O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

ODDIY DIFFERENSIAL TENLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALALARNI O‘Q OTISH USULI BILAN SONLI YECHISH

USLUBIY KO‘RSATMALAR

«5130200 – Amaliy matematika va informatika»
ta’lim yo‘nalishi bakalavr talabalari uchun

Samarqand davlat universiteti o‘quv-uslubiy
Kengashi tomonidan nashrga tavsiya etilgan
(2015-yil 13-iyun, 8-bayonnoma)

SAMARQAND – 2016

UDK: 518.1
BBK: 22.19
O-27

Oddiy differensial tenlamalar uchun chegaraviy masalalarni o‘q otish usuli bilan sonli yechish. Uslubiy ko‘rsatmalar. – Samarqand: SamDU, 2016. – 48 bet.

Ushbu uslubiy ko‘rsatma Hisoblash matematikasi fani bo‘yicha 5130200 – Amaliy matematika va informatika ta’lim yo‘nalishi bakalavr talabalari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, unda shu fanning namunaviy o‘quv dasturidan kelib chiqib, chegaraviy masalalarni o‘q otsh usuli yordamida sonli yechishning nazariy asoslari, hisob algoritmi, namunaviy misollar yechimlari, mustaqil ish topshiriqlari, sinov savollari, mustaqil o‘zlashtirishga oid adabiyotlar, dasturiy vosita va undan foydalanishga oid uslubiy tavsiyalar va tarqatma materiallar keltirilgan. Bular talabalarga shu fanni yanada chuqurroq o‘zlashtirishga yaqindan yordam beradi.

Mazkur uslubiy ko‘rsatmadan 5140300 – Mexanika va 5130100 – Matematika ta’lim yo‘nalishlari bakalavrlari, fakultet magistrantlari, yosh ilmiy xodimlar va tadqiqotchilar ham foydalanishlari mumkin.

Tuzuvchilar:
fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent **A.ABDIRASHIDOV**,
SamDU magistranti **A.A.ABDURASHIDOV**

Mas‘ul muharrir
fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent **SH.S.MAMATOV**

Taqrizchilar:
texnika fanlari nomzodi, dotsent **SH.D.BERDIYEV**
fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent **A.B.QARSIYEV**

Mundarija

Kirish

Tabiiy fanlar va muhandislik hisoblarining ko‘plab tadqiqotlarida differensal tenglamalarning berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini topish talab etiladi.

Boshlang‘ich yoki chegaraviy masalalarni yechish – bu juda keng ma’noda bo‘lib, ular aniq analitik usullar va taqribiy sonli usullardir.

Analitik usullar bilan biz differensial tenglamalar fanidan tanishmiz. Bu usullar faqat tor doiradagi tenglamalar sinfinigina yechish imkonini beradi. Xususan, bu usullar o‘zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarni yechishda keng qo‘llaniladi. Bunday tenglamalar ko‘plab fizik jarayonlarni tadqiq qilishda uchraydi, masalan tebranishlar nazariyasida, qattiq jismlar dinamikasida va shunga o‘xshash.

Taqribiy usullar kompyuterlar paydo bo‘lmasidan ancha avval ishlab chiqilgan. Hozirgi kunda ham ularning ko‘pchiligi amaliyotda o‘z mazmunini yo‘qotgani yo‘q. Taqribiy usullar umumiy holda ikki guruhga bo‘lnadi: taqribiy-analitik usullar (boshlang‘ich yoki chegaraviy masalaning berilgan kesmadagi taqribiy yechimini biror funksiya ko‘rinishida izlash); sonli yoki to‘r usullar (boshlang‘ich yoki chegaraviy masalaning berilgan kesmadagi taqribiy yechimini qurish).

Zamonaviy hisoblash texnikasi va yig‘ilgan hisoblash tajribalari differensial tenglamalarning katta va murakkab masalalarini taqribiy yechish imkonini bermoqda. Sonli hisoblashlarda eng muhim jihat bu yetarlicha aniqlikda izlanayotgan taqribiy yechimga erishishdir. Bu aniqlikning muhim jihatlari esa EHMdan foydalanish aniqligi, kiritilayotgan ma’lumotlarda yo‘l qo‘yilishi mumkin bo‘lgan xatoliklar va yaxlitlash natijasida paydo bo‘ladigan xatoliklardan qutilishdir.

Hozirgi kunda ko‘plab zamonaviy matematik paketlar mavjudki, ular oddiy differensial tenglamalarni yetarlicha aniqlikda ham analitik va ham sonli yechib berish imkoniyatga ega [1, 10, 11, 14]. Buning uchun esa oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishning hisoblash usullari va ularning xususiyatlari bilan yaqindan tanishishni talab qiladi. Bu bilan birga shunday masalalar ham uchraydiki, ularni mavjud usullar bilan emas, balki ularning modifikatsiyasi, yangi uslubi va algoritmi bilan yechish lozim bo‘ladi.

Umuman olganda, oddiy differensial tenglama bilan berilgan chegaraviy masala: yagona yechimga ega; yechimga ega emas; bir nechta yoki cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lisi mumkin.

Koshi masalasini yechish usullari: Teylor qatori yordamida approksimatsiyalash; Runge-Kutta usullari; tahlil va korreksiya usuli va hokazo.

Koshi masalasini yechishning barcha usullari uchun Eyler usuli nolinchi yaqinlashish bo‘ladi.

Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechish, umuman olganda, quyidagi guruhlarga bo‘linadi [2-9]: 1) Koshi masalasiga (ya’ni boshlang‘ich masalaga) keltirib yechiladigan usullar (o‘q otish usuli, reduksiya usuli, differensial progonka usuli va hokazo); 2) chekli ayirmalar usuli; 3) balanslar usuli yoki integro-interpolyatsion usul; 4) kollokatsiyalar usuli; 5) proyeksion usullar (momentlar usuli, Galyorkin usuli); 6) variatsion usullar (kichik kvadratlar usuli, Rits usuli); 7) proyeksion-ayirmali usullar (chekli elementlar usuli); 8) Fredgolm integral tenglamalariga keltiriladigan usullar va hokazo.

Yuqorida sanab o‘tilgan 4)-6) usullar taqribiy yechimni berilgan biror funksiyalar oilasiga (masalan, o‘zaro chiziqli bog‘lanmagan biror funksiyalar sistemasining chiziqli kombinatsiyasiga) keltiradi; 1)-3), 7) usullar taqribiy yechimning sonli qiymatlari jadvalini tuzadi; 8) usulda esa har xil variantlar bo‘lishi mumkin. Bu yerdan ko‘rinib turibdiki, sof to‘r usullar ancha sodda, oldindan berilgan aniqlikda berilgan to‘rda yechimni qurish texnikasi juda sodda bo‘lib, uni nazorat qilish ham oson, masalan, Runge qoidasi bilan. Ammo, taqribiy-analitik usullar ancha ustunlikka ega, buni yechimning funksional ifodasi aniqligida va ba’zi chegaraviy masalalar klassik ma’noda yagona yechimga ega bo‘lmaganda chegaraviy masalaning umumlashgan yechimiga juda yaxshi yaqinlashishga erishish mumkinligida ko‘ramiz.

Chegaraviy masalani boshlang‘ich masalaga keltirib yechish usullarining asosiy g‘oyasi – bu berilgan chegaraviy masala parametrlarining cheklangan qiymatlarida unga mos qilib tuzib olingan bir yoki bir nechta har xil qiyinlikdagi Koshi masalalarini yechishdan iborat. Mazkur ishda ana shunday usullardan biri o‘q otish usuli o‘rganilgan [3, 5, 7-10, 12, 13].

Shuni ta’kidlash lozimki, korrekt qo‘yilgan masala sonli yechilayotganda ustivor bo‘lmasligi ham mukin, ya’ni ma’lumotlarni kiritishda yo‘l qo‘yilgan kichkinagina xatolik va majburan paydo bo‘laigan ixchamlash xatoligi natijalarda juda katta xatoliklarga olib kelishi mumkin.

1. Dastlbaki tushunchalar

Differensial tenglama deb x erkli o‘zgaruvchini, izlanayotgan $y = f(x)$ funksiyani va uning $y', y'',. . . , y^{(n)}$ hosilalarini o‘z ichiga olgan tenglamaga aytiladi. Differensial tenglama

$$F\,(x, y, y', y'',. . . , y^{(n)}) = 0\ ,$$

kabi belgilanadi, bu yerda n – eng yuqori tartibli hosila bo‘lib, u *differensial tenglamaning tartibi* deb ataladi. Agar izlanayotgan funksiya faqat bitta erkli o‘zgaruvchidan bog‘liq bo‘lsa, u *oddiy differensial tenglama* deb ataladi.

Bu differensial tenglamaning aniq yechimini topish uchun qo‘shimcha shartlar zarur bo‘ladi. Bu shartlar ikki turda bo‘lishi mumkin:

- *boshlang‘ich shartli Koshi masalasi*, bunda qo‘shimcha shart erkli o‘zgaruvchining bitta qiymatida berilgan bo‘ladi, masalan, $x=a$ nuqtada funksiyaning y_0 qiymati, balki y_0', y_0'' va hokazo qiymatlari ham berilgan bo‘lishi mumkin;
- *chegaraviy masala* – chegaraviy shartlar bilan berilgan masala, bunda qo‘shimcha shartlar erkli o‘zgaruvchining ikki yoki undan ortiq nuqtalarda beriladi, masalan, $x=a$ nuqtada funksiyaning y_a qiymati va $x=b$ nuqtada funksiyaning y_b qiymati.

Chegaraviy masalaning qo‘yilishi uchun kamida ikkita birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi yoki tartibi ikkidan kam bo‘lmagan bitta differensial tenglama berilgan bo‘lishi lozim. Chegaraviy masalanig qo‘shimcha shartlari kesmaning chetlarida yoki uning ichki nuqtalarida (bunday shartlar *ichki chegaraviy shartlar* deb ataladi) berilishi mumkin. Chegaraviy shartlar bir necha funksiyalarning, ularning hosilalarining yoki funksiya va uning hosilalari kombinasiyalarining yechim izlanayotgan kesmaning bitta yoki bir nechta nuqtalaridagi qiymatlarini o‘zaro bog‘lashi mumkin.

Endi chegaraviy masalaning umumiy qo‘yilishini keltiraylik.

Faraz qilaylik, ushbu

$$F\,(x, y(x), y'(x), y''(x),. . . , y^{(n)}(x)) = 0\ , \quad a \le x \le b,$$

oddiy differensial tenglama quyidagi *chegaraviy shartlar* bilan berilgan bo‘lsin:

$$\varphi_i(y(a), y'(a),...,y^{(n-1)}(a))=0, \quad i=1,2,...,L,$$
$$\psi_j(y(b), y'(b),...,y^{(n-1)}(b))=0, \quad j=L+1,...,n,$$

bu yerda $F(x, y, y',. . . , y^{(n)})$, $\varphi_i(y, y', . . , y^{(n)})$, $i=1,2,...,L$, $\psi_j(y, y',. . . , y^{(n)})$, $j=L+1,...,n$ – ularning o‘zgarish sohasida berilgan va ko‘rsatilgan argumentlarning funksiyalari bo‘lsin. L va $(n\text{-}L)$ kesmaning o‘ng va chap chegaralarida berilgan mos shartlar soni. Bu shartlarning umumiy soni berilgan differensial tenglamaning tartibiga teng. Berilgan $[a,b]$ kesmada yuqoridagi differensial tenglamani va uning mos chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi $y = y(x)$ funksiyani topish talab etiladi.

Agar bu tenglama va uning chegaraviy shartlari izlanayotgan funksiya va uning hosilalariga nisbatan chiziqli bo‘lsa, u holda bunday chegaraviy masala *chiziqli chegraviy masala* deb ataladi.

Xususiy holda, soddalik uchun, hisoblash amaliyotida ko‘p uchraydigan ikkinchi tartibli (n=2) differensial tenglama uchun quyidagi ko‘rinishda yoziladigan chiziqli chegaraviy masala holini qaraylik:

$$y''+p(x)\,y'+q(x)y = f(x), \quad a \le x \le b, \quad (\Omega \equiv [a,b]),$$

$$\alpha_0 y(a)+\beta_0\, y'(a) = A, \quad \alpha_1 y(b)+\beta_1\, y'(b) = B,$$

bu yerda $p(x)$, $q(x)$, $f(x) \in C_2[a,b]$ – berilgan funksiyalar; α_0, α_1, β_0, β_1, A, B – berilgan sonlar, $\alpha_j^2+\beta_j^2>0$, $|\,\alpha_j\,|+|\,\beta_j\,|\neq 0$, j=0,1.

Bu berilgan tenglama va chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $y(x)$ funksiyani topish talab qilinadi. Chegaraviy shartlarda $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$, j=0,1, bajarilganda kesmanig oxirlarida izlanayotgan funksiya va uning hosilasi qiymatlarini o‘zaro bog‘lovchi chiziqli bo‘lanish beriladi.

Sodda holda, agar β_0=0, β_1=0 bo‘lsa, u holda kesmaning oxirlarida funksiyaning faqat $y(a)$, $y(b)$ qiymatlarigina beriladi. Bunday funksional shartlar *birinchi tur chegaraviy shartlar* va bunga mos masala esa *birinchi chegaraviy masala* deb ataladi.

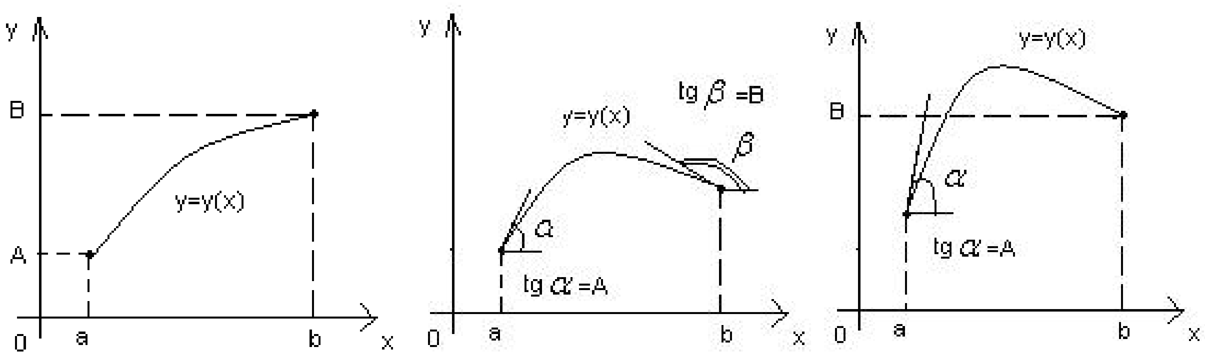
Agar α_0=0, α_1=0 bo‘lib, kesmaning oxirlarida faqat funksiya hosilasining qiymatlari berilgan bo‘lsa, u holda bunday shartlar differensial shartlar, chegaraviy shartlar esa *ikkinchi tur* yoki «*yumshoq*» *chegaraviy shartlar* deb ataladi. Bu chegaraviy shartlarning «*yumshoq*» deb atalishining sababi bunday shartlar kesmaning oxirlarida $y(x)$ funksiyaning qiymatini emas, balki integral egri chiziqlarning og‘ishini ifodalaydi. Bunga mos chegaraviy masala *ikkinchi chegaraviy masala* deb ataladi.

Umuman olganda, α_0 va (yoki) α_1; β_0 va (yoki) β_1 nolga teng bo‘lmasa, u holda chegaraviy shartlar *funksional-differensial xarakterga ega* yoki *uchinchi tur chegaraviy shartlar*, chegaraviy masalaning o‘zi esa *uchinchi chegaraviy masala* deb ataladi.

Masalan, $y(a) = A$, $y(b) = B$ shartlar birinchi tur chegaraviy shartlar. Geometrik nuqtai nazardan bu shuni anglatadiki, bu birinchi chegaraviy masalada ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning (a,A) va (b,B) nuqtalardan o‘tuvchi integral egri chizig‘ini topish talab etiladi (1,*a*-rasm).

Ushbu $y'(a) = A$, $y'(b) = B$ shartlar ikkinchi tur chegaraviy shartlar. Geometrik nuqtai nazardan bu ikkinchi chegaraviy masalada ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning x=a va x=b to‘g‘ri chiziqlarni kesib o‘tuvchi va α, β burchak koeffisiyentlariga ega, bu yerda tgα=A, tgβ=B, integral egri chizig‘ini topish talab etiladi (1,*b*-rasm).

Ushbu $y'(a) = A$, $y(b) = B$ shartlar uchinchi tur chegaraviy shartlarning xususiy holi bo‘lib, ular *aralash chegaraviy shartlar*, ularga mos masala esa *aralash chegaraviy masala* deb ataladi, bunda α_0=0, β_0=1, α_1=1, β_1=0. Geometrik nuqtai nazardan bu chegaraviy masalada ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning x=a to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvchi, α burchak koeffisiyentlariga ega, bu yerda tgα=A, integral egri chizig‘ini topish talab etiladi (1,*c*-rasm).



a *b* *c*

1-rasm. Chegaraviy shartlarning geometrik talqini.

