Б. П. Демидович

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Б.П.ДЕМИДОВИЧ

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

13-е издание, исправленное

Рекомендовано Государственным комитетом Российской Федерации по высшему образованию в качестве учебного пособия для студентов математических и физических специальностей высших учебных заведений

Издательство
Московского университета

Издательство ЧеРо

1997

ББК 22.161
Д30
УДК 517(075.8)

Рецензент: кафедра высшей математики МФТИ

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Демидович Б.П.

Д30 **Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 13-е изд., испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, ЧеРо, 1997. — 624 с.**

ISBN 5-211-03645-X

В сборник (11-е изд. — 1995 г.) включено свыше 4000 задач и упражнений по важнейшим разделам математического анализа: введение в анализ; дифференциальное исчисление фукнций одной переменной; неопределенный и определенный интегралы; ряды; дифференциальное исчисление функций нескольких переменных; интегралы, зависящие от параметра; кратные и криволинейные интегралы. Почти ко всем задачам даны ответы. В приложении помещены таблицы.

Для студентов физических и механико-математических специальностей высших учебных заведений.

Учебное издание

Демидович Борис Павлович

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Зав. редакцией *Л.А.Николова.*
Художественный редактор *Л.В.Мухина.*

Н/К

ЛР № 040414 от 18.04.97.

Подписано в печать 3.06.96. Формат 84×108/32. Бумага офсетная.
Офсетная печать. Усл. печ. л. 32,2. Тираж 5000 экз.
Изд. № 6151. Заказ № 2383

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета
103009, Москва, Большая Никитская ул., 5/7

Издательство "ЧеРо"
Москва, Большой Власьевский пер., д. 11, к. 208
т. 241 3390, 938 2346

Великолукская городская типография Упринформпечати Псковской области, 182100, г. Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12

ISBN 5-211-03645-X

БОРИС ПАВЛОВИЧ ДЕМИДОВИЧ
(1906—1977)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОТДЕЛ I

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Вещественные числа

1°. Метод математической индукции. Чтобы доказать, что некоторая теорема верна для всякого натурального числа n, достаточно доказать: 1) что эта теорема справедлива для $n = 1$ и 2) что если эта теорема справедлива для какого-нибудь натурального числа n, то она справедлива также и для следующего натурального числа $n + 1$.

2°. Сечение. Разбиение рациональных чисел на два класса A и B называется *сечением*, если выполнены следующие условия: 1) оба класса не пусты; 2) каждое рациональное число попадает в один и только в один класс и 3) любое число, принадлежащее классу A (*нижний класс*), меньше произвольного числа, принадлежащего классу B (*верхний класс*). Сечение A/B определяет: а) рациональное число, если или нижний класс A имеет наибольшее число или же верхний класс B имеет наименьшее число, и б) иррациональное число, если класс A не имеет наибольшего числа, а класс B — наименьшего числа. Числа рациональные и иррациональные носят название *вещественных* или *действительных* *).

3°. Абсолютная величина. Если x — вещественное число, то *абсолютной величиной* $|x|$ называется неотрицательное число, определяемое следующими условиями:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0; \\ x, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Для любых вещественных чисел x и y имеет место неравенство

$$|x| - |y| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

4°. Верхняя и нижняя грани. Пусть $X = \{x\}$ — ограниченное множество вещественных чисел. Число

$$m = \inf \{x\}$$

называется *нижней гранью* множества X, если:

---

*) В дальнейшем под словом число мы будем понимать вещественное число, если не оговорено противное.

1) каждое $x \in X$ *) удовлетворяет неравенству

$$x \geqslant m;$$

2) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует $x' \in X$ такое, что

$$x' < m + \varepsilon.$$

Аналогично число

$$M = \sup\{x\}$$

называется *верхней гранью* множества X, если:

1) каждое $x \in X$ удовлетворяет неравенству

$$x \leqslant M,$$

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $x'' \in X$ такое, что

$$x'' > M - \varepsilon.$$

Если множество X не ограничено снизу, то принято говорить, что

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

если же множество X не ограничено сверху, то полагают

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5°. **Абсолютная и относительная погрешности.** Если a ($a \neq 0$) есть точное значение измеряемой величины, а x — приближенное значение этой величины, то

$$\Delta = |x - a|$$

называется *абсолютной погрешностью*, а

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

— *относительной погрешностью* измеряемой величины.

Говорят, что число x имеет n *верных знаков*, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы разряда, выражаемого n-й значащей цифрой.

Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливы следующие равенства:

1. $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}.$

---

*) Запись $x \in X$ означает, что число x принадлежит множеству X.

2. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$.

4. $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.

5. Пусть $a^{[n]}=a(a-h)\ldots[a-(n-1)h]$ и $a^{[0]}=1$.

Доказать, что $(a+b)^{[n]}=\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}$, где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m. Вывести отсюда формулу *бинома Ньютона*.

6. Доказать *неравенство Бернулли*:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\geqslant$$
$$\geqslant 1+x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа одного и того же знака, бо́льшие -1.

7. Доказать, что если $x>-1$, то справедливо неравенство

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx \quad (n>1),$$

причем знак равенства имеет место лишь при $x=0$.

8. Доказать неравенство

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \text{ при } n>1.$$

Указание. Использовать неравенство

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2 \quad (n=1,\ 2,\ldots).$$

9. Доказать неравенство

$$2!\cdot 4!\ldots(2n)!>[(n+1)!]^n \text{ при } n>1.$$

10. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

10.1. Доказать неравенства:

а) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\quad(n\geqslant 2)$;

б) $n^{n+1}>(n+1)^n\quad(n\geqslant 3)$;

в) $\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin x_k \quad (0 \leqslant x_k \leqslant \pi;$

$k=1, 2, \ldots, n)$;

г) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$.

11. Пусть c — положительное число, не являющееся точным квадратом целого числа, и A/B — сечение, определяющее вещественное число $\sqrt{c}$, где в класс B входят все положительные рациональные числа b такие, что $b^2 > c$, а в класс A — все остальные рациональные числа. Доказать, что в классе A нет наибольшего числа, а в классе B нет наименьшего числа.

12. Сечение A/B, определяющее число $\sqrt[3]{2}$, строится следующим образом: класс A содержит все рациональные числа a такие, что $a^3 < 2$; класс B содержит все остальные рациональные числа. Доказать, что в классе A нет наибольшего числа, а в классе B — наименьшего.

13. Построив соответствующие сечения, доказать равенства:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$; б) $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

14. Построить сечение, определяющее число $2^{\sqrt{2}}$.

15. Доказать, что всякое непустое числовое множество, ограниченное снизу, имеет нижнюю грань, а всякое непустое числовое множество, ограниченное сверху, имеет верхнюю грань.

16. Показать, что множество всех правильных рациональных дробей m/n, где m и n — натуральные числа и $0 < m < n$, не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Найти нижнюю и верхнюю грани этого множества.

17. Определить нижнюю и верхнюю грани множества рациональных чисел r, удовлетворяющих неравенству $r^2 < 2$.

18. Пусть $\{-x\}$ — множество чисел, противоположных числам $x \in \{x\}$. Доказать, что

а) $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$; б) $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

19. Пусть $\{x+y\}$ есть множество всех сумм $x+y$, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$.

Доказать равенства:

а) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$;

б) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

20. Пусть $\{xy\}$ есть множество всех произведений xy, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$, причем $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$.
Доказать равенства:

а) $\inf\{xy\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}$;

б) $\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$.

21. Доказать неравенства:

а) $|x-y| \geqslant ||x|-|y||$;

б) $|x+x_1+\ldots+x_n| \geqslant$

$$\geqslant |x| - (|x_1| + \ldots + |x_n|).$$

Решить неравенства:

22. $|x+1| < 0{,}01$. **23.** $|x-2| \geqslant 10$.

24. $|x| > |x+1|$. **25.** $|2x-1| < |x-1|$.

26. $|x+2| + |x-2| \leqslant 12$. **27.** $|x+2| - |x| > 1$.

28. $||x+1| - |x-1|| < 1$. **29.** $|x(1-x)| < 0{,}05$.

30. Доказать тождество

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2.$$

31. При измерении длины в 10 см абсолютная погрешность составляла 0,5 мм; при измерении расстояния в 500 км абсолютная погрешность была равна 200 м. Какое измерение точнее?

32. Определить, сколько верных знаков содержит число $x = 2{,}3752$, если относительная погрешность этого числа составляет 1 %?

33. Число $x = 12{,}125$ содержит 3 верных знака. Определить, какова относительная погрешность этого числа.

34. Стороны прямоугольника равны:

$$x = 2{,}50 \text{ см} \pm 0{,}01 \text{ см}, \quad y = 4{,}00 \text{ см} \pm 0{,}02 \text{ см}.$$

В каких границах заключается площадь S этого прямоугольника? Каковы абсолютная погрешность Δ и относительная погрешность δ площади прямоугольника, если за стороны его принять средние значения?

35. Вес тела $p = 12{,}59$ гс $\pm$ 0,01 гс, а его объем $v = 3{,}2$ см^3 $\pm$ 0,2 см^3. Определить удельный вес тела и оценить абсолютную и относительную погрешности удельного веса, если за вес тела и объем его принять средние значения.

36. Радиус круга $r = 7{,}2$ м $\pm$ 0,1 м. С какой минимальной относительной погрешностью может быть определена площадь круга, если принять $\pi = 3{,}14$?

37. Измерения прямоугольного параллелепипеда суть:

$$x = 24{,}7 \text{ м} \pm 0{,}2 \text{ м},$$
$$y = 6{,}5 \text{ м} \pm 0{,}1 \text{ м},$$
$$z = 1{,}2 \text{ м} \pm 0{,}1 \text{ м}.$$

В каких границах заключается объем v этого параллелепипеда? С какими абсолютной и относительной погрешностями может быть определен объем этого параллелепипеда, если за его измерения принять средние значения?

38. С какой абсолютной погрешностью следует измерить сторону квадрата x, где $2 \text{ м} < x < 3$ м, чтобы иметь возможность определить площадь этого квадрата с точностью до 0,001 м^2?

39. С какими абсолютными погрешностями Δ достаточно измерить стороны x и y прямоугольника, чтобы площадь его можно было вычислить с точностью до 0,01 м^2, если ориентировочно стороны прямоугольника не превышают 10 м каждая?

40. Пусть $\delta(x)$ и $\delta(y)$ — относительные погрешности чисел x и y, $\delta(xy)$ — относительная погрешность числа xy.

Доказать, что $\delta(xy) \leqslant \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)$.

§ 2. Теория последовательностей

1°. Понятие предела последовательности. Говорят, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, или иначе x_n ($n = 1, 2, \ldots$), имеет своим пределом число a (короче, *сходится* к a), т. е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ при } n > N.$$

В частности, x_n называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

2°. Признаки существования предела.

1) Если

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$$

и

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

2) Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

3) Критерий Коши. Для существования предела последовательности x_n необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon,$$

если только $n > N$ и $p > 0$.

3°. Основные теоремы о пределах последовательностей. Предполагая, что существуют

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n,$$

имеем:

1) если $x_n \leqslant y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

4°. Число e. Последовательность

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

имеет конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718\,281\,8284\ldots$$

5°. Бесконечный предел. Символическая запись

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

обозначает, что, каково бы ни было $E > 0$, существует число $N = N(E)$ такое, что

$$|x_n| > E \quad \text{при} \quad n > N.$$

6°. Предельная точка. Число ξ (или символ ∞) называется *частичным пределом* (*предельной точкой*) данной последовательности x_n ($n = 1, 2, \ldots$), если существует ее подпоследовательность

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_n}, \ldots \qquad (1 \leqslant p_1 < p_2 < \ldots)$$

такая, что

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi.$$

Всякая ограниченная последовательность имеет по меньшей мере один конечный частичный предел (*принцип Больцано — Вейерштрасса*). Если этот частичный предел единственный, то он же является конечным пределом данной последовательности.

Наименьший частичный предел (конечный или бесконечный) последовательности x_n

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

называется *нижним пределом*, а наибольший частичный предел ее

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

называется *верхним пределом* этой последовательности.

Равенство

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

является необходимым и достаточным условием существования предела (конечного или бесконечного) последовательности x_n.

41. Пусть

$$x_n = \frac{n}{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1,$$

определив для каждого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ если } n > N.$$

Заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
N					

42. Доказать, что x_n ($n = 1, 2, \ldots$) есть *бесконечно малая* (т. е. имеет предел, равный 0), указав для всякого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n| < \varepsilon$ при $n > N$, если

а) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; б) $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$;

в) $x_n = \dfrac{1}{n!}$; г) $x_n = (-1)^n \cdot 0{,}999^n$.

Для каждого из этих случаев заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,001	0,0001	...
N				

43. Доказать, что последовательности

а) $x_n = (-1)^n n$, б) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$, в) $x_n = \lg(\lg n)$ $(n \geqslant 2)$

имеют бесконечный предел при $n \to \infty$ (т. е. являются *бесконечно большими*), определив для всякого $E > 0$ число $N = N(E)$ такое, что $|x_n| > E$ при $n > N$.

Для каждого из этих случаев заполнить следующую таблицу:

E	10	100	1 000	10 000	...
N					

44. Показать, что $x_n = n^{(-1)^n}$ ($n = 1, 2, \ldots$) не ограничена, однако не является бесконечно большой при $n \to \infty$.

45. Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Предполагая, что n пробегает натуральный ряд чисел, определить значения следующих выражений:

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10\,000n}{n^2+1}$. **47.** $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

48. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$. **49.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

50. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$ $(|a|<1,\ |b|<1)$.

51. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

52. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$.

53. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

54. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

55. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\ldots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

56. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

57. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2}\,\ldots\,\sqrt[2^n]{2}\right)$.

Доказать следующие равенства:

58. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}=0$. **59.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}=0$.

60. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n}=0$ $(a>1)$. **61.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}=0$.

62. $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n=0$, если $|q|<1$.

63. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1$ $(a>0)$. **64.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n}=0$ $(a>1)$.

65. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=1$. **66.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

67. Какое выражение больше при достаточно больших n:

а) $100n+200$ или $0{,}01n^2$?; б) 2^n или n^{1000}?;

в) 1000^n или $n!$?

68. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

Указание. См. пример 10.

69. Доказать, что последовательность

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

монотонно возрастает и ограничена сверху, а последовательность

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

монотонно убывает и ограничена снизу. Отсюда вывести, что эти последовательности имеют общий предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$$

Указание. Составить отношения $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\frac{y_n}{y_{n-1}}$ и воспользоваться неравенством примера 7.

70. Доказать, что

$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

При каких значениях показателя n выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ будет отличаться от числа e меньше чем на 0,001?

71. Пусть $p_n(n=1,\ 2,\ \ldots)$ — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $+\infty$, и q_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $-\infty$ $(p_n,\ q_n\notin[-1,\ 0])$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=e.$$

72. Зная, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

Вывести отсюда формулу

$$e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}, \qquad (*)$$

где $0<\theta_n<1$, и вычислить число e с точностью до 10^{-5}.

73. Доказать, что число e иррационально.

74. Доказать неравенство

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

75. Доказать неравенства:

а) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$,

где n — любое натуральное число;

б) $1+\alpha<e^\alpha$,

где α — вещественное число, отличное от нуля.

76. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(a^{1/n}-1)=\ln a \quad (a>0)$, где $\ln a$ есть логарифм числа a при основании $e=2{,}718\ldots$

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

77. $x_n=p_0+\frac{p_1}{10}+\ldots+\frac{p_n}{10^n} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$,

где p_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ — целые неотрицательные числа, не превышающие 9, начиная с p_1.

78. $x_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\ \ldots\ \frac{n+9}{2n-1}$.

79. $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

80. $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

81. $x_1=\sqrt{2}, \quad x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \ldots,\ x_n=$

$$=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{корней}},\ \ldots$$

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих последовательностей:

82. $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$,
где $|a_k| < M$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и $|q| < 1$.

83. $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}$.

84. $x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$.

85. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

Указание. Воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

86. Говорят, что последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет *ограниченное изменение*, если существует число C такое, что

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| < C$$
$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Доказать, что последовательность с ограниченным изменением сходится.

Построить пример сходящейся последовательности, не имеющей ограниченного изменения.

87. Сформулировать, что значит, что для данной последовательности не выполнен критерий Коши.

88. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

89. Доказать, что если последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится, то любая ее подпоследовательность x_{p_n} также сходится и имеет тот же самый предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

90. Доказать, что монотонная последовательность будет сходящейся, если сходится некоторая ее подпоследовательность.

91. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

92. Если $x_n \to a$, то что можно сказать о пределе

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}?$$

93. Доказать, что сходящаяся числовая последовательность ограничена.

94. Доказать, что сходящаяся числовая последовательность достигает либо своей верхней грани, либо своей нижней грани, либо той и другой. Построить примеры последовательностей всех трех типов.

95. Доказать, что числовая последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, стремящаяся к $+\infty$, обязательно достигает своей нижней грани.

Найти наибольший член последовательности x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, если:

96. $x_n = \frac{n^3}{2^n}$. **97.** $x_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n}$. **98.** $x_n = \frac{1000^n}{n!}$.

Найти наименьший член последовательности x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, если:

99. $x_n = n^2 - 9n - 100$. **100.** $x_n = n + \frac{100}{n}$.

Для последовательности x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ найти $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

101. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. **101.1.** $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$.

102. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$.

103. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.

104. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

105. $x_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$. **106.** $x_n = (-1)^n n$.

107. $x_n = -n[2+(-1)^n]$. **108.** $x_n = n^{(-1)^n}$.

109. $x_n = 1 + n\sin\frac{n\pi}{2}$. **110.** $x_n = \frac{1}{n-10{,}2}$.

Найти $\varliminf_{n\to\infty} x_n$ и $\varlimsup_{n\to\infty} x_n$, если:

111. $x_n = \dfrac{n^2}{1+n}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

112. $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin\dfrac{n\pi}{4}$.

113. $x_n = \dfrac{n}{n+1}\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$.

114. $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n\cdot(-1)^n}}$. **115.** $x_n = \cos^n\dfrac{2n\pi}{3}$.

Найти частичные пределы следующих последовательностей:

116. $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{7}{8},\ \ldots,\ \dfrac{1}{2^n},\ \dfrac{2^n-1}{2^n},\ \ldots$

117. $1,\ \dfrac{1}{2},\ 1+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ 1+\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ 1+\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{5},\ \ldots$
$\ldots,\ \dfrac{1}{n},\ 1+\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n},\ \ldots,\ \dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n+1},\ \ldots$

118. $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5},\ \ldots$

119. $x_n = 3\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+2(-1)^n$.

120. $x_n = \dfrac{1}{2}\left[(a+b)+(-1)^n(a-b)\right]$.

121. Построить пример числовой последовательности, имеющей в качестве своих частичных пределов данные числа

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p.$$

122. Построить пример числовой последовательности, для которой все члены данной числовой последовательности

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

являются ее частичными пределами. Какие еще частичные пределы обязательно имеет построенная последовательность?

123. Построить пример последовательности:

а) не имеющей конечных частичных пределов;

б) имеющей единственный конечный частичный предел, но не являющейся сходящейся;

в) имеющей бесконечное множество частичных пределов;

г) имеющей в качестве своего частичного предела каждое вещественное число.

124. Доказать, что последовательности x_n и $y_n = x_n\sqrt[n]{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеют одни и те же частичные пределы.

125. Доказать, что из ограниченной последовательности x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{p_n} $(n = 1, 2, \ldots)$.

126. Доказать, что если последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ не ограничена, то существует подпоследовательность x_{p_n} такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = \infty$.

127. Пусть последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится, а последовательность y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей:

а) $x_n + y_n$; б) $x_n y_n$?

Привести соответствующие примеры.

128. Пусть последовательности x_n и y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ расходятся. Можно ли утверждать, что последовательности

а) $x_n + y_n$; б) $x_n y_n$

также расходятся? Привести соответствующие примеры.

129. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, и y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — произвольная последовательность. Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$? Привести соответствующие примеры.

130. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Следует ли отсюда, что либо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, либо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$? Рассмотреть пример: $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, $y_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

131. Доказать, что

а) $$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

и

б) $$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

Построить примеры, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

132. Пусть $x_n \geqslant 0$ и $y_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказать, что

а) $$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

и

б) $$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

Построить примеры, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

133. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует, то, какова бы ни была последовательность y_n $(n = 1, 2, \ldots)$, имеем:

а) $$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

и

б) $$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n \qquad (x_n \geqslant 0).$$

134. Доказать, что если для некоторой последовательности x_n $(n=1, 2, \ldots)$, какова бы ни была последовательность y_n $(n = 1, 2, \ldots)$, имеет место по меньшей мере одно из равенств:

а) $$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

или

б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n y_n) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n \quad (x_n \geqslant 0)$,

то последовательность x_n — сходящаяся.

135. Доказать, что если $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{x_n} = 1,$$

то последовательность x_n — сходящаяся.*

136. Доказать, что если последовательность x_n ($n = 1, 2, \ldots$) ограничена и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$, то частичные пределы этой последовательности расположены всюду плотно между ее нижним и верхним пределами:

$$l = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \quad \text{и} \quad L = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n,$$

то есть любое число из отрезка $[l, L]$ является частичным пределом данной последовательности.

137. Пусть числовая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ удовлетворяет условию

$$0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m + x_n \quad (m, n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$ существует.

138. Доказать, что если последовательность x_n ($n = 1, 2, \ldots$) сходится, то последовательность средних арифметических

$$\xi_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

также сходится и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Обратное утверждение неверно: построить пример.

139. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = +\infty.$$

140. Доказать, что если последовательность x_n ($n = 1, 2, \ldots$) сходится и $x_n > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

141. Доказать, что если $x_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

предполагая, что предел, стоящий в правой части последнего равенства, существует.

142. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

143. Доказать теорему Штольца: если

а) $y_{n+1} > y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, в) существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$,

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

144. Найти:

а) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{a^n}$ $(a>1)$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lg n}{n}$.

145. Доказать, что если p — натуральное число, то

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1}\right) = \dfrac{1}{2}$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+3^p+\ldots+(2n-1)^p}{n^{p+1}} = \dfrac{2^p}{p+1}$

146. Доказать, что последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится.

Таким образом, имеет место формула

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

где $C = 0{,}577216\ldots$ — так называемая *постоянная Эйлера* и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

147. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$.

148. Последовательность чисел x_n $(n = 1,\ 2, \ldots)$ определяется следующими формулами:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \qquad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad (n = 3,\ 4, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

149 (н). Пусть x_n $(n = 1,\ 2, \ldots)$ — последовательность чисел, определяемая следующей формулой:

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

150. Доказать, что последовательности x_n и y_n $(n = 1,\ 2, \ldots)$, определяемые следующими формулами:

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

имеют общий предел

$$\mu(a,\ b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

(*арифметико-геометрическое среднее* чисел a и b).

§ 3. Понятие функции

1°. Понятие функции. Переменная y называется однозначной функцией f от переменной x в данной области изменения $X = \{x\}$, если каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие одно определенное действительное значение $y = f(x)$, принадлежащее некоторому множеству $Y = \{y\}$.

Множество X носит название *области определения* или *области существования* функции $f(x)$; Y называется *множеством значений* этой функции.

В простейших случаях множество X представляет собой или *открытый промежуток* (*интервал*) $]a,\ b[= (a,\ b)$: $a < x < b$ или *полуоткрытые промежутки*

$$]a,\ b] = (a,\ b]:\ a < x \leqslant b, \qquad [a,\ b[= [a,\ b):\ a \leqslant x < b,$$

или *замкнутый промежуток* (*сегмент*) $[a,\ b]$: $a \leqslant x \leqslant b$, где a и b — некоторые вещественные числа или символы $-\infty$ и $+\infty$ (в последних случаях равенства исключаются). Если каждому значению x из X соответствует одно или несколько значений $y = f(x)$, то y называется *многозначной функцией* от x.

2°. Обратная функция. Если под x понимать любое значение, удовлетворяющее уравнению

$$f(x) = y,$$

где y — фиксированное число, принадлежащее множеству значений Y функции $f(x)$, то это соответствие определяет на множестве Y некоторую, вообще говоря, многозначную функцию

$$x = f^{-1}(y),$$

называемую *обратной* по отношению к функции $f(x)$. Если функция $y = f(x)$ монотонна в строгом смысле, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$ (или соответственно $f(x_2) < f(x_1)$) при $x_2 > x_1$, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ является однозначной и монотонной в том же смысле.

Определить области существования следующих функций:

151. $y = \dfrac{x^2}{1+x}$. **152.** $y = \sqrt{3x - x^3}$.

153. $y = (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

154. а) $y = \log(x^2 - 4)$; б) $y = \log(x+2) + \log(x-2)$.

155. $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$. **156.** $y = \sqrt{\cos x^2}$.

157. $y = \lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$. **158.** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

159. $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x}$. **160.** $y = \arccos(2\sin x)$.

161. $y = \lg[\cos(\lg x)]$. **162(н).** $y = (x + |x|)\sqrt{x \sin^2 \pi x}$.

163. $y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos(2^x)$.

164. $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x)$. **165.** $y = (2x)!$

165.1. $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$. **165.2.** $y = \sqrt[4]{\lg \operatorname{tg} x}$.

165.3. $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

Определить области существования и множество значений следующих функций:

166. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$. **167.** $y = \lg(1 - 2\cos x)$.

168. $y = \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$. **169.** $y = \arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

170. $y = (-1)^x$.

171. В треугольник ABC (рис. 1), основание которого $AC = b$ и высота $BD = h$, вписан прямоугольник $KLMN$, высота которого $NM = x$. Выразить периметр

P прямоугольника $KLMN$ и его площадь S как функции от x.

Построить графики функций $P = P(x)$ и $S = S(x)$.

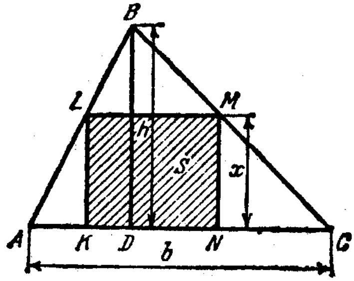

Рис. 1

172. В треугольнике ABC сторона $AB = 6$ см, сторона $AC = 8$ см и угол $BAC = x$. Выразить $BC = a$ и площадь $ABC = S$ как функции переменной x. Построить графики функций $a = a(x)$ и $S = S(x)$.

173. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 2), основания которой $AD = a$ и $BC = b$ $(a > b)$, а высота $HB = h$, проведена прямая $MN \parallel HB$ и отстоящая от

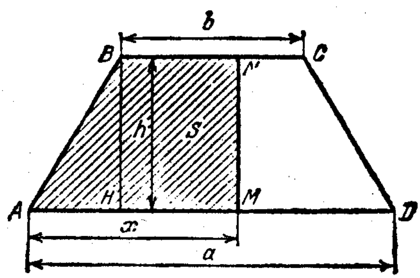

Рис. 2

вершины A на расстоянии $AM = x$. Выразить площадь S фигуры $ABNMA$ как функцию переменной x. Построить график функции: $S = S(x)$.

174. На сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ оси Ox равномерно распределена масса, равная 2 г, а в точках этой оси $x = 2$ и $x = 3$ находятся сосредоточенные массы по 1 г в каждой. Составить аналитическое выражение функции $m = m(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, численно равной массе, находящейся в интервале $(-\infty, x)$, и построить график этой функции.

175. Функция $y = \operatorname{sgn} x$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x<0; \\ 0, & \text{если } x=0; \\ 1, & \text{если } x>0. \end{cases}$$

Построить график этой функции. Показать, что

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

176. Функция $y = [x]$ (*целая часть* числа x) определяется следующим образом: если $x = n + r$, где n — целое число и $0 \leqslant r < 1$, то $[x] = n$.

Построить график этой функции.

177. Пусть

$$y = \pi(x) \quad (x \geqslant 0)$$

обозначает число простых чисел, не превышающих числа x. Построить график этой функции для значений аргумента $0 \leqslant x \leqslant 20$.

На какое множество E_y отображает множество E_x функция $y = f(x)$, если:

178(н). $y = x^2$, $\quad E_x = \{-1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

179. $y = \lg x$, $\quad E_x = \{10 < x < 1000\}$.

180. $y = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$, $\quad E_x = \{-\infty < x < +\infty\}$.

181. $y = \operatorname{ctg} \dfrac{\pi x}{4}$, $\quad E_x = \{0 < |x| \leqslant 1\}$.

182. $y = |x|$, $\quad E_x = \{1 \leqslant |x| \leqslant 2\}$.

Переменная x пробегает интервал $0 < x < 1$. Какое множество пробегает переменная y, если:

183. $y = a + (b - a)x$. **184.** $y = \dfrac{1}{1-x}$.

185. $y = \dfrac{x}{2x-1}$. **186.** $y = \sqrt{x - x^2}$.

187. $y = \operatorname{ctg} \pi x$. **188.** $y = x + [2x]$.

189. Найти $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, если $f(x) = x^4-6x^3+11x^2-6x$.

190. Найти $f(-1)$, $f(-0{,}001)$, $f(100)$, если $f(x) = \lg(x^2)$.

191. Найти $f(0{,}9)$, $f(0{,}99)$, $f(0{,}999)$, $f(1)$, если $f(x) = 1 + [x]$.

192. Найти $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, если

$$f(x)=\begin{cases} 1+x & \text{при} \quad -\infty<x\leqslant 0, \\ 2^x & \text{при} \quad 0<x<+\infty. \end{cases}$$

193. Найти $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, если

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}.$$

194. Найти значения x, для которых: 1) $f(x)=0$; 2) $f(x)>0$; 3) $f(x)<0$, если:

а) $f(x)=x-x^3$; б) $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$;

в) $f(x)=(x+|x|)(1-x)$.

195. Найти $\varphi(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, если:

а) $f(x) = ax+b$; б) $f(x) = x^2$; в) $f(x) = a^x$.

196. Пусть $f(x) = ax^2+bx+c$. Показать, что

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$$

197. Найти целую линейную функцию $f(x) = ax+b$, если $f(0) = -2$ и $f(3) = 5$.

Чему равны $f(1)$ и $f(2)$ (*линейная интерполяция*)?

198. Найти целую рациональную функцию второй степени: $f(x) = ax^2+bx+c$, если

$$f(-2)=0,\ f(0)=1,\ f(1)=5.$$

Чему равны $f(-1)$ и $f(0{,}5)$ (*квадратичная интерполяция*)?

199. Найти целую рациональную функцию третьей степени:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,$$

если $f(-1)=0$, $f(0)=2$, $f(1)=-3$, $f(2)=5$.

200. Найти функцию вида $f(x) = a + bc^x$, если $f(0) = 15$, $f(2) = 30$, $f(4) = 90$.

201. Доказать, что если для линейной функции

$$f(x) = ax + b$$

значения аргумента $x = x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют арифметическую прогрессию, то соответствующие значения функции $y_n = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют также арифметическую прогрессию.

202. Доказать, что если для показательной функции

$$f(x) = a^x \quad (a > 0)$$

значения аргумента $x = x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют арифметическую прогрессию, то соответствующие значения функции $y_n = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют геометрическую прогрессию).

203. Пусть функция $f(u)$ определена при $0 < u < 1$. Найти области определения функций:

а) $f(\sin x)$; б) $f(\ln x)$; в) $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$.

204. Пусть $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ $(a > 0)$. Показать, что

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y).$$

205. Пусть $f(x) + f(y) = f(z)$. Определить z, если

а) $f(x) = ax$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$;

в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $(|x| < 1)$; г) $f(x) = \log \frac{1 + x}{1 - x}$.

Найти $\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$ и $\psi[\varphi(x)]$, если:

206. $\varphi(x) = x^2$ и $\psi(x) = 2^x$.

207. $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ и $\psi(x) = \frac{1}{x}$.

208. $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x & \text{при } x > 0 \end{cases}$ и $\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ -x^2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$

209. Найти $f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$, если

$$f(x)=\frac{1}{1-x}.$$

210. Пусть $f_n(x)=\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n \text{ раз}}$. Найти $f_n(x)$, если $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

211. Найти $f(x)$, если $f(x+1)=x^2-3x+2$.

212. Найти $f(x)$, если $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$ $(|x|\geqslant 2)$.

213. Найти $f(x)$, если $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$ $(x>0)$.

213.1. Найти $f(x)$, если $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2$.

Доказать, что следующие функции являются монотонно возрастающими в указанных промежутках:

214. $f(x)=x^2$ $(0\leqslant x<+\infty)$.

215. $f(x)=\sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

216. $f(x)=\operatorname{tg} x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

217. $f(x)=2x+\sin x$ $(-\infty<x<+\infty)$.

Доказать, что следующие функции являются монотонно убывающими в указанных промежутках:

218. $f(x)=x^2$ $(-\infty<x\leqslant 0)$.

219. $f(x)=\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

220. $f(x)=\operatorname{ctg} x$ $(0<x<\pi)$.

221. Исследовать на монотонность следующие функции:

а) $f(x)=ax+b$; б) $f(x)=ax^2+bx+c$;

в) $f(x)=x^3$; г) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$;

д) $f(x)=a^x$ $(a>0)$.

222. Можно ли почленно логарифмировать неравенство?

223. Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$ — монотонно возрастающие функции. Доказать, что если

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x),$$

то

$$\varphi[\varphi(x)] \leqslant f[f(x)] \leqslant \psi[\psi(x)].$$

Определить обратную функцию $x = \varphi(y)$ и ее область существования, если:

224. $y = 2x + 3 \qquad (-\infty < x < +\infty)$.

225. $y = x^2$; а) $-\infty < x \leqslant 0$; б) $0 \leqslant x < +\infty$.

226. $y = \dfrac{1-x}{1+x} \qquad (x \neq -1)$.

227. $y = \sqrt{1-x^2}$; а) $-1 \leqslant x \leqslant 0$; б) $0 \leqslant x \leqslant 1$

228. $y = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$(-\infty < x < +\infty)$.

229. $y = \operatorname{th} x$, где $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$(-\infty < x < +\infty)$.

230.

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } -\infty < x < 1; \\ x^2, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 4; \\ 2^x, & \text{если } 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

231. Функция $f(x)$, определенная в симметричном интервале $(-l, l)$, называется *четной*, если

$$f(-x) \equiv f(x);$$

и *нечетной*, если

$$f(-x) \equiv -f(x).$$

Определить, какие из данных функций $f(x)$ являются четными, а какие нечетными:

а) $f(x) = 3x - x^3$; б) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

в) $f(x)=a^x+a^{-x}$ $(a>0)$; г) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$;

д) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

232. Доказать, что всякую функцию $f(x)$, определенную в симметричном интервале $(-l, l)$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

233. Функция $f(x)$, определенная на множестве E, называется периодической, если существует число $T>0$ (период функции — в широком смысле слова!) такое, что

$$f(x\pm T)\equiv f(x) \text{ при } x\in E.$$

Выяснить, какие из данных функций являются периодическими, и определить наименьший период их, если:

а) $f(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$;

б) $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$;

в) $f(x)=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; г) $f(x)=\sin^2 x$;

д) $f(x)=\sin x^2$; е) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

ж) $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x}$; з) $f(x)=\sin x+\sin\left(x\sqrt{2}\right)$.

234. Доказать, что для функции Дирихле

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально,}\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,}\end{cases}$$

периодом является любое рациональное число.

235. Доказать, что сумма и произведение двух периодических функций, которые определены на общем множестве и периоды которых соизмеримы, есть функции также периодические.

235.1. Функция $f(x)$ называется *антипериодической*, если

$$f(x+T)\equiv -f(x)\quad (T>0).$$

Доказать, что $f(x)$ — периодическая с периодом $2T$.

236. Доказать, что если для функции $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ выполнено равенство $f(x+T)=kf(x)$, где k и T — положительные постоянные, то $f(x)=a^x\varphi(x)$, где a — постоянная, а $\varphi(x)$ — периодическая функция с периодом T.

§ 4. Графическое изображение функции

1°. Для построения графика функции $y = f(x)$ поступают следующим образом: 1) определяют область существования функции: $X = \{x\}$; 2) выбирают достаточно густую сеть значений аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из X и составляют таблицу соответствующих значений функции

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

3) наносят систему точек $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ на координатную плоскость Oxy и соединяют их линией, характер которой учитывает положение промежуточных точек.

2°. Чтобы получить грамотный график функции, следует изучить общие свойства этой функции.

В первую очередь нужно: 1) решив уравнение $f(x) = 0$, определить точки пересечения графика функции с осью Ox (*нули функции*); 2) установить области изменения аргумента, где функция положительна или отрицательна; 3) если возможно, выяснить *промежутки монотонности* (возрастания или убывания) функции; 4) изучить поведение функции при неограниченном приближении аргумента к граничным точкам области существования функции.

В этом параграфе предполагается, что свойства простейших элементарных функций — степенной, показательной, тригонометрических и т. п., известны читателю.

Пользуясь этими свойствами, можно, не проделывая большой вычислительной работы, сразу рисовать эскизы графиков многих функций. Другие графики иногда удается свести к комбинации (сумме или произведению и т. п.) этих простейших графиков.

237. Построить график линейной однородной функции

$$y = ax$$

при $a = 0;\ 1/2;\ 1;\ 2;\ -1$.

238. Построить график линейной функции

$$y = x + b$$

при $b = 0,\ 1,\ 2,\ -1$.

239. Построить графики линейных функций:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = 2 - 0{,}1x$; $y = -\frac{x}{2} - 1$.

240. Температурный коэффициент линейного расширения железа $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$. Построить в подходящем масштабе график функции

$$l = f(T) \quad (-40° \leqslant T \leqslant 100°),$$

где T — температура в градусах и l — длина железного стержня при температуре T, если $l = 100$ см при $T = 0°$.

241. На числовой оси движутся две материальные точки. Первая в начальный момент времени $t = 0$ находилась на 20 м влево от начала координат и имела скорость $v_1 = 10$ м/с; вторая при $t = 0$ находилась на 30 м вправо от точки O и имела скорость $v_2 = -20$ м/с. Построить графики уравнений движений этих точек и найти время и место их встречи.

242. Построить графики целых рациональных функций 2-й степени (*параболы*):

а) $y = ax^2$ при $a = 1,\ 1/2,\ 2,\ -1$;

б) $y = (x - x_0)^2$ при $x_0 = 0,\ 1,\ 2,\ -1$;

в) $y = x^2 + c$ при $c = 0,\ 1,\ 2,\ -1$.

243. Построить график *квадратного трехчлена*

$$y = ax^2 + bc + c,$$

приведя его к виду

$$y = y_0 + a(x - x_0)^2.$$

Рассмотреть примеры:

а) $y = 8x - 2x^2$; б) $y = x^2 - 3x + 2$;

в) $y = -x^2 + 2x - 1$; г) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

244. Материальная точка брошена под углом $\alpha = 45°$ к плоскости горизонта с начальной скоростью $v_0 = 600$ м/с. Построить график траектории движения и найти наибольшую высоту подъема и дальность полета (приближенно считать $g \approx 10$ м/с^2; сопротивлением воздуха пренебречь).

Построить графики целых рациональных функций степени выше второй:

245. $y = x^3 + 1$. **246.** $y = (1 - x^2)(2 + x)$.

247. $y = x^2 - x^4$. **248.** $y = x(a - x)^2(a + x)^3$ $(a > 0)$.

Построить графики дробно-линейных функций (*гиперболы*):

249. $y = \frac{1}{x}$. **250.** $y = \frac{1 - x}{1 + x}$.

