу ерда амалий аҳамияти катта бўлган ўйинлар – жуфт ўйинларни қараш билан чекланамиз. Ўйин иштирокчиларини А ва В орқали белгилаймиз.

Ўйин жараёнида рўй бериши мумкин ҳар қандай ҳолатга мувофиқ равишда ўйновчининг қўллаши мумкин бўлган қоидалар бирлашмаси **«стратегия»** деб аталади. Стратегиянинг сонига қараб, ўйинлар **чекли** ёки **чексиз** ўйинларга бўлинади. **Оптимал стратегия** деб, тайин бир ўйновчига, ўйин бир неча марта такрорланганда энг катта мумкин бўлган ўртача ютуқни таъминловчи стратегияга айтилади.

Ҳар қандай 0- суммали жуфтли ўйинни ютуқлар матрицаси деб аталувчи

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ...a_{2n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ...a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрица орқали аниқлаш мумкин. Бу матрицанинг ҳар бир a_{ij} элементи А ўйновчи матрицанинг i қаторига мос келувчи A_i юришни В ўйновчи j- устунга мос келувчи B_j юришни танлагандаги А ўйновчининг ютуғини билдиради.

Компоненталари

$$x_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

шартларни қаноатлантирувчи $X=(x_1,x_2,...,x_m)$ вектор-қатор А ўйновчининг **«аралаш стратегияси»** дейилади.

Худди шунингдек, компоненталари

$$y_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

шартларни қаноатлантирувчи $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$, вектор-устун В ўйновчининг **«аралаш стратегияси»** дейилади. Бунда x_i ва y_j лар мос равишда А ўйновчи ўзининг A_i юришини ва В ўйновчи B_j юришини танлаш эҳтимолларини билдиради.

Агар $X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ аралаш стратегияда i- компонента 1 га тенг бўлиб, қолганлари 0 га тенг бўлса, у ҳолда бундай аралаш стратегия А ўйновчининг «i- соф стратегияси» деб аталади.

Масалан, (1,0,0), (0,1.0), (0,0,1) стратегиялар соф стратегиялардир.

Худди шунингдек, j- компонентаси 1 га тенг бўлиб, қолган компоненталари 0 га тенг бўлган Y аралаш стратегия В ўйновчининг «j- соф стратегияси» деб аталади.

Демак, А ўйновчининг ютуқлар матрицасининг i- қаторига мос келувчи A_i юриши унинг i- соф стратегиясидан иборат бўлади. Худди шунингдек, В ўйновчининг ютуқлар матрицасининг j- устунига мос келувчи B_j юриши унинг j- соф стратегиясидан иборат бўлади.

2-§. Матрицали ўйининг ечими

Ютуқлар матрицаси

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлган матрицали ўйинни кўрайлик. Агар А ўйновчи i- соф стратегияни танласа, у камида

$$\min_j a_{ij}$$

ютуққа эга бўлади. А ўйновчи ўзининг ютуғини максимал қилишга ҳаракат қилади. Демак, у шундай i- соф стратегияни танлаши керакки, натижада унинг ютуғи максимал бўлсин, яъни А ўйновчи

$$\max \min_j (a_{ij})$$

натижани берувчи соф стратегияни танлайди. Ушбу катталикни α билан белгилаймиз.

$$\alpha=\max \min_j (a_{ij})$$

бу ерда α А ўйновчининг ишончли ютуғидан иборат бўлиб, у **«ўйиннинг қуйи баҳоси»** деб аталади. В ўйновчи, ўз навбатида, ўзининг энг катта мумкин бўлган ютқазувини минималлаштиришга ҳаракат қилади. Шунинг учун

$$\beta=\min_j \max_i (a_{ij})$$

ютқазувни берувчи j- соф стратегияни танлайди. Бу ерда β- В ўйновчининг ишончли минимал ютқазувидан иборат бўлиб, у

««ўйиннинг юқори баҳоси» деб аталади. β ютқазувга эришишга имкон берувчи B_{j_0} юриш (j_0 − соф стратегия) «минимакс»деб аталади.

1- теорема. Ҳар қандай матрицали ўйинда ўйиннинг α қуйи баҳоси унинг β юқори баҳосидан ошмайди, яъни

$$\alpha \leq \beta .$$

Исботи. Таърифга асосан

$$\alpha_i = \min a_{ij} \leq a_{ij}$$

ҳамда

$$\beta_j = \max_j a_{ij} \geq a_{ij}$$

Бу муносабатларни бирлаштирсак

$$\alpha_i = \min a_{ij} \leq a_{ij} \leq \max_j a_{ij} = \beta_j$$

муносабатга эга бўламиз. Бундан

$$\alpha_i \leq \beta_j$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенглик i ва j индексларнинг ихтиёрий комбинациялари учун, шу жумладан

$$\max \alpha_i = \alpha$$

ва

$$\min_j \beta_j = \beta$$

шартларни қаноатлантирувчи i ва j лар учун ҳам ўринлидир. Демак,

$$\alpha \leq \beta$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шу билан теорема исбот қилинди

Агар матрицали ўйиннинг қуйи ва юқори баҳолари ўзаро тенг бўлса, яъни

$$\alpha = \beta$$

шарт бажарилса, у ҳолда ушбу ўйин **эгар нуқтага** ҳамда

$$V = \alpha = \max \min_j a_{ij} = \min_j \max a_{ij} = \beta$$

шартни қаноатлантирувчи **баҳога** эга дейилади.

Бу ҳолда А матрицанинг

$$V = \alpha = \beta$$

шартни қаноатлантирувчи (A_{i_0}, B_{j_0}) жуфтликка мос келувчи $a_{i_0 j_0}$ элементи **эгар нуқта** деб аталади. Бу элемент j_0 устунда максимал ва i_0 қаторда минимал бўлади, яъни:

$$a_{ij_0} \le a_{i_0j_0} \le a_{i_0j}.$$

Агар В ўйновчи ўзининг минимакс стратегиясидан воз кечса, унинг ютқазуви ошади. Худди шунингдек, агар А ўйновчи ўзининг максимин стратегиясидан воз кечса, унинг ютуғи камаяди. Демак, эгар нуқталарга ўйиннинг A_{i_0}, B_{j_0} оптимал стратегиялари мос келади. Ҳамда $\{A_{i_0}, B_{j_0}, V\}$ тўплам ўйиннинг ечими дейилади.