2. Oddiy differensial tenglamalarning normal sistemasi uchun otishmalar usuli

Oddiy differensial tenglamalarning normal sistemasi uchun otishmalar usulini qaraylik. Buni shunday tushuntirish mumkinki, ixtiyoriy tartibli differensial tenglama unga ekvivalent bo‘lgan oddiy differensial tenglamalarning normal sistemasiga keltiriladi. Buni tushuntirish uchun yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan m-tartibli oddiy differensial tenglama uchun quydagi ikki nuqtali chegaraviy masalani misol qilib keltiraylik:

$$u^{(m)} = f\,(x,u,u',u'',\ldots,u^{(m-1)}), \qquad x\epsilon\ [a,\, b] \qquad (1)$$

$$g_i\,(u(a),u'(a),u''(a),\ldots,\, u^{(m-1)}(a)) = 0, \qquad i= 1, 2,\ldots, k;$$

$$g_i\,(u(b),u'(b),u''(b),\ldots,\, u^{(m-1)}(b)) = 0, \qquad i = k + 1,\, k + 2,\, \ldots,m; \qquad (2)$$

bu yerda g_i – funksiya bo‘lib, $u(x)$ yechimning va uning hosilasining $[a,b]$ kesma oxirlaridagi qiymatlaridan bog‘liq.

Ushbu

$$u_1(x) = u(x),\ \ u_2(x) = u'(x),\ \ldots\ ,\ \ u_m(x) = u^{(m-1)}(x)$$

almashtirish (1) ni quyidagi oddiy differensial tenglamalarning normal sistemasi ko‘rinishida yozish imkonini berdi:

$$\begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = u_3 \\ \dots \\ u'_{m-1} = u_m \\ u'_m = f(x, u_1, u_2, \dots, u_m) \end{cases} \qquad (3)$$

yoki vektor shaklida

$$\bar{u}' = \bar{F}(x, \bar{u}) \qquad (4)$$

bu yerda

$$\bar{F}(x, \bar{u}) = \left(u_2, \dots, u_m, f(x, \bar{u})\right), \bar{u} = (u_1, u_2 \dots, u_m) -$$

m o‘lchovli vektor-funksiya. (2) chegaraviy shartlarni quyidagicha yozish mumkin:

$$g_{\mathrm{i}}(\bar{u}(a)) = 0\,, \quad i = 1,2,\dots,k, \quad g_i(\bar{u}(b)) = 0\,, \quad i = k+1, k+2, \dots, m. \quad (5)$$

(4)-(5) masala yechimining birinchi komponentasi (1)-(2) chegaraviy masalaning izlanayotgan yechimi bo‘ladi.

Xuddi shunday ixtiyoriy tartibli differensial tenglamalar sistemasini unga ekvivalent bo‘lgan tenglamalarning normal sistemasi bilan almashtirish mumkin. Buni shunday tushuntirish mumkinki, ko‘pgina standart usullar, ularning algoritmlari va ularga mos dasturlar (4) ga o‘xshash sistemalar uchun quriladi.

3. O‘q otish usuli

Ushbu

$$\bar{u}' = \bar{F}(x, \bar{u})\,, \quad \bar{G}(\bar{u}(a)) = 0\,, \quad a \le x \le b, \qquad \bar{D}(\bar{u}(b)) = 0 \qquad (6)$$

oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun ikkinuqtali chegaraviy masalani qaraymiz, bu yerda $\bar{u}, \bar{F}$ - m o‘lchovli vektor-funksiyalar; $\bar{G}$ - izlanayotgan $\bar{u}(x)$ yechim komponentasining $x = a$ nuqtada qiymatidan bog‘liq k o‘lchovli vektor; $\bar{D}$ - izlanayotgan $\bar{u}(x)$ yechim komponentasining $x = b$ nuqtadagi qiymatidan bog‘liq m-k o‘lchovli vektor.

O‘q otish usuli bu chegaraviy masalani Koshi masalasiga keltirish bo‘lib, hosil bo‘lgan masalani yetarlicha aniqlikda yechish imkonini beruvchi taqribiy usullar mavjudligida.

Bunday keltirish shunday $p_1, \dots, p_m$ qiymatlarni topishki, ushbu

$$\bar{u}' = \bar{F}(x, u_1, \dots, u_m)\,,$$

$$u_i(a) = p_i\,, \quad i = 1, \dots, m, \quad a \le x \le b \qquad (7)$$

Koshi masalasining $\bar{u}(x, p_i, \dots, p_m)$ yechimi (6) chegaraviy masalani ham qanoatlantiradi. Ko‘rinib turibdiki, shunday p_i, $i = 1,2,\dots,m$ qiymatlarda ushbu

$$\bar{G}\big(\bar{u}(a, p_1, \dots, p_m)\big) = 0, \qquad \bar{D}\big(\bar{u}(b, p_1, \dots, p_m)\big) = 0 \qquad (8)$$

chegaraviy shartlar bajarilishi lozim.

Bu yerdagi noma'lum p_i, $i = 1,2,\dots,m$ larni quyidagicha izlash mumkin. Dastlab ushbu

$$\bar{G}\big(\bar{u}(a, p_1, \dots, p_m)\big) = 0$$

k ta tenglamalar sistemasidan (umumiy holda ular nochiziqli, transcendent) m-k ta parametrik yechimlar oilasini topamiz (chegaraviy masala korrekt qo'yilgan deb faraz qilinganligi uchun u mavjud). Faraz qilaylik, soddalik uchun yechimlar oilasini quyidagicha yozish mumkin bo'lsin:

$$u_i(a) = p_i = \alpha_i(p_{k+1}, \dots, p_m), i = 1, \dots, k.$$
$$u_i(a) = p_i, i = k + 1, \dots, m \qquad (9)$$

bu yerda p_i, $i = k+1,\dots,m$ – ixtiyoriy o'zgarmaslar (parametrlar).

Ushbu

$$u' = F_i(x, u_1, \dots, u_m)$$
$$u_i(a) = p_i = \alpha_i(p_{k+1}, \dots, p_m), i = 1, \dots, k. \qquad (10)$$
$$u_i(a) = p_i, \ i = k + 1, \dots, m$$

Koshi masalasining yechimi $\bar{u}_a(x, p_{k+1}, \dots, p_m)$ ham (6) chegaraviy masalaning yechimi bo'ladi, agar quyidagi tenglik bajarilsa:

$$\bar{D}\big(\bar{u}_a(b, p_{k+1}, \dots, p_m)\big) = 0. \qquad (11)$$

(m-k) ta noma'lum p_i, $i = k+1,\dots,m$ parametrlarni hisoblash uchun (m-k)-tartibli (11) sistema «tikish» tenglamalari deb ataladi. Odatda bunday tenglamalar Nyuton usuli bilan yechiladi.

Xuddi shunday amal bajarish mumkin, agar m ta noma'lumga nisbatan ushbu

$$\bar{D}\big(\bar{u}(b, p_1, \dots, p_m)\big) = 0$$

(m-k) ta tenglamalar sistemasining k-parametrik yechimlari oilasini quyidagicha yozish mumkin bo'lsa

$$u_i(b) = \alpha_i(p_1, \dots, p_k), i = 1, \dots, m - k. \qquad (12)$$
$$u_{m-k+i}(b) = p_i, \ \ i = 1, \dots, k,$$

bu yerda p_i, $i = k+1,\dots,m$ – ixtiyoriy o'zgarmaslar. U holda ushbu

$$\bar{u}' = \bar{F}(x, \bar{u})$$
$$u_i(b) = \alpha_i(p_1, \dots, p_k), i = 1, \dots, m - k. \qquad (13)$$
$$u_{m-k+i}(b) = p_i, \ \ i = 1, \dots, k$$

Koshi masalasining yechimi $\bar{u}_b(x,p_1,\ldots,p_k)$ ham (6) chegaraviy masalaning yechimi bo‘ladi, agar p_i , $i = k+1,\ldots,m$ lar quyidagi «tikish» tenglamalarini qanoatlantirsa:

$$\bar{G}\left(\bar{u}_b(a,p_1,\ldots,p_k)\right) = 0. \tag{14}$$

Ma’lumki, yuqori tartibli bo‘lmagan tenglamalar sistemasini sonli yechish osonroq, shuning uchun (11) yoki (14) «tikish» tenglamalarini tanlash k yoki (m-k) ning kattaligidan bog‘liq. Shuni ta’kidlaymizki, hisob aniqligini oshirish uchun biror $s\epsilon(a,b)$ nuqtani tanlash, (11) masalaning $a \le x \le s$ kesmadagi $\bar{u}_a(x,p_{k+1},\ldots,p_m)$ yechimini hisoblash, (13) masalaning $s \le x \le b$ kesmadagi $\bar{u}_b(x,p_1,\ldots,p_k)$ yechimini hisoblash, keyin esa ularni s nuqtada «tikish» maqsadga muvofiq.

Bu holda quyidagi «tikish» tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\bar{u}_a(s,p_{k+1},\ldots,p_m) = \bar{u}_b(s,p_1,\ldots,p_k)\ , \tag{15}$$

bu sistema maksimal m-tartibga ega. Ammo, agar (6) differensial tenglamalar sistemasi tez o‘suvchi yechimga ega bo‘lsa, u holda $[a,b]$ kesmada shunday s nuqtani tanlash (bu, umuman olganda, ancha murakkab) kerakki, u kam xatolik bilan $p_i,\ldots,p_k$ qiymatlarni topish imkonini bersin.

Chiziqli chegaraviy masala uchun «tikish» tenglamasi ham chiziqli bo‘ladi. Quyida chiziqli masalalar uchun o‘rinli bo‘lgan ularni qurish uslublari bilan tanishamiz.

4. Chiziqli chegaraviy masala uchun o‘q otish usuli

Faraz qilaylik, quyidagi chiziqli chegaraviy masalaning yechimini topish talab etilsin:

$$\bar{u}' = A(x)\bar{u} + \bar{f}(x), \tag{16}$$

$$\bar{G}(\bar{u}(a)) = 0, \quad a \le x \le b \tag{17}$$

$$\bar{D}(\bar{u}(b)) = 0. \tag{18}$$

bu yerda $A(x)$ – $m \times m$ o‘lchovli matritsa; $\bar{f}(x)$ - m o‘lchovli vektor-funksiya; k o‘chovli $\bar{G}(\bar{u}(a))$ vektor va $(m$-$k)$ o‘lchovli $\bar{D}(\bar{u}(b))$ vektor $\bar{u}(x)$ vektorning $x = a$ va $x = b$ nuqtalardagi qiymatlaridan chiziqli bog‘liq.

(16) chiziqli chegaraviy masalaning umumiy yechimini quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$\bar{u}(x) = \bar{u}^0(x) + \sum_{i=1}^{m} p_i \bar{u}^i(x). \tag{19}$$

Bu yerda $\bar{u}^0(x)$ - quyidagi birjunsli bo‘lmagan Koshi masalasining yechimi:

$$\bar{u}' = A(x)\bar{u} + \bar{f}(x),$$
$$\bar{u}(a) = (0, \ldots, 0), \quad a \le x \le b \qquad (20)$$

$\bar{u}^i(x),\ i = 1, \ldots, m$ - quyidagi birjunsli Koshi masalasining yechimi:

$$\bar{u}' = A(x)\bar{u},$$
$$\bar{u}(a) = (0, \ldots, 0, \underset{i\ marta}{1}, 0, \ldots, 0), \quad i = 1, \ldots, m, \qquad a \le x \le b \qquad (21)$$

$\bar{u}(x)$ vektor-funksiya (16)-(18) chiziqli chegaraviy masalaning yechimi bo‘ladi, agar u (17) va (18) chegaraviy shartlarni qanoatlantirsa. Bu shuni bildiradiki, p_i , $i = 1,\ldots,m$ parametrlar ushbu

$$\overline{G}\left(\sum_{i=1}^{m} p_i \bar{u}^i(a)\right) = 0, \qquad \overline{D}\left(\bar{u}^0(b) + \sum_{i=1}^{m} p_i \bar{u}^i(b)\right) = 0$$

m-tartibli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi bo‘lishi lozim.

Bu chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega, chunki chegaraviy masala korrekt qo‘yilgan va bir jinsli Koshi masalasi (21) ning yechimlari chiziqli bog‘lanmagan. Shuni ta’kidlaymizki, p_1 ,…, p_m larni hisoblash uchun faqat $\bar{u}^i(a)$ va $\bar{u}^i(b)$ vektorlar komponentalarining qiymatlari yetarli. Shuning uchun (20), (21) masalalarni sonli yechishda $\bar{u}^i(x)$ larning $x = b$ nuqtadagi qiymatlarini xotirada saqlab qolish yetarli. p_1 ,…, p_m larning qiymatlari hisoblangandan so‘ng (16)-(18) chegaraviy masalaning izlanayotgan yechimi ushbu

$$\bar{u}' = A(x)\bar{u} + \bar{f}(x), \qquad \bar{u}(a) = (p_1, \ldots, p_m), \qquad a \le x \le b.$$

Koshi masalasining yechimi bilan mos tushadi.

Yechiladigan bir jinsli Koshi masalasining sonini kamaytirish mumkin, agar (17) chegaraviy shartlarga mos keluvchi $\bar{u}(a)$ vektorning m ($m > k$) ta noma’lum komponentalariga nisbatan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi ushbu

$$u_i(a) = \alpha_i(p_{k+1}, \ldots, p_m),\ i = 1,\ldots,k, \quad u_i(a) = p_i, \quad i = k+1,\ldots,m$$

yechimga ega va $\alpha_i = const$ bo‘lsa (ya’ni ular p_i , $i = k+1,\ldots,m$ lardan bog‘liq bo‘lmasa). Soddalik uchun faraz qilaylik, $\alpha_i = const$, $i = 1,\ldots,k$, ya’ni ushbu

$$\bar{u}' = A(x)\bar{u} + \bar{f}(x), \qquad (22)$$
$$u_i(a) = \alpha_i,\ i = 1,\ldots,k, \quad a \le x \le b, \qquad (23)$$
$$\overline{D}(\bar{u}(b)) = 0 \qquad (24)$$

chiziqli ikkinuqtali chegaraviy masalaning yechimini topish talab etilsin.

Oddiy differensial tenglamalarning chiziqli sistemasi (22) ning $x = a$ nuqtada (23) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi umumiy yechimini quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$\bar{u}(x) = \bar{u}^0(x) + \sum_{i=1}^{m-k} p_{k+i}\bar{u}^i(x).$$

Bu yerda $\bar{u}^0(x)$ - quyidagi bir junsli bo‘lmagan Koshi masalasining yechimi:

$$\bar{u}' = A(x)\bar{u} + \bar{f}(x), \quad \bar{u}(a) = (\alpha_1, ...\alpha_k, 0, ..., 0), \quad a \le x \le b,$$

$\bar{u}^i(x),\ i = 1,...,m$ - quyidagi bir junsli Koshi masalasining yechimi:

$$\begin{aligned} &\bar{u}' = A(x)\bar{u}, \\ &\bar{u}(a) = (0,...,0,\underbrace{1}_{k+i\ marta},0,...,0), \quad i = 1,...,m-k, \end{aligned} \qquad a \le x \le b\ . \tag{25}$$

$\bar{u}(x)$ vektor-funksiya (22)-(24) chiziqli chegaraviy masalaning yechimi bo‘ladi, agar u $x = b$ nuqtada (24) chegaraviy shartlarni qanoatlantirsa. Bu shuni bildiradiki, p_{k+i}, $i = 1,...,m-k$ parametrlar ushbu

$$\bar{D}(\bar{u}^0(b) + \sum_{i=1}^{m-k} p_{k+i}\bar{u}^i(b)) = 0 \tag{26}$$

(m-k)-tartibli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi bo‘lishi lozim.

Barcha p_{k+1} ,…, p_m lar hisoblab bo‘lingandan keyin (22)-(24) chegaraviy masalaning izlanayotgan yechimi ushbu

$$\bar{u}' = A(x)\bar{u} + \bar{f}(x),$$
$$\bar{u}(a) = (\alpha_1, ...\alpha_k, p_{k+1}, ..., p_{m-k}), \quad a \le x \le b,$$

Koshi masalasining yechimi bilan mos keladi.

Koshining barcha masalalari sonli yechiladi, shuning uchun o‘q otish usuli qo‘llanilgandan so‘ng taqribiy yechimga ega bo‘linadi.

Nazariy jihatdan (26) tenglamalar sistemasining yechimi yagona bo‘lishiga qaramasdan, agar (25) masalaning $\bar{u}^i(x)$ yechimi sonli yechimga juda yaqin bo‘lsa (qariyb chiziqli bog‘liq), u holda chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yomon shartlashgan bo‘lishi mumkin, ya’ni aniqlik katta miqdorda yo‘qotilishi mumkin. Agar birjinsli chiziqli masala x bo‘yiha o‘zgarish tezligi bilan farq qiluvchi chiziqli bo‘glanmagan yechimlarga ega bo‘lsa, bunday holda shu holat sodir bo‘lishi mumkin. Bunga quyidagi misolni keltiramiz.

