# Задачи по дискретной математике

Е.А. Фоминых, А.А. Перфильев

## Функции алгебры логики

### 1. Занятие 1

Задача 1.1. Говорят, что наборы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ являются *противоположными*, если $\alpha_1 \neq \beta_1, \ldots, \alpha_n \neq \beta_n$; и являются *соседними*, если они отличаются ровно одной координатой.

(1) Каково число функций в $P_2$, принимающих на противоположных наборах одинаковые значения?
(2) Найти число функций в $P_2$, которые на любой паре соседних наборов принимают различные значения?

Задача 1.2. Построить таблицу функции.

(1) Функция $f(x_1, x_2, x_3)$ определяется следующим образом: она равна 1 либо при $x_1 = 1$, либо если переменные $x_2$ и $x_3$ принимают разные значения, а значение переменной $x_1$ меньше значения переменной $x_3$; в противном случае функция обращается в нуль.
(2) Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задается так: она равна нулю только на таких наборах $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, для которых справедливо неравенство $\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_3 + 2\alpha_4$.

Задача 1.3. Указать фиктивные переменные функции, заданной сокращенной таблицей — выписан только столбец значений (значения идут слева направо вместо сверху вниз):

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = (11110000)$;
(2) $f(x_1, x_2, x_3) = (00110011)$;
(3) $f(x_1, x_2, x_3) = (00111100)$.

Задача 1.4. Перечислить существенные переменные следующих функции:

(1) $(x \to (x \vee y)) \to z$;
(2) $(x \vee y)) \to y$.

Задача 1.5. Построить таблицу функции $f(x_1, x_2, x_3)$,

(1) все переменные которой существенные.

(2) переменная $x_2$ — фиктивная, а переменные $x_1$ и $x_3$ — существенные. Удалить фиктивную переменную.

Задача 1.6. Проверить, справедливы ли следующие соотношения:

(1) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;
(2) $x \wedge (y \sim z) = (x \wedge y) \sim (x \wedge z)$;
(3) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;
(4) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;
(5) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$;
(6) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$;
(7) $x + (y \to z) = (x + y) \to (x + z)$.

Задача 1.7. Используя основные эквивалентности, доказать эквивалентность формул $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$:

(1) $\mathfrak{M} = (x + y) \to (x \vee y)$, $\mathfrak{N} = 1$;
(2) $\mathfrak{M} = (\overline{x} \to y) \to (x + y)$, $\mathfrak{N} = x|y$;
(3) $\mathfrak{M} = x \to (xy \to ((x \to y) \to y) \wedge z)$, $\mathfrak{N} = y \to (x \to z)$.

## 2. Занятие 2

Задача 2.1. Представить в виде с.д.н.ф следующие функции:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) \to x_2x_3$;
(2) $f(x_1, x_2, x_3) = (01101100)$;
(3) $f(x_1, x_2, x_3) = (10001110)$.

Задача 2.2. Эквивалентными преобразованиями привести к с.д.н.ф следующие формулы:

(1) $x \vee yz$;
(2) $(\overline{x} \to \overline{y}) \to (yz \to xz)$;
(3) $((x \to yz)(yt + z) \to x\overline{t}) \vee \overline{x}$;

Задача 2.3. Методом неопределенных коэффициентов найти полином Жегалкина для функций:

(1) $x \sim y$;
(2) $f(x_1, x_2, x_3) = (01101000)$;
(3) $f(x_1, x_2, x_3) = (11111000)$;
(4) $(x + y)(x|y)$.

Задача 2.4. Один из способов построения полинома Жегалкина данной формулы состоит в следующем: сначала строят эквивалентную формулу над множеством $\{\overline{x}, x_1 \wedge x_2\}$, затем заменяют везде $\overline{x}$ на $x + 1$, раскрывают скобки по дистрибутивности и приводят подобные слагаемые.

Построить полином Жегалкина для функций:

(1) $x \sim y$;
(2) $x \to y$;

(3) $x|y$;
(4) $(x|y)|z$;
(5) $((x \to y) \vee \overline{z}) \sim x$;
(6) $(x \to y)(x|y)$.