251. Построить график дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (ad - bc \neq 0, \quad c \neq 0),$$

приведя ее к виду

$$y=y_0+\frac{m}{x-x_0}.$$

Рассмотреть пример $y=\dfrac{3x+2}{2x-3}$.

252. Газ при давлении $p_0=1$ кгс/м^2 занимает объем $v_0=12$ м^3. Построить график изменения объема v газа в зависимости от давления p, если температура газа остается постоянной (*закон Бойля—Мариотта*).

Построить графики дробных рациональных функций:

253. $y=x+\dfrac{1}{x}$ (гипербола).

254. $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ (трезубец Ньютона).

255. $y=x+\dfrac{1}{x^2}$.

256. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ (кривая Аньези).

257. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ (серпантин Ньютона).

258. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$. 259. $y=\dfrac{x}{1-x^2}$.

260. $y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{1-x}$.

261. $y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{1-x}$.

262. $y=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

263. Построить эскиз графика функции

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}\quad(a_1\neq 0),$$

приведя ее к виду

$$y=kx+m+\frac{n}{x-x_0}.$$

Рассмотреть пример

$$y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}.$$

264. Построить график абсолютной величины силы притяжения F материальной точки, находящейся на расстоянии x от притягивающего центра, если $F = 10$ кгс при $x = 1$ м (*закон Ньютона*).

265. Согласно закону *Ван-дер-Ваальса* объем v реального газа и его давление p при постоянной температуре связаны соотношением

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=c.$$

Построить график функции $p=p(v)$, если $a = 2$ $b = 0{,}1$ и $c = 10$.

Построить графики иррациональных функций:

266. $y= \pm\sqrt{-x-2}$ (парабола).

267. $y=\pm x\sqrt{x}$ (парабола Нейля).

268. $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$ (эллипс).

269. $y=\pm\sqrt{x^2-1}$ (гипербола).

270. $y=\pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. **271.** $y=\pm x\sqrt{100-x^2}$.

272. $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$ (циссоида).

273. $y=\pm\sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

274. Построить график степенной функции $y = x^n$ при: а) $n = 1, 3, 5$; б) $n = 2, 4, 6$.

275. Построить график степенной функции $y = x^n$ при: а) $n = -1, -3$; б) $n = -2, -4$.

276. Построить график радикала $y = \sqrt[m]{x}$ при: а) $m = 2, 4$; б) $m = 3, 5$.

277. Построить график радикала $y=\sqrt[m]{x^k}$, если:

а) $m = 2, k = 1$; б) $m = 2, k = 3$; в) $m = 3, k = 1$; г) $m = 3, k = 2$; д) $m = 3, k = 4$; е) $m = 4, k = 2$; ж) $m = 4, k = 3$.

278. Построить график показательной функции $y = a^x$ при $a = 1/2$, 1, 2, e, 10.

279. Построить график сложной показательной функции $y = e^{y_1}$, если:

а) $y_1 = x^2$; б) $y_1 = -x^2$; в) $y_1 = \frac{1}{x}$;

г) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; д) $y_1 = -\frac{1}{x^2}$; е) $y_1 = \frac{2x}{1-x^2}$.

280. Построить график логарифмической функции $y = \log_a x$ при $a = 1/2$, 2, e, 10.

281. Построить графики функций:

а) $y = \ln(-x)$; б) $y = -\ln x$.

282. Построить график сложной логарифмической функции $y = \ln y_1$, если:

а) $y_1 = 1 + x^2$; б) $y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

в) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$; г) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; д) $y_1 = 1 + e^x$.

283. Построить график функции $y = \log_x 2$.

284. Построить график функции $y = A \sin x$ при $A = 1$, 10, -2.

285. Построить график функции $y = \sin(x - x_0)$, если $x_0 = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π.

286. Построить график функции $y = \sin nx$, если $n = 1$, 2, 3, 1/2, 1/3.

287. Построить график функции

$$y = a \cos x + b \sin x,$$

приведя ее к виду

$$y = A \sin(x - x_0).$$

Рассмотреть пример: $y = 6 \cos x + 8 \sin x$.

Построить графики тригонометрических функций:

288. $y = \cos x$. 289. $y = \operatorname{tg} x$. 290. $y = \operatorname{ctg} x$.
291. $y = \sec x$. 292. $y = \csc x$. 293. $y = \sin^2 x$.
294. $y = \sin^3 x$. 295. $y = \operatorname{ctg}^2 x$.
296. $y = \sin x \cdot \sin 3x$. 297. $y = \pm \sqrt{\cos x}$.

Построить графики функций:

298. $y=\sin x^2$. **299.** $y=\sin\frac{1}{x}$. **300.** $y=\cos\frac{\pi}{x}$.

300.1. $y=\sin x$. $\sin\frac{1}{x}$. **301.** $y=\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$.

301.1. $y=\sec\frac{1}{x}$. **302.** $y=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$.

303. $y=\pm\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{x}$. **304.** $y=\frac{\sin x}{x}$

305. $y=e^x\cos x$. **306.** $y=\pm 2^{-x}\sqrt{\sin\pi x}$.

307. $y=\frac{\cos x}{1+x^2}$. **308.** $y=\ln(\cos x)$.

309. $y=\cos(\ln x)$. **310.** $y=e^{1/\sin x}$.

Построить графики обратных круговых функций:

311. $y=\arcsin x$. **312.** $y=\arccos x$.

313. $y=\operatorname{arctg} x$. **314.** $y=\operatorname{arcctg} x$.

315. $y=\arcsin\frac{1}{x}$. **316.** $y=\arccos\frac{1}{x}$.

317. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$. **318.** $y=\arcsin(\sin x)$.

319. $y=\arcsin(\cos x)$. **320.** $y=\arccos(\cos x)$.

321. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$. **322.** $y=\arcsin(2\sin x)$.

323. Построить график функции

$$y=\arcsin y_1,$$

если:

а) $y_1=1-\frac{x}{2}$; б) $y_1=\frac{2x}{1+x^2}$;

в) $y_1=\frac{1-x}{1+x}$; г) $y_1=e^x$.

324. Построить график функции $y=\operatorname{arctg} y_1$, если:

а) $y_1=x^2$; б) $y_1=\frac{1}{x^2}$; в) $y_1=\ln x$;

г) $y_1=\frac{1}{\sin x}$.

324.1. Построить графики функций:

а) $y=x^3-3x+2$; б) $y=\dfrac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$;

в) $y=\dfrac{x^2}{|x|-1}$; г) $y=\sqrt{x(1-x^2)}$;

д) $y=3\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$; е) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{1+x^2}$;

ж) $y=\dfrac{1}{1-2^{x/1-x}}$; з) $y=\lg(x^2-3x+2)$;

и) $y=\arcsin\left(\dfrac{3}{2}-\sin x\right)$;

к) $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}\right)$;

л) $y=\log_{\cos x}\sin x$; м) $y=(\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

325. Зная график функции $y=f(x)$, построить графики функций:

а) $y=-f(x)$; б) $y=f(-x)$; в) $y=-f(-x)$.

326. Зная график функции $y=f(x)$, построить графики функций:

а) $y=f(x-x_0)$; б) $y=y_0+f(x-x_0)$;
в) $y=f(2x)$; г) $y=f(kx+b)$ $(k\neq 0)$.

326.1. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{при } |x|\leqslant 1;\\ 0 & \text{при } |x|>1.\end{cases}$$

Построить графики функций:

$$y=\frac{1}{2}[f(x-t)+f(x+t)]$$

при $t=0$, $t=1$ и $t=2$.

327. Построить графики функций:

а) $y=2+\sqrt{1-x}$; б) $y=1-e^{-x}$;
в) $y=\ln(1+x)$;
г) $y=-\arcsin(1+x)$; д) $y=3+2\cos 3x$.

328. Зная график функции $y = f(x)$, построить графики функций:

а) $y = |f(x)|$; б) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$;

в) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$.

329. Зная график функции $y = f(x)$, построить графики функций:

а) $y = f^2(x)$; б) $y = \sqrt{f(x)}$; в) $y = \ln f(x)$;

г) $y = f(f(x))$; д) $y = \operatorname{sgn} f(x)$; е) $y = [f(x)]$.

329.1. Пусть

$$f(x) = (x-a)(b-x) \quad (a < b).$$

Построить графики функций:

а) $y = f(x)$; б) $y = f^2(x)$; в) $y = \frac{1}{f(x)}$;

г) $y = \sqrt{f(x)}$; д) $y = e^{f(x)}$; е) $y = \lg f(x)$;

ж) $y = \operatorname{arcctg} f(x)$.

329.2. Построить графики функций:

а) $y = \arcsin[\sin f(x)]$; б) $y = \arcsin[\cos f(x)]$;

в) $y = \arccos[\sin f(x)]$; г) $y = \arccos[\cos f(x)]$;

д) $y = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg} f(x)]$,

если: 1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = x^3$.

330. Зная графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, построить графики функций:

а) $y = f(x) + g(x)$; б) $y = f(x)\, g(x)$; в) $y = f(g(x))$.

Применяя правило сложения графиков, построить графики следующих функций:

331. $y = 1 + x + e^x$. **332.** $y = (x+1)^{-2} + (x-1)^{-2}$.

333. $y = x + \sin x$. **334.** $y = x + \operatorname{arctg} x$.

335. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$.

336. $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$.

337. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$. **338.** $y=|1-x|+|1+x|$.

339. $y=|1-x|-|1+x|$.

340. Построить графики гиперболических функций:

а) $y=\operatorname{ch} x$, где $\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;

б) $y=\operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$;

в) $y=\operatorname{th} x$, где $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Применяя правило умножения графиков, построить графики функций:

341. $y=x\sin x$. **342.** $y=x\cos x$.

343. $y=x^2\sin^2 x$. **344.** $y=\frac{\sin x}{1+x^2}$.

345. $y=e^{-x^2}\cos 2x$. **346.** $y=x\operatorname{sgn}(\sin x)$.

347. $y=[x]\,|\sin \pi x|$. **348.** $y=\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$.

349. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x|, & \text{если } |x|\leqslant 1; \\ 0, & \text{если } |x|>1. \end{cases}$$

Построить график функции

$$y=f(x)\,f(a-x),$$

если:

а) $a=0$; б) $\alpha=1$; в) $a=2$.

350. Построить график функции

$$y=x+\sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin \pi x).$$

Построить график функции $y=\frac{1}{f(x)}$, если:

351. $f(x)=x^2(1-x^2)$. **352.** $f(x)=x(1-x)^2$.

353. $f(x)=\sin^2 x$. **354.** $f(x)=\ln x$.

355. $f(x)=e^x\sin x$.

356. Построить график сложной функции $y=f(u)$, где $u = 2\sin x$, если:

$$f(u)=\begin{cases} -1 & \text{при } -\infty<u<-1; \\ u & \text{при } -1\leqslant u\leqslant 1; \\ 1 & \text{при } 1<u<+\infty. \end{cases}$$

357. Пусть

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(x+|x|) \text{ и } \psi(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x<0; \\ x^2, & \text{если } x\geqslant 0. \end{cases}$$

Построить графики функций:

а) $y=\varphi[\varphi(x)]$; б) $y=\varphi[\psi(x)]$;

в) $y=\psi[\varphi(x)]$; г) $y=\psi[\psi(x)]$.

358. Пусть

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } |x|\leqslant 1; \\ 0, & \text{если } |x|>1, \end{cases}$$

и

$$\psi(x)=\begin{cases} 2-x^2, & \text{если } |x|\leqslant 2; \\ 2, & \text{если } |x|>2. \end{cases}$$

Построить графики функций:

а) $y=\varphi[\varphi(x)]$; б) $y=\varphi[\psi(x)]$;

в) $y=\psi[\varphi(x)]$; г) $y=\psi[\psi(x)]$.

359. Функцию $f(x)$, определенную в положительной области $x>0$, продолжить в отрицательную область $x<0$ таким образом, чтобы полученная функция была: 1) четной; 2) нечетной, если:

а) $f(x)=1-x$; б) $f(x)=2x-x^2$; в) $f(x)=\sqrt{x}$;

г) $f(x)=\sin x$; д) $f(x)=e^x$; е) $f(x)=\ln x$.

Построить соответствующие графики функций.

360. Определить, относительно каких вертикальных осей симметричны графики функций:

а) $y=ax^2+bx+c$; б) $y=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}$;

в) $y=\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}$ $(0<a<b)$;

г) $y=a+b\cos x$.

361. Определить, относительно каких центров симметричны графики функций:

а) $y=ax+b$; б) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$;

в) $y=ax^3+bx^2+cx+d$;

г) $y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$;

д) $y=1+\sqrt[3]{x-2}$.

362. Построить графики периодических функций:

а) $y=|\sin x|$; б) $y=\operatorname{sgn}\cos x$; в) $y=f(x)$,

где $f(x)=A\frac{x}{l}\left(2-\frac{x}{l}\right)$, если $0\leqslant x\leqslant 2l$ и $f(x+2l)\equiv$ $\equiv f(x)$;

г) $y=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]$;

д) $y=(x)$, где (x) — расстояние от числа x до ближайшего к нему целого числа.

363. Доказать, что если график функции $y=$ $=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ симметричен относительно двух вертикальных осей $x=a$ и $x=b$ $(b>a)$, то функция $f(x)$ — периодическая.