Misol. Quyidagi o‘zgarmas koeffitsiyenti to‘rtinchi tartibli tenglamali chegaraviy masalani yechish talab qilinsin:

$$u^{\mathrm{IV}} - 24u''' - 169u'' - 32u' - 180u = 0, \quad x \in [0,1],$$
$$u(0) = 0, \;\; u'(0) = 0, \;\; u(1) = 0.146996, \;\; u'(1) = 0{,}0241005$$

Bu chegaraviy masalaning aniq yechimi: $u(x) = e^{-x} - 2e^{-2x} + e^{-3x}$. Berilgan differensial tenglamaga mos keluvchi xarakteristik tenglamaning ildizlari qiymati bir biridan keskin farq qiladi. Bular: -1, -2, -3, 30. Bu shuni bildiradiki, intervalning o‘ng chetiga yaqin ($x\approx1$) bo‘lgan nuqtalarda e’tiborga olmaslik darajadagi kichik qiymatlarga farq qiluvchi barcha yechimlar $u^i \approx C_i e^{30x}$, i =1,2,3,4, mavjud, ya’ni ular bir biridan faqat C_i ko‘paytuvchilargagina farq qiladi. Bu holda (26) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining matritsasi yomon shartlashgan bo‘ladi va yuqoridagi otish usuli bilan topilgan yechim noaniq bo‘lib chiqadi.

Ba’zi hollarda (25) Koshi masalasining $\bar{u}^i(x)$ yechimini [*a*,*b*] kesmaning ba’zi ichki nuqtalarida ortogonallishtirish usuli bunga yordam beradi. Agar differensial tenglamaning birorta yechimi sekin o‘sib borsa, bu hol ba’zi ichki $s\in[a,b]$ nuqtalar uchun tikish tenglamasini qurish imkonini beradi.

Agar chiziqli masala o‘zgaruvchan koeffitsiyentli bo‘lsa, u holda hisob jarayoni murakkablashadi.

5. Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun birinchi chegaraviy masala misolida o‘q otish usulining algoritmini chiqarish

Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun quyidagi birinchi chegaraviy masalani qaraymiz:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a < x < b, \tag{27}$$
$$y(a) = y_0, \;\; x = a, \tag{28}$$
$$y(b) = y_1, \;\; x = b. \tag{29}$$

Ushbu (27)-(29) chegaraviy masala o‘rnida quyidagi Koshi masalasini qaraymiz:

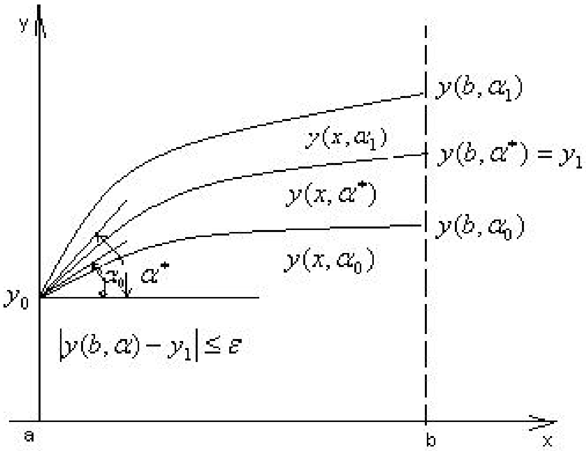
$$y'' = f(x, y, y'), \quad a < x < b, \tag{30}$$
$$y(a) = y_0, \;\; x = a, \tag{31}$$
$$y'(a) = tg\alpha, \;\; \alpha: \quad y(b,\alpha) = y_1, \tag{32}$$

bunda $y(x,\alpha)$ – integral egri chiziq nafaqat x o‘zgaruvchidan, balki otish burchagi deb ataluvchi α parametrdan ham bog‘liq.

Bu $y(b,\alpha)$ – o‘ng chegarada integral egri chiziq qiymatining oldindan biror ε aniqlik bilan berilgan y_1 ning qiymati bilan tengligi shartidan topiladi (2-rasm):

$$|y(b,\alpha) - y_1| \leq \varepsilon \,. \qquad (33)$$

(33) shartni qanoatlantiruvchi otish burchagini α^* orqali belgilaylik. (30)-(32) Koshi masalasining (33) tengsizlikka mos burchak bilan olingan yechimidan kelib chiqqan integral egri chiziq (27)-(29) chegaraviy masalaning ε aniqlik bilan olingan yechimi bo‘ladi.



2-rasm. O‘q otish usulining geometrik talqini.

Shunday qilib, o‘q otish usulining algoritmi quyidagicha:

1. α_0 burchak tanlanadi, masalan, ushbu $tg\alpha = \frac{y_1 - y_0}{b-a}$ shartdan.

2. α_0 burchakning bu qiymati bilan biror usuldan foydalanib, $y(x,\alpha_0)$ va $y(b,\alpha_0)$ larni olish uchun (30)-(32) Koshi masalasi yechiladi; agar bunda (33) shart bajarilsa, u holda (27)-(29) chegaraviy masalaning ε aniqlik bilan olingan yechilgan bo‘ladi.

3. Aks holda quyidagi ikki variant bo‘lishi mumkin:
   a. $y(b,\alpha_0) > y_1$; u holda otish burchagi biror uslub bilan kichraytiriladi va (30)-(32) Koshi masalasi xuddi shu usul bilan $y(b,\alpha_1) < y_1$ shart bajarilgunga qadar yechiladi;
   b. $y(b,\alpha_0) < y_1$; u holda otish burchagi biror uslub bilan kattalashtiriladi va (30)-(32) Koshi masalasi xuddi shu usul bilan $y(b,\alpha_1) > y_1$ shart bajarilgunga qadar yechiladi.

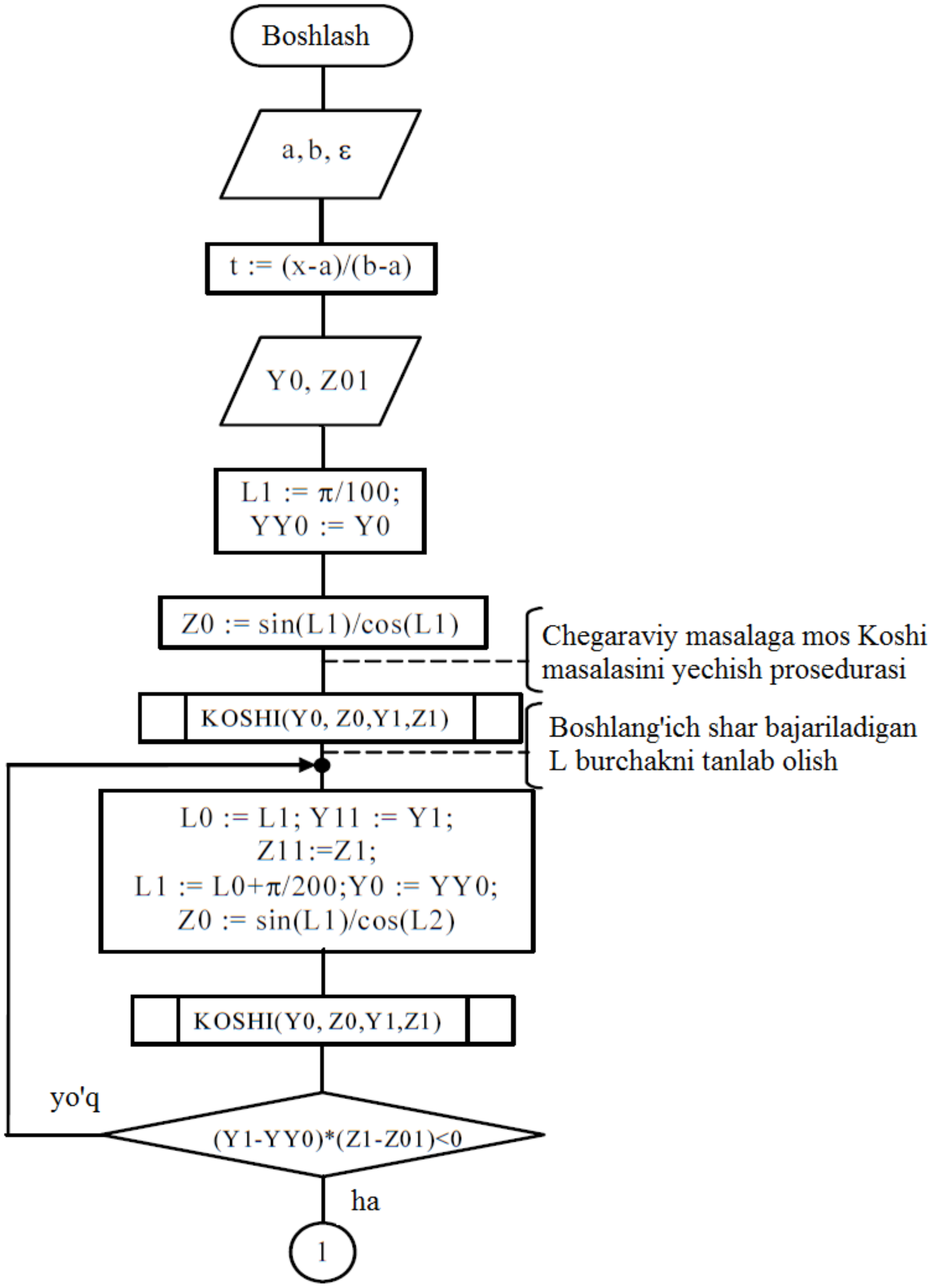
4. Shunday qilib, otish burchagi $\alpha \in (\alpha_0,\alpha_1)$ intervalning ichidan topiladi, shundan keyin α^* ning haqiqiy qiymati quyidagi qadamlarni bajarish bilan oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuli bilan topiladi:
   a. $\alpha_{k+1} = (\alpha_{k-1} + \alpha_k) / 2$; b. $y\,(x, \alpha_{k+1})$; c. $y\,(b, \alpha_{k+1})$;
   d. $|y(b, \alpha_{k+1}) - y_1| \leq \varepsilon$ tengsizlik tahlil qilinadi; agar u bajarilsa, u holda α^* $(\alpha_k + \alpha_{k+1}) / 2$ и $y(x,\alpha^*)$ haqiqiy egri chiziq; aks holda iteratsion jarayon 4-banddan boshlab takrorlanadi.

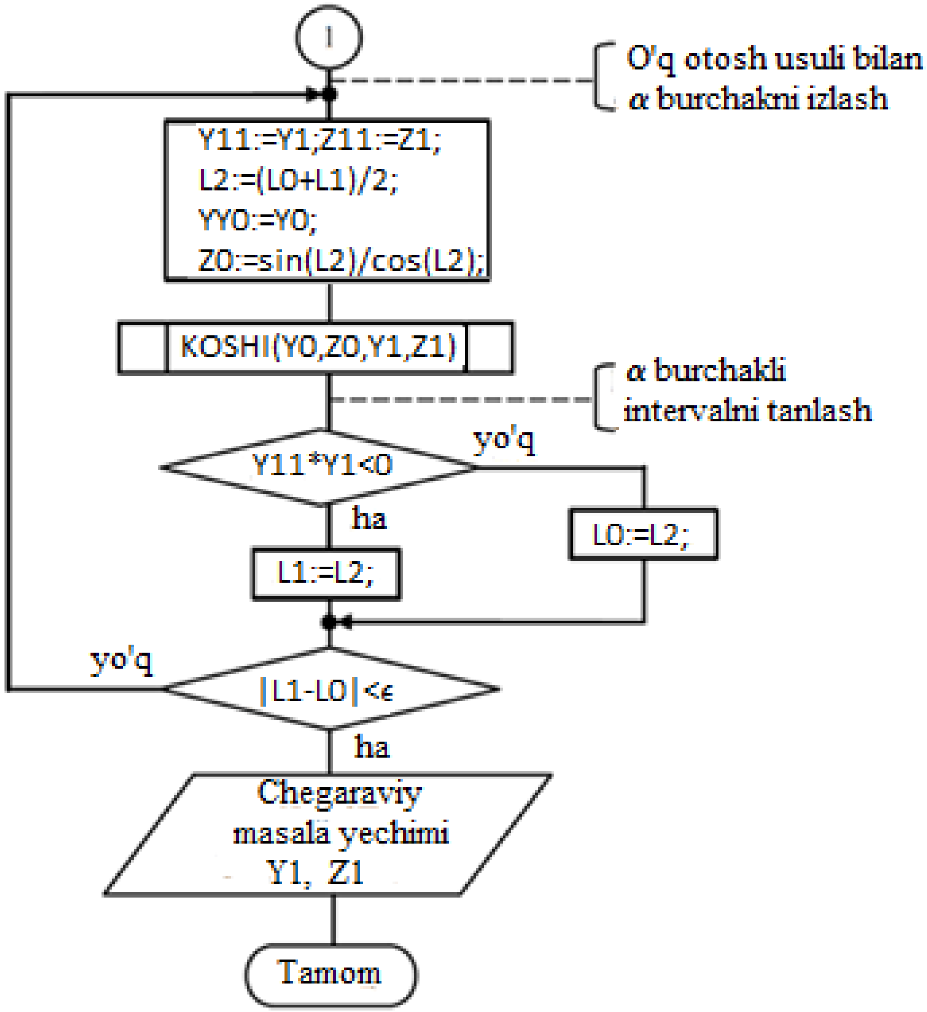
Shunday qilib, o‘q otish usuli bilan yuqori tartibli differensial tenglama bilan berilgan chegaraviy masalani yoki differensial tenglamalar sistemasini yechish mumkin. Masalan, (30)-(32) ni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = f(x, y, z), \end{cases}$$

boshlang‘ich shartlar: $y(0)=y0$, $z(0)=z0=\text{tg}\alpha=\text{tg}L$.

Ushbu hisob algoritmi asosida tuzilgan blok-sxema 3-rasmda tasvirlangan.





3-rasm. O‘q otish usulining blok-sxemasi.

6. O‘q otish (otishmalar) usuliga oid misollar va ularni yechish uslubi

1-misol. Quyidagi tenglama bilan berilgan to‘rtinchi tartibli chiziqli chegaraviy masalani yechish uchun o‘q otish (otishmalar) usuli algoritmini tuzing:

$$(x+1)u^{IV}+(4+x)u''+3u=6x+3,\; x\in[0,1].$$

Chap chegara x = 0 dagi chegaraviy shart quyidagicha berilgan:

$$2u(0)+u'''(0)=-2,$$

$$u(0)-2u'''(0)=1;$$

O‘ng chegara x = 1 dagi chegaraviy shart quyidagicha berilgan:

$$u(1)+u''(1)=3,$$

$$u'(1)+u''(1)=2.$$

Yechish. Quyidagi yangi o‘zgaruvchilar kiritamiz:

$$u_1(x)=u(x),\quad u_2(x)=u'(x),\quad u_3(x)=u''(x),\quad u_4(x)=u'''(x).$$

Bulardan foydalanib, berilgan chegaraviy masala quyidagi to‘rtinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi bilan berilgan chegaraviy masalaga olib kelinadi:

$$u_1'(x) = u_2(x)\,,$$
$$u_2'(x) = u_3(x)\,,$$
$$u_3'(x) = u_4(x)\,,$$
$$u_4'(x) = -3/(x+1) - (4+x)/(x+1)u_3 + 3(2x+1)/(x+1)\,.$$

Shuni ta’kidlaymizki, bu sistemaning yechimini topish uchun uning o‘ng tarafini hisoblashni ta’minlovchi prosedurani yaratishimiz lozim.

Bu sistemani vektor ko‘rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$$\bar{u}\,'(x) = A(x)\bar{u}(x) + \bar{f}(x)\,. \tag{34}$$

Bu yerda

$$\bar{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{3}{x+1} & 0 & -\dfrac{4+x}{x+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{6x+3}{x+1} \end{pmatrix}.$$

Yangi o‘zgaruvchila uchun chegaraviy shartlar quyidagicha yoziladi:

$$2u_1(0) + u_4(0) = -2\,,$$
$$u_1(0) - 2u_4(0) = 1\,, \tag{35}$$
$$u_1(1) + u_3(1) = 3\,,$$
$$u_2(1) + u_4(1) = 2\,. \tag{36}$$

Chap chegaraviy shartlardan quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$u_1(0) = -0{,}6\,, \quad u_4(0) = -0{,}8\,.$$

Endi o‘q otish usulining algoritmini tuzsak bo‘ladi.

1. Dastlab quyidagi birjinsli bo‘lmagan Koshi masalasi yechiladi:

$$\bar{u}\,'(x) = A(x)\bar{u}(x) + \bar{f}(x)\,,$$
$$\bar{u}(0) = (-0.6,\ 0.0,\ 0.0,\ -0.8)\,.$$

Bu masalaning yechimini $\bar{u}^0(x)$ deb belgilaylik.