1- мисол. Қуйидаги тўлов матрицалари билан берилган ўйинлар учун ўйиннинг қуйи ва юқори баҳоларини топинг:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

Ечиш. A_1 матрица қаторлари учун a_{ij} элементларнинг энг кичиклари мос равишда 2;3;1 га тенг. Уларнинг ичидаги максимали эса 3 га тенг. Демак, A_1 матрицанинг қуйи баҳоси $\alpha_1 = 3$.

Ўйиннинг юқори баҳосини топиш учун A_1 -матрица устунлари бўйича максимал элементларни топамиз. Булар мос равишда: 4;5;6;5. Энди булар ичидан минималини, яъни $\beta_1 = 4$ ни топамиз. Демак, A_1 -матрица учун $\alpha_1 = 3$; $\beta_1 = 4$.

A_2 -матрица учун эса, $\alpha_2 = \max\{0;\ 2;\ -1\} = 2;$

$$\beta_2 = \min\{3;\ 2;\ 4;\ 5\} = 2.$$

Шундай қилиб, бу ҳолда $V=\alpha_2=\beta_2=2$ – ўйиннинг баҳосидир. Демак, бу ўйновда А ўйновчининг ютуғи 2 дан кам эмас ва В ўйновчининг ютқазиши 2 дан ошмайди.

Агар матрицали ўйин эгар нуқтага эга бўлса, у ҳолда бу ўйиннинг ечимини топиш учун эгар нуқтага мос келувчи A_{i_0}, B_{j_0} оптимал стратегияларни ҳамда

$$V = \alpha = \beta$$

шартни қаноатлантирувчи баҳони топиш керак.

Демак, агар матрицали ўйин эгар нуқтага эга бўлса, у ҳолда А ва **В** ўйновчиларнинг максимин ва минимакс стратегиялари оптимал стратегия бўлади ҳамда ютуқлар матрицасининг эгар нуқтаси ўйиннинг баҳосини беради.

Агар матрицали ўйин эгар нуқтага эга бўлмаса, у ҳолда унинг ечими аралаш стратегияларда топилади.

Агар *А* ўйновчи $X=(x_1,x_2,...,x_m)$ аралаш стратегияни қўллаб, *В* ўйновчи $Y=(y_1,y_2,...,y_n)'$ аралаш стратегияни қўлласа, у ҳолда *А* ўйновчи ўзининг A_i соф стратегиясини x_i эҳтимол билан, *В* ўйновчи эса, ўзининг B_j соф стратегиясини y_j эҳтимол билан танлайди. Бу ҳолда (A_i, B_j) жуфтликни танлаш эҳтимоли $x_i \ y_j$ га тенг бўлади. Аралаш стратегиялар қўлланганда ўйин тасодифий характерга эга бўлади. Шунинг учун ўйиннинг ютуғи ҳам тасодифий миқдор бўлади. Демак, бу ҳолда ютуғларнинг ўртача миқдори, яъни унинг математик кутилиши ҳақида гапириш мумкин.

$A=(a_{ij})_{(m \times n)}$ матрицали ўйиннинг ютуғлар функцияси ёки A ўйновчи ютуғининг математик кутилиши деб

$$f(X,Y) = M(X,Y) = XAY = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j \qquad (12.1)$$

формула орқали аниқланувчи функцияга айтилади, бу ерда $X=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ A ўйновчининг ва $Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)'$ B ўйновчининг ихтиёрий аралаш стратегиялари.

2- мисол.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицали ўйинда $X=(x_1,x_2,x_3)$ ва $Y=(y_1,y_2,y_3)'$ мос равишда A ва B ўйновчиларнинг аралаш стратегиялари. Бу ўйин учун ютуғлар функциясини топамиз.

$$f(X,Y) = M(X,Y) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_3)y_1 + (x_3 - x_1)y_2 + (x_1 - x_2)y_3.$$

Агар $X=(0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}5)$ ва $Y=(0{,}3;\ 0{,}3;\ 0{,}4)'$ бўлса, $M(X,Y)=-0{,}03$ бўлади.

Дейлик, $X^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)$ A ўйновчининг аралаш стратегияси,
$Y^0=(y_1^0,y_2^0,\dots,y_n^0)'$ B ўйновчининг аралаш стратегияси бўлсин. У ҳолда қуйидаги теорема ўринли бўлади.

2- теорема. $X^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)$ ва $Y^0=(y_1^0,y_2^0,\dots,y_n^0)'$ аралаш стратегиялар жуфти ва V ҳақиқий сон матрицали ўйиннинг ечими бўлиши учун $j=1,2,\dots,n$ соф стратегияларда

$$M(X^0,j)\geq V \qquad (12.2)$$

бўлиб, $i=1,2,\dots,m$ соф стратегияларда

$$M(i,Y^0)\leq V \qquad (12.3)$$

тенгсизлик ўринли бўлиши зарур ва етарлидир. Теорема шартларини қаноатлантирувчи X^0, Y^0 аралаш стратегиялар оптимал стратегия, V ҳақиқий сон эса, ўйиннинг баҳоси деб аталади.

Демак, $\{A_{i_0}, B_{j_0}, V\}$ тўпламни матрицали ўйиннинг ечими эканлигини текшириш учун (12.2) ва (12.3) тенгсизликларнинг бажарилишини текшириш лозим.

3- мисол.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

матрицали ўйиннинг ечимини аралаш стратегияларда топинг.

Ечиш. A ўйновчининг аралаш стратегияси $X=(x_1,x_2)$ вектор қатордан ва B ўйновчининг аралаш стратегияси $Y=(y_1,y_2)'$ вектор устундан иборат бўлсин.

(12.2) тенгсизликнинг бажарилишини текширамиз:

$$(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}(j)\geq V$$

Бундан

$$\left.\begin{array}{l} x_1-x_2\geq V,\\ -x_1+x_2\geq V,\\ x_1+x_2=1\\ x_1\geq 0,\ \ x_2\geq 0.\end{array}\right\}$$

системани ҳосил қиламиз. Бундан

$$X=(1/2;\ 1/2),\qquad V=0$$

эканлигини аниқлаймиз.

