To’plam haqida tushuncha . To’plamlar ustida amallar.

To'plam haqida tushuncha. To'plam tushunchasi matematikaning boshlang'ich (ta'riflanmaydigan) tushun-chalaridan biridir. U chekli yoki cheksiz ko'p obyektlar (narsalar, buyumlar, shaxslar va h.k.) ni birgalikda bir butun deb qarash natijasida vujudga keladi. Masalan, O'zbekistondagi viloyatlar to'plami; vilo-yatdagi akademik litseylar to'plami; butun sonlar to'plami; to'g'ri chiziq kesmasidagi nuqtalar to'plami; sinfdagi o'quvchilar to'plami va hokazo. To'plamni tashkil etgan obyektlar uning *elementlari* deyiladi.

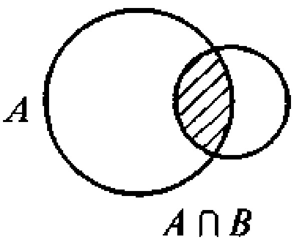
To'plamlar odatda lotin alifbosining bosh harflari bi-lan, uning elementlari esa shu alifboning kichik harflari bi-lan belgilanadi. Masalan, $A = \{a, b, c, d\}$ yozuvi A to'plam a, b, c, d elementlardan tashkil topganligini bildiradi. x element X to'plamga *tegishli* ekanligi $x \in X$ ko'rinishda, *tegishli* emɑsligiesa $x \notin X$ ko'rinishda belgilanadi.Masalan, barcha natural sonlar to'plami N va 4, 5, $\frac{3}{4}$, π sonlari uchun $4 \in N,\ 5 \in N,\ \frac{3}{4} \notin N, \pi \notin N$ munosabatlar o'rinli.Biz, asosan, yuqorida ko'rsatilganidek buyumlar, narsalar to'plamlari bilan emas, balki sonli to'plamlar bilan shug'ullanamiz. Sonli to'plam deyilganda, barcha elementlari sonlardan iborat bo'lgan har qanday to'plam tushu-niladi. Bunga N— natural sonlar to'plami, Z— butun sonlar to'plami, Q — ratsional sonlar to'plami, R - haqiqiy sonlar to'plami misol bo'la oladi. To'plam o'z elementlarining to'liq ro'yxatini ko'rsa-tish yoki shu to'plamga tegishli bo'lgan elementlargina qa-noatlantiradigan shartlar sistemasini berish bilan to'liqaniqlanishi mumkin. To'plamga tegishli bo'lgan element -largina qanoatlantiradigan shartlar sistemasi shu to'plam-ning *xarakteristik xossasi* deb ataladi. Barcha x elementlari biror b xossaga egabo'lgan to'plam X - $\{x \backslash b(x)\}$ kabi yoziladi. Masalan, ratsional sonlar to'plamini Q = $\{r \backslash r= \frac{p}{q}, p \epsilon Z, q \epsilon N\}$ ko'rinishda, $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tengla-ma ildizlari to'plamini esa $X= (x \backslash ax^2+ bx + c = 0\}$ ko'rinishda yozish mumkin.Elementlari soniga bog'liq holda to'plamlar chekli va cheksiz to'plamlarga ajratiladi. Elementlari soni chekli bo'lgan to'plam *chekli to'plam,* elementlari soni cheksiz bo'lgan to'plam *cheksiz to'plam* deyiladi.

1- m i s o 1. $A = \{x \mid x \in N, x^2 > 7\}$ to'plam 2 dan katta bo'lgan barcha natural sonlardan tuzilgan, ya'ni $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\}$. Bu to'plam - cheksiz to'plamdir.

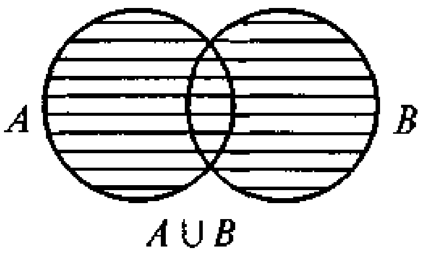
Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam *bo'sh to'plam* deyiladi. Bo'sh to'plam $\varnothing$ orqali belgilanadi. Bo'sh to'plam ham chekli to'plam hisoblanadi.

2- m i s o 1. $x^2 + 3x + 2 = 0$ tenglamaning ildizlari $X= \{-2; -1\}$ chekli to'plamni tashkil etadi. $x^2 + 3x + 3 = 0$ tenglama esa haqiqiy ildizlarga ega emas, ya'ni uning haqiqiy yechimlar to'plami $\varnothing$ dir. Ayni bir xil elementlardan tuzilgan to'plamlar *teng to'plamlar* deyiladi.

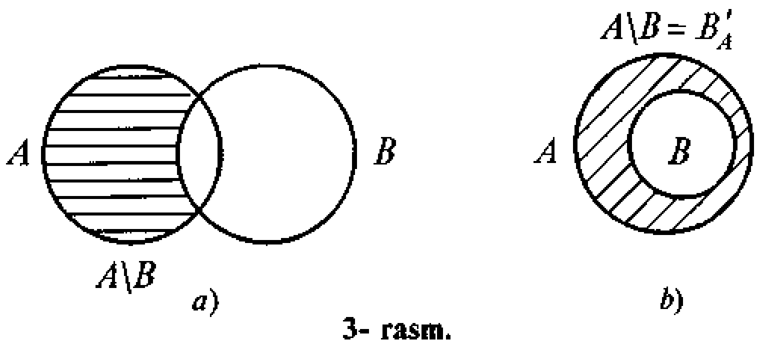
To'plamlar ustida amallar. A va B to'plamlarning ikkalasida ham mavjud bo'lgan x elementga shu to'plamlarning *umumiy* element! deyiladi. A va B to'plamlarning *kesishmasi* (yoki *ko'paytmasi)* deb, ularning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan to'plamga aytiladi. A va B to'plamlarning kesishmasi $A \cap B$ ko'rinishda belgilanadi: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ va } x \in B\}$. 1-rasmda Eyler —Venn diagrammasi nomi bilan ataladigan chizmada A va B shakllar-ning esishmasi $A \cap B$ ni beradi (chizmada shtrixlab ko'rsatilgan). A va B to'plamlarning *birlashmasi* (yoki *yig'indisi)* deb, ularning kamida bittasida mavjud bo'lgan barcha element
lardan tuzilgan to'plamga aytiladi. A va B to'plamlarning birlashmasi $A \cup B$ ko'rinishida belgilanadi: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ yoki } x \in B\}$ *(2-* rasm).



1- rasm.



2- rasm.



3- rasm.

A va *B* to'plamlarning *ayirmasi* deb, *A* ning *B* da mavjud bo'lmagan barcha elementlaridan tuzilgan to'plamga aytiladi. *A* va *B* to'plamlarning ayirmasi $A\setminus B$ ko'rinishda belgilanadi: $A\setminus B=\{x\mid x\in A$ va $x\notin B\}$ (3- rasm).

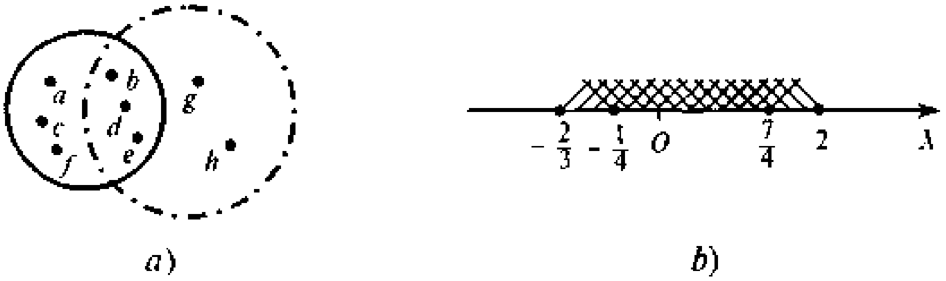
Topshiriq:3-α rasmda $B\setminus A$ ni ko'rsating.

Agar $B\subset A$ bo'lsa, $A\setminus B$ to'plam *B* to'plamning *to 'Idiruvchlsi* deyiladi va B' yoki B_A' bilan belgilanadi (3- *b* rasm).

1- m i s o 1. *A = {a, b, c, d, e, f}* va *B = {b, d, e, g, h)* to'plamlar berilgan. Ularning kesishmasi, birlashmasini topamiz va Eyler — Venn diagrammasida talqin etamiz.

b, d, e elementlari *A* va *B* to'plamlar uchun umumiy, shunga ko'ra $A\cap B=\{b, d, e\}$. Bu to'plamlarning birlashmasi esa $A\cup B=\{a, b, c, d, e, f, h\}$ dan iborat (4- αrasm).

2-mi sol. $A=\{x|-\frac{2}{3}\le x\le\frac{7}{4}\}$, $B=\{x|-\frac{1}{4}\le x\le 2\}$ to'plamlarning kesishmasi, birlashmasi va ayirmasini topamiz.Buning uchun sonlar o'qida $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, 2$ nuqtalarni belgilaymiz (4-rasm).



4- rasm.

$A\cap B=\{x|-\frac{1}{4}\le x\le\frac{7}{4}\}$, $A\cup B=\{x|-\frac{2}{3}\le x\le 2\}$, $A\setminus B=\{x|-\frac{2}{3}\le x<-\frac{1}{4}\}$.

3-misol. A= {0; 2; 3}, C={O; 1; 2; 3; 4} to'plamlar uchun *A'=C\A* ni topamiz. $A\subset C$ bo'lgani uchun *A'=C\A = {l;* 4} bo'ladi.

4- m i s o 1. Agar $A \subset B$ bo‘lsa, $A \cup B = B$ bo'lishini isbot qilamiz.

Isbot. $A \subset B$ bo'lsin.

a) $A \cup B \subset B$ ni ko'rsatamiz. $x \in A \cup B$ bo'lsin. U holda $x \in A$ yoki $x \in B$ bo'ladi. Agar $x \in A$ bo'lsa, $A \subset B$ ekanidan $x \in B$ ekani kelib chiqadi, ikkala holda ham $A \cup B$ ning bar qanday elementi B ning ham єlementidir. Demak, $A \cup B \subset B$;

b) $B \subset A \cup B$ ni ko'rsatamiz. $x \in B$ bo'lsin. U holda, to'plamlar birlashmasining ta'rifiga ko'ra $x \in A \cup B$ bo'ladi. Demak, B ning har qanday elementi $A \cup B$ ning ham elementi bo'ladi, ya'ni $B \subset A \cup B$. Shunday qilib, $A \cup B \subset B$, $B \subset A \cup B$. Bu esa $B = A \cup B$ ekanini tasdiqlaydi.To'plamlar ustida bajariladigan amallarning *xossalari* sonlar ustida bajariladigan amallarning xossalariga o'xshash. Har qanday *X, Y va Z* to'plamlar uchun:

$$1)\ X \cup Y = Y \cup X;$$

$$1')\ X \cap Y = Y \cap X;$$

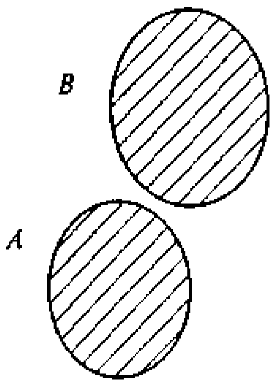
$$2)\ (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Z) \cup Y;$$

$$2')\ (X \cap Y) \cap Z = (X \cap Z) \cap Y = X \cap (Y \cap Z);$$

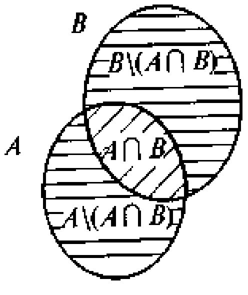
$$3)\ (X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z);$$

$3')\ (X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$ tengliklar bajariladi. Agar qaralayotgan to'plamlar ayni bir U to'plamning qism-to'plamlari bo'lsa, U to'plam *universal* to'plam deyiladi.

To'plam elementlarining soni bilan bog'Iiq ayrim masalalar. To'plamlar nazariyasining muhim qoidalaridan biri — jamlash qoidasidir. Bu qoida kesishmaydigan to'p-lamlar birlashmasidagi elementlar sonini topish imkonini beradi.



5- rasm.



6- rasm.

1-teorema (jamlash qoidasi). ***Kesishmaydigan A va B chekli to'plamlarning* (5- *rasm) birlashmasidagi elementlar soni A va B to'plamlar elementlari sonlarining yig'indisiga teng:***

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Isbot. $n(A) = k$, $n(B) = m$ bo'lib, A to'plam $\alpha_p\ a_2, ..., a_k$ elementlardan, B to'plam esa $b_{\prime}, b_v ..., b_m$ ele-mentlardan tashkil topgan bo'lsin.Agar A va B to'plamlar kesishmasa, ularning birlash-masi $a_{\prime}, a_r ..., a_k, b_{\prime}, b_v ..., b_m$ elementlardan tashkil topadi:

$$A \cup B = \{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_k,\ b_1,\ b_2,\ ...,\ b_m\}.$$

Bu to'plamda $k + m$ ta element mavjud, ya'ni

$$n(A \cup B) = k + m = n(A) + n(B).$$

Xuddi shu kabi, chekli sondagi $A, B, ...,$ Fjuft-jufti bilan kesishmaydigan to'plamlar uchun quyidagi tenglik to'g'riligini isbotlash mumkin:

$$n(A\cup B\cup \ldots \cup F) = n(A) + n(B) + \ldots + n(F).$$

2-teorema. ***Ixtiyoriy A va B chekli to'plamlar uchun ushbu tenglik o'rinli:***

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B).$$

Isbot. Agar $A\cap B=\varnothing$ bo'lsa, $n(A\cap B)=0$ bo'lib,1- teoremaga ko'ra (1) tenglik o'rinli. Agar $A\cap B\neq\varnothing$ bo'lsa,u holda $A\cup B$ to'plamni uchta juft-jufti bilan kesishmaydigan to'plamlarning birlashmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin (6- rasm):

$$A\cup B=(A\setminus(A\cap B))\cup(B\setminus(A\cap B))\cup(A\cap B). \quad (2)$$

$A\setminus(A\cap B)$, $B\setminus(A\cap B)$ va $A\cap B$ to'plamlardagi elementlari soni mos ravishda $n(A)-n(A\cap B)$, $n(B)-n(A\cap B)$, $n(A\cap B)$ ga teng.