2. Endi quyidagi birjinsli differensial tenglamalar sistemasi uchun ikkita Koshi masalasi yechiladi:

$$\bar{u}\,'(x) = A(x)\bar{u}(x)\,.$$

$\bar{u}^1(x)$ - vektor-funksiya yoki yechim quyidagi boshlng‘ich shartlarni qanoatlantiradi:

$$\bar{u}(0) = (0.0,\ 1.0,\ 0.0,\ 0.0)\,.$$

$\bar{u}^1(x)$ - vektor-funksiya yoki yechim esa quyidagi boshlng‘ich shartlarni qanoatlantiradi:

$$\bar{u}(0) = (0.0,\ 0.0,\ 1.0,\ 0.0).$$

3. Quyidagi vektor-funksiyani quramiz:

$$\bar{u}(x) = \bar{u}^{\,0}(x) + p_2\bar{u}^1(x) + p_3\bar{u}^2(x).$$

Tuzilgan masalaning chiziqlilik shartidan $\bar{u}(x)$ yechim (34) differensial tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi. x=0 nuqtada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\bar{u}(0) = (-0.6,\ p_2,\ p_3,\ -0.8),$$

ya’ni $\bar{u}(x)$ yechim (35) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

4. $p_2,\ p_3$ parametrlarni shunday tanlaymizki, $\bar{u}(x)$ yechim (36) chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin, ya’ni

$$u_1(1) + u_3(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad \left(u_1^{\,0}(1) + p_2u_1^{\,1}(1) + p_3u_1^{\,2}(1)\right) + \left(u_3^{\,0}(1) + p_2u_3^{\,1}(1) + p_3u_3^{\,2}(1)\right) = 3,$$

$$u_2(1) + u_4(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad \left(u_2^{\,0}(1) + p_2u_2^{\,1}(1) + p_3u_2^{\,2}(1)\right) + \left(u_4^{\,0}(1) + p_2u_4^{\,1}(1) + p_3u_4^{\,2}(1)\right) = 2.$$

Bu shuni bildiradiki, $p_2,\ p_3$ paramatrlar quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi bo‘lishi zarur.

$$p_2\left(u_1^{\,1}(1) + u_3^{\,1}(1)\right) + p_3\left(u_1^{\,2}(1) + u_3^{\,2}(1)\right) = 3 - u_1^{\,0}(1) - u_3^{\,0}(1),$$

$$p_2\left(u_2^{\,1}(1) + u_4^{\,1}(1)\right) + p_3\left(u_2^{\,2}(1) + u_4^{\,2}(1)\right) = 2 - u_2^{\,0}(1) - u_4^{\,0}(1).$$

Shuni ta’kidlaymizki, koeffitsiyentlarning qiymatlarini va chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining o‘ng tomonini hisoblash uchun Koshining uchta masalasini yechish talab qilinadi, bunda bu masalalar yechimlarining faqat x=1 chegaradagi qiymatinigina topish talab etiladi

5. $p_2,\ p_3$ parametrlar hisoblab bo‘lingandan so‘ng quyidagi Koshi masalasining $\bar{u}(x, p_2, p_3)$ yechimi topiladi:

$$\bar{u}'(x) = A(x)\bar{u}(x) + \bar{f}(x),$$

$$\bar{u}(0) = (-0.6,\ p_2,\ p_3,\ -0.8).$$

$\bar{u}(x, p_2, p_3)$ - vektor-funksiyaning birinchi komponentasi dastlabki chegaraviy masalaning yechimi.

2-misol. Quyidagi tenglama bilan berilgan to‘rtinchi tartibli chiziqli chegaraviy masalani yechish uchun o‘q otish (otishmalar) usuli algoritmini tuzing:

$$(x+1)u^{\mathrm{IV}} + (4+x)u'' + 3u = 6x + 3,\ \ x \in [0,1].$$

Chap chegara x = 0 dagi chegaraviy shart quyidagicha berilgan:

$$2u(0) - 3u'(0) + u'''(0) = -2,$$

$$u(0) - 2u'(0) - 3u''(0) + 3u'''(0) = 1;$$

O‘ng chegara $x = 1$ dagi chegaraviy shart quyidagicha berilgan:

$$u(1) + u''(1) = 3,$$

$$u'(1) + u'''(1) = 2.$$

Yechish. Bu chegaraviy masalaning oldingisidan farqi shundaki, bunda $x = 0$ chegaradagi shart umumiyroq qilib berilgan. Xuddi 1-misoldagi kabi yangi o‘zgaruvchilar kiritamiz. Natijada oddiy differensial tenglamalar sistemasi (34) uchun (36) chegaraviy shartlar va quyidagi chegaraviy shartlarga ega bo‘lamiz:

$$2u_1(0) - 3u_2(0) + u_4(0) = -2,$$

$$u_1(0) - 2u_2(0) - 3u_3(0) + 3u_4(0) = 1. \qquad (37)$$

Bu chegaraviy masalaning yechimini quyidagi vektor-funksiya ko‘rinishida izlaymiz:

$$\bar{u}(x) = \bar{u}^0(x) + \sum_{i=1}^{4} p_i \bar{u}^i(x),$$

bu yerda p_i – hozircha noma’lum parametrlar.

Bu yerdagi $\bar{u}^0(x)$ - quyidagi birjinsli bo‘lmagan Koshi masalasining yechimi:

$$\bar{u}'(x) = A(x)\bar{u}(x) + \bar{f}(x),$$

$$\bar{u}(0) = (0.0,\ 0.0,\ 0.0,\ 0.0).$$

$\bar{u}^i(x)$ - vektor-funksiya ushbu

$$\bar{u}'(x) = A(x)\bar{u}(x).$$

birjinsli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi-ning yechim bo‘lib, quyidagi boshlng‘ich shartlarni qanoatlantiradi:

$$\bar{u}^1(0) = (1.0,\ 0.0,\ 0.0,\ 0.0),$$

$$\bar{u}^2(0) = (0.0,\ 1.0,\ 0.0,\ 0.0),$$

$$\bar{u}^3(0) = (0.0,\ 0.0,\ 1.0,\ 0.0),$$

$$\bar{u}^4(0) = (0.0,\ 0.0,\ 0.0,\ 1.0),$$

Masalaning chiziqli ekanligidan $\bar{u}(x)$ yechim yuqoridagi differensial tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi. p_i (i=1,2,3,4) parametrlarning qiymatini shunday tanlaymizki, (36) va (37) chegaraviy shartlar bajarilsin, u holda p_i (i=1,2,3,4) parametrlar quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi bo‘ladi:

$$2p_1 - 3p_2 + p_4 = -2,$$

$$p_1 - 2p_2 - 3p_3 + 3p_4 = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{4} p_i\left(u_1^i(1)+u_3^i(1)\right)=3-u_1^0(1)-u_3^0(1)\,,$$
$$\sum_{i=1}^{4} p_i\left(u_2^i(1)+u_4^i(1)\right)=2-u_2^0(1)-u_4^0(1)\,.$$

Bu yerda mos Koshi masalasini yechishdagi uchinchi va to‘rtinchi tenglamalar sistemasidan koeffisiyentlarning qiymatlari ularni sonli yechishdan topiladi.

p_i (i=1,2,3,4) parametrlar hisoblab bo‘lingandan so‘ng (34), (36), (37) chegaraviy masalaning yechimi ushbu

$$\bar{u}\,'(x)=A(x)\bar{u}(x)+\bar{f}(x)\,,$$
$$\bar{u}(0)=(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4)\,.$$

Koshi masalasining yechimi deb topiladi. Shuni ta’kidlaymizki, algortmlarni yozishda vektor shakldan foydalanildi. Chiziqli tenglamalar sistemasini ShEHMda yechishda $A(x)$ matritsani hisoblash o‘rniga bu sistemaning o‘ng tarafini hisoblash prosedurasini yozish kerak.

3-misol. Quyidagi tenglama bilan berilgan uchinchi tartibli nochiziqli chegaraviy masalani yechish uchun o‘q otish (otishmalar) usuli algoritmini tuzing:

$$u'''+u''-u'+u^2e^{-x}=\sin 2x(\sin 2x-15)e^{-x},\ \ x\in[0,1]\,.$$

Chap chegara x = 0 dagi chegaraviy shart quyidagicha berilgan:

$$u(0)+2u'(0)=4\,,$$
$$2u'(0)-u''(0)=0\,;$$

O‘ng chegara x = 1 dagi chegaraviy shart quyidagicha berilgan:

$$u'(1)-u(1)=-2.262\,.$$

Yechish. Bu chegaraviy masalani yechish uchun quyidagi yangi o‘zgaruvchilarni kiritamiz:

$$u_1(x)=u(x)\,,\quad u_2(x)=u'(x)\,,\quad u_3(x)=u''(x)\,,\quad u_4(x)=u'''(x)\,.$$

Natijada berilgan chegaraviy masalaning o‘rniga quyidagi uchinchi tartibli normal nochiziqli differensial tenglamalar sistemasi bilan berilgan chegaraviy masalaga kelamiz:

$$u_1'=u_2\,;$$
$$u_2'=u_3\,;$$
$$u_3'=-u_1^2e^{-x}+u_2-u_3+\sin 2x(\sin 2x-15)e^{x}\,.$$

Bu sistemani vektor shaklida yozaylik:

$$\bar{u}'=\bar{F}(x,\bar{u})\,,$$

bu yerda

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad \bar{F}(x) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ -u_1^2 e^{-x} + u_2 - u_3 + \sin 2x(\sin 2x - 15)e^x \end{pmatrix}.$$

Yangi o‘zgaruvchilarga nisbatan chegaraviy shartlar quyidagicha yoziladi:

$$u_1(0) + 2u_2(0) = 4;$$

$$2u_2(0) - u_3(0) = 0; \qquad (38)$$

$$u_2(1) - u_1(1) = -2.262. \qquad (39)$$

Bu yerda $u_2(0) = p_2$ deb faraz qilib, $x = 0$ shartdan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$u_1(0) = 4 - 2p_2; \quad u_3(0) = 2p_2.$$

Endi quyidagi Koshi masalasining $\bar{u}(x, p_2)$ yechimini izlaymiz:

$$\bar{u}' = \bar{F}(x, \bar{u}), \qquad (38)$$

$$u_1(0) = 4 - 2p_2; \quad u_2(0) = p_2; \quad u_3(0) = 2p_2.$$

Hosil qilingan $\bar{u}(x, p_2)$ yechim p_2 parametrdan nochiziqli bog‘langan, shuning uchun uni chiziqli masaladagidek izlab bo‘lmaydi. $\bar{u}(x, p_2)$ vektor-funksiyani chegaraviy masalaning izlanayotgan yechimi bo‘lishi uchun u quyidagi chegaraviy shartni qanoatlantirishi lozim:

$$u_2(1) - u_1(1) = -2.262.$$

Shunday qilib, p_2 parametrni qiymatini quyidagi nochiziqli tenglamadan topamiz:

$$f_1(p_2) \equiv u_2(1, p_2) - u_1(1, p_2) + 2.262 = 0.$$

Bu tenglamaning yechimini sonli usullardan biri yordamida izlaymiz. $f_1(p_2)$ ning berilgan p_2 dagi qiymatini hisoblash uchun (38) Koshi masalasining $x = 1$ dagi yechimi komponentasidan foydalaniladi. p_2 ning taqribiy qiymati topilgach (38) masala yana yechiladi va uning birinchi komponentasining $\bar{u}(x, p_2)$ yechimi berilgan chegaraviy masalaning yechimi bo‘ladi.

4-misol. Quyidagi to‘rtinchi tartibli nochiziqli chegaraviy masalani yechish uchun o‘q otish (otishmalar) usuli algoritmini tuzing:

$$u^{\mathrm{IV}} + 2xu'' - 0.25x^2u'' + 0.125e^{-x/2}uu' = e^{-x/2}(2.625x^2 + 0.75x + 3.125), \; x \in [0,1].$$

$$u(0) - 2u'(0) = 0, \qquad u(1) + 2u''(1) = 18.136,$$

$$2u(0) + u'(0) = 2.5, \qquad 2u(1) - u''(1) = -0.824.$$

Yechish. Bu chegaraviy masalani yechish uchun quyidagi yangi o‘zgaruvchilarni kiritamiz:

$$u_1(x)=u(x)\,,\quad u_2(x)=u'(x)\,,\quad u_3(x)=u''(x)\,,\quad u_4(x)=u'''(x)\,.$$

Natijada berilgan nochiziqli chegaraviy masalaning o‘rniga quyidagi normal nochiziqli differensial tenglamalar sistemasi bilan berilgan chegaraviy masalaga kelamiz:

$$\begin{cases} u_1'=u_2\,; \\ u_2'=u_3\,; \\ u_3'=u_4\,; \\ u_4'=-0.125e^{-x/2}u_1u_2+0.25x^2u_3-2xu_4+e^{-x/2}(2.625x^2+0.75x+3.125)\,. \end{cases} \qquad (39)$$

Chegaraviy shartlar yangi belgilashlarga nisbatan quyidagicha yoziladi:

$$u_1(0)-2u_2(0)=0\,,\qquad u_1(1)+2u_3(1)=18.136\,,$$
$$2u_1(0)+u_2(0)=2.5\,,\qquad 2u_1(1)-u_3(1)=-0.824\,.$$

$x = 0$ chegaradagi shartlardan quydagiga ega bo‘lamiz:

$$u_1(0)=1\,,\qquad u_2(0)=0.5\,.$$

Endi (39) sistemaning quyidagi boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi $\bar{u}(x,p_3,p_4)$ yechimini izlaymiz:

$$u_1(0)=1\,,\quad u_2(0)=0.5\,,\quad u_3(0)=p_3\,,\quad u_4(0)=p_4\,. \qquad (40)$$

Hosil bo‘lgan yechim chegaraviy masalaning izlanayotgan yechimi bo‘ladi, agar u x=1 da p_3, p_4 larga nisbatan quyidagi nochiziqli tenglamalar sistemasiga keluvchi chegaraviy shartlarni qanoatlantirsa:

$$f_1(p_3,p_4)\equiv u_1(1,p_3,p_4)+2u_3(1,p_3,p_4)-18.136=0\,,$$
$$f_2(p_3,p_4)\equiv 2u_1(1,p_3,p_4)-u_3(1,p_3,p_4)+0.824=0\,.$$

Bu algebraik tenglamalar sistemasining yechimini Nyuton usuli bilan izlaymiz. Faraz qilaylik, p_3^0 va p_4^0 boshlang‘ich yaqinlashishlar ma’lum bo‘lsin. Keyingi yaqinlashishlarni quyidagi tartibda hisoblaymiz:

$$p_3^{n+1}=p_3^n+\delta_3^n\,,$$
$$p_4^{n+1}=p_4^n+\delta_4^n\,,$$

bu yerda δ_3^n va δ_4^n - quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi:

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_3}(p_3^n,p_4^n)\cdot\delta_3^n+\frac{\partial f_1}{\partial p_4}(p_3^n,p_4^n)\cdot\delta_4^n=-f_1(p_3^n,p_4^n)\,,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial p_3}(p_3^n,p_4^n)\cdot\delta_3^n+\frac{\partial f_2}{\partial p_4}(p_3^n,p_4^n)\cdot\delta_4^n=-f_2(p_3^n,p_4^n)\,.$$

Yakob matritsasining birinchi ustunini hisoblah algoritmini tuzaylik. Bunda n=0 da $p_3 = p_3^n$ va $p_4 = p_4^n$ deb boshlab, (39)-(40) Koshi masalasini yechamiz va olingan yechim yordamida quyidagilarni hisoblaymiz:

$$f_1 \equiv f_1(p_3^n, p_4^n) \equiv u_1(1, p_3^n, p_4^n) + 2u_3(1, p_3^n, p_4^n) - 18.136 = 0,$$

$$f_2 \equiv f_2(p_3^n, p_4^n) \equiv 2u_1(1, p_3^n, p_4^n) - u_3(1, p_3^n, p_4^n) + 0.824 = 0.$$

Endi $p_3 = p_3^n + h_3$ va $p_4 = p_4^n$ deb olib, (39)-(40) masalani yana bir bor yechamiz va quyidagilarni hisoblaymiz:

$$\tilde{f}_1 \equiv f_1(p_3^n + h_3, p_4^n) \equiv u_1(1, p_3^n + h_3, p_4^n) + 2u_3(1, p_3^n + h_3, p_4^n) - 18.136 = 0,$$

$$\tilde{f}_2 \equiv f_2(p_3^n + h_3, p_4^n) \equiv 2u_1(1, p_3^n + h_3, p_4^n) - u_3(1, p_3^n + h_3, p_4^n) + 0.824 = 0.$$

Endi quyidagilarni yozamiz:

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_3}(p_3^n, p_4^n) \approx \frac{\tilde{f}_1 - \tilde{f}_1^n}{h_3}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial p_3}(p_3^n, p_4^n) \approx \frac{\tilde{f}_2 - \tilde{f}_2^n}{h_3}.$$

Agar ε - hisob aniqligi va $\left|p_3^0\right| \le 1$ bo‘lsa, u holda $h_3 = \sqrt{\varepsilon}$ deb olamiz, aksincha, agar $\left|p_3^0\right| > 1$ bo‘lsa, u holda $h_3 = \sqrt{\varepsilon} \cdot p_3^0$ deb olamiz. Yakob matritsasining ikkinchi ustunini hisoblash ham xuddi shu kabi bajariladi.

Shulardan keyin p_3 va p_4 taqribiy qiymatlar topilgach, (39)-(40) masala yechiladi va uning yechimining $\bar{u}(x, p_3, p_4)$ - birinchi komponentasi dastlabki chegaraviy masalaning yechimi bo‘ladi.