Энди (12.3) тенгсизликнинг бажарилишини текширамиз:

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}(i)\leq V$$

ҳамда

$$\left.\begin{array}{l} y_1-y_2\leq V,\\ -y_1+y_2\leq -V,\\ y_1+y_2=1\\ y_1\geq 0,\ \ y_2\geq 0.\end{array}\right\}$$

системани ҳосил қиламиз. Бундан қуйидагини топамиз:

$$Y=(1/2;\ 1/2)'\qquad V=0.$$

Демак, бу ўйинда $X=(1/2;\ 1/2)$ ва $Y=(1/2;\ 1/2)'$ векторлар оптимал стратегиялар бўлиб, ўйиннинг баҳоси $V=0$ бўлади.

Энг содда матрицали ўйинда ютуқлар матрицаси

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

бўлиб, матрица эгар нуқтага эга бўлмаса, $X=(x_1,x_2)$ ва $Y=(y_1,y_2)$ аралаш стратегияларни ва V – ўйиннинг баҳосини топиш учун

$$
{}_1=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}; \qquad x_2=\frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}};
$$

$$
y_1=\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}; \qquad y_2=\frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}};
$$

$$
V=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}.
$$

формулалардан фойдаланилади.

3-§. Матрицали ўйинни чизиқли дастурлаш масаласига келтириш

m×n – ўлчовли матрица билан берилган қуйидаги ўйинни қараймиз:

7

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}
$$

Матрица эгар нуқтага эга эмас, деб ҳисоблайлик ва шунинг учун ўйиннинг ечимини $X=(x_1,x_2,\dots,x_m)$, $Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)'$ – аралаш стратегиялар шаклида излаймиз. A – ўйновчининг оптимал стратегиясида юқоридаги (12.2) муносабат ва B ўйновчининг оптимал стратегиясида (12.3) муносабат бажарилади. Шунинг учун, (A-ўйновчининг) қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи оптимал стратегиясини топиш масаласини қўйиш мумкин.

$$
\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\dots+a_{m1}x_m \ge V \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{m2}x_m \ge V, \\ ----------------- \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\dots+a_{mn}x_m \ge V, \\ x_1+x_2+\dots+x_m=1. \end{cases} \qquad (12.4)
$$

$$
x_i \ge 0 \qquad (i=1,m).
$$

Ўйиннинг баҳоси бўлган V-катталик номаълум, лекин доим V>0 деб ҳисоблаш мумкин. Бунга, агар A матрица элементларига бир хил мусбат сон қўшиш шарти билан эришиш мумкин. (12.4) системани ҳамма чекламаларини V га бўлиб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз.

$$
\begin{cases} a_{11}t_1+a_{21}t_2+\dots+a_{m1}t_m \ge 1, \\ a_{12}t_1+a_{22}t_2+\dots+a_{m2}t_m \ge 1, \\ ----------------- \\ a_{1n}t_1+a_{2n}t_2+\dots+a_{mn}t_m \ge 1, \\ t_1+t_2+\dots+t_m=1/V \end{cases} \qquad (12.5)
$$

$$
t_i \ge 0 \qquad (i=\overline{1,m}).
$$

Бунда $t_1 = x_1/V$, $t_2 = x_2/V, \ldots, t_m = x_m/V$.

$x_1 + x_2 + \quad + x_m = 1$ шартдан $t_1 + t_2 + \quad + t_m = 1/V$ тенглик келиб чиқади.

А ўйновчи учун ўйиннинг ечими V нинг қийматини максималлаштириш керак. Демак, $Z=t_1 + t_2 + \quad + t_m$ функция минимал қийматга эришиши керак. Шундай қилиб, қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласи ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1, \\ -------------, \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1, \end{cases} \qquad (12.6)$$

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \ldots, t_m \geq 0, \qquad (12.7)$$

$$Z = t_1 + t_2 + \ldots + t_m \to \min. \qquad (12.8)$$

Бу масалани ечиб, t_i қийматлар ва $1/V$ катталик топилади, ҳамда ундан фойдаланиб $x_i=Vt_i$ қийматлар топилади.

В ўйновчининг оптимал стратегиясини топиш учун қуйидаги шартларни ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq V, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \leq V, \\ -------------, \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \leq V, \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1, \end{cases} \qquad (12.9)$$

$$y_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,n}).$$

ёки тенгсизликларни V га бўлиб,

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \leq 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \leq 1, \\ -------------, \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n \leq 1, \\ u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1/V, \end{cases} \qquad (12.10)$$

$$u_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,n})$$

системани ҳосил қиламиз. Бунда $u_j = y_j/V$

u_1, u_2,..., u_n – номаълумни шундай қийматларини топиш керакки, улар учун (12.10) шарт бажарилиб

$$W = u_1 + u_2, + ..., + u_n = 1/V$$

функция максимум қийматга эришсин. Шундай қилиб, B ўйновчи учун матрицали ўйин қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласига айланади:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1n}u_n \le 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{2n}u_n \le 1, \\ \text{-----------------}, \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mn}u_n \le 1, \end{cases}$$

$$u_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,n})$$

$$W = u_1 + u_2 + ... + u_n \to \max.$$

Шундай қилиб, матрицали ўйиннинг ечимини топиш симметрик қўшма чизиқли дастурлаш масалаларига келтирилади. Бу қўшма масалалардан бирини ечиб, иккинчисининг ечимини ундан фойдаланиб ҳосил қилиш мумкин.

1- мисол. Матрица билан берилган қуйидаги ўйиннинг ечимини топинг.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ечиш. A ўйновчининг оптимал стратегиясини топиш учун қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 \ge 1, \\ 3t_1 + 4t_2 + 5t_3 \ge 1, \\ 4t_1 + 6t_2 + t_3 \ge 1, \\ 2t_1 + 5t_2 + 3t_3 \ge 1, \end{cases}$$

$$t_1 \ge 0, t_2 \ge 0, t_3 \ge 0,$$

$$Z = t_1 + t_2 + t_3 \to \min.$$

B ўйновчининг оптимал стратегиясини топишнинг иккиланган масаласи қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} 4u_1+3u_2+4u_3+2u_4 \le 1, \\ 3u_1+4u_2+6u_3+5u_4 \le 1, \\ 2u_1+5u_2+u_3+3u_4 \le 1, \end{cases}$$

$$u_i \ge 0, \qquad (i=\overline{1,4})$$

$$W=u_1+u_2+u_3+u_4 \to \max$$

Бу иккиланган масаларнинг ечими U=(3/14; 0; 0; 1/14), W_{max}=1/V=2/7 бўлади. Демак, V=7/2, ҳамда y_j=Vu_j тенгликдан В ўйновчининг оптимал стратегияси Y=(3/4;0;0;1/4)′ топилади. А ўйновчи учун масаланинг ечими T=(1/7;1/7;0) , V=7/2 бўлади. Бу ҳолда А ўйновчининг оптимал стратегияси X=(1/2;1/2;0) бўлиб, унинг ютуғи V=7/2 бўлади.