Jamlash qoidasiga ko'ra,

$$n(A\cup B) = (n(A) - n(A\cap B)) + (n(B) - n(A\cap B)) +$$
$$+ n(A\cap B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$$

(2) tenglikdan , ya'ni (1) tenglik hosil bo'ladi.

M a s a l a. 100 kishidan iborat sayyohlar guruhida 70 kishi ingliz tilini, 45 kishi fransuz tilini, 23 kishi esa ikkala tilni ham biladi. Sayyohlar guruhidagi necha kishi ingliz tilini ham, fransuz tilini ham bilmaydi?

Y e c h i s h. Berilgan guruhdagi ingliz tilini biladigan sayyohlar to'plamini A bilan, fransuz tilini biladigan sayyohlar to'plamini B bilan belgilaymiz. U holda ham ingliz tilini, ham fransuz tilini biladigan sayyohlar to'plami $A\cap B$ to'plamdan, shu ikki tildan hech bo'lmasa bittasini biladigan sayyohlar to'plami esa $A\cup B$ to'plamdan iborat bo'ladi.

Shartga ko'ra, $n(A)=70$, $n(B)=45$, $n(A\cap B)=23$. (1) tenglikka ko'ra, $n(A\cup B)=70+45-23=92$.

Shunday qilib, 92 kishi ingliz va fransuz tillaridan hech bo'lmaganda bittasini biladi, 100-92 = 8 kishi esa ikkala tilni ham bilmaydi.

Natural sonlar. Tub va murakkab sonlar . Arifmetikaning asosiy teoremasi.

1. Tub va murakkab sonlar. Narsalarni sanashda ish-latiladigan sonlar *natural sonlar* deyiladi. Barcha natural sonlar hosil qilgan cheksiz to'plam 7Vharfi bilan belgila-nadi: *N={l,* 2, ..., *n, ...}*.

Natural sonlar to'plamida eng katta son (element) mavjud emas, lekin. eng kichik son (element) mavjud, u 1 soni. 1 soni faqat 1 ta bo'luvchiga ega (1 ning o'zi). 1 dan boshqa barcha natural sonlar kamida ikkita bo'luvchiga ega (sonning o'zi va 1).

1 dan va o'zidan boshqa natural bo'luvchiga ega bo'l-magan 1 dan katta natural son *tub son* deyiladi. Masalan, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 sonlar 20 dan kichik bo'lgan barcha tub sonlardir. 1 dan va o'zidan boshqa natural bo'luvchiga ega bo'lgan 1 dan katta natural son *murakkab son* deyiladi. Masalan, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 sonlar 20 dan kichik bo'lgan barcha murakkab sonlardir.

Tub va murakkab sonlarga berilgan ta'riflardan 1 soni na tub, na murakkab son ekanligi ma'lum bo'ladi. Bunday xossaga ega natural son faqat 1 ning o'zidir.

Natural sonlarning ayrim xossalarini qaraymiz.

1- xossa. Har qanday $p > 1$ natural sonining 1 ga teng bo'lmagan bo'luvchilarining eng kichigi tub son bo'ladi.

Isbot. p> 1 natural sonning 1 ga teng bo'lmagan eng kichik bo'luvchisi q bo'lsin. Uni murakkab son deb faraz qilaylik. U holda murakkab sonning ta'rifiga ko'ra, q soni

$1< q_l < q$ shartga bo'ysunuvchi q_1 bo'luvchiga ega bo'ladi va q_1 soni p ning ham bo'luvchisi bo'ladi. Bunday bo'lishi esa mumkin emas. Demak, q — tub son.

2- x o s s a. Murakkab p sonining 1 dan katta eng kichik bo'luvchisi $\sqrt{p}$ dan katta bo'lmagan tub sondir.

I s b o t. p — murakkab son, q esa uning 1 dan farqli eng kichik bo'luvchisi bo'lsin.

U holda $p = q \cdot q_1$ (bunda q_l bo'linma) va $q_1 \geq q$ bo'ladigan $q,$ natural son maviud bo'ladi. Bu munosabatlardan $p = q \cdot q_1 \geq q \cdot q$ yoki

$$\sqrt{p} \geq q$$

ni olamiz.

1- xossaga ko'ra q soni tub sondir.

3- xo ssa (Yevklid teoremasi). Tub sonlar cheksiz ko'pdir.

I s b o t. Barcha tub sonlar n ta va ular $q_l, q_2, ..., q_n$ sonlaridan iborat bo'lsin deb faraz qilaylik. U holda $b = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n + 1$ soni murakkab son bo'ladi, chunki $q_l, q_2, ..., q_n$ sonlardan boshqa tub son yo'q (farazga ko'ra). b ning 1 ga teng bo'lmagan eng kichik bo'luvchisi q bo'lsin. 1-xossaga ko'ra, q tub son va $q_1, q_2, ..., q_n$ sonlarining birortasidan iborat. b va $q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n$ sonlarining har biri *q ga* bo'linganligi uchun 1 soni ham *q ga* bo'linadi. Bundan, $q = 1$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $q \neq 1$ ekanligiga zid. Farazimiz noto'g'ri. Demak, tub sonlar cheksiz ko'p.

Biror « sonidan katta bo'lmagan tub sonlar jadvalini tuzishda *Eratosfen g'alviri* deb ataladigan oddiy usuldan foydalanadilar. Uning mohiyati bilan tanishamiz. Ushbu:

$$1,2,3,..,n \qquad (1)$$

sonlarini olaylik. (1) ning 1 dan katta birinchi soni 2; u faqat 1 ga va o'ziga bo'linadi, demak, 2 tub son. (1) da 2 ni qoldirib, uning karralisi bo'lgan hamma murakkab sonlarni o'chi-ramiz; 2 dan keyin turuvchi o'chirilmagan son 3; u 2 ga bo'linmaydi, demak, 3 faqat 1 ga va o'ziga bo'linadi, shu-ning uchun u tub son. (1) da 3 ni qoldirib, unga karrali bo'lgan hamma sonlarni o'chiramiz; 3 dan keyin turuvchi o'chirilmagan birinchi son 5 dir; u na 2 ga va na 3 ga bo'linadi. Demak, 5 faqat 1 ga va o'ziga bo'linadi, shuning uchun u tub son bo'ladi va h.k.

Agar p tub son bo'lib, p dan kichik tub sonlarga bo'linadigan barcha sonlar yuqoridagi usul bilan o'chirilgan bo'lsa, p^2 dan kichik barcha o'chirilmay qolgan sonlar tub son bo'ladi.Haqiqatan, bunda p^2 dan kichik har bir murakkab a son, o'zining eng kichik tub bo'luvchisining karralisi bo'l-gani uchun o'chirilgan bo'ladi. Shunday qilib:

a) tub son p ga bo'linadigan sonlarni o'chirishni p^2 dan boshlash kerak;

b) n dan katta bo'lmagan tub sonlar jadvalini tuzish, $\sqrt{n}$ dan katta bo'lmagan tub sonlarga bo'linuvchilarini o'chirib bo'lingandan keyin tugallanadi.

1- m i s o l. 827 sonining eng kichik tub bo'luvchisini toping.

Y e c h i s h . $\sqrt{827}$ dan kichik bo'lgan tub sonlar 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ekanligini aniqlab, 827 ni shu sonlarga bo'lib chiqamiz. 827 u sonlarning hech qaysisiga bo'linmaydi, bundan 827 ning tub son ekanligi kelib chiqadi.

2- misol. 15 va 50 sonlari orasida joylashgan tub sonlarni aniqlang.

Yechish. 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50 sonlarni olib, 2, 3, 5, 7 ga karrali sonlarning tagiga chi-zamiz. 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47 sonlari izlangan tub sonlardir.

Natural sonlar qatorida tub sonlar turlicha taqsim-langan. Ba'zan qo'shni tub sonlar bir-biridan 2 gagina farq qiladi, masalan, 11 va 13, 101 va 103 va hokazo. Bu sonlar *egizak tub sonlar* deyiladi. Egizak tub sonlar to'p-lamining chekli yoki cheksizligi hozirgacha noma'lum. Hisoblash mashinalari yordami bilan juda katta tub sonlar topilgan. Masalan, 25000 xonali 2^{86243}- 1 son tub sondir.

1-teorema (arifmetikaning asosiy teoremasi). ***Har qanday murakkab son tub sonlar ko'paytmasiga yoyiladi va agar ko'paytuvchilarning yozilish tartibi nazarga olinmasa, bu yoyilma yagonadir.***

I s b o t. α, — murakkab son, q_1 esa uning eng kichik tub bo'luvchisi bo'lsin. a_1 ni q_1 ga bo'lamiz: $a_1 = q_1 \cdot a_2$ $(a_2 < a_1)$. Agar a_2 tub son bo'lsa, a_1 son tub ko'paytuvchilarga yoyilgan bo'ladi. Aks holda, a_2 ni o'zining eng kichik tub bo'luvchisi q_2 ga bo'lamiz:

$$a_2 = q_2 \cdot a_3 \, (a_3 < a_2).$$

Agar a_3 tub son bo'lsa, $a_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot a_3$ bo'ladi. q_1 , q_2, a_3 sonlari tub sonlar bo'lgani uchun, a_1 soni tub ko'paytuvchilarga yoyilgan bo'ladi. Agar α_3 murakkab son bo'lsa, yuqoridagi jarayon davom ettiriladi. $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ ekanligidan ko'rinadiki, bir necha qa-damdan so'ng albatta $o_\pi$tub soni hosil bo'ladi va a_1 soni $a_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ shaklni oladi. Demak, har qanday natural son tub ko'paytuvchilarga yoyiladi.a soni ikki xil ko'rinishdagi tub ko'paytuvchilar yoyil-masiga ega bo'ladi, deb faraz qilaylik:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k, \qquad (2)$$

$$a = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n. \qquad (3)$$

U holda

$$q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k. \qquad (4)$$

(4) tenglikning ikki tomonida hech bo'lmaganda bittadan tub son topiladiki, u sonlar bir-biriga

teng bo'ladi. $p_1 = q_1$ deb faraz qilaylik. Tenglikning ikkala tomonini

$$p_1 = q_1$$

ga isqartirsak $q_2 \cdot \ldots \cdot q_n = p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ bo'ladi. Bu tenglikustiαa ham yuqoridagidak mulonaza yuritsak, $q_3 \cdot \ldots \cdot q_n = p_3 \cdot \ldots \cdot p_k$ bo'ladi va hokazo. Bu jarayonni davom ettirsak, n - 1 qadamdan so'ng $1 = p_{n+1} \cdot \ldots \cdot p_k$ tenglikni olamiz. Bundan

$$p_{n+1} = 1, \ldots, p_k = 1$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, yoyilma yagona ekan.

a sonini tub ko'paytuvchilarga yoyishda ba'zi ko'paytuvchilar takrorlanishi mumkin. $q_1 < q_2, ..., q_n$ ko'paytuv-chilarning takrorlanishlarini mos ravishda α, β, ...,γ orqali
belgilasak, $a = q_1^\alpha \cdot q_2^\beta \cdot \; ... \; \cdot q_n^\gamma$ hosil bo'ladi. Bu a sonining *kanonik yoyilmasidir.* Masalan,

$$105840 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

Natural sonlarning kanonik yoyilmasidan foydalanib, uning bo'luvchilarini va bo'luvchilar sonini topish mumkin.

2- teorema. ***a natural sonining kanonik yoyilmasi*** $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \; ... \; \cdot p_n^{\alpha_n}$ ***bo'lsin. U holda a ning har qanday bo'luvchisi*** $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \; ... \; \cdot p_n^{\beta_n}$ ***ko'rinishda bo'ladi, bunda*** $0 \le \beta_k \le \alpha_k \; (k = \overline{1,n})$.

I sbo t. a soni d ga bo'linsin. $a = dq$. U holda a ning hamma tub bo'luvchilari mavjud va ularning darajalari d ning kanonik yoyilmasidagi darajalaridan kichik bo'lmaydi. Shunga ko'ra, d bo'luvchi $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \; ... \; \cdot p_n^{\beta_n}$ yoyilmaga ega va a ning d ga bo'linishi ayon.

Misol tariqasida 48 ning bo'luvchilarini topaylik. $48 = 2^4 \cdot 3$ bo'lganligidan, uning bo'luvchilari quyidagicha topiladi: $2^0 \cdot 3^0$, $2^1 \cdot 3^0$, $2^2 \cdot 3^0$, $2^3 \cdot 3^0$, $2^4 \cdot 3^0$, $2^0 \cdot 3^1$, $2^2 \cdot 3^1$, $2^3 \cdot 3^1$, $2^4 \cdot 3^1$, $2^1 \cdot 3^1$.

a natural sonining natural bo'luvchilari soni τ(ø) bilan belgilanadi.

3-teorema. ***Agar a natural sonining kanonik yoyilmasi*** $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$ ***bo'lsa ,*** $\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_n + 1)$ ***tenglik o'rinli bo'ladi.***

Isbot.2-teoremaga asosan $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \; ... \; \cdot p_n^{\alpha_n}$ sonining har bir bo'luvchisi $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \; ... \; \cdot p_n^{\beta_n}$ ko'rinishda bo'ladi. β1, ifoda 0; 1; 2;...; α, qiymatlarni qabul qiladi. Shu kabi β, ifoda $\alpha_2 + 1$ ta qiymatni qabul qiladi va hokazo. $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ qiymatlarning ixtiyoriy kombinatsiyasi a sonining biror bo'luvchisini aniqlaydi. $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ qiymatlarning mumkin bo'lgan kombinatsiyalarining va demak, a ning natural bo'luvchilarining soni$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \; ... \; (\alpha_n + 1)$ga teng.Ba'zi hollarda natural son bo'luvchilarining yig'indisini topishga to'g'ri keladi. Bunday hollarda, natural son bo'luvchilarining yig'indisi δ(α) ni hisoblash formulasi

$$\delta(\alpha) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$$

dan foydalanish mumkin.

3- m i s o 1. 20 ning bo'luvchilari sonini va bo'luvchilari yig'indisini toping.

Y e c h i s h. $20 = 2^2 \cdot 5^1$bo'lgani sababli, 20 ning bo'luvchilari soni $\tau(20) = (2 + 1)(1 + 1) = 6$, bo'luvchilarining yig'indisi esa

$$\delta(20) = \frac{2^{2+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1} = 7 \cdot 6 = 42$$

bo'ladi.

EKUB va EKUK.Evklid algoritmi. Natural sonning bo'luvchilari soni. Bo'linish alomatlari.