5-misol. Quyidagi tenglamasi chiziqli, ammo chegaraviy shartlari nochiziqli bo‘lgan to‘rtinchi tartibli nochiziqli chegaraviy masalani yechish uchun o‘q otish (otishmalar) usuli algoritmini tuzing:

$$u^{\mathrm{IV}} - 4x^2u'' - 28xu' - 32u = -4e^{x^2}(4x^2+5), \; x \in [0,1].$$

$$2u(0)\cdot u'(0) + u'''(0) = -2, \qquad u^2(1) + u''(1) = 3,$$

$$u(0) - 2u'(0)\cdot u''(0) + 3u'''(0) = 1, \qquad u'(1) + \left(u'''(1)\right)^3 = 2.$$

Yechish. Bu chegaraviy masalani yechish uchun quyidagi yangi o‘zgaruvchilarni kiritamiz:

$$u_1(x) = u(x), \quad u_2(x) = u'(x), \quad u_3(x) = u''(x), \quad u_4(x) = u'''(x).$$

Natijada berilgan nochiziqli chegaraviy masalaning o‘rniga quyidagi normal nochiziqli to‘rtinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi bilan berilgan chegaraviy masalaga kelamiz:

$$u_1' = u_2; \quad u_2' = u_3; \quad u_3' = u_4; \quad u_4' = 32u_1 + 28xu_2 + 4x^2u_3 - 4e^{x^2}(4x^2+5), \quad (41)$$

uning chegarayiy shartlari quyidagicha:

$$2u_1(0)\cdot u_2(0) + u_4(0) = -2, \qquad u_1(0) - 2u_2(0)\cdot u_3(0) + 3u_4(0) = 1, \qquad (42)$$

$$u_1^2(1) + u_3(1) = 3, \qquad u_2(1) + u_4^3(1) = 2\,. \tag{43}$$

Bu yerda chiziqli tenglamaning chegaraviy shartlari nochiziqli bo‘lganligi uchun unga o‘q otish (otishmalar) usulini algoritmini qo‘llab bo‘lmaydi. Shuning uchun x = 0 chegaradagi ikkita shartshartdan $\bar{u}$ vektorning ikkita komponentasini uning qolganlari orqali ifodalab olamiz. Bu yerda $u_1 = p_1$ va $u_3 = p_3$ deb olish qulay, u holda u_2 va u_4 larni hisoblash uchun quyidagi ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 2u_1 \cdot u_2 + u_4 = -2, \\ u_1 - 2u_2 \cdot u_3 + 3u_4 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p_1 \cdot u_2 + u_4 = -2, \\ 2u_2 \cdot p_3 - 3u_4 = p_1 - 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2(0) = \dfrac{p_1 - 7}{2(3p_1 + p_3)}, \\ u_4(0) = \dfrac{p_1 - p_1^2 - 2p_3}{3p_1 + p_3}. \end{cases}$$

Ushbu $\bar{u}(x, p_1, p_3)$ - quyidagi Koshi masalasining yechimi:

$$\bar{u}' = A(x)\bar{u} + \bar{f}(x), \tag{44}$$

$$\bar{u}(0) = \left(p_1,\ \frac{p_1 - 7}{2(3p_1 + p_3)},\ p_3,\ \frac{p_1 - p_1^2 - 2p_3}{3p_1 + p_3} \right).$$

Bu masalaning yechimi x = 0 dagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirishi lozim. Endi x = 1 dagi shartlarning bajarilishi uchun p_1 va p_3 parametrlar quyidagi nochiziqli tenglamalar sistemasining yechimi bo‘lishi lozim:

$$f_1(p_1, p_3) \equiv u_1^2(1, p_1, p_3) + u_3(1, p_1, p_3) - 3 = 0,$$

$$f_2(p_1, p_3) \equiv u_2(1, p_1, p_3) + u_4^3(1, p_1, p_3) - 2 = 0\,.$$

Bu tenglamalar sistemasining yechimini, xuddi 4-misolda keltirilgan algoritm kabi, Nyuton usuli bilan topamiz.

Bu misolda ham p_1 va p_3 taqribiy qiymatlar topilgach, (44) masala yechiladi va uning yechimining $\bar{u}(x, p_1, p_3)$ - birinchi komponentasi dastlabki chegaraviy masalaning yechimi bo‘ladi.

6-misol. Quyidagi funksionalni hisoblash algoritmini tuzing:

$$I = \int_0^1 (u + x^2 u' + x u'')\,dx,$$

bu yerda $u(x)$ – quyidagi chegaraviy masalaning yechimi:

$$u^{\text{IV}} - xu''' - 4x^3 u' - 12u = 2xe^{x^2}(26x^2 + 36x + 21), \quad x \in [0;1],$$

$$u''(0) = 4, \quad u'''(0) = 6, \quad u(1) = 3e, \quad u'(1) = 7e\,.$$

Yechish. Otishmalar usuli yordamida shunday p_1 va p_2 qiymatlar hisoblanadiki, quyidagi Koshi masalasining yechimi berilgan chegaraviy masalaning yechimi bo‘lsin:

$$u^{IV} - xu''' - 4x^3u' - 12u = 2xe^{x^2}(26x^2 + 36x + 21),$$

$$u(0) = p_1,\quad u'(0) = p_2,\quad u''(0) = 4,\quad u'''(0) = 6.$$

Izlanayotgan p_1 va p_2 qiymatlar topilgandan keyin funksionalning qiymati quyidagi Koshi masalasining yechimi yordamida hisoblanadi:

$$u^{IV} - xu''' - 4x^3u' - 12u = 2xe^{x^2}(26x^2 + 36x + 21),\quad x \in [0;1],$$

$$\varphi' = u + x^2u' + xu'',$$

$$u(0) = p_1,\quad u'(0) = p_2,\quad u''(0) = 4,\quad u'''(0) = 6,\quad \varphi(0) = 0.$$

Haqiqatan ham, $I = \varphi(1)$.

7. O‘q otish (otishmalar) usuliga oid ba’zi misollar va ularni Mathcad matematik paketi yordamida yechish

1-misol. Ushbu

$$y'' + y = e^{-x}$$

tenglamani

$$y(0) = 1;\quad y(1) = 2.$$

chegaraviy shartlarda o‘q otish usuli bilan Mathcad matematik paketidan foydalanib yeching.

Yechish. Bu chegaraviy masalaning aniq yechimi quyidagicha;

$$yt(t) := \frac{1}{2}\cdot\left(e^{-t} + \cos(t)\right) + \frac{\sin(t)}{\sin(1)}\cdot\left[2 - \frac{1}{2}\cdot\left(e^{-1} + \cos(1)\right)\right]$$

Chegaraviy shartlarni tekshiramiz:

$$yt(0) = 1;\ \ yt(1) = 2.$$

Ammo shuni e’tiborga olamizki, bu tenglama ushbu

$$yt(0) = 1;\ \ yt'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

chegaraviy shartlarda yechimga ega emas.

Bu tenglamani o‘q otish usuli bilan yechishning algoritmini Mathcad matematik paketi yordamida tuzamiz:

Berilgan:

$$f(x) := e^{-x}\quad N := 2 + FRAME\quad j := 0...N\quad a := 0\quad b := 1\quad h := \frac{b-a}{N}\quad h = 0.5$$

Diskret o‘zgaruvchilarga o‘tamiz: $x_j := j\cdot h\ \ x_0 := a\ \ x_N := b$

Chap chegaradagi shart: agar $y0_0 := 1$ bo‘lsa, u holda o‘ng chegarada $y1_0 := 0$

Bu yerda va bundan keyin quyidagi belgilashlar kiritilgan: $y0_j$ - birjinsli bo‘lmagan differensial tenglama xususiy yechimining diskret qiymati; $y1_j$ - birjinsli differensial tenglama umumiy yechimining diskret qiymati.

Quyidagi qiymatlarni ixtiyoriy beramiz: $m := 0.5 + \frac{1}{50} \cdot FRAME$

$y0_1 := y0_0 + \frac{h}{m}$ $y1_1 := h$ $y1_1 :\neq 0$

Ana shu qiymatlar qolgan barcha $y0_j$ $y1_j$ $j = 2, N.$ qiymatlarni topish uchun yetarli.

Algoritm: $j := 1...N-1$ $y0_1 = 2$.

Birjinsli va birjinsli bo‘lmagan differensial tenglamalarning mos xususiy va umumiy yechimlarini hisoblashning rekurrent formulalarini ayirmali ko‘rinishda yozamiz:

$$\frac{y0_{j+1} - 2 \cdot y0_j + y0_{j-1}}{h^2} + y0_j = e^{-x_j} \qquad \frac{y1_{j+1} - 2 \cdot y1_j + y1_{j-1}}{h^2} + y1_j = 0$$

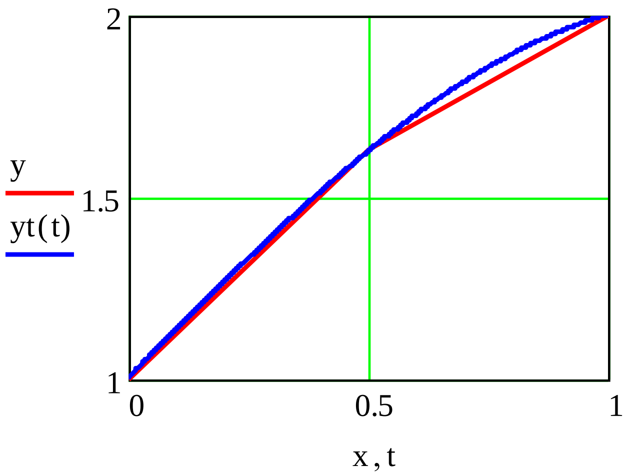
Bu tenglamalar quyidagilarni yozamiz:

$$y0_{j+1} := h^2 \cdot \left(e^{-x_j} - y0_j\right) - y0_{j-1} + 2 \cdot y0_j \qquad y1_{j+1} := -h^2 \cdot y1_j - y1_{j-1} + 2 \cdot y1_j$$

Hisoblashlarning oxirida quyidagini topamiz: $B := \frac{2 - y0_N}{y1_N}$

Endi *y* vektorning barcha komponentalari qiymatlarini yozamiz: $j := 0...N$ $y_j := y0_j + B \cdot y1_j$ $y_N = 2$

Hosil qilingan natijalarni taqqoslash grafigini chizamiz (4-rasm).



4-rasm.

2-misol. Ushbu

$$y'' + y = e^{-x}$$

tenglamani

$$y(0) = 1, \quad y(4) = 2$$

chegaraviy shartlarda o‘q otish usuli bilan Mathcad matematik paketidan foydalanib yeching.

Yechish. Bunga mos boshlang‘ich qiymatlarga tuzatishlar kiritamiz: $a \le x \le b,$ bunda $a := 0 \quad b := 4$. Boshlang‘ich nuqtalar soni: $N := 40$; x bo‘yicha: $h := \frac{b-a}{N}$, bunda $h = 0.1$.

Animatsiya parametrini tanlaymiz: $m := 0.2 + \frac{1}{20} \cdot FRAME$, ishoralar (+, –): $s0 := -1$, $s1 := +1$.

Birjinsli va birjinsli bo‘lmagan dastlabki differensial tenglama mos xususiy yechimini diskret boshlang‘ich qiymatini beramiz: $y0_0 := 1$, $y1_0 := 0$.

Quyidagi qiymatlarni ixtiyoriy beramiz: $y0_1 := y0_0 + s0 \cdot \frac{h}{m} \quad y1_1 := s1 \cdot h \quad y1_1 \ne 0$

Animatsiya holatida bu tasdiqni tahlil qilamiz. Erkli o‘zgaruvchilarning diskret qiymatlari: $j := 1...N-1 \quad x_j := j \cdot h \quad x_0 := a \quad x_N := b$

Dastlabki birjinsli va birjinsli bo‘lmagan differensial tenglamani ayirmali ko‘rinishda yozamiz va ularning taqribiy yechimlarini diskret nuqtalarda yozamiz:

$$y0_{j+1} = h^2 \cdot \left(e^{-x_j} - y0_j\right) - y0_{j-1} + 2 \cdot y0_j \qquad y1_{j+1} = -h^2 \cdot y1_j - y1_{j-1} + 2 \cdot y1_j$$

$$B := \frac{2 - y0_N}{y1_N} \qquad j := 0...N \qquad y_j := y0_j + B \cdot y1_j$$

Natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$y_N = 2 \quad yt(t) := \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-t} + \cos(t)\right) + \frac{\sin(t)}{\sin(4)} \cdot \left[2 - \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-4} + \cos(4)\right)\right]$$

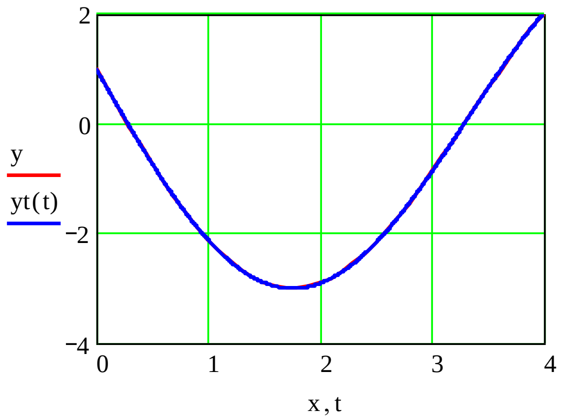
Chegaraviy shartni tekshiramiz: $yt(0) = 1 \quad yt(4) = 2$

Natijalarning animatsion grafigi 5- va 6-rasmlarda keltirilgan:

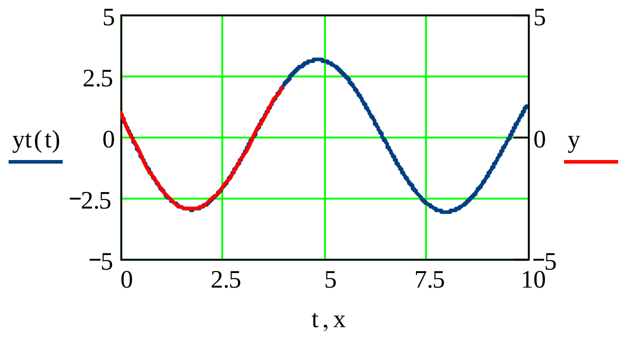
Ushbu $yt(0) = 1, \quad yt'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ chegaraviy shartlarda berilgan tenglama yechimga ega emas. Bu holda:

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} + \cos(x)\right) + B \cdot \sin(x), \qquad y'(x) = \frac{-1}{2}\left(e^{-x} + \sin(x)\right) + B \cdot \cos(x),$$

$$y(0) = 1, \qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1\right) < 0.$$



5-rasm.



6-rasm.

3-misol. Ushbu

$$y''+y=e^{-x}$$

differensial tenglamani

$$y(0)=1\ ;\qquad y(4)=2$$

chegaraviy shartlarda o‘q otish usuli bilan sonly yechimg. Chegaraviy shartlarni boshqasi bilan almashtiring va mos yechimni toping. Olingan taqribiy yechimni aniq yechim bilan taqqoslang, grafiklarni chizing, animatsiyalarni ko‘rsating.

Yechish. Berilgan differensial tenglamaning aniq yechimi quyidagicha:

$$yt(t):=\frac{1}{2}\cdot(e^{-t}+\cos(t))+\frac{\sin(t)}{\sin(4)}\cdot\left[2-\frac{1}{2}\cdot(e^{-4}+\cos(4))\right]$$

Bu yechim ushbu $yt(0)=1$ $yt(4)=2$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

Bu tenglamani yechishning o‘q otish usuli bo‘yicha algoritmini keltiramiz:

Berilgan: $f(x):=e^{-x}$ $N:=40+FRAME$ $j:=0..N$

Diskret o‘zgaruvchilarga o‘tamiz: $x_j:=j\cdot h$ $x_0:=a$ $x_N:=b$

Chegaraviy shartlar: $y0_0:=1$ $y1_0:=0$

Bu yerda va bundan keyin quyidagi belgilashlar kiritilgan: $y0_j$ - birjinsli bo‘lmagan differensial tenglama xususiy yechimining diskret qiymati; $y1_j$ - birjinsli differensial tenglama umumiy yechimining diskret qiymati.

Quyidagi qiymatlarni ixtiyoriy beramiz: $m:=0.1+\frac{1}{20}\cdot FRAME$

$y0_1:=y0_0-\frac{h}{m}$ $y1_1:=-h, y1_1\neq 0$

Algoritm: $j:=1..N-1$

Birjinsli va birjinsli bo‘lmagan differensial tenglamalarning mos xususiy va umumiy yechimlarini hisoblashning rekurrent formulalarini ayirmali ko‘rinishda yozamiz:

$$\frac{y0_{j+1} - 2 \cdot y0_j + y0_{j-1}}{h^2} + y0_j = e^{-x_j} \qquad \frac{y1_{j+1} - 2 \cdot y1_j + y1_{j-1}}{h^2} + y1_j = 0$$

Bu tenglamalardan foydalanib, quyidagilarni yozamiz:

$$y0_{j+1} := h^2 \cdot (e^{-x_j} - y0_j) - y0_{j-1} + 2 \cdot y0_j$$

$$y1_{j+1} := -h^2 \cdot y1_j - y1_{j-1} + 2 \cdot y1_j$$

$$B := \frac{2 - y0_N}{y1_N} \qquad B = -6.446$$

$$j := 0..N \qquad y_j := y0_j + B \cdot y1_j \qquad y_N = 2$$

Differensial tenglama yechimining grafigi 7-rasmda tasvirlangan

Quyidagilarni erkli beramiz: $m := 0.5 + \frac{1}{50} \cdot FRAME \qquad y0_1 := y0_0 + \frac{h}{m}$ $y1_1 := h \quad y1_1 \neq 0$.