4-§. Табиатга қарши ўйин. Оптималлик мезонлари

Энди ҳеч қандай эҳтимолий тавсифлари маълум бўлмаган шароитда ечимлар қабул қилиш услуби билан танишамиз. Бундай шароитда ечимлар қабул қилиш (ЕҚҚ) учун минимакс-максимин, Вальд, Лаплас, Сэвиж ва Гурвиц мезонлари ишлатилади.

Кўп ҳолларда ўйинда ечим қабул қилувчи шахс (ЕҚҚШ) деб аталувчи бир ўйновчи (ёки бир мақсад йўлида бирлашувчи ўйновчилар гуруҳи) ва «табиат» қатнашади. Бундай ЕҚҚШни А ўйновчилар деб, «табиат»ни эса Т ўйновчи деб белгилаймиз. Бунда «табиат» А ўйновчининг фаолиятини, яъни ечимлар қабул қилиш учун керак бўлган ташқи шароитлар мажмуасини аниқлайди. «Табиат» А ўйновчига онгли равишда қаршилик қилмайди. Улар орасида ўзаро рақобатли вазият ҳам мавжуд эмас. Лекин «табиат» ўзининг $T_1,T_2,...,T_n$ ҳолатларидан ихтиёрий бирини, амалга ошириши мумкин. А ўйновчига «табиат»нинг қайси ҳолати амалга ошишини билмаган ҳолда, яъни ноаниқликда ечим қабул қилишга тўғри келади. «Табиат» ўзининг ютуғига бефарқ, унинг ҳаракатларида А ўйновчига нисбатан ёвуз ниятлари ҳам йўқ.

А ўйновчининг ҳар бир A_i $(i=1,...,m)$ йўли ва «табиат» (Т)нинг мумкин бўлган ҳолати T_j $(j=1,...,n)$ учун $a(A_i,T_j)$ натижа мос келади. Бу натижа ютуқ ёки ютқазув бўлиши мумкин. Умумий ҳолда $a(A_i,T_j)$ A_i ва B_j параметрларнинг узлуксиз функциясидан иборат бўлади. Агар А ўйновчи «табиат»нинг ихтиёрий T_j юришида ўзининг соф стратегияси натижаларини баҳолай билса, у ҳолда $//a(A_i,T_j)//$ матрица $//a_{ij}//_{mxn}$ матрицага айланади. Бу матрицани соддалаштиришда фақат А ўйновчининг A_i стратегиялар сонини камайтириш мумкин, лекин «табиат»нинг бирорта T_j ҳолатини ташлаб юбориш мумкин эмаслигини назарда тутиш керак. Чунки А ўйновчига боғлиқ бўлмаган ҳолда «табиат» ўзининг ихтиёрий ҳолатини амалга ошириши мумкин. Юзаки қараганда, онгли рақибнинг йўқлиги А ўйновчининг ечимлар қабул қилишини енгиллаштиргандай бўлади. Аслида эса А ўйновчи учун ўз стратегиясини асослаш билан боғлиқ бўлган қийинчиликни ҳал қилишга тўғри келади. Онгли рақиб билан бўлган ўйинда рақиб учун ҳам «фикр юритиш» мумкин. «Табиат»нинг ҳолатларини эса олдиндан кўриш мумкин эмас. Шунинг учун А ўйновчига ўзининг ҳар бир юришини ҳар томонлама асослашга тўғри келади.

А ўйновчининг стратегиясини танлаб, уни асослашда кўпинча тўловлар матрицаси ўрнига **«таваккалчилик» матрицаси** деб аталувчи матрицага ўтишга тўғри келади. Чунки тўловлар матрицасидан фойдаланиб у ёки бу стратегиянинг фойдалилигини аниқлашда айрим тушунмовчиликларга йўл қўйиш мумкин. Масалан, агар «табиат» T_j ҳолатда бўлиб, А ўйновчи A_i стратегияни танласин ва ўйиннинг ютуғи $a_{ij}(A_i,T_j)$ га тенг бўлсин ҳамда бу ютуқ $a_{kl}(A_k,T_l)$ дан катта бўлсин деб фараз қиламиз, яъни

$$a_{ij}(A_i,T_j) \geq a_{kl}(A_k,T_l), \qquad (12.11)$$

бу ерда $a_{kl}(A_k,T_l)$ – А ўйновчи A_k стратегияни, «табиат»нинг T_l ҳолатига қарши танлангандаги ўйинининг ютуғи.

Лекин бу тенгсизлик (A_i,T_j) жуфтга мос келган ютуқ (A_k,T_l) жуфтга мос келган ютуқдан катта эканлигини кўрсатса ҳам, бундан A_i стратегия A_k стратегиядан яхшироқ деган хулоса келиб чиқмайди, чунки A_i стратегия A_k дан яхшироқ бўлмаса ҳам А ўйновчи учун «табиат»нинг T_j ҳолати унинг T_l ҳолатига нисбатан «фойдалироқ» бўлганда ҳам юқоридаги тенгсизлик ўринли бўлиши мумкин.

«Таваккалчилик» матрицасининг элементлари қуйидагича аниқланади:

$$r_{ij} = \begin{cases} \max\limits_i a_{ij} - {}_{ij} = \beta_j - a_{ij}, & {}_{ij} - \textit{даромад}, \\ a_{ii} - \min a_{ij} = a_{ij} - \alpha_j, & {}_{ij} - \textit{зарар (юткасув)}, \end{cases} \qquad (12.12)$$

бу ерда β_j (α_j)- «табиат»нинг T_j ҳолатидаги ЕҚҚШнинг максимал ютуғи (максимал ютқазуви), r_{ij} ЕҚҚШ нинг «табиат»нинг T_j ҳолатига тўла чора кўрмагани оқибатида таваккалчиликдан кўрган зарарини ёки унинг «афсусланишини» баҳоловчи сонни билдиради.