## 3. Занятие 3

Задача 3.1. Проверить, являются ли данные классы функций замкнутыми:

(1) $\{0\}$;
(2) $\{\overline{x}\}$;
(3) $\{x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \dots\}$;
(4) все функции из пункта 3 и все функции, получающиеся из них заменой переменных.

Задача 3.2. Всегда ли в $P_2$

(1) пересечение замкнутых классов является замкнутым классом;
(2) разность замкнутых классов есть замкнутый класс;
(3) дополнение замкнутого класса не является замкнутым классом?

Задача 3.3. Проверить справедливость равенства двух множеств функций из $P_2$:

(1) $[\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2] = [\mathcal{F}_1] \cap [\mathcal{F}_2]$;
(2) $[\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2] = [\mathcal{F}_1] \cup [\mathcal{F}_2]$.

Задача 3.4. Сведением к заведомо полным системам в $P_2$ показать полноту следующих систем функций:

(1) $\{\overline{x \vee y}\}$;
(2) $\{xy + z, \overline{(x \sim y) + z}\}$;
(3) $\{x \to y, \overline{x + y + z}\}$
(4) $\{0, xy \vee xz \vee yz, (x \sim y) + z\}$;
(5) $\{x \to y, (1100001100111100)\}$.

## 4. Занятие 4

Задача 4.1. Какие из перечисленных функций являются монотонными:

(1) $x \to (x \to y)$;
(2) $x \to (y \to x)$;
(3) $xy + xz + zx + z$;
(4) $f = (01100111)$;
(5) $f = (0001010101010111)$?

Задача 4.2. Какие из перечисленных функций являются линейными:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2 \vee \overline{x_1x_2}) + x_3$;

(2) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1 + x_2)$;
(3) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1) \sim x_3$?

Задача 4.3. Какие из перечисленных функций являются самодвойственными:

(1) $f = (0001001001100111)$;
(2) $f = (x \to y) \to xz \to (y \to z)$;
(3) $f = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2m+1} + \sigma$, где $\sigma \in \{0, 1\}$?

Задача 4.4. Используя критерий полноты, проверить полноту следующих систем:

(1) $\{x \to y, x \to \overline{y}z\}$;
(2) $\{x\overline{y}, \overline{x} \sim yz\}$;
(3) $\{(01101001), (10001101), (00011100)\}$;
(4) $(S \setminus M) \cup (L \setminus (T_0 \cup T_1))$.

## 5. Занятие 5: дополнительные задачи

Задача 5.1. Доказать, что классы $T_0$, $T_1$, $S$, $M$, $L$ являются предполными.

Задача 5.2. Функцией Шеффера называется функция алгебры логики, в одиночку образующая полную систему.

(1) Перечислить все функции Шеффера от двух переменных.
(2) Подсчитать число функций Шеффера от трёх переменных.

Задача 5.3. Перечислить все монотонные функции, удовлетворяющие данным условиям:

(1) $f(1, 0, 0, 0) = 1$, $f(0, 1, 1, 1) = 0$;
(2) $f(1, 0, 0, 0) = 1$, $f \in L$;
(3) $f(1, 0, 0, 1) = 0$, $f \in S$.

Задача 5.4. Доказать, что если $f$ не является константой, а $f \vee f^*$ — константа, то $f \notin M \cup S$.

Задача 5.5. Пусть функции $f(x_1, ..., x_n)$ и $f^*(x_1, ..., x_n)$ удовлетворяют условию $|N_f| = |N_{f^*}|$, где $N_f$ — количество нулей в таблице истинности функции $f$. Доказать, что

(1) если $f \vee f^* \equiv const$, то $f \in S$;
(2) если $f + ff^* \equiv const$, то $f \in S$.

Задача 5.6. Доказать, что если $f(x_1, ..., x_n)$ — линейная функция, отличная от константы, то $|N_f| = 2^{n-1}$.

Задача 5.7. Доказать принцип двойственности: если

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = f(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_m(x_1, ..., x_n)),$$

то

$$\Phi^*(x_1, ..., x_n) = f^*(g_1^*(x_1, ..., x_n), ..., g_m^*(x_1, ..., x_n)).$$

Задача 5.8. Пользуясь принципом двойственности, построить функцию, двойственную функции $f$.