Grafikni qurish uchun zarur bo‘lgan parametrlarni kiritamiz (8-rasm):

$$N := 0 \quad j := 1..N-1 \quad a := 0 \quad b := 4 \quad h := \frac{b-a}{N} \quad h = 0.1$$

$$y0_0 := 1 \quad y1_0 := 0 \quad x_j := j \cdot h \quad x_0 := a \quad x_N := b$$

$$y0_{j+1} := h^2 \cdot (e^{-x_j} - y0_j) - y0_{j-1} + 2 \cdot y0_j$$

$$y1_{j+1} := -h^2 \cdot y1_j - y1_{j-1} + 2 \cdot y1_j \quad B := \frac{2 - y0_N}{y1_N}$$

$$j := 0..N \quad y_j := y0_j + B \cdot y1_j \quad y_N = 2$$

$$yt(t) := \frac{1}{2} \cdot (e^{-t} + \cos(t)) + \frac{\sin(t)}{\sin(4)} \cdot \left[2 - \frac{1}{2} \cdot (e^{-4} + \cos(4)) \right]$$

$$yt(0) = 1 \quad yt(4) = 2$$

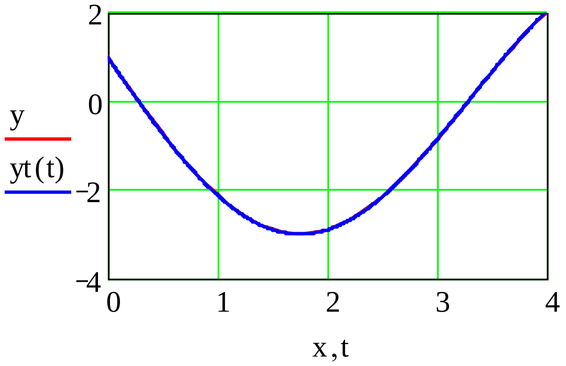
Bu grafikdan ko‘rinadiki, olingan yechim aniq yechimdan deyali farq qilmaydi.

4-misol. Issiqlik o‘tkazuvchanlikning statsionar tenglamasi yoki «Reaksiya-diffuziya» turidagi statsionar tenglamalardan biri quyidagi ikki nuqtali chegaraviy masalaga olib kelingan:

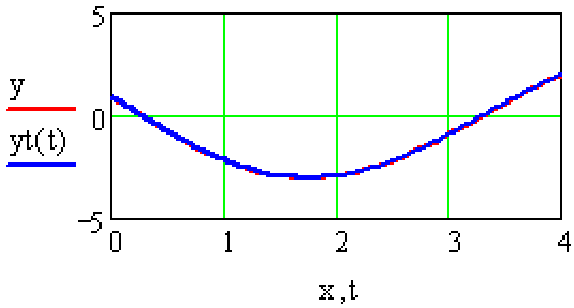
$$y'' + x^2 y + 2 = 0;$$

$$y(-1) = 0; \quad y(1) = 0.$$

Bu chegaraviy masalani o‘q otish usuli bilan yeching.



7-rasm.



8-rasm.

Yechish. Dastlab berilgan chegaraviy masalani quyidagi birinchi tartibli ikkita tenglamalar sistemasiga keltirib olamiz:

$$\begin{cases} y' = f, \\ f' = -2 - x^2 y, \\ y(-1) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

Endi bu masalani Koshi masalasiga keltiramiz. Buning uchun α parametrni shunday kiritamizki, uning qiymati hozircha noma'lum $f(-1)$ gat eng bo'lsin. Ana shu x=1 nuqtada chegaraviy shart bajarilayotgandagi α parametrni topish uchun masalaga yana ikkita tenglama kiritamiz. Buning uchun dastlabki sistemani α parametr bo'yicha integrallaymiz: $p = \dfrac{\partial y}{\partial \alpha}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$. Natijada quyidagi oddiy differensial tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} y' = f, \\ f' = -2 - x^2 y, \\ p' = q, \\ q' = -x^2 p, \\ y(1) = 0, \quad f(1) = \alpha, \\ p(1) = 1, \quad q(1) = 0. \end{cases}$$

Bu sistemani fiksirlangan α parameter uchun yechib, $y(2)$ ning qiymatini topamiz, bu qiymat, umuman olganda, haqiqiysidan farq qiladi. α parameterning qiymatini to'g'rilash uchun uning yangi qiymatini quyidagi formula yordamida hisoblaymiz:

$$\alpha_{new} = \alpha_{old} - \frac{y(1)_{calc} - y(1)}{f(1)}.$$

Bu yerda $y(1)_{calc}$ – hisoblashlar natijasida topilgan $y(1)$ ning qiymati. Endi oxirgi sistemani yana bir bor yechamiz va hokazo.

Bu hisoblashlar jarayoni $|\alpha_{new} - \alpha_{old}| < \varepsilon$ shart bajarilgunga qadar qayta bajariladi, bu yerda ε - oldindan berilgan hisob aniqligi.

Dastlabki berilgan chegaraviy masalani o‘q otish usuli bilan yechishda avvalo u Koshi masalasini yechishga olib kelinadi, keyin esa «yetishmayotgan» vektor shaklidagi boshlang‘ich qiymat otishmalar usuli yordamida aniqlab olinadi. Bu vektorni topib olish uchun Mathcad da ushbu

sbval(v,x1,x2,D,l,s) va bvalfit(v,x1,x2,xf,D,l1,l2,s)

funksiyalar mavjud, bu yerda **v** – «yetishmayotgan» boshlang‘ich shartlar vektori; **x1,x2** – yechim izlanayotgan kesmaning boshlang‘ich va oxirgi nuqtalari; **D** – hosilalar vektori; **l** – boshlang‘ich qiymatlarning vektor funksiyasi; «yetishmayotgan» boshlang‘ich qiymatlar **v** vektorning komponentalarida beriladi; **s** – hisoblangan yechim va aniq yechimlarning kesma oxiridagi qiymatlari arqi vektori. Ushbu **bvalfit** funksiya ikkinuqtali chegaraviy masalani yechadi, bunda yechimning izlanayotgan intervaldagi **xf** nuqtadagi qiymatidan foydalaniladi. Agar integrallash kesmasi ichida uzilish mavjud bo‘lsa, u holda bu usuldan foydalanish samarali natija beradi.

Quyida misoldagi dastlab berilgan chegaraviy masalani **sbval** (**v**, ***x1***, ***x2***, **D**, **l**, **s**) funksiyadan foydalanib yechishning Mathcad dasturi keltirilgan. Berilgan chegaraviy masalani Koshi masalasiga keltirish uchun $y'(-1)$ ning qiymatini topishimiz zarur. Bunda differensial tenglama ikkinchi tartibli bo‘lganligi uchun **v –** vektor ikki komponentali bo‘lib, uning faqat bitta komponentasidagiga qiymat mavjud. **I** vektor esa y va y' larning boshlang‘ich qiymatlariga teng, yani 0 ga va v_0 ga. Kesmaning oxirida faqat bitta $y(1)=0$ qiymat berilganligi uchun **s** – vektor y_0 ning skalyar qiymatiga teng (y vektor y_0 ning va y_1 (y'), y_2 (y'') larning qiymatlaridan iborat). Natijada *s* vektor «yetishmayotgan» boshlang‘ich qiymatni beradi: $y'(1) = 2.142$. Endi hosil qilingan yangi Koshi masalasini biror funksiya, masalan, **rkfixed** yordamida yechishimiz mumkin bo‘ladi. Quyida ana shu hisoblashlarning Mathcad dasturi keltirilgan va hisob natijalari grafigi tasvirlangan (9-rasm).

$v_0 := 1 \quad D(x,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -2 - x^2 \cdot y_0 \end{pmatrix} \quad x1 := -1 \quad x2 := 1$

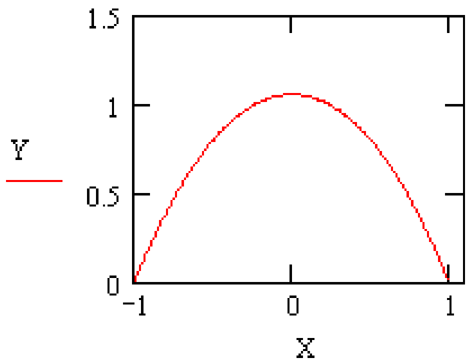
$s(x2,y) := y_0 \quad l(x1,v) := \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad S := \mathrm{sbval}(v,-1,1,D,l,s) \quad S_0 = 2.142$

$N := 200 \qquad ic := \begin{pmatrix} 0 \\ S_0 \end{pmatrix}$

$Sol := rkfixed(ic, x1, x2, N, D)$

$X := Sol^{\langle 0 \rangle} \qquad Y := Sol^{\langle 1 \rangle}$

$Y_0 = 0 \qquad Y_N = 9.974 \times 10^{-11}$



9-rasm.

8. Ba’zi qiziqarli amaliy masalalarni Maple matematik paketi yordamida sonli yechish

1-misol. Quyidagi chegaraviy masalani yeching va uni analitik yechim bilan taqqoslang, natijalarning grafigini quring:

$$(x+1)u^{IV} + (4+x)u'' + 3u = 6x + 3, \quad x \in [0;1],$$
$$u'(0) = 2, \quad u'''(0) = 0, \quad u(1) = 3 + \cos 1, \quad u''(1) = -\cos 1.$$

Yechish: Masalaning analitik yechimi: $u(x) = (x-1)e^{x^2}$.

Masalaning Maple matematik paketidagi dasturi va uning sonli yechimi quyidagicha (10-rasm):

$restart \;\; with(plots) : Order := 6 :$

$Ordev = 6 : eq := (x+1) \cdot diff(y(x), x\$4) + (4 + x) \cdot \mathrm{diff}(y(x), x\$2) + 3 \cdot \mathrm{y}(x) = 6 \cdot x + 3;$

$cond := y(1) = 3 + \cos(1), \left(\mathrm{D}^{(2)}\right)(y)(1) = -\cos(1), \mathrm{D}(y)(0) = 2, \left(\mathrm{D}^{(3)}\right)(y)(0) = 0;$

$de := dsolve(\{eq, cond\}, y(x), numeric); p1d := rhs(\%) :$

$dsolve(\{eq, cond\}, y(x), series); \;\; convert(\%, polynom) : p2d := rhs(\%) :$

$p1 := odeplot(p1d, 0 .. 1, thickness = 2, color = black) :$

$p2 := plot(p2d, x = 0 .. 1, thickness = 2, color = blue) :$

$p3 := plot(\cos(x) + 2 \cdot x + 1, x = 0 .. 1) : display(p3);$

$$(x+1)\left(\frac{d^4}{dx^4} y(x)\right) + (4+x)\left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) + 3\, y(x) = 6\, x + 3$$

$$y(1) = 3 + \cos(1), \mathrm{D}^{(2)}(y)(1) = -\cos(1), \mathrm{D}(y)(0) = 2, \mathrm{D}^{(3)}(y)(0) = 0$$

proc(x_bvp) ... **end proc**

2-misol. Laminar oqimning kritik nuqtasi atrofida harakat miqdori balansini ifodalovchi xususiy hosilali tenglama o‘xshash akslantirishlar orqali ushbu

$$y'''+y\cdot y''-y''^2+1=0\,,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y'(5)=1$$

chala chegaraviy masalaga olib kelindi [8]. Dastlab ushbu chegaraviy masalaga yetishmaydigan $y''(0)$ boshlang‘ich shartni toping. Keyin esa hosil bo‘lgan to‘la chegaraviy masalani sonli yeching.

Yechish. Ushbu masalaga yetishmayotgan boshlang‘ich shartning ixtiyoriy ikkita qiymatini tanlab olamiz, masalan, $y_1''(0)=1$ va $y_2''(0)=2$. Biror bir integrallash sxemasidan foydalanib, $y_1'(5)$ va $y_2'(5)$ ning 1 dan farqli qiymatlarini topib olishimiz mumkin. Endi $y_1''(0)$, $y_2''(0)$, $y_1'(5)$ va $y_2'(5)$ qiymatlarni ushbu

$$k_{imp}=\frac{k_2[G(k_1)-1]-k_1[G(k_2)-1]}{G(k_1)-G(k_2)}$$

formulaga qo‘yib, $y_{imp}''(0)$ qiymatni topish mumkin, bu yerda k_1 va k_2 - yetishmaydigan ixtiyoriy tanlangan ikkita boshlang‘ich shartlar; $G(k_1)$, $G(k_{21})$ - berilgan boshlang‘ich shartlar hamda $k_1\neq k_2$ bo‘lganda $G(k_1)\neq G(k_2)$ o‘rinli. Iteratsion jarayon $y''(0)=1{,}23259$ ekanligini beradi.

Endi Maple matematik paket yordamida ushbu

$$y'''+y\cdot y''-y''^2+1=0\,,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y'(5)=1\,,\quad y''(0)=1{,}23259$$

to‘la chegaraviy masalani sonli yechamiz:

$restart\ with(plots):$

$$ode := \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)\right)+\left(y(x)-\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)+1=0;$$

$cond := y(0)=0, D(y)(0)=0, \left(D^{(2)}\right)(y)(0)=1.23259;$

$de := dsolve(\{ode, cond\}, type=numeric, range=0..2);$

$odeplot(de, x=0..1);$

$Order := 6;$

$de1 := dsolve(\{ode, cond\}, y(x), series);\ convert(\%, polynom);$

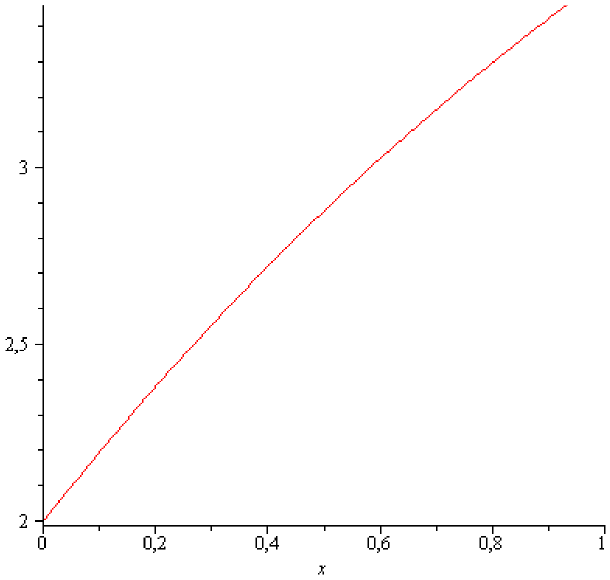
$p2d := rhs(\%); plot(p2d, x=0..1);$

$$\frac{d^3}{dx^3}y(x)+\left(y(x)-\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)+1=0$$

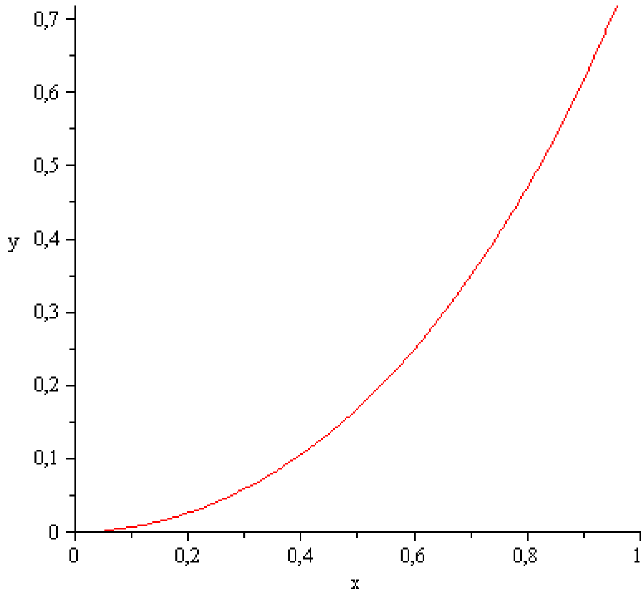
$$y(0)=0, D(y)(0)=0, D^{(2)}(y)(0)=1.2325\text{9}$$

proc(x_rkf45) ... **end proc**

Bu masalaning Runge-Kutta va darajali qatorga yoyih usullar bo‘yicha olingan yechimlari ko‘rinishlari aynan bir xil (11-rasm):



10-rasm. 1-misoldagi chegaraviy masala yechimining grafigi.



11-rasm. 2-misoldagi chegaraviy masala yechimining grafigi.

3-misol. Ushbu

$$y''=e^x+\sin y,\quad y(0)=y_0=1,\quad y(1)=y_1=2,\quad x\in[0,1]=[a,b]$$

birinchi chegaraviy masalani o‘q otish usuli bilan yeching.

Yechish. Ushbu $z=y'$ almashtirishni olib, berilgan ikkinchi tartibli differensial tenglamani ikkita birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasiga keltiramiz:

$$y'=z,\qquad z'=e^x+\sin y.$$

Bu chegaraviy masala uchun quyidagi chap chegara uchun yozilgan Koshi masalasini to‘rtinchi tartibli aniqlikka ega Runge-Kutta usuli bilan h=0,1 qadamda o‘ng chegarada ushbu

$$|y(b,y_0,\eta_k)|=|y(1.0,1.0,\eta_k)|=|\Phi(\eta_k)|\le\varepsilon$$

shart bajarilgunga qadar yechamiz, bu yerda ε=0.0001; $|y(1.0,1.0,\eta_k)|$ - Koshi masalasining b = 1.0 va $y(0)$ = y_0 = 1.0 lar uchun o‘ng chegaradagi yechimi; η_k - kesmaning chap chegarasidagi yechim birinchi hosilasining k-iteratsiyadagi qiymati yoki x = a nuqtada yechimga o‘tkazilgan urinma og‘ish burchagi tangensining biror qiymati.