Бу ўйинда табиат ва ечим қабул қилувчи шахс (ЕҚҚШ) қатнашади. Табиатнинг T_1, T_2, T_n ҳолатлари мавжуд бўлиб, уларга қарши ЕҚҚШ да m та A_1, A_2, ..., A_m тадбирлар мавжуд. Табиатга қарши ўйинни қуйидаги матрица кўринишида ифодалаш мумкин:

T_j / A_i	T_1	T_2		T_n
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
A_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

Бу ерда a_{ij} - табиатнинг T_j ҳолатида ЕҚҚШ A_i тадбирни амалга оширгандаги унинг кўрадиган фойдаси ёки зарарини кўрсатади. Агар a_{ij} – фойда (ютуқ) бўлса, бу матрица **«ютуқлар матрицаси»** дейилади. a_{ij} – ютқазув (зарар) бўлгандаги матрица **«тўловлар матрицаси»** дейилади.

Бу матрица асосида ЕҚҚШ ўзининг фойдасини (зарарини) максималлаштирувчи (минималлаштирувчи) йўлни (соф стратегияни) танлайди.

Бундай стратегияни танлаш учун минимакс, Вальд, Лаплас, Сэвиджж ва Гурвиц мезонларидан фойдаланиш мумкин. Ана шу мезонлар билан танишамиз.

Лаплас мезони. Бу мезонда табиатнинг барча T_1, T_2, ..., T_n ҳолатлари тенг эҳтимол билан рўй беради деган фикр асос қилиб олинган. Табиатнинг T_1, T_2, ..., T_n ҳолатлари $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$ эҳтимол билан рўй берсин. У ҳолда агар ЕҚҚШ A_1 йўлни танласа, унинг ютуғи,

$$Q_1 = \frac{1}{n}a_{11} + \frac{1}{n}a_{12} + \ldots + \frac{1}{n}a_{1n},$$

ёки

$$Q_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}$$

бўлади. Агар ЕҚҚШ A_2 йўлни танласа, унинг ютуғи,

$$Q_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{2j}$$

бўлади ва ҳоказо. Агар ЕҚҚШ A_m йўлни танласа, унинг ютуғи,

$$Q_m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{mj}$$

бўлади. ЕҚҚШ максимум ютуғ берувчи йўлни, яъни

$$\max\left[\frac{1}{n}\sum_j a_{1j}, \frac{1}{n}\sum_j a_{2j}, \ldots, \frac{1}{n}\sum_j a_{mj}\right] = \max\frac{1}{n}\sum_j a_{ij},$$

йўлни танлайди.

1- мисол. Қуйидаги матрица кўринишида берилган табиатга қарши ўйинни ечинг.

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+\ldots+a_{in}p_n$
A_1	7	11	14	24	$\frac{1}{4}(7+11+14+24)=14$
A_2	20	16	14	22	$\frac{1}{4}(20+16+14+22)=18$
A_3	9	8	10	23	$\frac{1}{4}(9+8+10+23)=12.5$
A_4	18	26	18	14	$\frac{1}{4}(18+26+18+14)=19$
p_j	1/4	1/4	1/4	1/4	$\max\limits_i \frac{1}{4}(a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in})=19$

Ечиш. ЕҚҚШ нинг ҳар бир стратегиясига мос келувчи $a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+\ldots+a_{in}p_n$ сумманинг қиймати жадвалнинг охирги устунида келтирилган Лаплас мезонига кўра ЕҚҚШ A_4 соф стратегияни танласа, унинг ютуғи энг кўп (19 га тенг) бўлади.

Байес мезони. Агар вазиятнинг тўла ноаниқликдан ва унда ҳеч қандай эҳтимолий тасвифлар мавжуд эмаслик шартидан бироз четга чиқиб «табиат»нинг ҳолатларини $p_1,p_2,\ldots,p_n$ эҳтимолий сонлар орқали ифодалаш мумкин деб фараз қилсак, у ҳолда ечим танлашда Байес мезонидан фойдаланиш мумкин. Лаплас мезони Байес мезонининг хусусий ҳоли ҳисобланади. Байес мезонини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_j \qquad \text{агар } a_{ij} - \text{ЕККШ нинг ютуги булса,} \qquad (12.13)$$

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_j \qquad \text{агар } a_{ij} - \text{ЕККШ нинг ютказуви булса,} \qquad (12.14)$$

Агар $p_1=p_2=\ldots=p_n=1/n$ бўлса, Байес мезони Лаплас мезонига айланади.

1- мисол. Фараз қилайлик, маҳсулот очиқ ҳавода сақлансин. Табиатнинг 4 та ҳолати T_j (j=1,2,3,4) бўлиши мумкин (ёмғир ёғади –

эҳтимоли p_1=0,1, ҳаво очиқ бўлади – эҳтимоли p_3=0,5 ва эҳтимоллари $p_2=p_4$ бўлган иккита ўртача ҳолат). А ўйновчи учта A_1,A_2,A_3 стратегияларни танлаши (масалан, маҳсулотларни турлича баҳолаши ва натижада турлича даромад олиши мумкин).

2-мисол. Қуйида даромадлар матрицаси берилган: Байес мезонига асосан максимал даромадни таъминловчи оптимал стратегияни топинг.

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+\ldots+a_{in}p_n$
A_1	2	3	4	7	4,2
A_2	3	6	5	4	4,8
A_3	5	8	7	3	6,2
p_j	0.1	0.2	0.5	0.2	max_i $(a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+\ldots+a_{in}p_n)=6.2$

Ечиш. ЕҚҚШ I-стратегияни танласа, унинг ютуғи, $2\cdot0,1+3\cdot0,2+4\cdot0,5+7\cdot0,2=4,2$ га тенг бўлади. II-стратегиядаги ютуғ $3\cdot0,1+6\cdot0,2+5\cdot0,5+4\cdot0,2 = 4,8$. Худди шунингдек III-стратегиядаги ютуғ 6,2 бўлади.

Бу мисолда оптимал стратегия A_3. Бу йўлни танлаганда ЕҚҚШ 6.2 ютуққа эга бўлади.