(1) $f = xy \vee yz \vee zt \vee tx$;
(2) $f = (x \to y) + ((x|y)|(\overline{x} \sim yz))$.

Задача 5.9. Выяснить, можно ли из функции $f$ с помощью подстановки на места её переменных функций 0, 1, $x$, $y$, $\overline{x}$, $\overline{y}$, получить функцию $xy$.

(1) $f = (11101000)$;
(2) $f = (01111111)$;
(3) $f = (10011001)$.

Задача 5.10. Доказать, что:

(1) $L^* = L$;
(2) $T_0^* = T_1$;
(3) $(T_0 \cup T_1)^* = T_0 \cup T_1$;
(4) $(T_0 \cup T_1 \cup S \cup L)^* = T_0 \cup T_1 \cup S \cup L$;
(5) $(T_0 \setminus S)^* = T_1 \setminus S$;
(6) $(S \setminus T_0)^* = S \setminus T_1$.

Задача 5.11. Подсчитать число функций от $n$ переменных в каждом из следующих множеств:

(1) $T_0 \cap T_1$;
(2) $T_0 \cup T_1$;
(3) $T_0 \cap L$;
(4) $L \setminus (T_0 \cup T_1)$;
(5) $T_1 \cap S$;
(6) $L \cup S \cup T_1$;
(7) $(L \cup S) \setminus (T_0 \cup T_1)$;
(8) $(S \setminus T_0) \cap T_1$.

Задача 5.12. Выяснить, можно ли функцию $f$ получить с помощью операции суперпозиции над множеством $\Phi$, если:

(1) $f = x + y$, $\Phi = \{x \to y\}$;
(2) $f = x \to y$, $\Phi = \{xy, x \vee y\}$;
(3) $f = \overline{x} \vee \overline{y}$, $\Phi = T_0 \cup (S \setminus (L \cup T_1))$;
(4) $f = x\overline{y}$, $\Phi = (T_1 \setminus L) \cup \{x + y\}$.

## Функции $k$-значной логики

### 6. Занятие 6

Задача 6.1. Доказать следующие соотношения:

(1) $x \dot{-} (x \dot{-} y) = x \wedge y$;
(2) $x \dot{-} y = x - x \wedge y$;
(3) $(\sim x) \dot{-} (\sim y) = y \dot{-} x$;
(4) $(\sim x) \dot{-} (y \dot{-} x) = \sim (x \vee y)$;

(5) $\sim(\overline{x}+y) = (\sim x) + (\sim y)$;
(6) $x \dot{-} y = x \vee y - y$;
(7) $\overline{x} = ((x+2) \dot{-} 1) \vee I_{k-2}(x)$.

Задача 6.2. Доказать правила де Моргана:

(1) $(\sim x) \wedge (\sim y) = \sim (x \vee y)$;
(2) $(\sim x) \vee (\sim y) = \sim (x \wedge y)$.

Задача 6.3. Доказать, что функция $f$ принадлежит замыканию системы $\Phi$:

(1) $f(x) = j_0(x)$, $\Phi = \{1, x \dot{-} y\}$;
(2) $f(x) = I_{k-2}(x)$, $\Phi = \{k-1, x+2, x \dot{-} y\}$;
(3) $f(x) = \overline{x}$, $\Phi = \{k-1, x+y\}$.

Задача 6.4. Построить аналог с.д.н.ф для следующих функций $k$-значной логики:

(1) $f(x) = \sim x$, $k=5$;
(2) $f(x,y) = x \dot{-} y$, $k=3$;
(3) $f(x,y) = xy$, $k=3$;
(4) $f(x,y) = x \wedge y$, $k=3$.

Задача 6.5. Используя метод сведения к заведомо полным системам, доказать полноту следующих систем функций:

(1) $\{1, x^2 - y, x \wedge y\}$;
(2) $\{k-1, x \dot{-} y, x+y\}$;
(3) $\{\sim x, x+2, x \dot{-} y\}$;
(4) $\{1, 2x+y, x^2 \dot{-} y\}$.

## Список литературы

[1] *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977.

[2] *Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 1984.

Челябинский государственный университет
*E-mail address*: fominykh@csu.ru