Parametr η ning dastlabki ikkita qiymati sifatida quyidagilarni kiritamiz: η_0=1.0, η_1=0.8. Koshi masalasini η parametrning ana shu ikkita qiymat uchun Runge-Kutta usuli bilan h=0,1 qadamda ikki marta yechamiz va quyidagi mos ikkita natijaga kelamiz:

$$y(1.0,1.0,\eta_0)=3.168894836;\quad y(1.0,1.0,\eta_1)=2.97483325$$

Endi η parametrning yangi yaqinlashishni topish uchun ushbu

$$\Phi(\eta) = y(b, y_0, \eta) - y_1 = 0$$

chiziqli bo‘lmagan tenglamani kesuvchilar usuli bilan yechamiz (bu yerda $\Phi(\eta)$ funksiya hosilasini hisoblab bo‘lmaganligi uchun uning hosilasi mos ayirmali analogi bilan almashtiriladi, demak, bu yerda Nyuton usulini qo‘llab bo‘lmaydi). Bu ayirmali analog ikkita yaqinlashish, masalan, η_1 va η_2 lar bo‘yicha oson hisoblanadi. Ildizning izlanayotgan keyingi yaqinlashishlaridagi qiymati quyidagi munosabatdan topiladi:

$$\eta_{j+2} = \eta_{j+1} - \frac{\eta_{j+1} - \eta_j}{\Phi(\eta_{j+1}) - \Phi(\eta_j)}\Phi(\eta_{j+1})$$

Bu formula bo‘yicha iteratsiyalar berilgan aniqlik bajarilgunga qadar davom ettiriladi. Endi o‘rniga qo‘yishlarni bajaraylik:

$$\eta_2 = 0.8 - \frac{0.8 - 1.0}{2.97483325 - 3.168894836}(2.97483325 - 2.0) = -0.204663797.$$

Navbatdagi Koshi masalasini η_2 parameter bilan yechamiz: $y(1.0, 1.0, \eta_2) = 1.953759449$.

Bu jarayonni davom ettiramiz:

$$\eta_3 = -0.204663797 - \frac{-0.204663797 - 0.8}{1.953759449 - 2.97483325}(1.953759449 - 2.0) = -0.159166393;$$

$$y(1.0, 1.0, \eta_3) = 2.001790565; \quad |\Phi(\eta_3)| = 0.001790565 \geq \varepsilon;$$

$$\eta_4 = -0.159166393 - \frac{-0.159166393 - (-0.204663797)}{2.001790565 - 1.953759449}(2.001790565 - 2.0) = -0.160862503;$$

$$y(1.0, 1.0, \eta_4) = 2.000003115; \quad |\Phi(\eta_4)| = 0.000003115 \leq \varepsilon.$$

Bu hisoblashlarimizni jadvalda ifodalaylik:

j	η_j	$y(1.0, 1.0, \eta_j)$	$\Phi(\eta)$
0	+1.000000000	3.168894836	1.168894836
1	+0.800000000	2.974483325	0.974483325
2	-0.204663797	1.953759449	0.046240551
3	-0.159166393	2.001790565	0.001790565
4	-0.160862503	2.000003115	0.000003115

Berilgan chegaraviy masalaning taqribiy yechimi deb η_4 parametrli Koshi masalasini yechish natijasida funksiyaning quyidagi jadval shaklida olingan qiymatlarini tushunamiz:

x_k	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_k	1.0	0.99328	1.00601	1.03942	1.09497	1.17434	1.27944	1.41236	1.57528	1.77045	2.000

4-misol. Uzunligi L va radiusi R bo‘lgan doiraviy quvurdan o‘zgarmas tezlik bilan oqayotgan suyuqlikning harakat tenglamasi, uning oqim bo‘ylab temperaturasi e’tiborga olmaslik darajasida juda ham kam o‘zgaradi va devor bilan konvektiv issiqlik almashinishi kuzatiladi deb, o‘lchamsiz holda quyidagicha chiqarilgan [16]:

$$y''+y'-2y=0.$$

Quvurning kirish va chiqish chegaralarida o‘zgarmas temperaturalar berilgan, ya’ni chegaraviy shartlar quyidagicha:

$$y(0)=0, \quad y(4)=1.$$

Ushbu chegaraviy masalani o‘q otish usuli bilan yeching.

Yechish. Bu chegaraviy masalaning analitik yechimi quyidagicha:

$$y(x)=\frac{e^{x}-e^{-2x}}{e^{4}-e^{-8}}.$$

Bu chegaraviy masalaning ba’zi analitik usullar bilan olingan yechimlari quyidagicha [16]:

$$y(x)=\frac{x}{4}+e_1\frac{x}{4}\left(1-\frac{x}{4}\right)+e_2\frac{x}{4}\left(1-\left(\frac{x}{4}\right)^2\right),$$

bu yerda:

- eng kichik kvadratlar usuli: $e_1 = 0{,}1941$; $e_2 = -1{,}204$;
- Galyorkin usuli: $e_1 = 1{,}2994$; $e_2 = -1{,}8783$;
- kollokatsiya usuli: $e_1 = 2/3$; $e_2 = -4/3$;

Endi bu chegaraviy masalani o‘q otish usuli bilan yechamiz.

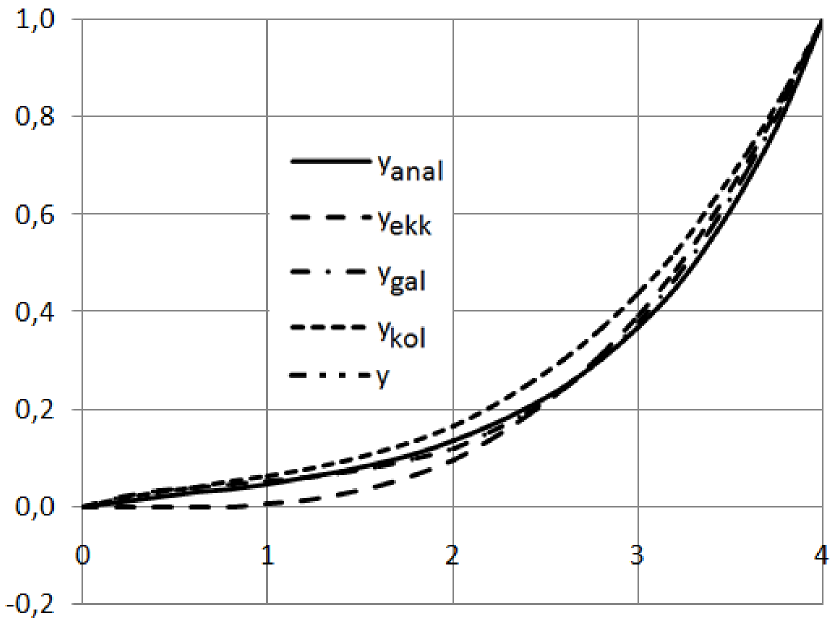
Dastlabki ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani $z=y'$ almashtirishni olib, ikkita birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltiramiz:

$$y'=z, \quad z'=2y-z.$$

Bu yerdan Koshi masalasiga kelish uchun yuqoridagi 3-misol algoritmidan foydalanamiz va quyidagi jadvaldagi va 12-rasmdagi natijalarga kelamiz.

x	y_{anal}	y_{ekk}	y_{gal}	y_{kol}	y_{uqotish}
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

0,2	0,0101	-0,0008	0,0180	0,0152	0,0151
0,4	0,0191	-0,0017	0,0310	0,0280	0,0281
0,6	0,0279	-0,0018	0,0403	0,0395	0,0396
0,8	0,0371	-0,0001	0,0473	0,0507	0,0508
1,0	0,0473	0,0042	0,0534	0,0625	0,0626
1,2	0,0591	0,0121	0,0601	0,0760	0,0761
1,4	0,0732	0,0244	0,0687	0,0922	0,0923
1,6	0,0900	0,0420	0,0807	0,1120	0,1121
1,8	0,1103	0,0660	0,0975	0,1365	0,1366
2,0	0,1350	0,0970	0,1205	0,1667	0,1668
2,2	0,1651	0,1362	0,1510	0,2035	0,2036
2,4	0,2017	0,1842	0,1906	0,2480	0,2481
2,6	0,2465	0,2422	0,2405	0,3012	0,3013
2,8	0,3011	0,3109	0,3023	0,3640	0,3641
3,0	0,3678	0,3913	0,3773	0,4375	0,4376
3,2	0,4493	0,4843	0,4670	0,5227	0,5228
3,4	0,5488	0,5908	0,5726	0,6205	0,6206
3,6	0,6703	0,7116	0,6958	0,7320	0,7321
3,8	0,8187	0,8477	0,8377	0,8582	0,8583
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000



12-rasm.

9. Chegaraviy masalani ikkita Koshi masalasiga keltirib, chiziqli otishmalar usuli bilan sonli yechish va uni Matlab matematik paketida amalga oshirish

Berilgan chiziqli chegaraviy masalaning yechimini topish tenglamaning chiziqli tuzilmasi va ikkita xususiy Koshi masalalaridan foydalanish imkonini beradi. Faraz qilaylik, $u(t)$ – quyidagi Koshi masalasining yagona yechimi:

$$u''(t) = p(t)u'(t)+q(t)u(t)+r(t), \quad u(a) = \alpha, \; u'(a) = 0; \qquad (*)$$

$v(t)$ – quyidagi Koshi masalasining yagona yechimi bo‘lsin:

$$v''(t) = p(t)v'(t)+q(t)v(t), \quad v(a) = 0, \; v'(a) = 1; \qquad (**)$$

U holda ushbu

$$y(t) = u(t) + Cv(t)$$

chiziqli kombinatsiya quyidagi

$$y''(t) = p(t)y'(t)+q(t)y(t)+r(t)$$

tenglamaning yechimi bo‘ladi, buni quyidagi hisoblashlardan ko‘rish mumkin:

$$y'' = u'' + Cv'' = p(t)u'(t) + q(t)u(t) + r(t) + p(t)Cv'(t)+q(t)Cv(t) =$$
$$=p(t)(u'(t) + Cv'(t)) + q(t)(u(t) + Cv(t)) + r(t) = p(t)y'(t) + q(t)y(t) + r(t).$$

Faraz qilaylik, $y(t) = u(t) + Cv(t)$ yechim quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin:

$$y(a) = u(a) + Cv(a) = \alpha + 0 = \alpha, \quad y(b) = u(b) + Cv(b).$$

Agar bu yerda $y(b)=\beta$ deb faraz qilsak, u holda $C=(\beta - u(b))/v(b)$. Shunday qilib, agar $v(b)\neq 0$ desak, u holda berilgan chegaraviy masalaning yagona yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$y(t) = u(t) + v(t)\,(\beta - u(b))/v(b).$$

1-misol. Quyidagi chegaraviy masalani yeching:

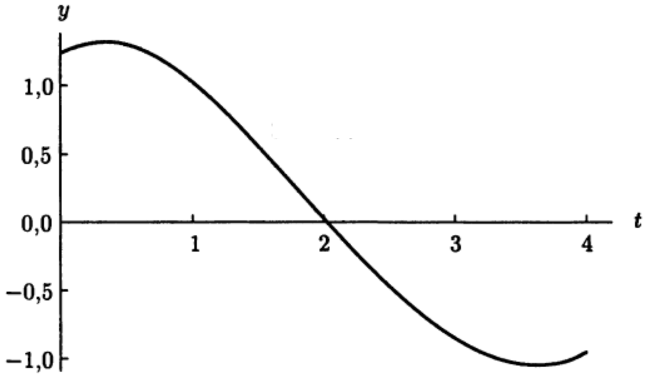
$$y''(t) = \frac{2t}{1+t^2}\,y(t) - \frac{2}{1+t^2}\,y(t) + 1, \quad y(0) = 1.25, \quad y(4) = -0.95, \quad t \in [0;4].$$

Yechish. Yuqorida berilganlarga ko‘ra $p(t)=2t/(1+t^2)$, $q(t)=-2/(1+t^2)$, $r(t) = 1$.

Bu chegaraviy masalaning analitik yechimi quyidagicha:

$$y(t) = 1.25 + 0.4860896526t - 2.25t^2 + 2t\arctan(t) - 0.5(1+t^2)\ln(1+t^2).$$

Bu chegaraviy masalaning chiziqli otishmalar va Runge-Kutta usullari bilan Matlab dasturi yordamida olingan sonli yechimi [10] da batafsil bayon qilingan va h=0.1 uchun yuqori aniqlidagi yechimga erishilgan (13-rasm).



13-rasm.

Endi umumiy xulosalarga kelaylik:

- agar har bir chegarada ikki va undan ortiq shartlar qo‘yilgan bo‘lsa, u holda bu usulni yuqori tartibli tenglamalarga qo‘llash juda qiyin; bunday holda birvarakayiga bir nechta parametr bo‘yicha "otishmalar" o‘tkazish talab qilinadi, bu esa samarali algoritmni ishlab chiqishni qiyinlashtiradi; bunday chegaraviy masalalarni chekli ayirmalar usuli yordamida yechish ancha soddaroq.
- berilgan chegaraviy masala yaxshi shartlashgan, ammo unga mos tuzilgan Koshi masalasi yomon shartlashgan bo‘lib chiqishi mumkin (masalan, Shredinger tenglamasi); u holda Koshi masalasini yechishda xatolik keskin oshib ketadi va hisob natijalarida hosil bo‘ladigan sonlarni kompyuter xotirasida ifodalab bo‘lmasligi mumkin, ammo chekli ayirmalar usuli qo‘llanilganda berilgan chegaraviy masala uchun bunday holat yuzaga kelmaydi.

Shularga ko‘ra hozirda ayirmali sxemalar usuli o‘q otish usulini amaliyotdan siqib chiqarmoqda.

Mustaqil ish topshiriqlari

Quyidagi topshiriqlarni bajarish jarayonida ixtiyoriy dasturlash tili yoki biror matematik paketdan foydalanish mumkin. Ba’zi misollarning aniq yechimi berilgan yoki ularni topish juda oson. Hisoblashlarni ko‘rsatilgan aniqlikda qo‘lda va kompyuterda bajarish talab qilinadi.

1-topshiriq.

Yuqori tartibli oddiy differensial tenglama uchun chiziqli chegaraviy masalani otishmalar usuli bilan yechish

Quyidagi yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan chegaraviy masalani yeching:

$$u^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k(x) u^{(k)} + f(x),$$

$$\sum_{j=0}^{p-1} c_{ij} u^{(j)}(a) = \alpha_i, \ \ i = 1,2,\dots,m, \ \ a \le x \le b$$

$$\sum_{j=0}^{p-1} d_{ij} u^{(j)}(b) = \beta_i, \ \ i = 1,2,\dots,p-m.$$

Chegaraviy masalaning aniq yechimi varianda berilgan. Qadamni avtomatik tanlash bilan Runge-Kutta usulidan foydalanib, chegaraviy masalani o‘q otish usuli bilan yeching. Usulning sifatini xatolikni (xatolik tartibi ε) va hisob vaqti sarfini ko‘rsatish bilan baholang. Hisoblash mashinalarining aniqligi juda yuqori, shunga qaramasdan, hisoblangan yechimda boshlang‘ich kiritilgan ma’lumotlar xatoligining ta’sirini ko‘rsating, buning uchun ikkita hisob bosqichi bajaring: x=0 nuqtadagi aniq chegaraviy shart bo‘yicha va chegaraviy shartga kiritilgan ε xatolik bo‘yicha.

Bularni qiyidagi bosqichlarda bajaring:

1) o‘q otish usuli algoritmi uchun dastur tuzing; avtomatik qadam tanlash bilan to‘rtinchi tartibdan kam bo‘lmagan Runge-Kutta usuli bo‘yicha hisob dasturini tuzing yoki standart dasturlardan foydalaning;

2) chegaraviy shartlarga $\varepsilon = 0.01$ xatolik kiriting;

3) berilgan chegaraviy masalaning $x_i = ih$, i=0,1,…,10, $h = 0.1$ nuqtalardagi $y_i=y(x_i)$ taqribiy yechimini aniq chegaraviy shartlar bilan yeching; lokal xatolikni $\varepsilon = 10^{-7}$ deb oling;

4) ushbu $\delta = \max\limits_i |u(x_i) - y_i|$ global xatolikni hisoblang va hisob vaqtini baholang (masalan, berilgan lokal xatolikni chiqarish uchun berilgan masalaning o‘ng tarafida bajariladigan hisoblashlar soni bilan).

5) xuddi shu masalani chegaraviy shartlarga kiritilgan xatoligi holida $\tilde{y}_i = \tilde{y}(x_i)$ yechimini o‘sha nuqtalarda hisoblang;

6) ushbu $\tilde{\delta} = \max\limits_i |\tilde{y}_i - y_i|$ xatolikni baholang.

Hisob variantlari

1-variant.

$$u^{\mathrm{IV}} - xu''' - 4x^3u' - 12u = 2xe^{x^2}(26x^2 - 18x + 21), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$u(0) = -1, \quad u'(1) = e, \quad u''(1) = 4e, \quad u'''(0) = 6.$$

Aniq yechim: $u(x) = (x-1)e^{x^2}$.