Вальд мезони. Фараз қилайлик, a_{ij} табиатнинг T_j ҳолатига қарши ЕҚҚШ нинг A_i – чора тадбирларни кўриши оқибатида оладиган фойдаси бўлсин: бу ҳолда Вальд мезони бўйича оптимал соф стратегия деб шундай стратегияни тушуниш керакки, унда А нинг σ ютуғи табиат билан бўлган ўйиннинг қуйи баҳосидан кам бўлмайди, яъни

$$\sigma \geq \max_i \left\{ \min_j \ a_{ij} \right\} \qquad (13.15)$$

Бу стратегия барча $\left(\min_j a_{ij}\right)$ минимал ютуқлар ичидан максималини танлайди. Агар a_{ij} ютқазувни кўрсатса, Вальд мезони бўйича топилган оптимал стратегия шундай соф стратегия бўладики, ундаги ютқазув «табиат» билан ўйиннинг юқори баҳоси $\min_i\left(\max a_{ij}\right)$дан кам бўлмайди, яъни бу ҳолда ЕҚҚШ танланган стратегия максимал ютқазувлар ичида минимумини танлашга ёрдам беради. Вальд мезони ЕҚҚШ ни энг ёмон шароитда яхши ечим қабул қилишга ўргатади. Бу мезон асосида «табиат» билан ўйнаганда «табиат»ни энг актив ва ёмон рақиб билан алмаштиргандай бўламиз. Бу мезон пессимистик мезон бўлиб, у асосан «ҳар вақт ёмонни кўзда тутиш керак» принципига ассосланган.

3- мисол. Корхона мижозларнинг талабини қондириши керак, лекин талабларнинг аниқ қиймати маълум эмас, улар тўртта қийматдан бироргасини қабул қилиши мумкин. Бу талабларни қондириш учун корхона раҳбарияти 4 хил таклиф даражасини намоён қилиши мумкин. Бу таклиф даражаларидан четланиш корхонага маълум миқдорда зарар келтиради. Бу зарарлар талабдагидан кўра кўпроқ маҳсулот ишлаб чиқаргани ёки талаб тўла қондирилмагани учун пайдо бўлиши мумкин.

Қуйидаги жадвал ютқазувлар (зарарлар) матрицаси бўлиб ундаги ҳар бир a_{ij} A_i таклиф даражаси ва B_j талаб даражасига мос келувчи зарар (ютқазув)ни млн. сўм бирлигидаги қийматини билдиради.

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	7	11	14	24
A_2	20	16	14	22
A_3	9	8	10	23
A_4	18	21	18	14

Ушбу табиатга қарши ўйинни Вальд мезони асосида ечинг.

Масалани ечиш жараёнини қуйидаги жадвалда тасвирлаймиз:

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4	$\max\limits_j(a_{ij})$
A_1	7	11	14	24	24
A_2	20	16	14	22	22
A_3	9	8	10	23	23
A_4	18	21	18	14	26
					$\min\{\max\limits_j(a_{ij})\}=22$

Жадвалдан кўринадики, A_1 стратегия учун max(7,11,14,24)=24, A_2 стратегия учун max(20,16,14,22)=22 ва A_3 стратегия учун max(9,8,10,23)=23 , ҳамда

$$\min_j \{\max_i a_{ij}\} = \min(24, 22, 23, 26) = 22$$

бўлади. Демак, оптимал стратегия A_2 ва унга мос келувчи ютуқазув 22 бўлади.

Сэвидж мезони. Сэвидж мезони ҳам минимакс принципига асосланган. Фақат бунда (a_{ij})– тўловлар ёки ютуғлар матрицаси ўрнига таваккалчилик матрицаси деб аталувчи (r_{ij}) матрица ишлатилади. Бу матрица элементлари (12.9) формулалар ёрдамида топилади.

4-мисол. Қуйидаги табиатга қарши ўйинни Севидж мезони билан ечинг.

T_j / A_i	T_1	T_2	$\max\limits_j(a_{ij})$
A_1	*110000*	*900*	*110000*
A_2	*100000*	*100000*	*100000*
			$\min\limits_i \{\max\limits_j (a_{ij})\} = 100000$

Бу ўйинда ЕҚҚШ A_2 йўлни танласа, унинг минимал ютқазуви 100000 бўлади. Лекин бу натижа табиатнинг T_1 ҳолатида ҳам, T_2 ҳолатида ҳам рўй бўлиши мумкин. Табиатнинг аниқ бир ҳолати ҳақида тасаввурга эга бўлиш учун таваккалчилик матрицасини тузамиз:

T_j / A_i	T_1	T_2	$\max\limits_j(r_{ij})$
A_1	*10000*	*0*	*10000*
A_2	*0*	*99100*	*99100*
			$\min\limits_i \{\max\limits_j (r_{ij})\} = 10000$

$(r_{ij} = a_{ij} - \min_i a_{ij})$. Жадвалдан кўринадики $\max_j r_{1j} = 10000$, $\max_j r_{2j} = 99100$ ҳамда $\min_i \{ \max_j (r_{ij}) \} = 10000$ Демак оптимал стратегия A_1 бўлиб, бу стратегия бўйича таваккалчиликдан кўриладиган зарар 10000 пул бирликка тенг бўлади.

Сэвидж мезони бўйича оптимал стратегия деб ёмон шароитда таваккалчиликдан кўриладиган зарарни минималлаштирувчи A_i стратегияга айтилади. Бошқача айтганда Сэвидж мезони ечим қабул қилишда таваккалчиликдан кўриладиган зарарни олдини олишга қаратилган.

Гурвиц мезони. Бу мезон ясама мезондан иборат бўлиб, унга асосан a_{ij} миқдор даромадни билдирганда ЕҚҚШ

$$\gamma_i = \max_i \left[\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right] \qquad \alpha \in [0,1] \qquad (1214)$$

натижани берувчи стратегияни танлайди. Агар a_{ij} – ютқазувни билдирса ЕҚҚШ

$$\gamma_i = \min \left[\alpha \min \ a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right] \qquad \alpha \in [0,1] \qquad (1215)$$

натижани таъминловчи A_i стратегияни танлайди. Бу ерда α - ечим қабул қилиш вазиятини субъектив баҳолаш орқали аниқланадиган параметр ҳисобланади. Масалан, α=1 бўлса, вазият оғир ва уни тўғрилаш учун чоралар кўриш талаб қилинади. α=0 да эса вазият яхши (оптимал) ҳеч қандай чора кўрмаса ҳам бўлади деб ҳисобланади. α ни (0,1) оралиқдаги қиймати оптимистик ёки пессимистик назарга қараб танланади. α ни танлаш ЕҚҚШнинг темпераментига ва вазиятни қандай баҳолашига боғлиқ. Вазият оғир бўлган сари ЕҚҚШ қарши чоралар кўради ва α нинг қиймати 1 га яқинлашади.