Eng katta umumiy bo'luvchi. Eng kichik umumiy karrali. Yevklid algoritmi. $a,\ b \in N$ sonlarning har biri bo'linadigan son shu sonlarning *umumiy bo 'luvchisi* deyiladi. Masalan, a = 12; b = 14 bo'lsin. Bu sonlarning umumiy bo'luvchilari 1; 2 bo'ladi. $a, b \in N$ sonlar umumiy bo'luvchilarining eng kattasi shu sonlarning *eng katta umumiy bo'luvchisi* deyiladi va *B(a; b)* orqali belgilanadi.Masalan, B(12; 14) = 2.Agar *B(a;* b) = 1 bo'lsa, *a va b* sonlar *o'zaro tub sonlar* deyiladi.Masalan, *B(16;* 21) = 1 bo'lgani uchun 16 va21 o'zaro tub sonlardir. $a, b \in N$ sonlarning *umumiy karralisi* deb, *α* ga ham, *b* ga ham bo'linuvchi natural songa aytiladi.α va b sonlarning umumiy karralisi ichida eng kichigi mavjud bo'lib, u *α* va *b* sonlarining *eng kichik umumiy karralisi* deyiladi va *K(α; b)* orqali belgilanadi. Masalan, *K(6;* 8) = 24.Natural sonlarning kanonik yoyilmalari bir nechta son-ning eng katta umumiy bo'luvchi va eng kichik umumiy karralilarini topishda ham qo'llaniladi. *α, b* va *c* sonlari berilgan bo'lib,

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ \dots \ \cdot p_n^{\alpha_n}, \quad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ \dots \ \cdot p_n^{\beta_n}$$

$$\text{va } c = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ \dots \ \cdot p_n^{\gamma_n}$$

bo'lsin. t_k deb α_k, $\beta_\lambda$va γ_λ laming eng kichik qiymatini, s_k deb a_k, β_λ va y_k laming eng katta qiymatini olaylik. U holda:

$$B(a, b, c) = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ \dots \ \cdot p_n^{t_n};$$

$$K(a, b, c) = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ \dots \ \cdot p_n^{s_n}$$

bo'ladi.

Misol. 126 = 2- 3^2-7, 540 = 2^2-3^3-5 va 630 = = 2 • 3^2- 5 • 7 bo'lgani uchun

B(126; 540; 630) = 2 • 3^2 = 18, K(126; 540; 630) =2^2-3^3-5-7 = 3780larga egabo'lamiz. $a, b \in N$va $a \geq b$ bo'lsin. U holda α va b sonlari uchun $a = bq + r\ (0 \leq r < b)$ tenglik o'rinli bo'ladigan $q \in N, r \in N$ sonlari mavjud va *q, r* sonlari bir qiymatli aniqlanadi.

1- teore ma. ***Agar*** $a \geq b$ ***bo'lib,*** $a = bq + r\ (0 \leq r < b)$ ***bo'lsa, a va b sonlarining barcha umumiy bo'luvchilari b va r sonlarining ham umumiy bo'luvchilari bo'ladi va, aksincha,*** $a = bq + r\ (0 \leq r < b)$ ***bo'lsa, b va r sonlarining barcha umumiy bo'luvchilari avab sonlarining ham umumiy bo'luvchilari bo'ladi.***

Isbot. *a* = *bq* + *r* bo'lib, c soni *a* va *b* sonlarining biror umumiy bo'luvchisi bo'lsin.
r = *a-bq* bo'lganligidan *r* ham c ga bo'linadi, ya'ni *c* soni *b* va *r* sonlarining umumiy bo'luvchisi. Aksincha, *c'* soni b va r sonlarining umumiy bo'luvchisi bo'lsin, unda *a*=*bq* + *r* ham *c'* ga bo'linadi, ya'ni *c'* soni *a va b* sonlarining umumiy bo'luvchisi. Shunday qilib, *α* va *b* ning umumiy bo'luvchisi bir xil ekan.

N a t ij a: ***α = bq + r bo'lsa, B(α; b) = B(b, r) bo'ladi.***

Isbotlangan teorema va uning natijasi asosida, *B(a; b)*ni topishning Yevklid algoritmi deb ataluvchi quyidagi usuliga ega bo'lamiz.

$a, b \in N,\ a > b$ bo'lsin. *a* ni *b* ga qoldiqli bo'lamiz:

$$a = bq_1 + r_2, \ \ 0 \leq r_2 < b.$$

Agar r_2= 0 bo'lsa, *B(a; b)* = *b* bo'ladi. $r_2 \neq 0$ bo'lsa, natijaga ko'ra *B(a; b)* = *B(b;* r_2) (1) bo'ladi. *b* ni r_2 ga qoldiqli bo'lamiz:

$$b = r_2 q_2 + r_3, \ \ 0 \leq r_3 < r_2.$$

Agar r3 = O bo'lsa, *B(a; b}* = *B(b;* r_2*)* = r_2 bo'ladi. $r_3 \neq 0$ bo'lsa, natijaga ko'ra *B (a; b)* = *B (b;* r_2) = *B (*r_2*;* r,) (2) bo'ladi. r_2 ni $r_3$ga qoldiqli bo'lamiz:

$$r_2 = r_3 q_3 + r_4, \ \ 0 \leq r_4 < r_3.$$

Agar $r_4 = 0$ bo'lsa, $B(a;\, b) = B(b;\, r_2) = B(r_2;\, r_3) = r_3$ bo'ladi. $r_4 \neq 0$ bo'lsa, natijaga ko'ra $B(a;\, b) = B(b;\, r_2) = B(r_2;\, r_3) = B(r_3;\, r_4)$ bo'ladi va yuqoridagi jarayonni davom ettiramiz.
M i s o 1. B (1515; 6OO)ni topamiz.

$$
\begin{array}{l}
1515 \,|\, 600 \\
-1200 \quad 2 \\
\quad 600 \,|\, 315 = r_2 \\
\quad -315 \quad 1 \\
\quad\quad 315 \,|\, 285 = r_3 \\
\quad\quad -285 \quad 1 \\
\quad\quad\quad 285 \,|\, 30 = r_4 \\
\quad\quad\quad -270 \quad 9 \\
\quad\quad\quad\quad 30 \,|\, 15 = r_5 \\
\quad\quad\quad\quad -30 \quad 2 \\
\quad\quad\quad\quad\quad 0 = r_6
\end{array}
$$

Demak, 5(1515; 600) - 15.
2- t e o r e m a. $B(a;\, b) \cdot K(a;\, b) - a \cdot b$. I s b o t. M soni a va b sonlarining biror umumiy karralisi bo'lsin. U holda $M=ak(k\epsilon N)$ (1) bo'ladi. Bundan ak soni b ga bo'linadi, degan xulosaga kelamiz.

$$B(a;\, b) = d \text{ va } a = a_1 d;\; b = b_1 d \text{ bo‘lsa, } B(a_1;\, b_1) = 1$$

bo'ladi.
ak soni b ga bo'linganligidan $a_1 kd$ *soni* ham $b_1 d$ *soniga* bo'linishi, bundan esa $a_1 k$ ning b_1 ga bo'linishi kelib chiqadi. Ammo $B(a_1;\, b_1) = 1$ bo'lgani uchun k soni b_1 ga bo'linadi. Demak,

$$k = b_1 t = \frac{b}{d} \cdot t,\; t \in N. \qquad (2)$$

(2) ni (1) ga qo'ysak,

$$M = \frac{ab}{d} \cdot t \qquad (3)$$

hosil bo'ladi. (3) ko'rinishdagi har bir son a va b sonlarining umumiy karralisi bo'ladi. $K(a;\, b)$ ni topish uchun $t = 1$ deb olish yetarli.Demak,

$$K(a;\, b) \; \frac{a \cdot b}{d} \text{ yoki } a \cdot b = K(a;\, b) \cdot B(a;\, b).$$

Sonlarning bolinish belgilari. Matematikada sonlar-ning bo'linish belgilari juda muhim ahamiyatga ega. Bu belgilar asosida sonlarning bo'luvchilarini, bo'linuvchilarini topish, ularninig xossalarini o'rganish mumkin.

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 \quad (1)$$

natural sonning berilgan b natural songa bo'linish-bo'lin-masligini aniqlash kerak bo'lsin. 10 ning darajalarini b ga qoldiqli bo'lamiz:

$$10 = bq_1 + r_1;\; 10^2 = bq_2 + r_2;\; \ldots;\; 10^n = bq_n + r_n.$$

Bu tengliklarni (1) ga qo'yib, shakl almashtirsak,

$$a = Ab + B \qquad (2)$$

hosil bo'ladi. Bu yerda

$$A = a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \ldots + a_1 q_1,\quad B = a_0 + a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n.$$

Hosil bo'lgan (2) tenglikdan ko'rinib turibdiki, B so-ni b ga bo'linganda va faqat shu holda a soni b ga bo'linadi.
Bu xulosadan sonlarning bo'linish belgilarini topishda foydalaniladi.

1. **2 ga bo'linish** belgisi. 10^k(k = 1, 2, **...,** *n)* ni *b = 2* ga bo'lishdan chiqadigan qoldiqlar nolga teng. Shuning uchun $B=a_0$ bo'ladi. Bundan *a sonning oxirgi raqami 2 ga qoldiqsiz bo'lima, bu son 2 ga qoldiqsiz bo'linadi,* degan xulosaga kelamiz.
2. **3 va 9 ga bo'linish** belgisi. 10 ning darajalarini $10^n = (9 + 1)^n = 9A_n+1$ ko'rinishda ifodalasak (bu yerda $A_n \epsilon N$), 10^n darajalarni *b = 9* (yoki *b = 3)* ga bo'lishdan chiqadigan qoldiqlar 1 ga tengligi kelib chiqadi. Shuning uchun $B = a_0 + a_1 + ... + a_n$ hosil bo'ladi. Bu yerdan ushbu qoida kelib chiqadi: *agar berilgan a sonning raqamlari yi-g'indisi 9 ga* (3 *ga) qoldiqsiz bo 'linsa, u holda bu son 9 ga* (3 *ga) qoldiqsii bo'linadi.*
3. **5 ga bolinish** belgisi.10^k*(k*= 1, 2, ..., *n)* darajalar *b = 5* ga qoldiqsiz bo'linadi: $r_1=r_2=...=r_n=0$.
$B = a_0$ bo'lgani uchun ushbu qoida kelib chiqadi: *oxirgi raqami 5 ga qoldiqsiz bo 'linadigan sonlar va faqat shunday sonlar* 5 *ga qoldiqsiz bo'linadi.*
4. **4 va 25 ga bo'linish** belgilari. *b = 4* bo'lganda 10 = 2b+2, 10^2 = 25b+0, 10^3 =250b+0, ...,
$r_1= 2$, $r_2 = r_3 = ... = r_n = 0$ bo'lib, $B= a_0+ 2a_1$ bo'ladi, ya'ni sonning 4 ga bo'linishi uchun, uning birlik raqami bilan o'nlik raqami ikkilanganining yig'indisi 4 ga bo'linishi zarur va yetarlidir.
$B = a_0+ 2a_1$ ifodani bunday yozamiz:

$$B_1 = a_0 + 2a_1 + 8a_1 = B + 8a_1 = 10a_1 + a_0 = \overline{a_1a_0}\,.$$

$$B = a_0 + 2a_1 = (a_0 + 10a_1) - 8a_1 = \overline{a_1a_0} - 8a_1 \text{ yoki}$$

$B+ 8a_1 = a_1a_0$ bo'lgani uchun *B* son a_1a_0 soni 4 ga bo'linganda va faqat shu holdagina 4 ga qoldiqsiz bo'linadi. Bundan, *oxirgi ikkita raqamidan tuzilgan son* 4 *ga bo 'linadigan sonlar va faqat shunday sonlar* 4 *ga bo 'linishi kelib chiqadi.*
Masalan, 14 024 sonining oxirgi 2 va 4 raqamlaridan tuzilgan 24 soni 4 ga bo'linadi, demak, 14 024 soni ham 4 ga bo'linadi.
Xuddi shunday *oxirgi ikki raqamidan tuzilgan son* 25 *ga bo 'linadigan sonlar va faqat shunday sonlar* 25 *ga bo 'linadi.*

Masalan, 1 350 sonida oxirgi ikki raqamidan iborat son 50, bu 25 ga qoldiqsiz bo'linadi. Demak, 1 350 ham 25 ga qoldiqsiz bo'linadi. 2^2 va 5^2 uchun olingan xulosani 2^m, 5^m $(m \epsilon N)$ sonlari uchun ham umumlashtirish mumkin. Agar berilgan sonning oxirgi *m* ta raqamidan tuzilgan son 2^m ga $(5^m$ ga) qoldiqsiz bo'linsa, berilgan son ham 2^m ga $(5^m$ ga) qoldiqsiz bo'linadi.
5. **7 ga bo'linish belgisi.** Bizda *b = 7 va*

$$\begin{aligned}
&10 = 7 + 3, \ r_1 = 3;\\
&10^2 = 7 \cdot 14 + 2, \ r_2 = 2;\\
&10^3 = 7 \cdot 142 + 6, \ r_3 = 6;\\
&10^4 = 7 \cdot 1\ 428 + 4, \ r_4 = 4;\\
&10^5 = 7 \cdot 14\ 285 + 5, \ r_5 = 5;\\
&10^6 = 7 \cdot 142\ 857 + 1, \ r_6 = 1.
\end{aligned}$$

10^7 da $r_7 = 3 = r_1$ qoldiqlar qaytadan takrorlanyapti. To-pilgan natijalarni (1) ga qo'ysak, u holda $a = A \cdot 7 + B$ da $B= a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + 3a_7 + a_8 + ...$ yoki koeffitsientlarni 7 ga nisbatan yozsak:

$$\begin{aligned}
B &= a_0 + 3a_1 + 2a_2 + (7a_3 - a_3) + (7a_4 - 3a_4) + (7a_5 - 2a_5) + ... =\\
&= 7(a_3 + a_4 + a_5 + a_9 + a_{10} + a_{11} + ...) +\\
&+ (a_0 + 3a_1 + 2a_2 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + ...) -\\
&- (a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_9 + 3a_{10} + 2a_{11} + ...) \text{ ni hosil qilamiz.}
\end{aligned}$$

Oxirgi ifodada $a_0+ 3a_1 + 2a_2+ a_6+ 3a_7+ 2a_8+ ... = B_2$, $a_3+3a_4 + 2a_5+a_9+3a_{10}+2a_{11}+...=B_1$ deb belgilasak, $a = 7 \cdot A + B_2 - B_1$ ga ega bo'lamiz. Shunday qilib, $B_2- B_1$ ayirma 7 ga qoldiqsiz bo'linsa, berilgan *a* son ham 7 ga qoldiqsiz bo'linishi kelib chiqadi.
1- mi sol. 675 056 742 soning 7 ga bo'linishi yoki bo'linmasligini aniqlang.
Yechish.