2-variant.

$$u^{\mathrm{IV}} + 5u''' + u'' + 120u' + 650u = e^{5x-5}(11.5\sin x + 4.9\cos x), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$5u''(0) + u'''(0) = 7.42483549, \quad u(0) - u'(0) = 4.452361,$$

$$u(1) + u'''(1) = 0.06111922865, \quad u'(1) + u''(1) = 0.240924833.$$

Aniq yechim: $u(x) = (e^{5(x-1)}\sin x + e^{5(1-x)}\cos x)/200$.

2-topshiriq.

Chegaraviy masalaning yechimidan bog‘liq bo‘lgan funsionalning taqribiy qiymatini hisoblash

1-misol. Quyidagi yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan ushbu

$$u^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k(x)u^{(k)} + f(x),$$

$$\sum_{j=0}^{p-1} c_{ij}u^{(j)}(a) = \alpha_i, \ i = 1,2,...,m, \ \ a \le x \le b$$

$$\sum_{j=0}^{p-1} d_{ij}u^{(j)}(b) = \beta_i, \ i = 1,2,..., p-m$$

chegaraviy masalani yeching va uning yechimidan bog‘liq bo‘lgan ushbu

$$I = \int_a^b F(x,u,u',...,u^{(p)})dx$$

funksionalning taqribiy qiymatini hisoblang.

Bu misolning aniq yechimi ma’lum, berilgan chegaraviy masalaning uchinchi tartibdan kam bo‘lmagan Adams usulidan foydalanib, o‘q otish usuli bilan hisob sifatini (xatoligini va hisob vaqtini) baholang.

Quyidagilarni bajarish talab qilinadi:

1) o‘q otish usuli algoritmi uchun dastur tuzing; avtomatik qadam tanlash bilan uchinchi tartibdan kam bo‘lmagan Adams usuli bo‘yicha hisob dasturini tuzing yoki standart dasturlardan foydalaning;

2) berilgan chegaraviy masalaning $x_i = ih$, i=0,1,…,10, h = 0.1 nuqtalardagi $y_i = y(x_i)$ taqribiy yechimini aniq chegaraviy shartlar bilan yeching; lokal xatolikni $\varepsilon = 10^{-7}$ deb oling;

3) ushbu $\delta = \max_i |u(x_i) - y_i|$ global xatolikni hisoblang va hisob vaqtini baholang (masalan, berilgan lokal xatolikni chiqarish uchun berilgan masalaning o‘ng tarafida bajariladigan hisoblashlar soni bilan).

4) berilgan chegaraviy masalani yechish dasturi yaratilgandan so‘ng I funksionalning qiymatini hisoblash uchun masala quyidagi yana bitta tenglama bilan to‘ldiriladi:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = F(x,u,u',...,u^{(p)}), \quad I(a) = 0.$$

Hisob variantlari

1-variant.

$$(x+1)u^{\mathrm{IV}} + (4+x)u'' + 3u = 6x + 3, \quad 0 \le x \le 1,$$

$$u'(0) = -3.710295, \quad u'''(0) = -81.6247,$$

$$u(1) = 0.00690887, \quad u''(1) = 0.234901.$$

Aniq yechim: $u(x) = \cos x + 2x + 1$.

Quyidagi integralni hisoblang: $I=\int_0^1 (u'''+u''^2)dx$.

2-variant.

$$u^{IV}-63u''+64u=-300e^{-2x}, \quad 0\le x\le 1,$$
$$u(0)+u''(0)=5, \quad u(0)-u''(0)=-1,$$
$$u'(1)=-1.1121, \quad u''(1)=0.0010388.$$

Aniq yechim: $u(x)=\cos x+e^{-2x}$.

Quyidagi integralni hisoblang: $I=\int_0^1 (uu'+u''^2)dx$.

2-misol. Quyidagi yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan chegaraviy masalani yeching:

$$u^{(p)}=f(x,u,u',u'',...,u^{(p-1)}), \quad a\le x\le b,$$
$$g_i(u(a),u'(a),u''(a),...,u^{(p-1)}(a))=0, \quad i=1,2,...,m,$$
$$g_i(u(b),u'(b),u''(b),...,u^{(p-1)}(b))=0, \quad i=m+1,m+2,...,p,$$

va bu sistemaning yechimidan bog‘liq bo‘lgan ushbu

$$I=\int_a^b F(x,u,u',...,u^{(p)})dx$$

funksionalning taqribiy qiymatini hisoblang.

Bu misolning aniq yechimi ma’lum, berilgan chegaraviy masalaning o‘q otish usuli bilan hisob sifatini (xatoligini va hisob vaqtini) baholang. Koshi masalasini yechish uchun Feldberg usulidan foydalaning.

Quyidagilarni bajarish talab qilinadi:

1) o‘q otish usuli algoritmi uchun dastur tuzing; Feldberg usuli bo‘yicha hisob dasturini tuzing yoki standart dasturlardan foydalaning;

2) berilgan chegaraviy masalaning $x_i = ih$, i=0,1,…,10, h = 0.1 nuqtalardagi $y_i=y(x_i)$ taqribiy yechimini aniq chegaraviy shartlar bilan yeching; lokal xatolikni $\varepsilon = 10^{-6}$ deb oling;

3) ushbu $\delta=\max_i |u(x_i)-y_i|$ global xatolikni hisoblang va hisob vaqtini baholang (masalan, berilgan lokal xatolikni chiqarish uchun berilgan masalaning o‘ng tarafida bajariladigan hisoblashlar soni bilan).

4) berilgan chegaraviy masalani yechish dasturi yaratilgandan so‘ng I funksionalning qiymatini hisoblang.

Hisob variantlari

1-variant.

$$2u^{\mathrm{IV}}-\left(3\frac{4x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}+(2x^2+1)u\right)u''-2u'^2=\frac{2}{\left(x^2+1\right)},\quad 0\le x\le 1,$$

$$u(0)=\sqrt{2}\,,\quad u'(0)=0\,,\quad u''(0)=1\,,\quad u'''(0)=0\,.$$

Aniq yechim: $u(x)=\sqrt{2\left(x^2+1\right)}$.

Quyidagi integralni hisoblang: $I=\int\limits_0^1(uu'+u''^2)dx$.

2-variant.

$$u'''+u''-u'+u^2e^{-x}=\sin 2x(\sin 2x-15)e^{-x},\quad 0\le x\le 1,$$

$$2u(0)+2u'(0)-u''(0)=0,\quad u'(1)-u(1)=-2.2624,\quad u(0)\cdot u'(0)+u''(0)=4\,.$$

Aniq yechim: $u(x)=e^x\sin 2x$.

Quyidagi integralni hisoblang: $I=\int\limits_0^1(u'^2+u''^2)dx$.

3-topshiriq.

Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun har xil qiziqarli chegaraviy masalalarni o‘q otish usuli bilan sonli yechish

Quyidagi chegaraviy masalalarni o‘q otish usuli bilan sonli yechishning dasturini yarating, natijalarni tahlil qiling va zarur bo‘lgan hollarda qo‘shimcha hisoblashlarni bajaring.

1-misol. Konsol balkaning egilishini tadqiq qilishda quyidagi nochiziqli chegaraviy masalaga kelindi:

$y''(x)+\beta\cos y(x)$ – differensial tenglama;

$y(0)=0$; $y'(1)=0$ – chegaraviy shartlar,

bunda y – balka o‘qiga nisbatan kesimning burilish burchagi; Ox – balka o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan koordinata o‘qi. Bu masalaning sonli yechimini o‘q otish usuli bilan quyidagi variantlarda aniqlang: $\beta=0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$.

2-misol. Kuchli aniqlikka ega elektr toki o‘tkazgichlarni loyihalashda nurlanish ko‘rinishidagi issiqlik ajratilishi hodisasi uchun jism sirtining yuzasini oshirish katta amaliy ahamiyatga ega, chunki bu ortiqcha issiqlikni chiqarib tashlashning yegona uslubi hisoblanadi. Bu holda issiqlik bilan nurlantiruvchi moslamaning eng kam miqdordagi massaga ega bo‘lishi uchun uni yon yoqlari orasidagi eng kichik burchakli yupqa xalqali plastinkalar ko‘rinishida tayyorlashadi. bunday plastinkada temperatura taqsimoti quyidagi chegaraviy masalaning yechimi bo‘ladi:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1}{x+\rho}-\frac{tg\alpha}{(1-x)tg\alpha+\theta}\right)\frac{dy}{dx}-\frac{\beta y^4}{(1-x)tg\alpha+\theta}=0, \quad y(0)=1, \quad \frac{dy(1)}{dx}=0$$

bu yerda $x=\frac{r-r_B}{r_T-r_B}$; $y=\frac{T}{T_B}$; $\theta=\frac{z_T}{r_T-r_B}$; $\rho=\frac{z_B}{r_T-r_B}$; α – plastinka qirralari orasidagi burchak; r, r_B, r_T, z_T – mos ravishda joriy radius, asos radiusi, uchdagi radius va uchdagi plastinka qalinligi; T va T_B – joriy temperatura va asosning temperaturasi. Plastinkadagi y – nisbiy temperaturani ushbu parametrlarda ρ = 0.5, θ = 0.05, α = 6^0 va β parametr qiymatining quyidagi variantlarida aniqlang: β = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0.

3-misol. Quvur shaklidagi reaktor – kimyoviy reagentlar qorishmasi oqib o‘tadigan quvur bo‘lib, bunday reaktorlar kimyoviy zavodlarni loyihalashda muhim qurilmalardan biri hisoblanadi. Faraz qilaylik, reaktorda n-tartibli $A+A\to B$ ko‘rinishdagi izotermik jarayon kechayotgan bo‘lsin. U holda A komponentaning y – nisbiy konsentratsiyasi quyidagi chegaraviy masaladan topiladi:

$$\frac{d^2y}{dz^2}-N\frac{dy}{dz}-NRy^n=0, \quad y(0)-\frac{1}{N}\frac{dy(0)}{dz}=1, \quad \frac{dy(1)}{dz}=0.$$

Bunda

$$y=\frac{C_A}{C_{AO}}, \quad z=\frac{x}{L}, \quad N=\frac{vL}{E_a}, \quad R=\frac{kL}{v},$$

bu yerda C_A – A komponentaning konsentratsiyasi; C_{AO} – quvurga kelib tushayotgan suyuqlikda mavjud A komponentaning konsentratsiyasi; L – quvurning uzunligi (quvurning bu uzunligi reaksiyani yakunlash uchun yetarli deb faraz qilinadi); v – A komponenta oqiminingo‘q bo‘ylab tezligi; E_a – diffuziyaning samaradorlik koeffisiyenti; k – kimyoviy reaksiyaning sodir bo‘lish tezligi konstantasi. A komponentaning y – nisbiy komsentra-tsiyasini quyidagi parametrlarda aniqlang: 1) n = 2, N = 1, R = 1.94; 2) n = 2, N = 1, R = 3.24; 3) n = 2, N = 2, R = 0.4; 4) n = 2, N = 2, R = 0.815; 5) n = 2, N = 2, R = 2.16;

4-misol. G‘ovakli katalizatorda issiqlik va massaning ko‘chirilishi qaralayotganda quyidagi chegaraviy masalaga kelinadi:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\delta y\exp\left(\frac{\gamma\beta(1-y)}{1+\beta(1-y)}\right), \quad \frac{dy(0)}{dx}=0, \quad y(1)=1.$$

Bu chegaraviy masalaning yechimini quyidagi parametrlarda toping: 1) β = 0.4, γ = 10, δ = 0.14; 2) β = 0.3, γ = 15, δ = 0.10; 3) β = 0.4, γ = 10, δ = 0.12; 4) β = 0.3, γ = 15, δ = 0.08; 5) β = 0.2, γ = 20, δ = 0.10.

5-misol. Kimyo texnologiyasi jarayonida nonyuton suyuqlikning tabiiy konveksiya jarayonini tadqiq qilishda parallel joylashgan plastinkalar orasida suyuqlikning tezligi quyidagi chegaraviy masalaning yechimidan iborat bo'ladi:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (x-1)/\left(1+1/\beta\sqrt{\left(\alpha\frac{dy}{dx}\right)^2+1}\right), \quad y(0)=0, \quad y(1)=1.$$

Tezlik taqsimotini quyidagi parametrlarda toping: $\alpha = 0.01$ va $\beta = 0.2$; $\beta = 0.4$; $\beta = 0.6$; $\beta = 0.8$; $\beta = 1.0$.

4-topshiriq.

Matematik paketlar (Maple, Mathcad MATLAB, Mathematica va boshqa) yoki yuqori bosqichli algoritmik tillar (Fortran, Delphi, Visual Besic, Pascal ABC, C++ va boshqa)dan foydalanib, quyidagi chegaraviy masalalarning berilgan kesmadagi yechimini o'q otish (otishmalar) usuli yordamida toping va hosil qilingan yechimning grafigini chizing:

1. $x^2y'' - xy' = 3x^3$; $y(1) = 2$, $y(2) = 9$, $x\in[1, 2]$.
2. $x^2y'' + xy' - y = x^2$; $y(1) = 1.333$, $y'(3) = 3$, $x\in[1, 3]$.
3. $y'' + xy' + y = 2x$; $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, $x\in[0, 1]$.
4. $y'' + y\,\mathrm{ch}x = 0$; $y(0) = 0$, $y(2.2) = 1$, $x\in[0, 2.2]$.
5. $y'' + (x-1)y' + 3.125y = 4x$; $y(0) = 1$, $y(1) = 1.368$, $x\in[0, 1]$.
6. $x^2y'' - 2y = 0$; $y(1) - 2y'(1) = 0$, $y(2) = 4.5$, $x\in[1, 2]$.
7. $y'' + x^2y = -2$; $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$, $x\in[-1, 1]$.
8. $-y'' + x^2y = (\text{p}^2/4 + x^2)\cos(\text{p}\,x/2)$; $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, $x\in[0, 1]$.
9. $x^2y''\ln(x) - xy' + y = 0$; $y(1) = 0$, $y(e) = e-2$, $x\in[1, e]$.
10. $y'' = \sqrt{y'}$, $y(0) = 0$, $y(2) = 2/3$, $x\in[0, 2]$.
11. $y'' - y = x$, $2y(0) - y'(0) = 1$, $y(1) = 2$, $x\in[0, 1]$.

Sinov savollari

1. Differensial va oddiy differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Differensial tenglamaning tartibi deganda nimani tushunasiz?
3. Koshi masalasi va chegaraviy masalalarni, ulardagi umumiylik va farqlarni ayting.
4. O'q otish usulining asosiy g'oyasi nimadan iborat?
5. O'q otish usuliga geometrik talqin bering.
6. O'q otish usuli yuqori tartibli oddiy differensial tenglamalarga va ularning sistemasiga qanday qo'llaniladi?
7. Chegaraviy masalani Koshi masalasiga keltirib yechiladiga qaysi taqribiy usullarni bilasiz?

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. *Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В.* Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad, Mathlab, Maple (Самоучитель). – М.: НТ Пресс, 2006. – 496 с.
2. *Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. – М.: Изд-во МГУ, 1990.– 336 с.
3. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. – М.: Изд-во Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 640 с.
4. *Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В.* Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Изд-во Бином. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.
5. *Вержбицкий В. М.* Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2009. – 848 с.
6. *Заусаев А.Ф.* Разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособ. - Самара: Самарский гос. техн. ун-т, 2010. - 100 с.
7. *Исраилов М.И.* Ҳисоблаш методлари. – Тошкент: Ўқитувчи, 1-қисм. – 2003. – 440 б.; 2-қисм. – 2008. – 340 б.
8. *Калиткин Н.Н., Корякин П.В.* Численные методы: в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики. - М.: Издательский центр «Академия», 2013. - 304 с.
9. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Изд-во Лань, 2010. – 608 с.
10. *Мэтьюз Джон Г., Финк Куртис Д.* Численные методы. Использование Matlab. 3-издание: Пер. с англ. – М.: Изд-во дом «Вильямс», 2001.-720 с.
11. *Половко А.М., Бутусов П.Н.* MATLAB для студента. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 320 с.
12. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. – М.: Изд-во Лань, 2009. - 288 с.
13. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
14. *Шампайн Л.Ф., Гладвел И., Томпсон С.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием MATLAB: Учебное пособие./Пер с англ. М.А.Макарова. – СПб.: Изд-во «Лань», 2009. – 304 с.

Abdirashidov Ablakul,

Abdurashidov Akmaljon Ablakulovich

ODDIY DIFFERENSIAL TENLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALALARNI O‘Q OTISH USULI BILAN SONLI YECHISH

USLUBIY KO‘RSATMALAR

Muharrir: ***Saydaliyeva N.***

Musahhih: ***Raxmatullayev N.***

Texn. muharrir: ***Ro‘ziboyev M.***

2008 yil 19-iyun 68-buyruq.
2016 yil 31-mayda noshirlik bo‘limiga qabul qilindi.
2016 yil 18-iyunda original maketdan bosishga ruxsat etildi.
Bichimi 60x84/1, 16, «Times New Roman» garniturasi.
Ofset qog‘ozi. Shartli bosma tabog‘i – 3,0.
Nashriyot hisob tabog‘i – 2,5.
Adadi 25 nusxa. 50-buyurtma.

SamDU bosmaxonasida chop etildi.
140104, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 15