5-мисол. Табиат билан бўлган ўйин қуйидаги тўловлар матрицаси билан берилган бўлсин.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3
A_1	71	24	23
A_2	24	75	23
A_3	70	16	20
A_4	16	27	13

Бу ўйинга Гурвиц мезонини қўллаб оптимал стратегияни $\alpha = 0,4$ учун топамиз. Бунинг учун қуйидаги кўринишдаги жадвал чизамиз ва оптимал стратегияни юқоридаги шарт бўйича текширамиз:

$$\gamma = \min\left[\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha)\max_j a_{ij}\right] \qquad \alpha \in [0,1]$$

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	$\min\limits_j (a_{ij})$	$\max\limits_j (a_{ij})$	γ
A_1	71	24	23	23	71	51.8
A_2	24	75	23	23	75	54.2
A_3	70	16	20	16	70	48.4
A_4	16	27	13	13	27	21.4
						$\min \gamma_i = 21,4$

Жадвалдан кўринадики,

$\gamma_1 = 0,4 \quad 23 + 0,6 \cdot 71 = 51,8.$

$\gamma_2 = 0,4 \quad 23 + 0,6 \cdot 75 = 54,2.$

$\gamma_3 = 0,4 \quad 16 + 0,6 \cdot 70 = 48,4.$

$\gamma_4 = 0,4 \quad 13 + 0,6 \cdot 27 = 21,4.$

$\min \gamma_i = 21,4.$

Демак, a_{ij} – ютқазув бўлганда оптимал стратегия A_4 дан иборат экан.

6-мисол. Савдо корхонасида 500 бирлик мавсумий маҳсулот сотилмай қолган бўлсин. Бу маҳсулотнинг олдинги нархи 20 бирликни ташкил этган бўлсин. Энди савдо корхонаси олдида маҳсулотнинг нархини тушириш масаласи турибди. Маҳсулот нархини неча фоизга туширганда унинг кўрадиган зарари минимал бўлади?

Савдо корхонаси маҳсулот нархини 20% (A_1 йўл), 30% (A_2 йўл), 40% (A_3 йўл), 50% (A_4 йўл) туширишга мўлжаллайди. Бу йўлларни ЕҚҚШнинг стратегиялари деб қараймиз. «Табиат»нинг иккита йўли бор: 1) талабнинг кам эгилувчан бўлишлиги (T_1 йўл) ва 2) талабнинг кўп эгилувчанлиги (T_2 йўл). Ана шуларни назарга олиб қуйидаги жадвалларни тузамиз:

ЕҚҚШ стратегияси	Нархининг тушиши %	Эски баҳоси	Янги баҳо	Сотиладиган товар миқдори	Кўриладиган зарар
A_1	20	20	16	100	4400
A_2	30	20	14	150	3900
A_3	40	20	12	220	3360
A_4	50	20	10	230	3700
	$4400=500\cdot12-100\cdot16$				
	$3900=500\cdot12-14\cdot150$				
	$3360=500\cdot12-12\cdot220$				
	$3700=500\cdot12-10\cdot230$				

Бу ерда бир бирлик маҳсулоти савдо корхонасига келтириш учун сарф қилинадиган ҳаражат 12 бирлик деб қабул қилинган.

Худди шундай, жадвал талаб эгилувчанлиги кучли бўлган ҳол учун тузилади.

ЕҚҚШ стратгияси	Нархининг тушиши %	Эски баҳо	Янги баҳо	Сотиладиган товар миқдори	Кўриладиган зарар
A_1	20	20	16	150	3600
A_2	30	20	14	350	1100
A_3	40	20	12	400	1200
A_4	50	20	10	450	1500

I ва II жадвалдан фойдаланиб тўловлар матрицасини тузамиз ва Вальд мезонини қўллаб ечамиз:

T_j / A_i	T_1	T_2	$\max_j(a_{ij})$
A_1	4400	3600	4400
A_2	3900	1100	3900
A_3	3360	1200	3360
A_4	3700	1500	3700
			$\min_i \max_j a_{ij} = 3360$

Демак, савдо корхонаси маҳсулот нархини 40% га туширганда зарар минимал бўлади, яъни 3360 га тенг бўлади.

Масалани Лаплас мезонига асосан ечамиз:

T_j / A_i	T_1	T_2	$a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+\ldots+a_{in}p_n$
A_1	4400	3600	4000
A_2	3900	1100	2500
A_3	3360	1200	2280
A_4	3700	1500	2600
p	1/2	1/2	$\min_i (a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+\ldots+a_{in}p_n)=2280$

Бу мезон бўйича ҳам нарх 40% туширилса зарар 2280 бўлади.

Севидж мезонини қўллаш учун (r_{ij}) матрица тузамиз ва оптимал стратегияни топамиз.

T_j / A_i	T_1	T_2	$\max_j(a_{ij})$
A_1	1100	2500	2500
A_2	600	0	600
A_3	0	100	100
A_4	400	400	400
			$\min_i \max_j r_{ij} = 100$

Бу мезонга кўра ҳам нарх 40% га туширилиши маъқул.

Таянч сўз ва иборалар

Ўйин, ўйиннинг қоидалари, рақобатли ҳолат, жуфт ўйин, 0- суммали ўйин, матрицали ўйин, стратегия, оптимал стратегия, чекли ва чексиз ўйин, тўлов, тўлов функцияси, тўловлар ва ютуқлар матрицаси, ўйиннинг қуйи ва юқори баҳоси, ўйиннинг ечими (баҳоси), максимин ва минимакс стратегиялар, аралаш ва соф статегиялар, рақобатли бўлмаган ҳолат, табиатга қарши ўйин, оптималлик мезонлари, «таваккалчилик» матрицаси.