364. Доказать, что если график функции $y=$ $=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ симметричен относительно двух точек $A(a,\ y_0)$, и $B(b,\ y_1)$ $(b>a)$, то функция $f(x)$ есть сумма линейной функции и периодической функции. В частности, если $y_0=y_1$, то функция $f(x)$ — периодическая.

365. Доказать, что если график функции $y=$ $=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ симметричен относительно точки $A(a,\ y_0)$ и прямой $x=b$ $(b\neq a)$, то функция $f(x)$ — периодическая.

366. Построить график функции $y=f(x)$ $(-\infty<$ $<x<+\infty)$, если $f(x+1)=2f(x)$ и $f(x)=x(1-x)$ при $0\leqslant x\leqslant 1$.

367. Построить график функции

$$y=f(x)\quad(-\infty<x<+\infty),$$

если $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$ и $f(x)=0$ при $0\leqslant x\leqslant\pi$.

368. Построить график функции $y = y(x)$, если:

а) $x = y - y^3$; б) $x = \dfrac{1-y}{1+y^2}$;

в) $x = y - \ln y$; г) $x^2 = \sin y$.

369. Построить графики функций $y = y(x)$, заданных параметрически, если:

а) $x = 1 - t$, $y = 1 - t^2$;

б) $x = t + \dfrac{1}{t}$, $y = t + \dfrac{1}{t^2}$;

в) $x = 10 \cos t$, $y = \sin t$ (эллипс);

г) $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ (гипербола);

д) $x = 5 \cos^2 t$, $y = 3 \sin^2 t$;

е) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ (циклоида);

ж) $x = \sqrt[t+1]{t}$, $y = \sqrt[t]{t+1}$, $(t > 0)$.

370. Построить графики неявных функций:

а) $x^2 - xy + y^2 = 1$ (эллипс);

б) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (декартов лист);

в) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (парабола);

г) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ (астроида);

д) $\sin x = \sin y$; е) $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$;

ж) $x^y = y^x$ $(x > 0,\ y > 0)$; з) $x - |x| = y - |y|$.

370.1. Построить графики неявных функций:

а) $\min(x, y) = 1$; б) $\max(x, y) = 1$;

в) $\max(|x|, |y|) = 1$; г) $\min(x^2, y) = 1$.

371. Построить графики функций $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат (r, φ), если:

а) $r = \varphi$ (спираль Архимеда);

б) $r = \dfrac{\pi}{\varphi}$ (гиперболическая спираль);

в) $r = \dfrac{\varphi}{\varphi + 1}$ $(0 \leqslant \varphi < +\infty)$;

г) $r = 2^{\varphi/2\pi}$ (логарифмическая спираль);

д) $r = 2(1 + \cos \varphi)$ (кардиоида);

е) $r = 10 \sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза);

ж) $r^2 = 36 \cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли);

з) $\varphi = \frac{r}{r-1} \, (r>1)$;

и) $\varphi = 2\pi \sin r$.

371.1. Построить в полярных координатах r и φ графики следующих функций:

а) $\varphi = 4r - r^2$; б) $\varphi = \frac{12r}{1+r^2}$; в) $r^2 + \varphi^2 = 100$.

371.2. Построить в полярных координатах r и φ графики функций, заданных параметрически ($t \geqslant 0$ — параметр):

а) $\left.\begin{aligned} \varphi &= t \cos^2 t, \\ r &= t \sin^2 t, \end{aligned}\right\}$ б) $\left.\begin{aligned} \varphi &= 1 - 2^{-t} \sin \frac{\pi t}{2}, \\ r &= 1 - 2^{-t} \cos \frac{\pi t}{2}. \end{aligned}\right\}$

372. Приближенно решить уравнение

$$x^3 - 3x + 1 = 0,$$

построив график функции $y = x^3 - 3x + 1$.

Графически решить следующие уравнения:

373. $x^3 - 4x - 1 = 0$. **374.** $x^4 - 4x + 1 = 0$.

375. $x = 2^{-x}$. **376.** $\lg x = 0{,}1\, x$.

377. $10^x = x^2$. **378.** $\lg x = x \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

Графически решить системы уравнений:

379. $x + y^2 = 1, \; 16x^2 + y = 4$.

380. $x^2 + y^2 = 100, \quad y = 10\,(x^2 - x - 2)$.

§ 5. Предел функции

1°. Ограниченность функции. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* на данном промежутке (a, b), если существуют некоторые числа m и M такие, что

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

при $x \in (a, b)$.

Число $m_0 = \inf\limits_{x \in (a,\, b)} \{f(x)\} = \max m$ называется *нижней гранью* функции $f(x)$, а число $M_0 = \sup\limits_{x \in (a,\, b)} \{f(x)\} = \min M$ называется *верхней гранью* функции $f(x)$ на данном промежутке (a, b). Разность $M_0 - m_0$ называется *колебанием функции* на промежутке (a, b).

2°. Предел функции в точке. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X = \{x\}$, имеющем точку сгущения a. Запись

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \tag{1}$$

обозначает, что для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, для которых $f(x)$ имеет смысл и которые удовлетворяют условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Для существования предела функции (1) необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $x_n \to a$, $x_n \neq a$ ($x_n \in X$; $n = 1, 2, \ldots$), было выполнено равенство

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Имеют место два замечательных предела:

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad 2)\ \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Критерий Коши. Предел функции $f(x)$ в точке a существует тогда и только тогда, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

как только $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, где x' и x'' — любые точки из области определения функции $f(x)$.

3°. Односторонние пределы. Число A' называется *пределом слева* функции $f(x)$ в точке a:

$$A' = \lim_{x \to a - 0} f(x) = f(a - 0),$$

если

$$|A' - f(x)| < \varepsilon \text{ при } 0 < a - x < \delta(\varepsilon).$$

Аналогично, число A'' называется *пределом справа* функции $f(x)$ в точке a:

$$A'' = \lim_{x \to a + 0} f(x) = f(a + 0),$$

если

$$|A'' - f(x)| < \varepsilon \text{ при } 0 < x - a < \delta(\varepsilon).$$

Для существования предела функции $f(x)$ в точке a необходимо и достаточно, чтобы

$$f(a-0)=f(a+0).$$

4°. Бесконечный предел. Условная запись

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

обозначает, что для любого $E>0$ справедливо неравенство:

$$|f(x)|>E, \text{ если только } 0<|x-a|<\delta(E).$$

5°. Частичный предел. Если для некоторой последовательности $x_n\to a$ $(x_n\neq a)$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=B,$$

то число (или символ ∞) B называется *частичным пределом* (соответственно конечным или бесконечным) *функции* $f(x)$ в точке a.

Наименьший и наибольший из этих частичных пределов обозначаются

$$\varliminf_{x\to a} f(x) \quad \text{и} \quad \varlimsup_{x\to a} f(x)$$

и называются соответственно *нижним и верхним пределами* функции $f(x)$ в точке a.

Равенство

$$\varliminf_{x\to a} f(x)=\varlimsup_{x\to a} f(x)$$

необходимо и достаточно для существования предела (соответственно конечного или бесконечного) функции $f(x)$ в точке a.

381. Показать, что функция, определяемая условиями:

$$f(x)=n, \text{ если } x=\frac{m}{n},$$

где m и n — взаимно простые целые числа и $n>0$ и

$$f(x)=0, \text{ если } x \text{ иррационально},$$

конечна, но не ограничена в каждой точке x (т. е. не ограничена в любой окрестности этой точки).

382. Если функция $f(x)$ определена и локально ограничена в каждой точке: а) интервала, б) сегмента, то является ли эта функция ограниченной на данном интервале или соответственно сегменте?

Привести соответствующие примеры.

383. Показать, что функция $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$ ограничена в интервале $-\infty < x < +\infty$.

384. Показать, что функция $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ не ограничена в любой окрестности точки $x = 0$, однако не является бесконечно большой при $x \to 0$.

385. Исследовать на ограниченность функцию

$$f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$$

в интервале $0 < x < \varepsilon$.

386. Показать, что функция $f(x) = \frac{x}{1+x}$ в области $0 \leqslant x < +\infty$ имеет нижнюю грань $m = 0$ и верхнюю грань $M = 1$.

387. Функция $f(x)$ определена и монотонно возрастает на сегменте $[a, b]$. Чему равны ее нижняя и верхняя грани на этом сегменте?

Определить нижнюю и верхнюю грани функций:

388. $f(x) = x^2$ на $[-2, 5)$.

389. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на $(-\infty, +\infty)$.

390. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ на $(0, +\infty)$.

391. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на $(0, +\infty)$.

392. $f(x) = \sin x$ на $(0, +\infty)$.

393. $f(x) = \sin x + \cos x$ на $[0, 2\pi]$.

394. $f(x) = 2^x$ на $(-1, 2)$.

395. $f(x) = [x]$: а) на $(0, 2)$ и б) на $[0, 2]$.

396. $f(x) = x - [x]$ на $[0, 1]$.

397. Определить колебание функции

$$f(x) = x^2$$

на интервалах: а) $(1;\ 3)$; б) $(1{,}9;\ 2{,}1)$; в) $(1{,}99;\ 2{,}01)$; г) $(1{,}999;\ 2{,}001)$.

398. Определить колебание функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

на интервалах: а) $(-1; 1)$; б) $(-0{,}1; 0{,}1)$; в) $(-0{,}01; 0{,}01)$; г) $(-0{,}001; 0{,}001)$.

399. Пусть $m[f]$ и $M[f]$ — соответственно нижняя и верхняя грани функции $f(x)$ на промежутке (a, b).

Доказать, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — функции, определенные на (a, b), то

$$m[f_1 + f_2] \geqslant m[f_1] + m[f_2]$$

и

$$M[f_1 + f_2] \leqslant M[f_1] + M[f_2].$$

Построить примеры функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, для которых в последних соотношениях имеет место: а) случай равенства и б) случай неравенства.

400. Пусть функция $f(x)$ определена в области $[a, +\infty)$ и ограничена на каждом сегменте $[a, b] \subset [a, +\infty)$.

Положим:

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi) \quad \text{и} \quad M(x) = \sup_{a \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi).$$

Построить графики функций $y = m(x)$ и $y = M(x)$, если:

а) $f(x) = \sin x$ и б) $f(x) = \cos x$.

401. С помощью «ε—δ»-рассуждений доказать, что

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

Заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
δ					

402. На языке «E—δ» доказать, что

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

Заполнить следующую таблицу:

E	10	100	1 000	10 000	. . .
δ					

403. Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$; б) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$; в) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$.

Привести соответствующие примеры.

Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения и привести соответствующие примеры:

404. а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$.

405. а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$; б) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$; г) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$;

д) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$;

е) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$; ж) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$;

з) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$; и) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$.

406. а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$;

д) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; е) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$;

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$; з) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;

и) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

407. Пусть $y = f(x)$. Сформулировать с помощью неравенств, что значит:

а) $y \to b - 0$ при $x \to a$;
б) $y \to b - 0$ при $x \to a - 0$;
в) $y \to b - 0$ при $x \to a + 0$;
г) $y \to b + 0$ при $x \to a$;
д) $y \to b + 0$ при $x \to a - 0$;
е) $y \to b + 0$ при $x \to a + 0$;
ж) $y \to b - 0$ при $x \to \infty$;
з) $y \to b - 0$ при $x \to -\infty$;
и) $y \to b - 0$ при $x \to +\infty$;
к) $y \to b + 0$ при $x \to \infty$;
л) $y \to b + 0$ при $x \to -\infty$;
м) $y \to b + 0$ при $x \to +\infty$.

Привести соответствующие примеры.

408. Пусть

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где a_i $(i=0, 1, \ldots, n;\ n \geqslant 1, a_0 \neq 0)$ — вещественные числа.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} |P(x)| = +\infty$.

409. Пусть $R(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$, где $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$.

Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m; \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m; \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

410. Пусть $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$,

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x и

$$P(a) = Q(a) = 0.$$

Какие возможные значения имеет выражение

$$\lim \frac{P(x)}{\ldots}\ ?$$

Найти значения следующих выражений:

411. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

412. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

413. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

414. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ (m и n — натуральные числа).

415. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

416. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

417. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\ldots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

418. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$. **419.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

420. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$. **421.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$.

422. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$. **423.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

424. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$.

424.1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

425. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m и n — натуральные числа).

426. $\lim\limits_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ (n — натуральное число).

427. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ (n — натуральное число).

428. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$ (m и n — натуральные числа).

429. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\ldots\right.$
$\left.\ldots+\left(x+\frac{(n-1)\,a}{n}\right)\right].$

430. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2n}{n}\right)^2+\ldots\right.$
$\left.\ldots+\left(x+\frac{(n-1)\,a}{n}\right)^2\right].$

Указание. См. пример 2.

431. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}.$

432. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right).$

Указание. См. пример 3.

433. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+4^3+7^3+\ldots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\ldots+(3n-2)]^2}.$

434. Определить площадь криволинейного треугольника OAM (рис. 3), ограниченного параболой $y =$

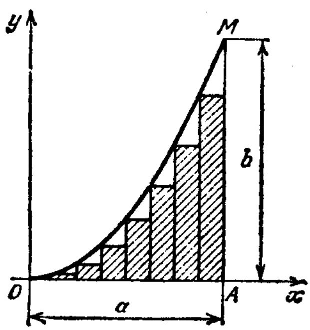

Рис. 3

$= b\,(x/a)^2$, осью Ox и прямой $x = a$, рассматривая ее как предел суммы площадей вписанных прямоугольников с основаниями a/n, где $n \to \infty$.