742	056	675
231	231	231
14+12+2 = 28	0+15+6 = 21	12+21+5 = 38

38 + 28 - 21 = 66 - 21 = 45 soni 7 ga bo'linmaydi.

Demak, berilgan son 7 ga bo'linmaydi.

6. 11 ga bo'linish belgisi. Berilgan *a* sonda qatnasha-yotgan 10 ning darajalarini 11 ga bo'lishdagi qoldiq bar doim 10 yoki 1 bo'ladi. Demak, *berilgan sonning juft o'rinda turgan raqamlari yig'indisidan toq o'rinda turgan raqamlari yig'indisi ayirilganda hosil bo'ladigan ayirma* 11 *ga bo 'linsa, son* 11 *ga qoldiqsiz bo 'linadi.*

2- m i s o 1. 4 788 sonining 11 ga bo'linishini aniqlang. (7 + 8) - (4 + 8) = 15 - 12 = 3 soni 11 ga bo'linmaydi, demak, berilgan son ham 11 ga bo'linmaydi.

3- m i s o 1. 3 168 ning 11 ga bo'linishini tekshiring. (1 + 8) - (3 + 6) = 0. Demak, son 11 ga bo'linadi.

N a t i j a. ***Agar S(p, q) = l bo'lib, a soni ham p ga, ham q ga bo'linsa, u pq ga bo'linadi.***

Masalan, biror son ham 2 ga, ham 3 ga bo'linsa, u 6 ga bo'linadi, 3 ga va 4 ga bo'linadigan sonlar 12 ga ham bo'linadi va hokazo.

Qadimgi Samarqand madrasalarida *a* sonni biror *b* (masalan, 9) ga bo'lishdan chiqadigan qoldiq *r* ni shu sonning *mezoni* (o'lchami) deb ataganlar va undan sonlar ustida amallar to'g'ri bajarilganini tekshirishda foydalan-ganlar. Masalan, 378 • 4 925 = 1 861 650 dagi natij'a to'g'ri hisoblanganligini tekshiramiz.

Mezonlar (9 ga bo'linish belgisi bo'yicha):

378 uchun: 3 + 7 + 8 =18, 1 + 8 =9;

4 925 uchun: 4 + 9 + 2 + 5= 20, 2 + 0=2.

Mezonlar ko'paytmasi: 9-2 =18, 1 + 8 =9.

1861 650uchun: 1+8 + 6+1+6 + 5 + 0 =27, 2 + 7 =9.

Mezonlar va berilgan sonlar ko'paytmalarining mezon-lari teng, ya'ni 9=9. Demak, topilgan ko'paytma to'g'ri.

Taqqoslama va uning xossalari.

Taqqoslamalar. *a* ni *b* ga qoldiqli bo'lamiz: $a = bq + r$, $0 \le r < b$. a-bo'linuvchi, b-bo'luvchi, q-bo'linma, r-qoldiq. *a* va *b* butun sonlarini *m* natural soniga bo'lishda bir xil $r\ (0 \le r < m)$ qoldiq hosil bo'lsa, *a* va *b* sonlari *m modul* bo'yicha *taqqoslanadigan* (teng qoldiqli) *sonlar* deyiladi *va* $a = b$ (mod *m)* ko'rinishda belgilanadi. *a* soni *b* soniga *m* modul bo'yicha taqqoslanishini ifodalovchi $a = b$ (mod m) bog'lanish *taqqoslama* deb o'qiladi.Misol. $27 = 5\cdot5 + 2$, $12 = 5\cdot2 + 2$ bo'lgani uchun $27=12$ (mod 5) .

1- teorema. ***a ≡ b (mod m) taqqoslama a-b ayirma m ga qoldiqsiz bo'lingandagina o'rinli bo'ladi.***

Isbot. $a = b$ (mod *m)* taqqoslama o'rinli bo'lsin, ya'ni *a* va *b* sonlarini *m* soniga bo'lishda ayni bir xil *r* qoldiq hosil bo'lsin. U holda $a = mq+r$, $b = mq'+ r$ teng-liklar o'rinli bo'ladi, bu yerda $q, q' \in Z$. Bu tengliklarni hadma-had ayirib, $a-b = mq-mq'= m(q- q')$ ga ega bo'-lamiz. Demak, *a-b* soni *m* ga bo'linadi.

Aksincha, *a-b* soni *m* ga bo'linsin, ya'ni

$$a-b = km,\ k\in Z \qquad (1)$$

bo'lsin. *b* sonini *m* soniga qoldiqli bo'lamiz:

$$b = mq + r,\ 0\le r<m. \qquad (2)$$

(1) va (2) lardagi tengliklarni hadma-had qo'shib, $\alpha = (k + q)m + r$ tenglikka ega bo'lamiz, bu yerda $0<r<m$. Bundan *a* sonini *m* soniga bo'lishdagi qoldiq *b* ni *m* soniga bo'lishdagi qoldiqqa tengligi kelib chiqadi. Demak, $a = b$ (mod *m*) taqqoslama o'rinli.

2- t e o r e m a. ***Har biri c soni bilan taqqoslanadigan a va b sonlari bir-biri bilan ham taqqoslanadi.***

Isbot. $a = c$ (mod *m) va* $b = c$ (mod *m)* bo'lsin. U holda 1- teoremaga ko'ra $a-c = mq_1$,
$b-c = mq_2$ tengliklar o'rinli bo'ladi, bu yerda $q_1, q_2 \in Z$. Bu tengliklardan $a - b = m(q_1 -- q_2)$ ni olamiz. Demak, $a \equiv b$ (mod *m)* taqqoslama o'rinli.

3-teorema. ***Moduli bir xil taqqoslamalarni hadma-had qo'shish mumkin.***

Isbot.

3- teoremadan qo'shiluvchini taqqoslamaning bir qismdan ikkinchi qismga qarama-qarshi ishora bilan o't-kazish mumkin ekanligi kelib chiqadi.

Haqiqatan, $a + b = c$ (mod *m)* ga ayon $-b = -b$ (mod *m)* taqqoslamani qo'shsak, $a = c-b$ (mod *m)* hosil bo'ladi.

Isbot. $\begin{cases} a_1 \equiv b_1 (\text{mod } m), \\ a_2 \equiv b_2 (\text{mod } m), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - b_1 = mq_1, \\ a_2 - b_2 = mq_2, \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = m(q_1 + q_2) \Rightarrow a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 (\text{mod } m).$$

3- teoremadan qo'shiluvchini taqqoslamaning bir qismdan ikkinchi qismga qarama-qarshi ishora bilan o't-kazish mumkin ekanligi kelib chiqadi.

4- t e o r e m a. ***Taqqoslamaning ixtiyoriy bir qismiga taqqoslamaning moduliga bo'linadigan har qanday butun sonni qo'shish mumkin.***

Isbot. $a \equiv b$ (mod *m) va* $mk \equiv 0$ (mod m) bo'lsin. Bu taqqoslamalarni hadma-had qo'shsak, $\alpha + mk \equiv b$ (mod *m)* hosil bo'ladi.

Masalan, 27 ≡ I2(mod 5) => 27 + 35 ≡ I2(mod 5) => 62 ≡12(mod 5).

5-teorema. ***Bir xil modulli taqqoslamalarni hadlab ko'paytirish mumkin.***

Haqiqatan, $\alpha \equiv b$ (mod *m),* $c = d$ (mod *m)* taqqosla-malar o'rinli bo'lsa, ulardan mos ravishda
$\alpha - b = mq_v$ va $c-d= mq_2$ tengliklar kelib chiqadi. Bu tengliklar asosida $\alpha c-bd=\alpha c-bc + bc-bd\equiv m(cq_{\{} + bq_2)$ tenglikni hosil qilamiz. Demak, $ac \equiv bd$ (mod *m)* taqqoslama o'rinli (1-teorema).

5- teoremadan taqqoslamaning har ikkala qismini bir xil natural ko'rsatkichli darajaga ko'tarish mumkinligi kelib chiqadi, ya'ni $a \equiv b$ (mod *m)* $a^n \equiv b^n$ (mod *m).*

Taqqoslamalarning amaliyotda keng qo'llaniladigan quyidagi xossalarini isbotsiz keltiramiz:

a) *taqqoslamaning ikkala qismini biror butun songa ko 'paytirish mumkin;*

b) *taqqoslamaning ikkala qismini va modulni biror natural songa ko 'paytirish mumkin;*

d) *taqqoslamaning ikkala qismi va modulini ularning umumiy bo'luvchilariga bo'lish mumkin;*

e) *agar a va b sonlari m_1, m_2, ..., m_n modullar bo'yicha taqqoslansa, u holda ular $K(m_1\ m_2\ ...,\ m_n)$ modul bo'yicha ham taqqoslanadi;*

f) *agar d soni m ning bo'luvchisi bo 'lib,* $a \equiv b$ (mod m) *bo 'Isa, u holda* $a \equiv b$ (mod d) *bo 'ladi.*

1- m i s o 1. 3^{30} ni 8 ga bo'lishdan chiqadigan qoldiqni topamiz.

Yechish. $3^2 \equiv (9\text{-}8)(\text{mod}8) \Rightarrow (3^2)^{15} \equiv 1^{15}(\text{mod}8) \Rightarrow 3^{30} = 1(\text{mod } 8) \Rightarrow 3^{30} = 8q+1$. Demak, izlanayotgan qoldiq r = l.

2-misol. $\Sigma = 30^{(n+2)} + 23^{n+1} + 9^n$ ($n \in N$) sonining 7 ga bo'linishini isbot qiling.

Yechish. $$\begin{cases} 30 \equiv 2(\text{mod } 7), \\ 23 \equiv 2(\text{mod } 7), \\ 9 \equiv 2(\text{mod } 7) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30^{n+2} \equiv 2^{n+2}(\text{mod } 7), \\ 23^{n+1} \equiv 2^{n+1}(\text{mod } 7), \Rightarrow \\ 9^n \equiv 2^n(\text{mod } 7), \end{cases}$$

$$\Rightarrow 30^{n+2} + 23^{n+1} + 9^n \equiv 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n(\text{mod } 7) \Rightarrow \Sigma \equiv 2^n(2^2 + 2^1 + 2^0)(\text{mod } 7) \Rightarrow (\Sigma \text{ yig'indi 7 ga bo'linadi}).$$

3- m i s o 1. 2222^{55i5} sonini 7 ga bo'lishda hosil bo'ladigan qoldiqni toping.

Yechish. 2222 ni 7 ga qoldiqli bo'lamiz: 2222 = = 7·317+ 3. Bundan 2222 = 3(mod 7) ni olamiz. Hosil bo'lgan taqqoslamaning bar ikki tomonini 5555- darajaga ko'taramiz:

$2222^{5555} = 3^{5555}(\text{mod } 7)$.

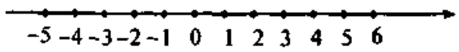
Bu taqqoslama izlanayotgan qoldiq 3^{5555} ni 7 ga bo'lishdan hosil bo'ladigan qoldiq bilan bir xil ekanligini ko'rsatadi. 3^{5555}ni 7 ga bo'lishda hosil bo'ladigan qoldiqni topamiz. Buning uchun 3 ning dastlabki bir nechta darajalarini 7 ga bo'lishda qanday qoldiqlar hosil bo'lishini kuzataylik:

$3^1 \equiv 3(\text{mod } 7)$; $3^2 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \equiv 2(\text{mod } 7)$; $3^3 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6(\text{mod } 7)$; $3^4 \equiv 6 \cdot 3 \equiv 18 = 4(\text{mod}7)$; $3^5 \equiv 4 \cdot 3 \equiv 12 \equiv 5(\text{mod}7)$; $3^6 \equiv 5 \cdot 3 \equiv 15 \equiv 1(\text{mod}7)$; $3^6 \equiv 1(\text{mod}7)$ ga ega bo'ldik. Bundan $3^{6k} \equiv 1^k(\text{mod}7)$, *ke N* (2) ni olamiz. Endi 5555 ni 6 ga bo'lamiz: 5555 = 6 · 925 + 5. U holda $3^{5555} = 3^{6 \cdot 925+5} = 3^{6 \cdot 925} \cdot 3^5 \equiv 1 \cdot 3^5(\text{mod}7)$. Shunday qilib, izlanayotgan qoldiq 5 ga teng .

Ratsional sonlar.Butun sonlar . Oddiy kasrlar va ular ustida amallar.

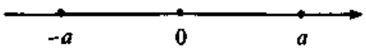
Ratsional sonlar

Butun sonlar. Oddiy kasrlar. Nol sonini natural sonlar to'plamiga kiritib, butun *manfiytnas sonlar to 'plami* deb ataladigan yangi sonli to'plam hosil qilamiz va bu kengaytirilgan to'plamni N_0 = {0, 1, 2, 3, ..., *n, ...}* orqali belgilaymiz. Katta sonni kichik sondan ayirish mum-kin bo'lishi uchun N_0 sonlar to'plamini yangi sonlar kiritish yo'li bilan yanada kengaytirish zarur.
To'g'ri chiziqni olib, unda yo'nalish, 0 boshlang'ich nuqta va masshtab birligini olamiz (7- rasm). Boshlang'ich nuqtaga 0 sonini mos qo'yamiz. Boshlang'ich nuqtadan o'ng tomonda bir, ikki, uch va h.k. masshtab birligi maso-fada joylashgan nuqtalarga 1, 2, 3,... natural sonlarni mos qo'yamiz, boshlang'ich nuqtadan chap tomonda bir, ikki, uch va h.k. birlik masofada joylashgan nuqtalarga -1, -2, -3,... simvollaribilan belgilanadigan yangi sonlarni mos qo'yamiz.



7- rasm.

Bu sonlar *butun man-fiy sonlar*deb ataladi. Sonlar belgilangan bu to'g'ri chiziq



8- rasm.

son o 'qi deb ataladi. O'qning strelka bilan ko'rsatilgan yo'nalishi *musbat yo'nalish,* bunga qarama-qarshi yo'nalish esa *manfly yo 'nalish* deb ataladi. Natural sonlar son o'qida boshlang'ich nuqtadan musbat yo'nalishda qo'yiladi, shuning uchun ular *musbat butun sonlar* deb ataladi.