Назорат саволлари:

1. Ўйинлар назариясининг предмети нимадан иборат?
2. Ўйининг қандай турлари мавжуд?
3. Жуфтли ўйин нима?
4. Матрицали ўйин нима?
5. 0- суммали ўйин қандай бўлади?
6. Ютуқлар матрицаси қандай маънога эга?
7. Ўйиннинг қуйи ва юқори баҳоси нима?
8. Минимакс ва максимин стратегияларни таърифланг.
9. Аралаш стратегия нима?
10. Соф стратегияни таърифланг.
11. Аралаш стратегиялардаги ечимда ўйиннинг ютуғи нимага тенг бўлади?
12. Матрицали ўйин билан чизиқли дастурлаш орасида қандай боғланиш бор?
13. Табиат билан ўйин деганда қандай ўйинни тушунасиз?
14. Табиат билан ўйин рақобатли ўйиндан қандай фарқ қилади?
15. Лаплас ва Байес мезонларини таърифланг.
16. Вальд мезони бўйича оптимал стратегия қандай топилади?
17. Сэвидж мезони бўйича оптимал стратегия қандай топилади?

18. Гурвицнинг ҳосилавий мезони қандай?

19. Мезонлар орасидаги фарқ нимадан иборат?

Масалалар:

1. Ютуқ матрицалари

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix};\qquad A_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix};$$

бўлган ўйинлар учун тўлов функциясини ёзинг, ўйновчиларнинг оптимал стратегияларини ва ўйин баҳосини топинг.

2. Ютуқ матрицалари

$$A_1=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix};\qquad A_2=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix};$$

бўлган ўйинларга мос чизиқли дастурлаш масаласини тузинг ва ўйиннинг ечимини топинг.

3. $A=(a_{ij})$ ўйин матрицаси бир неча эгар нуқтага эга бўлиши мумкинми?

4. Қуйида берилган жадвалдаги маълумотлар асосида ютуқларни максималлаштирувчи стратегияни топинг.

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3
A_1	15	17	20
A_2	25	27	23
p	0.2	0.7	0.1

5. Қуйидаги келтирилган даромадлар матрицасидан фойдаланиб, А шахснинг оптимал стратегиясини Лаплас мезони асосида топинг.

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	7	11	14	24
A_2	20	16	14	22
A_3	9	8	10	23
A_4	18	26	18	14

6. Табиат билан ўйин қуйидаги тўловлар матрицаси орқали берилган.

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3
A_1	71	24	23
A_2	24	75	23
A_3	70	16	20
A_4	16	27	13

Вальд, Сэвидж ва Гурвиц мезонлари асосида оптимал стратегияни топинг.

7. Қуйидаги жадвалда берилган маълумотлар асосида табиат билан ўйиннинг ечинг (тўловлар матрицаси берилган).

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	3	3	0	8
A_2	6	2	4	0
A_3	0	0	5	2
A_4	7	1	6	6

АДАБИЁТЛАР

1. Акулич И.А. Математическое программирование в примерах и задачах. Учебное пособие для вузов. М. «Высшая школа»,1986.
2. Банди Б. Основы линейного программирования – М: Радио и связь, 1989
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология.- М: Наука, 1988
4. Джемилев Н.И., Эйдельнант М.И. Сборник задач по линейному программированию. Т: Ўқитувчи, 1990
5. Замков О.О. и др. Математические методы в экономике. М: ДИС, 1999.
6. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. Перевод с английского. Издательство «Прогресс». М.1985
7. Исследование операций /Под. ред. Моудера Дж., Элмаграби С. М: Мир, 1985. I и II тома.
8. Исследование операций в экономике. /Под. ред. Кремера Н.Ш. М: ЮНИТИ, 1997.
9. Кузнецов Ю.М. Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование – М: Высшая школа, 1980.
10. Кузнецов Ю.М., Новиков Г.И., Холод Н.И. Сборник задач по математическому программированию. Минск. «Вышэйшая школа», 1985.
11. Кузнецов Ю.М., Холод Н.И. Математическое прогаммирование. Учебное пособие, Минск. «Вышэйшая школа», 1984.
12. Макаров И.М. и др Теория выбор и принятия решений. М: Наука, 1992.
13. Математическое программирование /Под. ред. Кремера Н.Ш.- М: Финстатинформ, 1996.
14. Райцкас Р.Л. и др. Количественниый анализ в эканомике. М: Мир, 1992.
15. Сакович В.А. Исследование операций. Минск. «Вышэйшая школа», 1991.
16. Сафаева Қ., Бекназарова Н. Операцияларини текширишнинг математик усуллари (ўқув қўланма) I-қисм, Т.: Ўқитувчи 1984, II-қисм, Т.: Ўқитувчи, 1990.
17. Сафаева Қ., Джемилев Н.И. Наониқлик ва таваккалчилик шаротида ечимлар қабул қилиш назарияси, ўқув қўлланма. Т.: ТМИ, 1996.
18. Сафаева Қ., Икромов Ш.Р. Математик программалашдан маъруза матнлар тўплами. ТМИ. 2001.
19. Сафаева Қ., Шомансурова Ф. Математик программалашдан маъруза матнлар тўплами. ТМИ. 2003.

20. Таха X. Введение в исследование операций. Перевод с английского. Том 1,2. М: Мир, 1991.
21. Уотшем Т. Дж., Парраноу К. Количественные методы в финансах. М. «Финансы». 1999.
22. Хазанова Л. Э. Модели и методы исследования операций. Часть 1. Линейная оптимизация и транспортные сети. – М: Из-во Станкин, 1994.
23. Хазанова Л. Э. Математическое модилирование экономических систем. Динамическое программирование – М: ИНЭУП, 1997.
24. Хазанова Л. Э. Математическое модилирование в экономике – М: Из-во БЕК, 1998.
25. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. М: Аудит, 1997.
26. Fletcher R. Practical metods of optimization 2nd, edn John Wiley, New York, 1997.
27. Wilkes F.M. Mathematics for business. – Financt and Economics. Rout Ledge, London, 1994.

Мундарижа.

Сафаева Қумри

Математик дастурлаш

Муҳаррир: Э.Бозоров

Босишга рухсат этилди	28.05.04
Қоғоз бичими	30x42 1/8
Ҳисоб нашр табоғи	20,1
Адади	600
Буюртма	88

Баҳоси келишилган нархда

Тошкент Молия институти босмахонасида ризография усулида чоп этилди.

700084,Тошкент, Ҳ, Асомов кўчаси 7-уй