Найти пределы:

435. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

436. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

437. $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

438. $\lim\limits_{x\to-8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

439. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$.

440. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

441. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

442. $\lim\limits_{x\to16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$. **443.** $\lim\limits_{x\to8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

444. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n — целое число).

445. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

446. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

447. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

448. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

449. $\lim\limits_{x\to7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

450. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$.

451. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

452. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ (m и n—целые числа).

453. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ (m и n — целые числа).

454. Пусть $P(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ и m — целое число.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\dfrac{a_1}{m}$.

Найти пределы:

455. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ (m и n—целые числа).

455.1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{3}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

456. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

457. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$.

458. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

459. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$.

460. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\right.$

$\left.-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right)$.

461. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

462. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

463. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/3}[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}]$.

464. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$.

465. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x-a_1)\,.\,.\,.\,(x+a_n)}-x\right]$.

466. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$ (n—натуральное число).

467. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$ (n—натуральное число).

468. Изучить поведение корней x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, у которого коэффициент a стремится к нулю, а коэффициенты b и c постоянны, причем $b\neq0$.

469. Найти постоянные a и b из условия

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0.$$

470. Найти постоянные a_i и b_i ($i=1, 2$) из условий:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0$$

и

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0.$$

Найти пределы:

471. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$. **472.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

473. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m и n—целые числа).

474. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. **474.1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

474.2. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 3x$.

475. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$. **476.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

477. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$. **478.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

479. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$. **480.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

481. Доказать равенства:

а) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; б) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} a$

$$\left(a\neq\frac{2n-1}{2}\pi;\quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\right).$$

Найти пределы:

482. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$. **483.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

484. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$. **485.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} a}{x-a}$.

486. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sec x-\sec a}{x-a}$. **487.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{cosec} x-\operatorname{cosec} a}{x-a}$.

488. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

489. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$.

490. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+2x)-2\operatorname{tg}(a+x)+\operatorname{tg} a}{x^2}$.

491. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg}(a+2x)-2\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg} a}{x^2}$.

492. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$.

493. $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

494. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

495. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$. **496.** $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

497. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$.

498. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^3 x}$.

499. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

500. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

501. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

502. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$. **503.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$.

504. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

505. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

506. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$.

507. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$. **508.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

509. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin^n\dfrac{2\pi n}{3n+1}\right)$.

510. $\lim\limits_{x\to\pi/4+0}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg} 2x}$.

511. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$. **512.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

513. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}$. 514. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

515. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$.

516. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x$ $(a_1>0,\ a_2>0)$.

517. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. 518. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

519. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$.

519.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin^3 x}$.

520. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$. 521. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

522. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$. 523. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

524. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg}x}$.

525. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

526. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

527. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$. 528. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$.

529. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$. 530. $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.

531. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$.

532. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$.

533. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

534. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{100+x^2}{1+100x^2}\right)$.

535. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

536. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$.

537. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}$ $(x>0)$.

538. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$. **539.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

540. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\dfrac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right)$.

540.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(nx+\sqrt{1-n^2x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}$.

541. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$. **542.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$.

543. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$. **544.** $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$.

545. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{1/x^2}$.

545.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

545.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$. **545.3.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(\pi\cdot 2^x)}{\ln[\cos(\pi\cdot 2^x)]}$.

546. $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$. **547.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

548. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ $(a>0)$. **549.** $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$ $(a>0)$.

550. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$ $(a>0)$.

551. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

552. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$ $(x>0)$.

553. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)$ $(x>0)$.

554. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

555. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

556. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

557. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{1/x}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

558. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{1/x}$ $(a>0,\ b>0)$.

559. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$ $(a>0,\ b>0)$.

560. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$ $(a>0)$.

561. а) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

562. $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

563. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$.

564. Доказать, что

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^n}{a^x}=0\quad (a>1,\ n>0).$$

565. Доказать, что

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0\qquad (a>1,\ \varepsilon>0).$$

Найти пределы:

566. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$.

567. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

568. $\lim\limits_{x\to +\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

569. $\lim\limits_{x\to +0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right]$ $(a>1)$.

570. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

571. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

572. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

573. $\lim\limits_{x\to 0}(2e^{x/(x+1)}-1)^{(x^2+1)/x}$. **574.** $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec(\pi x/2)}$.

575. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)(1-\sin^{\beta}x)}}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

576. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{th}x}{x}$ (см. пример 340).

576.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch}3x)}$ (см. пример 340).

577. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch}x}$.

577.1. а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}a}{x-a}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}a}{x-a}$.

577.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{ch}x}{\ln\cos x}$. **578.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch}x)$.

579. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}$.

580. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$.

581. $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$.

582. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

583. $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$. **584.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

585. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}$.

586. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \dfrac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$.

587. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)\right]$.

588. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$.

589. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

590. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$.

591. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{100}} e^{-1/x^2}$. **592.** $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$.

593. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$.

594. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$.

594.1 Найти $h=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, если

$$f(x)=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+b^2}}.$$

595. а) $\lim\limits_{x\to 1-0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1+0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$.

596. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$; б) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$.

597. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

598. Доказать, что

а) $\dfrac{2x}{1+x}\to 2+0$ при $x\to-\infty$;

б) $\dfrac{2x}{1+x}\to 2-0$ при $x\to+\infty$.

599. Доказать, что

а) $2^x \to 1-0$ при $x \to -0$;

б) $2^x \to 1+0$ при $x \to +0$.

600. Найти $f(1)$, $f(1-0)$, $f(1+0)$, если $f(x) = x + [x^2]$.

601. Найти $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$, если $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$.

Найти:

602. $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$. **603.** $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

604. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

605. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

606. $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sin\sin\ldots\sin}_{n \text{ раз}} x$.

607. Если $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to A} \psi(x) = B$, то следует ли отсюда, что

$$\lim_{x\to a} \psi(\varphi(x)) = B?$$

Рассмотреть пример: $\varphi(x) = 1/q$ при $x = p/q$, где p и q — взаимно простые целые числа и $\varphi(x) = 0$ при x — иррациональном; $\psi(x) = 1$ при $x \neq 0$ и $\psi(x) = 0$ при $x = 0$; причем $x \to 0$.

608. Доказать теоремы Коши: если функция $f(x)$ определена в интервале $(a, +\infty)$ и ограничена в каждом конечном интервале (a, b), то

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)]$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)]^{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ $\quad (f(x) \geqslant C > 0)$,

предполагая, что пределы в правых частях равенств существуют.

609. Доказать, что если: а) функция $f(x)$ определена в области $x > a$; б) ограничена в каждой конечной области $a < x < b$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$, то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty.$$

610. Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ определена в области $x > a$; 2) ограничена в каждой конечной области $a < x < b$; 3) для некоторого натурального n существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^n} = l,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

611. Доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right) = e^x$.

612. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = 2\pi.$$

Указание. Использовать формулу (*) примера 72.

Построить график функций:

613. а) $y = 1 - x^{100}$; б) $y = \lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n})\ (-1 \leqslant x \leqslant 1)$

614. а) $y = \frac{x^{100}}{1+x^{100}}\ (x \geqslant 0)$; б) $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}\ (x \geqslant 0)$.

615. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}\quad (x \neq 0)$.

616. $x = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$.

617. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}\quad (x \geqslant 0)$.

618. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\quad (x \geqslant 0)$.

619. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}\quad (x \geqslant 0)$.

620. а) $y = \sin^{1000} x$; б) $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n} x$.

621. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}$ $(x\geqslant 0)$.

622. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$.

623. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}$.

624. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$.

625. $y=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{1}{t-x}\ln\dfrac{t}{x}$ $(x>0)$.

625.1. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\operatorname{tg}^{2n}\dfrac{\pi x}{4}+\sqrt{x}}{\operatorname{tg}^{2n}\dfrac{\pi x}{4}+1}$ $(x\geqslant 0)$.

625.2. $y=\lim\limits_{n\to\infty}x\operatorname{sgn}|\sin^2(n!\pi x)|$.

625.3. Построить кривую

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n+|y|^n}=1.$$

626. *Асимптотой* (наклонной) для кривой $y=f(x)$ называется прямая $y=kx+b$, для которой

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0.$$

Используя это уравнение, вывести необходимые и достаточные условия существования асимптоты.

627. Найти асимптоты и построить следующие кривые:

а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+x-2}$; б) $y=\sqrt{x^2+x}$;

в) $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$; г) $y=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$;

д) $y=\ln(1+e^x)$; е) $y=x+\arccos\dfrac{1}{x}$.

Найти следующие пределы:

628. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$.

629. $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})]$, если $|x|<1$.

630. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

631. Пусть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$, где $\psi(x)>0$ и пусть $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$ при $n\to\infty$, т. е. $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$ при $m=1,\ 2,\ \ldots$ и $n>N(\varepsilon)$.

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\ldots+\varphi(\alpha_{nn})]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\ldots+\psi(\alpha_{nn})], \qquad (1)$$

предполагая, что предел в правой части равенства (1) существует.

Пользуясь предыдущей теоремой, найти:

632. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

633. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$.

634. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(a^{k/n^2}-1)$ $(a>0)$.

635. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

636. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

637. Последовательность x_n задана равенствами:

$$x_1=\sqrt{a},\ x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\ x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ \ldots$$
$$(a>0).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

637.1. Последовательность x_n задается следующим образом:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,$$

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

637.2. Последовательность y_n определяется с помощью последовательности x_n соотношениями:

$$y_0 = x_0,\ y_n = x_n - \alpha x_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $|\alpha| < 1$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

637.3. Последовательность x_n определяется следующим образом:

$$x_0 = 1,\ x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Указание Рассмотреть разности между x_n и корнями уравнения $x = \dfrac{1}{1+x}$.

638. Последовательность функций

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

определяется следующим образом:

$$y_1 = \frac{x}{2},\ y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

639. Последовательность функций $y_n = y_n(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ определяется следующим образом:

$$y_1 = \frac{x}{2},\ y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

639.1. Пусть $x > 0$ и $y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$ $(n = 1, \ldots, \ldots)$. Доказать, что если $y_i > 0$ $(i = 0, 1)$, то последовательность y_n сходится и

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{x}.$$

Указание. Изучить разность

$$\frac{1}{x} - y_n.$$

639.2. Для нахождения $y = \sqrt{x}$, где $x > 0$, применяется следующий процесс: $y_0 > 0$ — произвольно,

$$y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{x}.$$

Указание. Использовать формулу

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{y_{n-1} + \sqrt{x}}\right)^2 \quad (n \geqslant 1).$$

640. Для приближенного решения *уравнения Кеплера*

$$x - \varepsilon \sin x = m \qquad (0 < \varepsilon < 1) \qquad (1)$$

полагают

$x_0 = m,\ x_1 = m + \varepsilon \sin x_0, \ldots, x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}, \ldots$

(*метод последовательных приближений*).

Доказать, что существует $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и число ξ является единственным корнем уравнения (1).

641. Если $\omega_h[f]$ есть колебание функции $f(x)$ на сегменте $|x-\xi| \leqslant h$ $(h > 0)$, то число

$$\omega_0[f] = \lim_{h\to 0} \omega_h[f]$$

называется *колебанием функции* $f(x)$ *в точке* ξ.

Определить колебание функции $f(x)$ в точке $x = 0$, если $f(0) = 0$ и при $x \neq 0$ имеем:

а) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}$;

в) $f(x) = x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$; г) $f(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

д) $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$; е) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$;

ж) $f(x) = (1 + |x|)^{1/x}$.

642. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

Доказать, что, каково бы ни было число α, удовлетворяющее условию $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, можно выбрать последовательность $x_n \to 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$.

643. Определить

$$l = \varliminf_{x\to 0} f(x) \quad \text{и} \quad L = \varlimsup_{x\to 0} f(x),$$

если:

а) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

б) $f(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x}$; в) $f(x) = \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x}\right)^{\sec^2 (1/x)}$

644. Определить

$$l = \varliminf_{x\to \infty} f(x) \quad \text{и} \quad L = \varlimsup_{x\to \infty} f(x),$$

если:

а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = x^2 \cos^2 x$;

в) $f(x) = 2^{\sin x^2}$; г) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x}$ $(x \geqslant 0)$.

§ 6. *O*-символика

1°. Запись

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ при } x \in X$$

обозначает, что существует постоянная A такая, что

$$|\varphi(x)| \leqslant A\, |\psi(x)| \text{ для } x \in X. \qquad (1)$$

Аналогично пишут

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ при } x \to a, \qquad (2)$$

если неравенство (1) выполнено в некоторой окрестности U_a точки a $(x \neq a)$. В частности, если $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$ $(x \neq a)$, то соотношение (2) заведомо имеет место, если существует конечный $\lim\limits_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \neq 0$. В этом случае будем писать $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$.