Butun manfiymas sonlar to'plami bilan butun manfiy sonlar to'plamining birlashmasi yangi sonli to'plamni hosil qiladi, bu to'plam *butun sonlar to 'plami* deb ataladi va Z simvoli bilan belgilanadi: Z = {...,-4,-3,-2,-l,0,l,2,3,4,...}.*a* va *-a* sonlar *qarama-qarshi* sonlar deb ataladi. Son o'qida bu sonlarga mos keladigan nuqtalar nolga nisbatan simmetrik joylashadi (8-rasm).O'lchash natijasi butun sonlarda, o'nli yoki oddiy kasrlarda ifodalanadi. Agar miqdor qarama-qarshi (o'sish-kamayish, yuqoriga-quyiga, foyda-zarar, issiq-sovuq va hokazo) ma'noga ham ega bo'lsa, uning qiymatlari oldiga mos ravishda musbatlik («+») yoki manfiylik («-») ishorasi qo'yiladi: Jc = -8, *y = 8, t = +5°.* $\frac{m}{n}$ ifoda oddiy kasr deb ataladi, bunda *m* є *Z, n* є *N.* Agar $\frac{p}{q}$ va $\frac{m}{n}$ kasrlar uchun *pn = mq* sharti bajarilsa, u holda bu oddiy kasrlar *teng* deyiladi va

$$\frac{p}{q}=\frac{m}{n}$$

ko'rinishida yoziladi.
Oddiy kasrlar uchun quyidagi xossalar o'rinlidir:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

1. Har qanday kasr o'z-o'ziga teng:, chunki *ab = ba.*
2. Agar $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ bo'lsa, u holda $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ bo'ladi.

3. Agar $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ bo'lib, $\frac{c}{d}=\frac{l}{n}$ bo'lsa, u holda $\frac{a}{b}=\frac{l}{n}$ bo'ladi.

4. Agar $\frac{p}{q}$ kasrning surat va maxraji $m \neq 0$ songa ko'paytirilsayoki bo'linsa, uning qiymati

o'zgarmaydi, ya'ni $\frac{p}{q} = \frac{p \cdot m}{q \cdot m} \Rightarrow p \cdot q \cdot m = q \cdot p \cdot m$ yoki $\frac{p}{q} = \frac{p : m}{q : m}$ bo'ladi.

Ko'paytmasi birga teng bo'lgan ikkita sonlar *o'zaro teskari* sonlar deb ataladi. Bular $\frac{m}{n}$ va $\frac{n}{m}$ ko'rinishidagi sonlardir. Bir necha kasrni umumiy maxrajga keltirish deb, bu kasrlarning qiymatlarini o'zgartirmasdan ularni bir xil maxrajga olib keluvchi almashtirishga aytiladi. $\frac{a}{b}$ va $\frac{c}{d}$ kasrlarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari quyidagi tengliklar bilan aniqlanadi:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Natural son bilan musbat oddiy kasrning yig'indisini «+» ishorasiz yozish qabul qilingan. Masalan,

$45 + \frac{1}{2} = 45\frac{1}{2}$, $58 + \frac{3}{7} = 58\frac{3}{7}$ va hokazo.

O’nli kasrlar va ular ustida amallar.Cheksiz davriy o’nli kasrni oddiy kasrga aylantirish.

O'nli kasrlar. Agar oddiy kasrning maxraji 10 ning biror natural ko'rsatkichli darajasiga teng bo'lsa, u holda bunday kasr o'nli kasr deyiladi.Masalan, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{11}{100}$, $\frac{125}{1000}$ va hokazo kasrlar o'nli kasrlardir. O'nli kasrlarni maxrajsiz yozish qabul qilingan. Masalan, yuqoridagi kasrlarni mos ravishda 0,1; 0,2; 0,11; 0,125 ko'rinishda yozish mumkin. Bunday o'nli kasrlar *chekli o'nli kasrlardir.*

Agar $\frac{a}{b}$ *qisqarmas kasrning* maxrajini $2^m \cdot 5^n (m,\ n \in N_0)$ ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lsa, u holda bu kasr chekli o'nli kasrga aylanadi.
Masalan,

$$\frac{3}{40} = \frac{3}{2^3 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{75}{10^3} = 0{,}075$$

yoki

$$\frac{8}{625} = \frac{8}{5^4} = \frac{7 \cdot 2^4}{5^4 \cdot 2^4} = \frac{112}{10^4} = 0{,}0112.$$

Agar $\frac{a}{b}$ qisqarmas kasr maxrajini $2^m \cdot 5^n$ $(m,\ n \in$ JV$_0)$ ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lmasa, u holda $\frac{a}{b}$ kasr chekli o'nli kasrga aylanmaydi. Masalan, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{11}$ va $\frac{35}{44}$ kasrlarni chekli o'nli kasrlar ko'rinishida yozish mumkin emas. Oddiy kasrni o'nli kasrga aylantirish kasrning suratini uning maxrajiga bo'lish bilan ham bajarilishi mumkin. Bundan kelib chiqadiki, agar *a* va *b* lar o'zaro tub bo'lsa, *a* ni *b* ga bo'lish jarayoni *b* sonini 2"· 5" ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lgan holdagina cheklidir.
T a' r i f. $\frac{m}{n}$ *ko 'rinishida yozish mumkin bo 'Igan har qanday son ratsional son deb ataladi,* bunda $m \in Z$ va $n \in Z$. Ratsional sonlar to'plamini Q bilan belgilaymiz:

$$Q = \left\{ a \middle| a = \frac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in N \right\}.$$

Ratsional sonlar to'plami barcha butun va kasr sonlardan tashkil topgan bo'lib, uni manfiy ratsional sonlarning Q_-, faqat 0 dan iborat bir elementli {0} va musbat ratsional sonlarning Q_+ to'plamlari birlashmasi (yig'indisi) ko'rinishda tasvirlash mumkin:

$$Q = Q_- \cup \{0\} \cup Q_+.$$

Har qanday ratsional sonni cheksiz o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin. $\frac{m}{n}$ sonini shunday yozish uchun *m* ni *n* ga «burchakli» bo'lish kerak. Masalan, 1 ni 3 ga bo'lib, 0,333 ... 3 ... cheksiz o'nli kasrni hosil qilamiz. Demak, $\frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots 3 \ldots$. Shu kabi va $\frac{1}{7} = 0{,}14857142857\ldots$ $\frac{8}{45} = 0{,}1777\ldots$ bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.Bu misollarning bar birida, biror joydan boshlab, biror raqami yoki raqamlari ma'lum bir tartibda takrorlanadigan cheksiz o'nli kasr hosil bo'ldi.Agar cheksiz o'nli kasrning biror joyidan boshlab, biror raqam yoki raqamlar guruhi ma'lum bir tartibda cheksiz takrorlansa, bunday o'nli kasr *davriy o'nli kasr* deyiladi. Takrorlanuvchi raqam yoki raqamlar guruhi shu kasrning *davri* deb ataladi.Odatda, davriy o'nli kasrning davri qavs ichiga olingan holda bir marta yoziladi: 0,666... = 0,(6); 0,131131131131... = 0,(l3l); 0,1777...7... = 0,1(7).Shunday qilib, har qanday oddiy kasr va demak, har qanday ratsional son *davriy o 'nli kasr* bilan ifodalanadi.

Davriy o'nli kasrlarni oddiy kasrlarga aylantirish.
Cheksiz o'nli davriy kasrlarni 10, 100, 1000 va h.k. larga ko'paytirish amalini chekli o'nli kasrlardagi kabivergul-ni ko'chirish bilan bajarish mumkin. Bundan foydala-nib, har qanday davriy kasrni oddiy kasrga aylantirish mumkin.
Masalan, x = 0,(348) = 0,348348348... davriy kasrni oddiy kasrga aylantiraylilc. Davr uch raqamli bo'lganligi uchun kasrni 1000 ga ko'paytiramiz: l000x= 348,348348... = 348 + x.

Bundan 999x = 348 yoki

$$x = \frac{348}{999} = \frac{116}{333}$$

0,00(348) o'nli kasr esa 0,(348) dan 100 marta kichik, shunga ko'ra $0,00(348) = \frac{348}{99\,900}$ bo'ladi. 0,96(348) kasrni esa 0,96 + 0,00(348) yig'indi ko'rinishida yozish mumkin, u holda

$$\frac{96}{100} + \frac{348}{99\,900} = \frac{96 \cdot 999 + 348}{99\,900} = \frac{96\,000 + 348 - 96}{99\,900} = \frac{96\,348 - 96}{99\,900}$$

Davriy o'nli kasrlarni oddiy kasrlarga aylantirishning umumiy qoidasini ta'riflaymiz.
Sof davriy kasr shunday oddiy kasrga tengki, uning surati davrdan, maxraji esa davrda nechta raqam bo 'Isa, shuncha marta takrorlanadigan 9 raqami bilan ifodalana-digan sondan iborat.
Masalan,

$$0,(5) = \frac{5}{9};\ \ 0,(45) = \frac{45}{99}$$

Aralash davriy kasr shunday oddiy kasrga tengki, uning surati ikkinchi davrgacha turgan son bilan birinchi davr-gacha bo 'Igan son ayirmasidan, maxraji esa davrda nechta raqam bo'Isa, shuncha marta takrorlangan 9 raqami va buning oxiriga vergul bilan birinchi davr orasida nechta raqam bo 'Isa, shuncha marta yozilgan nollar bilan ifoda-lanadigan sondan iborat.

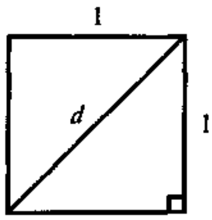
Masalan,

$$0,3(45) = \frac{345 - 3}{990} = \frac{342}{990} = \frac{171}{495}$$

Irratsional sonlar . $\sqrt{2}$ ning irratsionalligi.Haqiqiy sonlar. Haqiqiy sonning moduli.

Irratsional sonlar. Qisqarmas kasr shaklida ifodalab bo'lmaydigan sonlar, ya'ni *irratsionalsonlarhamuchtaydi.*

1-misol. Tomoni 1 ga teng bo'lgan kvadratning *d* diagonal! hech qanday ratsional son bilan ifodalan-masligini isbot qilamiz (9- rasm).



9- rasm.

I s b o t . Pifagor teoremasiga muvofiq $d^2= 1^2+ 1^2= 2$. Diagonalni $\frac{m}{n}$ qisqarmas kasr ko'rinishida yozish mumkin, deb faraz qilaylik. U holda $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ yoki $m^2 = 2n^2$ Bunga ko'ra *m* — juft son, $m= 2k$. Shuningdek, $(2k)^2= 2n^2$ yoki $2k= n$, ya'ni *n* ham juft son. $\frac{m}{n}$ kasrning surat va maxraji 2 ga qisqarmoqda, bu esa qilingan farazga zid. Demak, *d* ning uzunligi, ya'ni $\sqrt{2}$ soni ratsional son emas.

Haqiqiy sonning moduli. *a* haqiqiy sonning moduli deb,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{agar } a \geq 0 \text{ bo‘lsa,} \\ -a, & \text{agar } a < 0 \text{ bo‘lsa} \end{cases}$$

munosbat bilan aniqlanadigan *a*\ soniga aytiladi. Uning asosiy xossalarini keltiramiz:

$$1)\ \alpha \leq |\alpha|;\ \ 2)\ |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|;\ \ 3)\ \ \alpha + \beta \leq |\alpha| + |\beta|;$$
$$4)\ \left|\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|};\ \ 5)\ |\alpha - \beta| \geq |\alpha| - |\beta|.$$

1- xossaning to'g'riligi modulning ta'rifidan kelib chiqadi.

2- xossani isbot qilamiz:

$$\alpha \leq |\alpha|,\ \beta \leq |\beta| \Rightarrow |\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq$$
$$\leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Rightarrow |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \text{ Tenglik belgisi } \alpha\beta \geq 0$$

bo'lgandagina o'rinlidir.

Haqiqiy sonning butun va kasr qismi.

Haqiqiy sonning butun va kasr qismi. *a* sonining *butun qismi* deb, *a* dan katta bo'lmagan butun sonlarning eng kattasiga aytiladi va *[a]* yoki E *(a)* orqali belgilanadi.

O'qilishi: «*a* ning butun qismi2» yoki 2 «antye α» (fransuzcha entiere — butun).

1- misol. $[3,2]=[3,8]=3$; $[0,2]=[0,99]=[0]=0$; $[-1,2]=[-1,5]=-2$; shu kabi $10\frac{4}{5}+5\frac{2}{5}=16\frac{1}{5}$ bo'lgani uchun $\left[10\frac{4}{5}+5\frac{2}{5}\right]=\left[16\frac{1}{5}\right]=16$; $28\cdot[0,7]=28\cdot 0=0$; $8:\left[2\frac{4}{5}\right]=4$; $[\pi]=3$; $[-\pi]=-4$.

Sonningbutun qismi quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. *a, b* є *Z* bo'lganda, *[a + b] = [a]* + [b] bo'ladi.

2- x o s s a. *a, b* є *R* bo'lganda, *[a + b] ≥ [a] + [b]* bo'ladi. [9+ 10]-[9]+ [10]-19; [9,8]+ [9,9] = 9 + 9 = 18. [9,8 + 9,9] = [19,7] - 19. 18 < 19.

a - [a] ayirma *a* sonining *kasr qismi* deyiladi va *{a}* orqali belgilanadi: *{a}=a-[a]>0, 0*<{a}<l, bunda *a=[a]+{a}*.

2- m iso 1. $\left\{16\frac{1}{5}\right\}=\frac{1}{5}$, $\{-1,5\}=\{-2+0,5\}=0,5$; $\{\pi\}=0,14...$

3-misol. Agar [a] = [b] bo'lsa, *-1<a-b<1* bo'lishini isbot qilamiz.

I sbot. α = [α] + {α} va b = [b] + {b} bo'lganidan a-b = ([a] + {a})-([b] + {b}) = ([a]-[b]} + ({a} - {b}) = = {α}-{b}. Lekin 0≤{α}<l, 0≤{b}<l.