Если

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0),$$

то $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой порядка* p относительно бесконечно малой x. Аналогично, если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0),$$

то $\psi(x)$ называется *бесконечно большой порядка* p относительно бесконечно большой x

2°. Запись

$$\varphi(x) = o(\psi(x)) \text{ при } x \to a$$

обозначает, что

$$\varphi(x) = \alpha(x)\psi(x) \quad (x \in U_a,\ x \neq a), \tag{3}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Если $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$, $x \neq a$, то равенство (3) эквивалентно утверждению

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

3°. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *эквивалентными* ($\varphi(x) \sim \psi(x)$) при $x \to a$, если

$$\varphi(x) - \psi(x) = o(\psi(x)) \text{ при } x \to a. \tag{4}$$

Если $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$, $x \neq a$, то из (4) имеем

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

При $x \to 0$ справедливы соотношения эквивалентности:

$$\sin x \sim x;\ \operatorname{tg} x \sim x;\ a^x - 1 \sim x \ln a\ (a > 0);$$

$$\ln(1+x) \sim x;\ \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

Вообще

$$\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x).$$

При нахождении предела отношения двух бесконечно малых (или бесконечно больших) функций при $x \to a$ данные функции можно заменять эквивалентными.

645. Считая центральный угол $AOB = x$ (рис. 4) бесконечно малой 1-го порядка, определить порядки малости следующих величин: а) хорды AB; б) стрелки CD; в) площади сектора AOB; г) площади треугольника ABC; д) площади трапеции ABB_1A_1; е) площади сегмента ABC.

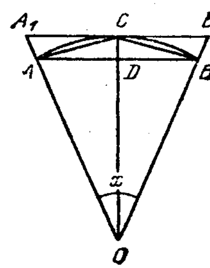

Рис. 4

646. Пусть $o(f(x))$ — произвольная функция, имеющая при $x \to a$ более низкий порядок роста, чем функция $f(x)$, и $O(f(x))$ — любая функция, имеющая при

$x \to a$ тот же порядок роста, что и функция $f(x)$, где $f(x) > 0$.

Показать, что

а) $o(o(f(x))) = o(f(x))$; б) $O(o(f(x))) = o(f(x))$;

в) $o(O(f(x))) = o(f(x))$; г) $O(O(f(x))) = O(f(x))$,

д) $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$.

647. Пусть $x \to 0$ и $n > 0$. Показать, что

а) $CO(x^n) = O(x^n)$ ($C \neq 0$ — постоянная);

б) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ $(n < m)$;

в) $O(x^n)\,O(x^m) = O(x^{n+m})$.

648. Пусть $x \to +\infty$ и $n > 0$. Показать, что

а) $CO(x^n) = O(x^n)$;

б) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ $(n > m)$;

в) $O(x^n)\,O(x^m) = O(x^{n+m})$.

649. Показать, что символ $\sim$ обладает свойствами: 1) рефлексивности: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$; 2) симметрии: если $\varphi(x) \sim \psi(x)$, то $\psi(x) \sim \varphi(x)$; 3) транзитивности: если $\varphi(x) \sim \psi(x)$ и $\psi(x) \sim \chi(x)$, то $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

650. Пусть $x \to 0$. Доказать следующие равенства:

а) $2x - x^2 = O(x)$; б) $x \sin\sqrt{x} = O(x^{3/2})$;

в) $x \sin\frac{1}{x} = O(|x|)$; г) $\ln x = o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)$ $(\varepsilon > 0)$;

д) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$;

е) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = O(1)$;

ж) $(1 + x)^n = 1 + nx + o(x)$.

651. Пусть $x \to +\infty$. Доказать следующие равенства:

а) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$;

б) $\frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$;

в) $x+x^2\sin x=O(x^2)$; г) $\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}=O\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

д) $\ln x=o(x^\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$; е) $x^p e^{-x}=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

ж) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$; з) $x^2+x\ln^{100}x\sim x^2$.

652. Доказать, что при достаточно большом $x>0$ имеют место неравенства:

а) $x^2+10x+100<0{,}001x^3$;

б) $\ln^{1000}x<\sqrt{x}$; в) $x^{10}e^x<e^{2x}$.

652.1. Доказать асимптотическую формулу

$$\sqrt{x^2+px+q}=x+\frac{p}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

при $x\to+\infty$.

653. Пусть $x\to 0$. Выделить главный член вида Cx^n (C — постоянная) и определить порядки малости относительно переменной x следующих функций:

а) $2x-3x^3+x^5$; б) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$;

в) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$; г) $\operatorname{tg}x-\sin x$.

654. Пусть $x\to 0$. Показать, что бесконечно малые

а) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$; б) $f(x)=e^{-1/x^2}$

не сравнимы с бесконечно малой x^n $(n>0)$, каково бы ни было n, т. е. ни при каком n не может иметь место равенство $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=k$, где k — конечная величина, отличная от нуля.

655. Пусть $x\to 1$. Выделить главный член вида $C(x-1)^n$ и определить порядки малости относительно бесконечно малой $x-1$ следующих функций:

а) x^3-3x+2; б) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$;

в) $\ln x$; г) e^x-e; д) x^x-1.

656. Пусть $x \to +\infty$. Выделить главный член вида Cx^n и определить порядки роста относительно бесконечно большой x следующих функций:

а) $x^2+100x+10000$; б) $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$;

в) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$; г) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

657. Пусть $x \to +\infty$. Выделить главный член вида $C\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ и определить порядки малости относительно бесконечно малой $\dfrac{1}{x}$ следующих функций:

а) $\dfrac{x+1}{x^4+1}$; б) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$;

в) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$; г) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

658. Пусть $x \to 1$. Выделить главный член вида $C\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^n$ и определить порядки роста относительно бесконечно большой $\dfrac{1}{x-1}$ следующих функций:

а) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$; б) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; в) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$;

г) $\dfrac{1}{\sin \pi x}$; д) $\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}$.

659. Пусть $x \to +\infty$ и $f_n(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказать, что 1) каждая из функций $f_n(x)$ растет быстрее, чем предшествующая функция $f_{n-1}(x)$; 2) функция e^x растет быстрее, чем каждая из функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

660. Пусть $x \to +\infty$ и

$$f_n(x)=\sqrt[n]{x} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Доказать, что 1) каждая из функций $f_n(x)$ растет медленнее, чем предшествующая функция $f_{n-1}(x)$; 2) функция $f(x) = \ln x$ растет медленнее, чем каждая из функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

661. Доказать, что какова бы ни была последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots\quad (x_0 < x < +\infty),$$

можно построить функцию $f(x)$, которая при $x \to +\infty$ растет быстрее, чем каждая из функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

§ 7. Непрерывность функции

1°. Непрерывность функции. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* при $x = x_0$ (или в *точке* x_0), если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

т. е. если функция $f(x)$ определена при $x = x_0$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ для всех значений $f(x)$, имеющих смысл, выполнено неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на данном множестве* $X = \{x\}$ (интервале, сегменте и т. п.), если эта функция непрерывна в каждой точке множества X.

Если при некотором значении $x = x_0$, принадлежащем области определения $X = \{x\}$ функции $f(x)$ или являющемся предельной точкой этого множества, равенство (1) не выполнено (т. е. или (а) не существует число $f(x_0)$, иными словами, функция не определена в точке $x = x_0$, или (б) не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, или (в) обе части формулы (1) имеют смысл, но равенство между ними не имеет места), то x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Различают: 1) *точки x_0 разрыва первого рода*, для которых существуют конечные односторонние пределы:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \text{ и } f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

и 2) *точки разрыва второго рода* — все остальные. Разность

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

называется *скачком функции* в точке x_0.

Если выполнено равенство

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0),$$

то точка разрыва x_0 называется *устранимой*. Если по меньшей мере один из пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ равен символу ∞, то x_0 называется точкой *бесконечного разрыва*.

Если выполнено равенство

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \quad (\text{или } f(x_0 + 0) = f(x_0)),$$

то говорят, что функция $f(x_0)$ *непрерывна слева* (*справа*) в точке x_0. Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно равенство трех чисел:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

2°. Непрерывность элементарных функций. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при значении $x = x_0$, то функции

$$\text{а) } f(x) \pm g(x); \quad \text{б) } f(x)g(x); \quad \text{в) } \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0)$$

также непрерывны при $x = x_0$.

В частности: а) целая рациональная функция

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

непрерывна при любом значении x; б) дробная рациональная функция

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}$$

непрерывна при всех значениях x, не обращающих знаменателя в нуль.

Вообще основные элементарные функции: x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, ... непрерывны во всех точках, где они определены.

Более общий результат следующий: если функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и функция $g(y)$ непрерывна при $y = f(x_0)$, то функция $g(f(x))$ непрерывна при $x = x_0$.

3°. Основные теоремы о непрерывных функциях. Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a, b]$, то: 1) $f(x)$ ограничена на этом сегменте; 2) достигает на нем своей нижней грани m и верхней грани M (*теорема Вейерштрасса*); 3) принимает на каждом интервале $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ все промежуточные значения между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ (*теорема Коши*). В частности, если $f(\alpha) f(\beta) < 0$, то найдется значение γ $(\alpha < \gamma < \beta)$ такое, что $f(\gamma) = 0$.

662. Дан график непрерывной функции $y = f(x)$. Для данной точки a и числа $\varepsilon > 0$ указать геометрически число $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

663. Требуется изготовить металлическую квадратную пластинку, сторона которой $x_0 = 10$ см. В каких пределах допустимо изменять сторону x этой пластинки, если площадь ее $y = x^2$ может отличаться от проектной $y_0 = 100$ см^2 не больше чем а) на ± 1 см^2; б) на $\pm 0{,}1$ см^2; в) на $\pm 0{,}01$ см^2; г) на $\pm \varepsilon$ см^2?

664. Ребро куба заключается между 2 м и 3 м. С какой абсолютной погрешностью Δ допустимо измерить ребро x этого куба, чтобы объем его y можно было вычислить с абсолютной погрешностью, не превышающей ε м^3, если: а) $\varepsilon = 0{,}1$ м^3; б) $\varepsilon = 0{,}01$ м^3; в) $\varepsilon = 0{,}001$ м^3?

665. В какой максимальной окрестности точки $x_0 = 100$ ордината графика функции $y = \sqrt{x}$ отличается от ординаты $y_0 = 10$ меньше чем на $\varepsilon = 10^{-n}$

$(n \geqslant 0)$? Определить размеры этой окрестности при $n = 0, 1, 2, 3$.

666. С помощью «ε—δ»-рассуждений доказать, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна при $x = 5$.

Заполнить следующую таблицу:

ε	1	0,1	0,01	0,001	...
δ					

667. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$ и $\varepsilon = 0{,}001$. Для значений $x_0 = 0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$; ... найти максимально большие положительные числа $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ такие, чтобы из неравенства $|x - x_0| < \delta$ вытекало бы неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Можно ли для данного $\varepsilon = 0{,}001$ выбрать такое $\delta > 0$, которое годилось бы для всех значений x_0 из интервала $(0,1)$, т. е. такое, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, каково бы ни было значение $x_0 \in (0,1)$?

668. Сформулировать на языке «ε—δ» в положительном смысле следующее утверждение: функция $f(x)$, определенная в точке x_0, не является непрерывной в этой точке.

669. Пусть для некоторых чисел $\varepsilon > 0$ можно найти соответствующие числа $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такие, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, если только $|x - x_0| < \delta$.

Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если: а) числа ε образуют конечное множество; б) числа ε образуют бесконечное множество двоичных дробей $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

670. Пусть дана функция $f(x) = x + 0{,}001\,[x]$.

Показать, что для каждого $\varepsilon > 0{,}001$ можно подобрать $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ такое, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, если только $|x' - x| < \delta$, а для $0 < \varepsilon \leqslant 0{,}001$ для всех значений x этого сделать нельзя.

В каких точках нарушается непрерывность этой функции?

671. Пусть для каждого достаточно малого числа $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ такое, что если

$|x-x_0| < \delta$, то выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$? Какое свойство функции $f(x)$ описывается данными неравенствами?

672. Пусть для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $|x-x_0| < \delta$. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при значении $x = x_0$? Какое свойство функции описывается этими неравенствами?

673. Пусть для каждого числа $\delta > 0$ существует число $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ такое, что если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $|x-x_0| < \delta$.

Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$? Какое свойство функции $f(x)$ описывается данными неравенствами?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ \pi - \operatorname{arctg} x, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

674. С помощью «ε—δ»-рассуждений доказать непрерывность следующих функций: а) $ax + b$; б) x^2; в) x^3; г) $\sqrt{x}$; д) $\sqrt[3]{x}$; е) $\sin x$; ж) $\cos x$; з) $\operatorname{arctg} x$.

Исследовать на непрерывность и изобразить графически следующие функции:

675. $f(x) = |x|$.

676. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{если } x \neq 2; \\ A, & \text{если } x = 2. \end{cases}$

677. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, если $x \neq -1$ и $f(-1)$ — произвольно.

678. а) $f_1(x) = \left|\dfrac{\sin x}{|x|}\right|$, если $x \neq 0$ и $f_1(0) = 1$;

б) $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$, если $x \neq 0$ и $f_2(0) = 1$.

679. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0)$ — произвольно.

680. $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

681. $f(x)=e^{-1/x^2}$, если $x\neq 0$ и $f(0)=0$.

682. $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/x-1}}$, если $x\neq 1$ и $f(1)$ — произвольно.

683. $f(x)=x\ln x^2$, если $x\neq 0$ и $f(0)=a$.

684. $f(x)=\operatorname{sgn} x$. 685. $f(x)=[x]$.

686. $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$.

Определить точки разрыва функций и исследовать характер этих точек, если:

687. $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$. 688. $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$.