Shunga ko'ra (va qarama-qarshi ma'nodagi tengsizlik-larni hadlab ayirish mumkinligiga asoslansak):

0≤{α}<l

1>{b}≥O

-1≤{a}-{b}<1.

4- m i s o 1. Agar *a* soni butun va nomanfiy bo'lsa, [na]≥ n[a] bo'lishini isbotlang.

Isbot. [na] = [n([a] + {a})] = n[a] + n{a}, bunda n{a}≥0.

Demak, [na]≥ *n*[a].

5- misol. 1 · 2 · 3 · 4 · 5 ·... · 2001 ko'paytma nechta nol bilan tugaydi?

Yechish. Berilgan ko'paytmaning kanonik shakli

$2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p^{\alpha_n}$ bo'lsin. α_1, va α_3 natural sonlarni topamiz. α_3 soni 1 dan 2001 gacha bo'lgan natural sonlar orasidagi 5, 25, 125, 625 sonlariga bo'linuvchi barcha natural sonlarning soniga teng:

$$\alpha_3=\left[\frac{2001}{5}\right]+\left[\frac{2001}{25}\right]+\left[\frac{2001}{125}\right]+\left[\frac{2001}{625}\right]=400+80+16+3=499.$$

Xuddi shu kabi

$$\alpha_1 = \left[\frac{2001}{2}\right] + \left[\frac{2001}{4}\right] + \left[\frac{2001}{16}\right] + \ldots + \left[\frac{2001}{1024}\right] = 1880$$

ekanini aniqlaymiz.

$2^{1880} \cdot 5^{499}$ ko'paytma 499 ta nol bilan tugagani sababli, berilgan ko'paytma ham 499 ta nol bilan tugaydi.

6- m i s o l. $\left[\frac{x-1}{3}\right] = x$ tenglamani yechamiz.

Y e c h i s h. Tushunarliki, $x \in Z$ va $x \le \frac{x-1}{3} < x+1$

bo'lishi zarur. $x \le \frac{x-1}{3} < x+1$ tengsizlik x - -1 dan iborat yagona butun yechimga ega va bu yechim berilgan tenglamani qanoatlantiradi. Shunday qilib, berilgan tenglama x = -1 dan iborat yagona yechimga ega.

Proporsiya va protsent.

Proporsiya. *a ϵ R, b ϵ R\{0}* bo'lsa, f ifoda *nisbat* deyiladi. Ikki nisbatning tengligi *proporsiya* deyiladi. Proporsiya umumiy holda

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad (1)$$

ko'rinishda yoziladi, bunda $b \neq 0$, $d \neq 0$. *a, d* lar proporsiyaning *chetki* hadlari, b, c lar esa *o'rta* hadlari deyiladi.
Proporsiya quyidagi xossalarga ega:

$$1.\ ad \neq bc;$$

$$2.\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{c}=\frac{b}{d},\ \frac{d}{c}=\frac{b}{a}; \\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a}. \end{cases}$$

$$3.\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{am}{b}=\frac{cm}{d}; \\ \frac{a}{bn}=\frac{c}{dn}, \end{cases} \quad m,n \neq 0.$$

(1) proporsiyadan hosilaviy proporsiyalar deb ata-luvchiquyidagi proporsiyalarni hosil qilish

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad (2); \qquad \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c} \quad (3);$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad (4); \qquad \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c} \quad (5);$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \quad (6).$$

mumkin.
I sbot. (2) ni isbotlaymiz $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$. Bu esa (2) proporsiyadan iborat.

M i s o l. $\frac{3+x}{3-x}=\frac{5}{6}$, $x-?$

(6) dan foydalansak, $\frac{3+x+3-x}{3+x-3+x}=\frac{5+6}{5-6}$; $\frac{6}{2x}=\frac{11}{-1}$;

$$x=-\frac{3}{11}.$$

Protsent (foiz)lar. Turmushda ko'p ishlatiladigan $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ kasr sonlarning maxsus nomlari mavjud. $\frac{1}{2}$—yarim, $\frac{1}{4}$ — chorak, $\frac{1}{8}$ — yarim chorak. Xuddi shunday kasrlardan biri $\frac{1}{100}$ dir. Berilgan sonning bir protsenti (foizi) deb, uning yuzdan bir qismiga aytiladi va % bilan belgilanadi.Masalan, *p* sonning 1% i $\frac{p}{100}$ kasrni bildiradi. Demak, $1\%=\frac{1}{100}$, $15\%=\frac{15}{100}$, $25\%=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$ Sonning $\frac{1}{1000}$ qismiga «promille» deyiladi va *‰* bilan belgilanadi. 2000 ning 5%o si $\frac{2000}{1000}\cdot 5=10$, $1\%=10‰$ Protsentlarga doir 4 xil masala uchraydi:

1) sonning protsentini topish;
2) protsentiga ko'ra sonni topish;
3) ikki sonning protsent nisbatini topish;
4) murakkab protsentga doir masalalar.

1-masala. *a* sonining *p %* i bo'lgan *x* sonini toping.

$$p\%=\frac{p}{100},\ x=\frac{ap}{100}.$$

Masalan, 340 ning 15% i quyidagicha topiladi:

$$x = \frac{340 \cdot 15}{100} = \frac{102}{2} = 51.$$

2- m a s a 1 a. Sonning *p %* i *P* ga teng. Shu sonni toping.

$\frac{p}{100}$ bo'lagi *P* ga teng bo'lgan ;x son $x = \frac{P \cdot 100}{p}$ dir.

Sonning 60 % i 24 bo'lsa, sonning o'zi $x = \frac{24 \cdot 100}{60} = 40$.

3- m a s a 1 a. *m* soni α sonining necha protsentini tash-kil etadi. Bu yerda *m* sonining *a* soniga nisbatini protsentlarda ifoda qilish kerak:

$$x = \frac{m}{a} \cdot 100.$$

Akademik litseyda 600 nafar o'quvchi bo'lib, 120 nafari qizlar. Qizlar akademik litsey o'quvchilarining necha protsentini tashkil etadi?

$$x = \frac{120 \cdot 100}{600} = 20\%$$

4- m a s a 1 a. Xalq banki mijozlarga *p %* foyda beradi. Mijoz xalq bankiga *a* so'm pul topshirsa, « yildan so'ng necha so'mga ega bo'ladi?

Y e c h i s h . Xalq bankiga *a* so'm qo'ygan mijoz 1 yildan so'ng

$$N_1 = a + \frac{a}{100} \cdot p = a(1 + \frac{p}{100})$$

so'mga, 2 yildan so'ng

$$N_2 = N_1 + \frac{N_1}{100} \cdot p = a(1 + \frac{p}{100})^2$$

so'mga, 3 yildan so'ng

$$N_3 = N_2 + \frac{N_2}{100} \cdot p = a(1 + \frac{p}{100})^3$$

so'mga ega bo'ladi.

Shu jarayonni davom ettirib, mijoz *n* yildan so'ng

$$N_n = a(1 + \frac{p}{100})^n \quad (1)$$

so'mga ega bo'lishiga ishonch hosil qilamiz. (1) tenglik odatda *murakkab protsentlar formulas!* deb ataladi.

Birhadlar va ko’phadlar.

Algebraik ifoda. **Natural ko'rsatkichli daraja. Birhad.** Algebrada qo'llaniladigan harfiy belgilashlar bir xil turdagi ko'plab masalalarni formulalar ko'rinishida berilgan umumiy qoida asosida yechishga imkoniyat yaratadi. Agar sonli ifodadagi ayrim yoki barcha sonlar harflar bilan al-mashtirilsa, *harfiy ifoda* hosil bo'ladi. Biz harfiy ifodalash-dan matematika, fizika va boshqa fanlarni o'rganishda keng foydalanamiz.

To'rt matematik amal, butun darajaga ko'tarish va bu-tun ko'rsatkichli ildiz chiqarish ishoralari orqali birlash-tirilgan harflar va sonlardan iborat ifodalar *algebraik ifoda* deyiladi. Agar algebraik ifodada sonlar va harflarning ildiz ishoralari qatnashmasa, u *ratsional algebraik ifoda,* ildiz ishoralari qatnashsa, *irratsional algebraik ifoda* deyiladi. Agar ratsional ifodada harfli ifodaga bo'lish amali qatnashmasa, u *butun algebraik ifoda* deyiladi.

M i s o 11 a r. 1) $6b-3a + dc$ — butun algebraik ifoda;

2) $\frac{bc+a}{c}$ — kasr algebraik ifoda;

3) $5+\sqrt{c}$ — irratsional algebraik ifoda;

4) $(a - b)^2 =(b- a)^2$ — ayniyat.

Irratsional ifoda biror ratsional ifodaga aynan teng bo'lishi ham mumkin. Masalan, $\sqrt{(a^2+2)^2}-2=a^2$. Har biri a ga teng bo'lgan $n(n\geq 2)$ ta ko'paytuvchining ko'paytmasi a sonining *n- darajasi* deyiladi va a^n deb belgilanadi. Shunday qilib,

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{marta}} \quad (n\geq 2).$$

Ta'rifga asosan $\alpha^1 = a$. Natural ko'rsatkichli darajaning xossalari:

$$1^\circ.\ a^m\cdot a^n = a^{m+n};\ m,\ n\in N.$$

$$2^\circ.\ a^m : a^n = a^{m-n};\ m,\ n\in N, m>n.$$

$$3^\circ.\ (a^m)^n = a^{mn};\ m,\ n\in N.$$

$$4^\circ.\ (ab)^n = a^n b^n;\ n\in N.$$

$$5^\circ.\ \left(\tfrac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};\ a,\ b\in R,\ b\neq 0,\ n\in N.$$

3°- xossani isbotlaymiz (qolgan xossalar ham shu kabi isbotlanadi):

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\ldots\cdot a^m}_{n\ \text{marta}} = \underbrace{\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ \text{marta}}\cdot\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ \text{marta}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ \text{marta}}}_{n\ \text{marta}} =$$

$$= \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{mn\ \text{marta}} = a^{mn}.$$

Butun musbat darajali harf, son yoki ulardan tuzilgan ko'paytuvchilar ko'paytmasidan iborat butun algebraik ifoda *birhad* deyiladi. Koeffitsientlari bilangina farq qiladigan birhadlar *o'xshash birhadlar* deyiladi. Masalan, *3ab* va - *4,2ab* lar o'xshash birhadlardir. Har qanday birhad turli ko'rinishda yozilishi mumkin. Masalan, $7a^6\cdot b^5 = 3{,}5\cdot 2\alpha^6\cdot b^5 = 7a^4\cdot b^3\cdot a^2\cdot a^2\cdot b^2$ =.-..

Lekin $7a^6b^5$ birhadda sonli ko'paytuvchi birinchi o'rinda, harflar alfavit tartibida daraja ko'rsatkichi orqali bir marta yozilgan bo'lib, u *standart (kanonik)* ko'rinishda yozilgandir. Birhaddagi barcha harflar darajalarining yig'indisi shu birhadning *darajasi* deyiladi.

Ko’phadlar.

Birhadlar yig'indisi *ko'phad* deyiladi. Masalan, $3a^2b+7b^2c$, $9x^2y+xy^2$ ifodalarning bar biri ko'phaddir. Ko'phad tarkibidagi eng katta darajali birhadning da-rajasi shu *ko'phadning darajasi* deyiladi. Masalan, $P(x)=c+ax^2+bx$, $R(x,y)=3xy+z$ ikkinchi darajali ko'phaddir. $P(x)=c+ax^2+bx$ va $P(x)=ax^2+bx+c$ ko'phadlarni qaraylik, ular bitta ko'phadning ikki ko'rinishli yozuvi. Ulardan ikkinchisi *x* o'zgaruvchi daraja ko'rsatkichlarining kamayib borishi tartibida, ya'ni *standart* ko'rinishdagi yozuvdir. Ko'p argumentli ko'phadlar ham standart ko'-rinishda yozilishi mumkin. *x, y, ..., z* ~ o'zgaruvchilar, *a, b* lar noldan farqli sonlar bo'lsin. $ax^{k_1}y^{k_2}\ldots z^{k_n}$ va $bx^{m_1}y^{m_2}\ldots z^{m_n}$ birhadlarni solishtiraylik. $k_1=m_1$, $k_2=m_2$, ..., $k_i=m_i$, lekin $k_{i+1}>m_{i+1}$ bo'lsa, birinchi birhad ikkinchisidan katta, chunk! ulardagi *x* va *y* lar daraja ko'rsat-kichlari bir xil bo'lsa-da, *z* ning ko'rsatkichi birinchi bir-hadda katta. Agar ko'p o'zgaruvchili ko'phadda har qaysi qo'shi-luvchi o'zidan o'ngda turgan barcha qo'shiluvchilardan katta bo'lsa, qo'shiluvchilar *lug'aviy (leksikografik)* tartibda joylashtirilgan deyiladi. Masalan, $P(x,y,z)=8x^5y^6z^2--5x^4y^8z+16x^4y^5z^4$ ko'phadning qo'shiluvchilari lug'aviy tartibda joylashtirilgan.Agar ko'phadning barcha hadlarida *x, y,..., z* o'zga-ruvchilarning ko'rsatkichlari yig'indisi *m* ga teng bo'lsa, uni *m- darajali bir jinsli ko 'phad* deyiladi. Masalan, $8x-5y+z$ — birinchi darajali bir jinsli (bunda m=l), $x^3+y^3+z^3-7xy^2-5xyz$ — uchinchi darajali *(m* = 3) bir jinsli ko'phad.Agar $ax^{k_1}\ldots z^{k_n}$ birhad $m=k_1+\ldots+k_n$ darajali bo'lsa, ixtiyoriy umumiy λ ko'paytuvchi uchun *a(λx)* ga ega bo'lamiz. Agar ixtiyoriy λ soni uchun $f(\lambda x,\ldots,\lambda z)=\lambda^m f(x,\ldots,z)$ tenglik bajarilsa, $f(x,\ldots,z)$ ko'phad funksiya) *m*- darajali bir jinsli ko'phad (funksiya) bo'ladi. Masalan, $f(x,y)=$ $=y^3+x^2\sqrt{xy+\frac{x^3}{y}}$ ftinksiya 3- darajali bir jinsli funksiyadir, chunki

$$f(2x,2y)=8y^3+4x^2\cdot\sqrt{4\left(xy+\frac{x^3}{y}\right)}=2^3f(x;y).$$

Shu kabi, $f(x,y)=x^3+2x^2y-y^3+x^2\sqrt{xy+\frac{x^3}{y}}$ – uchinchi darajali $(m=3)$, $f(x,y,z)=\frac{y+z}{3x+y}$ nolinchi darajali $(m=0)$, $f(x,y,z)=z\cdot\frac{y+z}{3x+y}$ birinchi darajali *(m* = 1) *bir jinslifunksiyalardiт.* Agar x^3y+xy^3 ko'phadda *x* o'rniga *y, y* o'rniga *x* yozilsa (ya'ni *x* va *y* lar o'rin almashtirilsa), oldingi ko'phadning o'zi hosil bo'ladi.Agar $P(x,y,\ldots,z)$ ko'phad tarkibidagi harflarning har qanday o'rin almashtirilishida unga aynan teng ko'phad hosil bo'lsa, *P* ko'phad *simmetrik ko'phad* deyiladi. Simmetrik ko'phadda qo'shiluvchilar o'rin almashtirilganda yig'indi, ko'paytuvchilar o'rin almashtirilganda ko'paytma o'zgarmaydi. Agar $(\lambda+x)(\lambda+y)\ldots(\lambda+z)$ ifodadagi qavslar ochilsa, λ darajalarining koeffitsientlari sifatida $x,y,\ldots,z$ o'zgaruvchilarning simmetrik ko'phadlari turgan bo'ladi. Ular *asosiy simmetrik ko 'phadlar* deyiladi. Masalan, o'zgaruvchilar soni n - 2 bo'lsa, $(\lambda+x)(\lambda+y)=\lambda^2+(x+y)\lambda+xy$ bo'lib, asosiy simmetrik ko'phadlar x + y va xy bo'ladi. Ularni $\sigma_1=x+y$, $\sigma_2=xy$ orqali ifodalaymiz. Shu kabi, $n=3$ da $\sigma_1=x+y+z$, $\sigma_2=xy+xz+yz$, $\sigma_3=xyz$ bo'ladi. Bulardan tashqari, quyidagi ko'rinishdagi $\sigma_1=x+\ +y+...+z$ *(n* ta qo'shiluvchi), $\sigma_2=x^2+y^2+...+z^2$, ..., $\sigma_k=x^k+y^k+...+z^k$ *darajali yig'indilar ham* simmetrik ko'p-hadlardir.

1 - t e o r e m a. ***Ixtiyoriy*** $s_k=x^k+y^k$ ***darajali yig'indi*** $\sigma_1=x+y$ ***va*** $\sigma_2=xy$ ***laming ko'phadi ko'rinishida tasvirlanishi mumkin.***

I s b o t. Haqiqatan, k = 1 da $s_1=x+y=\sigma_1$, $k=2$ da $s_2=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\sigma_1^{\ 2}-2\sigma_2$. Teorema s_{n-1} va s_n (bunda $1\le n\le k,\ k\le 2$) uchun to'g'ri bo'lsin. Uning s_{n+1} uchun to'g'riligini isbotlaymiz: $s_{n+1}=x^{n+1}+y^{n+1}=(x^n+y^n)(x+y)-x^ny-xy^n=$

$=(x^n+y^n)(x+y)-(x^{n-1}+y^{n-1})xy=s_n\sigma_1-s_{n-1}\sigma_2$.

Faraz bo'yicha s_n va s_{n-1} lar uchun teorema to'g'ri edi. Demak, teorema s_{n+1} uchun ham to'g'ri.

2-t e o r e m a. ***x,..., z o'zgaruvchilari har qanday sim-metrik P ko'phadyagona ravishda shu o'zgaruvchilardan tuzilgan asosiy simmetrik ko'phadlardan iborat bo'ladi.***

Isbot. n = 2 bo'lganholniqaraymiz. $P(x,y)$ simmetrik ko'phad ax^my^k qo'shiluvchiga ega bo'lsin. Agar $m=k$ bo'lsa, bu qo'shiluvchi $a(xy)^k$ ga, ya'ni $a\sigma^k$ ga teng,bo'lsa, $k>m$ $P(x,\ y)$ ning tarkibida ax^my^k bilan bir qatorda x va y larni o'rin almashtirishdan hosil bo'luvchi ax^my^k qo'shiluvchi ham bo'ladi: $ax^ky^m+ax^my^k=a(xy)^m(x^{k-m}+y^{k-m})=a\sigma_2^m s_{k-m}$. Lekin 1- teoremaga muvofiq ixtiyoriy s_{k-m} darajali yig'indi, demak, P simmetrik ko'phad ham har doim σ_1, σ_2 orqali ifodalanadi.

1- m i s o 1. $P(x,y)=x^3+y^3+2x^2y+2xy^2$ simmetrik ko'phadni σ_1 va σ_2 lar orqali ifodalaymiz.

Yechish. $P(x,\ y)=(x+y)(x^2-xy+y^2)+2xy(x+y)=$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2+2xy)=(x+y)((x+y)^2-xy)=\sigma_1(\sigma_1^2-\sigma_2)$.

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0(a_n\neq 0)$$

ko'rinishdagi butun ratsional ifoda *bir o 'zgaruvchili n- darajali ko 'phad deyiladi.* Har qanday son 6- darajali ko'phaddan iborat. 0 soni esa darajaga ega bo'lmagan ko'phad. a_nx^n qo'shiluvchi ko'phadning *bosh hadi,* a_0 esa uning *ozod hadi* deyiladi.

Qisqa ko’paytirish formulalarining umumlashmalari. Ko’phadlarni bo’lish.

Qisqa ko'paytirish formulalarining umumlashmalari. Agar ko'phadni ko'phadga ko'paytirish qoidalaridan foydalanib, zarur soddalashtirishlarni bajarsak, quyidagi formulalar hosil bo'ladi:

$(x\pm a)^2 = x^2\pm 2ax + a^2,$

$(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3x^2a + 3xa^2 \pm a^2,$

$(x + a)(x- a) = x^2 - a^2,$

$(x + a) (x^2 - ax+ a^2)=- x^3 + a^3$

$(x - a)(x^2 + ax + a^2) = x^3-a^3$

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

va hokazo.

Endi $x + a$ ikkihadni m natural ko'rsatkichli darajaga ko'tarish qonuniyati bilan tanishamiz. Shu maqsadda $(x + a)$, $(x+a)^2$, $(x + a)^3$, $(x+a)^4$ va hokazo darajalarga ko'tarishlarni bajarib, hosil bo'lgan *yoyilmaning* koeffitsi-entlarini kuzataylik:

$(x+a)^1 =1x+ 1a,$

$(x+a)^2=1x^2 + 2ax+ 1a^2,$

$(x + a)^3 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1 a^3$

Yoyilmalardan bosh koeffitsientlar 1 ga tengligini ko'ramiz. Oxirgi ko'phadni $x + a$ ga ko'paytirib,

$(x + a)^4 = 1x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4a^3x + 1a^4$ ni hosil qilamiz. Shu kabi,

$(x + a)^5 = 1x^5 + 5x^4a + 10x^3 a^2+ 10x^2 a^3 + 5xa^4 + 1a^5$ va hokazolarni hosil qilamiz.

$(x+ a)''$ uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

1) yoyilmadagi barcha hadlarning soni $x+a$ ikkihad ko'tarilayotgan daraja ko'rsatkichidan bitta ortiq, ya'ni hadlar soni $n + 1$ ga teng;

2) x o'zgaruvchining ko'rsatkichi n dan 0 gacha 1 taga ketma-ket kamayib, a o'zgaruvchining darajasi esa 0 dan n gacha ketma-ket o'sib boradi. Har bir hadda x va a ning darajalari yig'indisi n ga teng;

3) yoyilma boshidan va oxiridan teng uzoqlikdagi had-larning koeffitsientlari o'zaro teng, bunda birinchi va oxirgi hadlarning koeffitsientlari 1 ga teng;

4) $(x+a)^0$, $(x+ a)^1$, $(x+a)^2$, $(x+a)^3$, $(x+a)^4$, $(x+a)^5$ va $(x + a)^6$ yoyilmalari koeffitsientlarini uchburchaksimon ko'rinishda joylashtiraylik:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccl}
 & & & & & & 1 & & & & & & & & (n=0)\\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & (n=1)\\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & (n=2)\\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & (n=3)\\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & (n=4)\\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & (n=5)\\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & (n=6)
\end{array}
$$

Har bir satrning koeffitsienti undan oldingi satr qo'shni koeffitsientlari yig'indisiga teng (strelka bilan ko'r-satilgan).

Koeffitsientlarning bu uchburchak jadvali *Paskal uchburchagi* nomi bilan ataladi. Undan foydalanib, $(x+a)^6 = = x^6 + 6x^5a + 15 x^4a^2 + 20 x3a3 + 15 x^5a + 6xa^5 + a^6$ ekanini ko'ramiz.

n ning katta qiymatlarida Paskal uchburchagidan foy-dalanish ancha noqulay. Masalan, n = 20 da hisoblash uchun dastlabki 19 qatorni yozish kerak bo'lardi.Umumiy holda ushbu Nyuton binomi formulasidan foydalaniladi:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}a^{n-k}\cdot b^k + \ldots + n\cdot ab^{n-1} + b^n. \quad (1)$$

Ko'phadlarni bo'lish. Bir o'zgaruvchili *A(x)* va *B(x)* ko'phadlar uchun

$$A(x) = B(x)\cdot Q(x) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladigan *Q(x}* ko'phad mavjud bo'lsa, *A(x) ko'phad B(x) ko'phadga bo'linadi* (yoki qoldiqsiz bo'linadi) deyiladi. Bunda v4(x) ko'phad *bo'linuvchi, B(x)* ko'phad *bo'luvchi, Q(x)* ko'phad esa *bo'linma* deyiladi.

$x^3-1=(x^2+x+1)(x-1)$ ayniyatdan, $A(x)=x^3-1$ ko'phadning $B(x)=x^2+x+1$ko'phadga (qoldiqsiz) bo'linishini va bo'linma $Q(x)=x-1$ko'phadga tengligini ko'ramiz.

Butun sonni butun songa (butun) bo'lish amali kabi,ko'phadni ko'phadga qoldiqsiz bo'lish amali hamma vaqt ham bajarilavermaydi. Shu sababli ko'phadni ko'phadga qoldiqsiz bo'lishga nisbatan yanada umumiyroq bo'lgan amal —ko'phadni ko'phadga qoldiqli bo'lish amali kiritiladi.

A(x) ko'phadni B(x) ko'phadga qoldiqli bo'lish deb, uni quyidagicha ko'rinishda tasvirlashga aytiladi:

$$A(x) = B(x)\cdot Q(x) + R(x). \qquad (2)$$

(2) tenglikdagi Q(x) va *R(x)* lar bit o'zgaruvchili ko'phadlar bo'lib, *R(x)* ko'phadning darajasi *B(x)* ko'phadning darajasidan kichik yoki $R(x)=0$.

Ratsional ifodalar.Butun ko'rsatkichli daraja. Ratsional ifodalarni ayniy shakl almashtirish.

1. Butun ko'rsatkichli daraja. Har qanday a haqiqiy sonning α *butun ko 'rsatkichli darajasi* yoki α - *darajasi* deb, a^a songa aytilishini bilamiz, bunda a — daraja asosi, α — daraja ko'rsatkichi,

$$a^{\alpha}=\begin{cases} a, \text{ agar } \alpha=1 \text{ bo'lsa,} \\ \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ marta}}, \text{ agar } \alpha=n,\ n\in N,\ n\geq 2 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$$

Har qanday $a\neq 0$ haqiqiy sonning nolinchi darajasi 1 ga teng, $a^0=1$. Nolning nolinchi darajasi, ya'ni 0° ma'noga ega emas. Ixtiyoriy $a\neq 0$ haqiqiy sonning butun manfiy ko'rsatkichli darajasi $\frac{1}{a^n}$ sonidan iborat, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. 0^{-n} ifoda ma'noga ega emas. Butun ko'rsatkichli darajaning xossalari *(a, b* — noldan farqli haqiqiy sonlar, α, β - butun sonlar):

1) $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$. (1)

Haqiqatan, $\alpha=n\in N$ bo'lsa, haqiqiy sonlarni ko'paytirishning asosiy qonunlariga muvofiq: $(ab)^{\alpha}=(ab)^n=$

$$\underbrace{(ab)(ab)\ldots(ab)}_{n \text{ ta}}=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ ta}}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n \text{ ta}}=a^n\cdot b^n=$$

$=a^{\alpha}\cdot b^{\alpha}$; agar $\alpha=0$ bo'lsa, $(ab)^{\alpha}=(ab)^0=1=1\cdot 1=a^0b^0=a^{\alpha}b^{\alpha}$; agar $\alpha=-n,\ n\in N$ bo'lsa,

$$(ab)^{\alpha}=(ab)^{-n}=\frac{1}{(ab)^n}=\frac{1}{a^nb^n}.$$

Xususan,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}=\frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}, \quad (2)$$

2) $a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$. (3)

Haqiqatan, agar $\alpha=n,\ \beta=m,\ n\in N,\ m\in N$ bo'lsa,
u holda:

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^n\cdot a^m=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ ta}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m \text{ ta}}=$$

$$=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m+n \text{ ta}}=a^{m+n}=a^{\alpha+\beta}.$$

$\alpha=n,\ \beta=-m$ va $\alpha=-n,\ \beta=m$ bo'lgan hollar ham shu kabi isbotlanadi. $\alpha=-n,\ \beta=-m$ holning isbotini quyidagicha bajarish mumkin:

$$a^{\alpha}a^{\beta}=a^{-n}a^{-m}=\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{a^m}=\frac{1}{a^na^m}=\frac{1}{a^{n+m}}=a^{-(n+m)}=$$

$$=a^{-n-m}=a^{(-n)+(-m)}=a^{\alpha+\beta}.$$

3) $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta}$. (4)

4) $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$. (5)

Xususan, $\alpha=n,\ \beta=m,\ n,\ m\in N$ bo'lganda: $(a^{\alpha})^{\beta}=$

$$=(a^n)^m=\underbrace{a^n\cdot a^n\cdot\ldots\cdot a^n}_{m \text{ ta}}=\underbrace{a\,a\ldots a}_{nm \text{ ta}}=a^{nm}=a^{\alpha\beta}.$$

M i s o l. $A=\frac{116^8\cdot 87^4}{58^9\cdot 174^3}$ ni hisoblang.

Y e c h i s h. $A=\frac{(2\ 58)^8\cdot 87^4}{58^9\cdot(2\ 87)^3}=\frac{2^8\cdot 87}{58\cdot 2^3}=\frac{2^5\cdot 3\cdot 29}{2\cdot 29}=48.$

Ratsional ifodalarni ayniy shakl almashtirish. Biror $X(x_1, ..., x_n)$ algebraik ifodani *aynan almashtirish* deb, uni, umuman olganda, X ga o'xshamaydigan shunday $Y(x_1, ..., x_n)$ algebraik ifodaga almashtirish tushuniladiki, barchsı $x_1, ..., x_n$ qiymatlarda X va Y qiymatlaritengbo'lsin.

Masalan, $A(x) = \frac{(x^2+1)(x-1)}{x^2-1}$, $B(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$, $C(x) = \frac{(x^2+1)(x-1)(x+3)}{(x^2-1)(x+3)}$ lardan $A(x)$ ifoda barcha $x \neq -1, x \neq 1$ qiymatlarda, $B(x)$ ifoda $x \neq -1$ qiymatlarda, $C(x)$ esa $x \neq -1, x \neq 1, x \neq -3$ qiymatlarda aniqlangan. Ularning umumiy mavjudlik sohasi $x \neq \pm 1, x \neq -3$ qiymatlardan iborat, unda
ular bir xil qiymatlar qabul qilishadi, ya'ni *aynan tengdir.* Umumiy mavjudlik sohasida bir ratsional ifodani unga aynan teng ifoda bilan almashtirish shu ifodani *ayniy almashtirish* deyiladi. Ayniy almashtirishlardan tenglama-larni yechish, teoremalar va ayniyatlarni isbotlash kabi masalalarni yechishda foydalaniladi. Ayniy almashtirishlar kasrlarni qisqartirish, qavslarni ochish, umumiy ko'pay-tuvchini qavsdan tashqariga chiqarish, o'xshash hadlarni ixchamlash va shu kabilardan iborat bo'ladi. Ayniy almash-tirishlarda arifmetik amallarning xossalaridan foydalaniladi. Quyidagi ayniyatlar nli:

1) $(AB)^n = A^n B^n$;

2) $A^m A^n = A^{m+n}$;

3) $(A^m)^n = A^{mn}$;

4) $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD}$, $B \neq 0$, $D \neq 0$;

5) $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$, $B \neq 0$, $D \neq 0$;

6) $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$;

7) $\frac{AC}{BD} = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$, $C \neq 0$;

8) $\frac{A^m}{A^n} = \begin{cases} A^{m-n}, & m > n \\ 1, & m = n, \ A \neq 0 \text{ da}; \end{cases}$

9) $|AB| = |A| \cdot |B|$;

10) $|A^n| = |A|^n$.

Ratsional ifodalarning kanonik shakli qisqarmas $\frac{P(x)}{Q(x)}$
kasrdan iborat bo'ladi. Bu yerda $P(x)$ va $Q(x)$ lar ko'p-hadlar bo'lib, $Q(x)$ ko'phadning bosh koeffitsienti esa 1 ga teng.

M i s o l 1. $\frac{16-x^2}{2x^4+9} : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-3} \cdot \frac{x-3}{2x+1}\right)$ ratsional ifodani kanonik ko'rinishga keltiring.

Y e c h i s h. $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-3} \cdot \frac{x-3}{2x+1} = \frac{x+4}{(x-3)(2x+1)}$,

Irratsional ifodalarni ayniy almashtirishlar.Ildiz

Arifmetik ildiz. Ratsional ko'rsatkichli daraja. $a \geq 0$ sonning n-darajali *arifmetik ildizi* deb$(n \in N)$, n- darajasi a ga teng bo'lgan $b \geq 0$ songa aytiladi va $b = \sqrt[n]{a}$ orqali belgilanadi. Ta'rif bo'yicha: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ $a > 0$, $m \in Z$ va $n \in N$ bo'lsa, $\sqrt[n]{a^m}$ soni a ning *ratsional ko'rsatkichli darajasi* deb ataladi, ya'ni

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Xususan, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Ratsional ko'rsatkichli darajaning x o s s a l a r i butun ko'rsatkichli daraja xossalariga o'xshash. *a, b* — ixtiyoriy musbat sonlar, *r* va *q* — ixtiyoriy ratsional sonlar bo'lsin. U holda:

1) $(ab)^r = a^r b^r$ (1'). Haqiqatan, ;$r = m/n$, $n \in N$, $m \in Z$ bo'lsin. U holda:

$$\left((ab)^r\right)^n = \left((ab)^{\frac{m}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{(ab)^m}\right)^n = (ab)^m = a^m b^m =$$

, demak, (1')

$$= \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n \left(\sqrt[n]{b^m}\right)^n = \left(a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}\right)^n = \left(a^r b^r\right)^n$$

o'rinli.

Xususan,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}. \quad (2')$$

2) $a^r \cdot a^q = a^{r+q}$, bunda $r = \frac{k}{n}$, $q \frac{m}{n}$. (3')Haqiqatan,

$$\left(a^{\frac{k}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}}\right)^n = \left(a^{\frac{k}{n}}\right)^n \cdot \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a^k}\right)^n \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = \; = a^k \cdot a^m = a^{k+m} = \left(a^{\frac{k+m}{n}}\right)^n = \left(a^{\frac{k}{n}+\frac{m}{n}}\right)^n.$$

3) $\frac{a^r}{a^q} = a^{r-q}$ (4'). ((2') kabi isbotlanadi).

4) $(a^r)^q = a^{rq}$, bunda $r = p/k$, $q = m/n$. (5')Haqiqatan,

$$((a^{p/k})^{m/n})^{nk} = (((a^{p/k})^{m/n})^n)^k = ((a^{p/k})^m)^k = (a^p)^m = a^{pm} = \left(a^{\frac{pm}{kn}}\right)^{kn}$$

Bundan (5') ning o'rinli ekani ma'lum bo'ladi.

Mi sol. $5\sqrt{\frac{3}{5}} - 2^{-1} \cdot 60^{0,5} + 6$ ni hisoblang.

Ye c h i s h. $5 \cdot 0{,}6^{0,5} - 0{,}5 \cdot 10 \cdot 0{,}6^{0,5} + 6 = 5 \cdot 0{,}6^{0,5} -$
$- 5 \cdot 0{,}6^{0,5} + 6 = 6.$

Arifmetik ildizlarni shakl almashtirishlar.

Arifmetik ildizlarni shakl almashtirish. Ko'payt-maning *n*- darajali ildizi ko'paytuvchilar *n*-darajali ildiz-larining ko'paytmasiga teng:

$$\sqrt[n]{ab\ldots c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \ldots \sqrt[n]{c}, \quad (1)$$

bu yerda $a \geq 0$, $b \geq 0, \ldots, c \geq 0$

Haqiqatan,

$$\sqrt[n]{ab\ldots c} = (ab\ldots c)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \ldots c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \ldots \sqrt[n]{c}. \quad (2)$$

Xususan,

$$\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} |a|\sqrt[n]{b}, \text{ agar } n - \text{juft bo‘lsa,} \\ a\sqrt[n]{b}, \text{ agar } n - \text{toq bo‘lsa.} \end{cases}$$

Ko'paytuvchini ildiz ishorasi ostiga kiritish: $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}, \quad (a \geq 0,\ b \geq 0).$ (3) Kasrdan ildiz chiqarish:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad (a \geq 0,\ b \geq 0). \quad (4)$$

Ildizni darajaga ko'tarish uchun ildiz ostidagi ifodani shu darajaga ko'tarish kifoya:

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad (a \geq 0).$ (5) Haqiqatan, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{m\frac{1}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$

a sonning *m*- darajasining *n*- darajali ildizini topish uchun *a* ning *n*- darajali ildizini *m*-darajaga ko'tarish kifoya, ya'ni

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \quad (a > 0). \quad (6)$$

Ildizdan ildiz chiqarish uchun ildiz ostidagi ifoda o'zgartirilmay qoldiriladi, ildizlar ko'rsatkichlari esa ko'paytiriladi:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \quad (a \geq 0). \quad (7)$$

Haqiqatan,

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left((a)^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Har xil ko'rsatkichli $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, ... , $\sqrt[k]{c}$ ildizlarni

bir xil ko'rsatkichli ildizlarga aylantirish uchun *n, m, ..., k* sonlarining umumiy karralisi (bo'linuvchisi) bo'lgan α soni topiladi. α = *nu* = *mv* =... = *kw* bo'lsin, bunda «, v,... , *w* — qo'shimcha ko'paytuvchilar. Natijada ildizlar quyidagi ko'rimshga keladi:

$$\sqrt[\alpha]{a^u}, \sqrt[\alpha]{b^v}, \ldots, \sqrt[\alpha]{c^w}.$$

Misol. $\sqrt[8]{10} > \sqrt[4]{3}$, chunki $\sqrt[8]{10} > \sqrt[8]{3^2}$, $10 > 9$.

Irratsional ifodalarni soddalashtirish.

Irratsional ifodalarni soddalashtirish. Sonlar, harf-lar va algebraik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish va ildiz chiqarish) bilan tuzilgan ifoda *algebraik ifoda* deyiladi. Ildiz chiqarish amali qat-nashgan ifoda shu argumentga nisbatan *irratsional ifoda* deyiladi. Masalan, $3-\sqrt{5}, \sqrt{5+\sqrt{a}}, \sqrt{a^2-\sqrt{ab}}$ ifodalarirratsional ifodalardir.

Irratsional ifodalar ustida amallar arifmetik amallar qonunlariga va ildizlar ustida amal qoidalariga muvofiq bajariladi.

1- misol. Darajani ildiz ostidan chiqarishda daraja ko'rsatkichi ildiz ko'rsatkichigabo'linadi. Chiqqan bo'lin-ma va qoldiq mos tartibda ildiz ostidan chiqqan va ildiz ostida qolgan sonlarning daraja ko'rsatkichlarini beradi,

$$\sqrt[5]{a^7b^9c^{-10}} = abc^{-2}\sqrt[5]{a^2b^4}.$$

2- m i s o l. $a^u b^v \ldots c^w$ ifodali maxrajni m- darajali ildiz ostidan chiqarish (kasrni irratsionallikdan qutqazish) uchun ildiz ostidagi kasrning surat va maxraji $a^{m-u}b^{m-v}\ldots c^{m-w}$ ga ko'paytirilishi kifoya:

$$x=\sqrt[3]{\frac{a^5}{c^u d^v}}=\sqrt[3]{\frac{a^5\cdot c^{3-u}d^{3-v}}{c^u d^v\cdot c^{3-u}d^{3-v}}}=\sqrt[3]{\frac{a^5\cdot c^{3-u}d^{3-v}}{c^3d^3}}=\frac{1}{cd}\sqrt[3]{a^5c^{3-u}d^{3-v}}.$$

3- m i s o l. $\sqrt[n]{a}\ (a\geq 0)$ ildizni m- darajaga ko'taramiz: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$. Agar $m=kn+l$ bo'lsa, $\sqrt[n]{a^{kn+l}}=a^k\sqrt[n]{a^l}$ bo'ladi.

4- m i s o l. O'xshash ildizlarni keltiramiz:

$$a\sqrt[n]{A}+b\sqrt[m]{B}+c\sqrt[n]{A}+d\sqrt[n]{A}=(a+c+d)\sqrt[n]{A}+b\sqrt[m]{B}.$$

5- m i s o l. Ildizlarni ko'paytirish va bo'lish:

$$\sqrt[m]{A}\cdot\sqrt[n]{B}=\sqrt[mn]{A^n}\cdot\sqrt[nm]{B^m}=\sqrt[mn]{A^nB^m};\quad \frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[n]{B}}=\sqrt[mn]{\frac{A^n}{B^m}}.$$

6- m i s o l. Murakkab kvadrat ildizni almashtirish

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}, \qquad (1)$$

$$A>0,\ B>0,\ A^2>B$$

formulasini isbotlaymiz.

I s b o t. $x=\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}$ belgilashni kiri-

tib, uni kvadratga ko'tarsak: $x^2=2A+2\sqrt{A^2-B}$,

$x=\sqrt{2A+2\sqrt{A^2-B}}$. U holda $\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}$. Shu kabi

$\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$. Keyingi ikki tenglikni qo'shsak va ayirsak, (1) formula hosil bo'ladi. $S=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ irratsional ifodadagi ildizlarni yo'qotish chun

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ ayniyatdan foydalanish mumkin. Bizda $x=\sqrt[3]{A}$, $y=\sqrt[3]{B}$. Shunga

ko'ra S ni $M=\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{A^2}$ ifodaga ko'paytirish kerak bo'ladi.

7- m i s o l. $x=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$ ifodani sodda-

lashtiramiz.

Yechish. Oldin kvadrat ildizlar ostidagi ifodalar-ning musbat ekanini, ya'ni ildizlar haqiqiy sonlar sohasida ma'noga egaligini bilishimiz kerak.

$$\text{a)}\ 29-12\sqrt{5}>0\ (?)\Rightarrow 29>12\sqrt{5}\ (?)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 841>144\cdot 5\ (?)\Rightarrow 841>720\ (!);$$

$$3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}>0\ \ (?)\Rightarrow 3>\sqrt{29-12\sqrt{5}}\ \ (?)\Rightarrow 9>29-$$

$$-12\sqrt{5}\ \ (?)\Rightarrow 12\sqrt{5}>29-9=20\ \ (?)\Rightarrow 720>400\ \ (!);$$

$$\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}>0\ \ (?)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5>3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}\ \ (?)\Rightarrow 2+\sqrt{29-12\sqrt{5}}>0\ (!)$$

Demak, haqiqiy sonlar sohasida almashtirishlarni bajarish mumkin;

b) murakkab ildiz formulasidan foydalanamiz:

$$\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{29-\sqrt{720}}=\sqrt{\frac{29+\sqrt{841-720}}{2}}-$$

$$\sqrt{\frac{29-\sqrt{841-720}}{2}}=\sqrt{20}-3;$$

$$\sqrt{3-\left(\sqrt{20}-3\right)}=\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{\frac{6+\sqrt{36-20}}{2}}-$$

8- mis o l. x ning qanday qiymatlarida $\sqrt{(x-8)^2}=$

$=x-8$ tenglik o'rinli bo'lishini aniqlaymiz. Yechish. $\sqrt{(x-8)^2}=|x-8|$ bo'lgani uchun, beril-

gan tenglik $x-8\geq 0$ bo'lganda, ya'nilarda $x\in[8;+\infty)$ o'rinli bo'ladi.