689. $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$. 690. $y=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$.

691. $y=\dfrac{x}{\sin x}$. 692. $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos \pi x}{4-x^2}}$.

693. $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$. 694. $y=\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

695. $y=\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{x}}{\cos\dfrac{\pi}{x}}$. 696. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

697. $y=\sqrt{x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. 698. $y=e^{x+1/x}$.

699. $y=\dfrac{l}{\ln x}$. 700. $y=\dfrac{1}{1-e^{x/1-x}}$.

Исследовать на непрерывность и нарисовать эскизы графиков следующих функций:

701. $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$. 702. $y=x-[x]$.

703. $y=x[x]$. 704. $y=[x]\sin \pi x$.

705. $y=x^2-[x^2]$. 706. $x=\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

707. $y=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$. 708. $y=\operatorname{sgn}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

709. $y=\left[\frac{1}{x^2}\right]\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$. **710.** $y=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}$.

711. $y=\sec^2\frac{1}{x}$. **712.** $y=(-1)^{[x^2]}$.

713. $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)$.

714. $y=\frac{1}{x^2\sin^2 x}$. **715.** $y=\frac{1}{\sin(x^2)}$.

716. $y=\ln\frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$. **717.** $y=e^{-1/x}$.

718. $y=1-e^{-1/x^2}$. **719.** $y=\operatorname{th}\frac{2x}{1-x^2}$.

Исследовать на непрерывность и построить графики следующих функций:

720. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}\ (x\geqslant 0)$. **721.** $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

722. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$. **723.** $y=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$.

724. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

725. $y=\lim\limits_{n\to\infty}[x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg}x)]$.

726. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

727. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}$.

728. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+x)\operatorname{th}tx$.

729. Является ли непрерывной функция

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & \text{если } 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

730. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & \text{если } x<0,\\ a+x, & \text{если } x\geqslant 0.\end{cases}$$

При каком выборе числа a функция $f(x)$ будет непрерывной?

731. Исследовать следующие функции на непрерывность и выяснить характер точек разрыва, если:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} x \text{ при } |x| \leqslant 1, \\ 1 \text{ при } |x| > 1; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ |x-1| & \text{при } |x| > 1; \end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x & \text{для нецелого } x, \\ 0 & \text{для целого } x; \end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases} \sin \pi x & \text{для рационального } x, \\ 0 & \text{для иррационального } x. \end{cases}$

732. Функция $d = d(x)$ представляет собой кратчайшее расстояние точки x числовой оси Ox от множества точек ее, состоящего из отрезков $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $2 \leqslant x \leqslant 3$. Найти аналитическое выражение функции d, построить ее график и исследовать на непрерывность.

733. Фигура E состоит из равнобедренного треугольника с основанием *1* и высотой *1* и двух прямоугольников с основаниями *1* каждый и высотами, равными *2* и *3* (рис. 5). Функция $S = S(y)$ $(0 \leqslant y < +\infty)$ представляет собой площадь части фигуры E, заключенной между параллелями $Y = 0$ и $Y = y$; а функция $b = b(y)$ $(0 \leqslant y < +\infty)$ есть длина сечения фигуры E параллелью $Y = y$. Найти аналитические выражения функций S и b, построить их графики и исследовать на непрерывность.

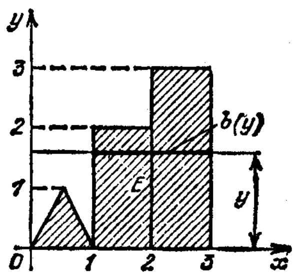

Рис. 5

734. Доказать, что функция Дирихле

$$\chi(x) = \lim_{m\to\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} \cos^n (\pi m! x) \right\}$$

разрывна при каждом значении x.

735. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = x\chi(x),$$

где $\chi(x)$ — функция Дирихле (см. предыдущую задачу). Построить эскиз графика этой функции.

736. Доказать, что функция Римана

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если } x = \dfrac{m}{n}, \text{ где } m \text{ и } n \text{ взаимно простые числа;} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

разрывна при каждом рациональном значении x и непрерывна при каждом иррациональном значении x. Построить эскиз графика этой функции.

737. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$, заданную следующим образом:

$$f(x) = \frac{nx}{n+1},$$

если x есть несократимая рациональная дробь $\frac{m}{n}$ $(n \geqslant 1)$, и

$$f(x) = |x|,$$

если x — иррациональное число. Построить эскиз графика этой функции.

738. Функция $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ определена для всех значений аргумента x, кроме $x = 0$. Какое значение следует приписать функции $f(x)$ в точке $x = 0$, чтобы эта функция была непрерывной при $x = 0$?

739. Показать, что при любом выборе числа $f(1)$ функция $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ будет разрывна при $x = 1$.

740. Функция $f(x)$ теряет смысл при $x = 0$. Определить число $f(0)$ так, чтобы $f(x)$ была непрерывна при $x = 0$, если:

а) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; б) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$;

в) $f(x) = \sin x \sin \dfrac{1}{x}$; г) $f(x) = (1+x)^{1/x}$;

д) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{-1/x^2}$; е) $f(x) = x^x \quad (x > 0)$;

ж) $f(x) = x\ln^2 x$.

741. Обязательно ли будет разрывна в данной точке x_0 сумма двух функций $f(x)+g(x)$, если: а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна при $x = x_0$; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны при $x = x_0$? Построить соответствующие примеры.

742. Обязательно ли произведение двух функций $f(x)g(x)$ терпит разрыв непрерывности в данной точке x_0, если: а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны при $x = x_0$? Построить соответствующие примеры.

743. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной функции есть также разрывная функция?

Построить пример всюду разрывной функции, квадрат которой есть функция непрерывная.

744. Исследовать на непрерывность функции $f[g(x)]$ и $g[f(x)]$, если:

а) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ и $g(x) = 1 + x^2$;

б) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ и $g(x) = x(1-x^2)$;

в) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ и $g(x) = 1 + x - [x]$.

745. Исследовать на непрерывность сложную функцию $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, если

$$f(u)=\begin{cases} u & \text{при } 0<u\leqslant 1; \\ 2-u & \text{при } 1<u<2 \end{cases}$$

и

$$\varphi(x)=\begin{cases} x & \text{при } x \text{ рациональном}; \\ 2-x & \text{при } x \text{ иррациональном} \end{cases} \qquad (0<x<1).$$

746. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная функция, то $F(x) = |f(x)|$ есть также непрерывная функция.

747. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна, то функция

$$f_c(x)=\begin{cases} -c, & \text{если } f(x)<-c; \\ f(x), & \text{если } |f(x)|\leqslant c; \\ c, & \text{если } f(x)>c, \end{cases}$$

где c — любое положительное число, также непрерывна.

748. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то функции

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\} \text{ и } M(x) = \sup_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\}$$

также непрерывны на $[a, b]$.

749. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, то функции

$$\varphi(x) = \min [f(x), g(x)] \text{ и } \psi(x) = \max [f(x), g(x)]$$

также непрерывны.

750. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a, b]$. Доказать, что функции

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi < x} \{(f(\xi)\} \text{ и } M(x) = \sup_{a \leqslant \xi < x} \{f(\xi)\}$$

непрерывны слева на сегменте $[a, b]$.

751. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $a \leqslant x < +\infty$ и существует конечный $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, то эта функция ограничена в данном промежутке.

752. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и ограничена в интервале $(x_0, +\infty)$. Доказать, что, каково бы ни было число T, найдется последовательность $x_n \to +\infty$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

753. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные периодические функции, определенные при $-\infty < x < +\infty$ и

$$\lim_{x \to +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0.$$

Доказать, что $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

754. Доказать, что все точки разрыва ограниченной монотонной функции являются точками разрыва 1-го рода.

755. Доказать, что если функция $f(x)$ обладает следующими свойствами: 1) определена и монотонна на сегменте $[a, b]$; 2) в качестве своих значений принимает все числа между $f(a)$ и $f(b)$, то эта функция непрерывна на $[a, b]$.

756. Показать, что функция $f(x) = \sin \dfrac{1}{x-a}$, если $x \neq a$ и $f(a) = 0$, принимает на любом сегменте $[a, b]$

все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, однако не является непрерывной на $[a, b]$.

757. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые значения из этого интервала, то между ними найдется число ξ такое, что

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)].$$

758. Пусть $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) и

$$l = \varliminf_{x \to a} f(x) \quad \text{и} \quad L = \varlimsup_{x \to a} f(x).$$

Доказать, что, каково бы ни было число λ, где $l \leqslant \lambda \leqslant L$, существует последовательность $x_n \to a$ ($n = 1, 2, \ldots$) такая, что

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lambda.$$

§ 8. Обратная функция. Функции, заданные параметрически

1°. Существование и непрерывность обратной функции. Если функция $y = f(x)$ обладает следующими свойствами: 1) определена и непрерывна на интервале (a, b); 2) монотонна в строгом смысле на этом интервале, то существует однозначная обратная функция $x = f^{-1}(y)$, определенная, непрерывная и соответственно монотонная в строгом смысле на интервале (A, B), где $A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$.

Под *однозначной непрерывной ветвью* многозначной обратной функции данной непрерывной функции $y = f(x)$ понимается любая однозначная непрерывная функция $x = g(y)$, определенная в максимальной области ее существования и удовлетворяющая в этой области уравнению $f[g(y)] = y$.

2°. Непрерывность функции, заданной параметрически. Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены и непрерывны в интервале (α, β) и функция $\varphi(t)$ строго монотонна на этом интервале, то система уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

определяет y как однозначную непрерывную функцию от x:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

на интервале (a, b), где $a = \lim\limits_{t \to \alpha+0} \varphi(t)$ и $b = \lim\limits_{t \to \beta-0} \varphi(t)$.

759. Найти обратную функцию дробно-линейной функции

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc\neq 0).$$

В каком случае обратная функция совпадает с данной?

760. Найти обратную функцию $x = x(y)$, если

$$y = x + [x].$$

761. Показать, что существует единственная непрерывная функция $y = y(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая *уравнению Кеплера*

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \leqslant \varepsilon < 1).$$

762. Показать, что уравнение $\operatorname{ctg} x = kx$ для каждого вещественного k $(-\infty < k < +\infty)$ имеет в интервале $0 < x < \pi$ единственный непрерывный корень $x = x(k)$.

763. Может ли немонотонная функция $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ иметь однозначную обратную функцию? Рассмотреть пример:

$$y=\begin{cases} x, & \text{если } x \text{ рационально;}\\ -x, & \text{если } x \text{ иррационально.}\end{cases}$$

764. В каком случае функция $y = f(x)$ и обратная функция $x = f^{-1}(y)$ представляют одну и ту же функцию?

765. Показать, что обратная функция разрывной функции $y = (1 + x^2) \operatorname{sgn} x$ есть функция непрерывная.

766. Доказать, что если функция $f(x)$ определена и строго монотонна на сегменте $[a, b]$ и

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \qquad (a \leqslant x_n \leqslant b),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Определить однозначные непрерывные ветви обратных функций для следующих функций:

767. $y = x^2$. **768.** $y = 2x - x^2$. **769.** $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

770. $y = \sin x$. **771.** $y = \cos x$. **772.** $y = \operatorname{tg} x$.

773. Показать, что множество значений непрерывной функции $y = 1 + \sin x$, соответствующих интервалу $(0 < x < 2\pi)$, есть сегмент.

774. Доказать равенство

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

775. Доказать равенство

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \qquad (x \neq 0).$$

776. Доказать теорему сложения арктангенсов:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ — функция, принимающая одно из трех значений: 0, 1, — 1.

Для каких значений y при данном значении x возможен разрыв функции ε? Построить на плоскости Oxy соответствующие области непрерывности функции ε и определить значение этой функции в полученных областях.

777. Доказать теорему сложения арксинусов:

$$\arcsin x + \arcsin y = \\ = (-1)^{\varepsilon} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) + \varepsilon\pi \\ (|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1),$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{если } xy \leqslant 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ \operatorname{sgn} x, & \text{если } xy > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

778. Доказать теорему сложения арккосинусов:

$$\arccos x + \arccos y = \\ = (-1)\ \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) + 2\pi\varepsilon \\ (|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1),$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{если } x + y \geqslant 0, \\ 1, & \text{если } x + y < 0. \end{cases}$$

779. Построить графики функций:

а) $y = \arcsin x - \arcsin\sqrt{1-x^2}$;

б) $y = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) - 2\arcsin x$.

780. Найти функцию $y = y(x)$, заданную уравнениями:

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \operatorname{arcctg} t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

В какой области определена эта функция?

781. Пусть $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ $(-\infty < t < +\infty)$. В каких областях изменения параметра t переменную y можно рассматривать как однозначную функцию от переменной x? Найти выражения y для различных областей.

782. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы система уравнений $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha < t < \beta)$ определяла бы y как однозначную функцию от x?

Рассмотреть пример: $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.

783. При каких условиях две системы уравнений

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t) \qquad (a < t < b)$$

и

$$x = \varphi(\chi(\tau)), \; y = \psi(\chi(\tau)) \; (\alpha < \tau < \beta)$$

определяют одну и ту же функцию $y = y(x)$?

784. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены и непрерывны на интервале (a, b) и $A = \inf\limits_{a<x<b} \varphi(x)$, $B = \sup\limits_{a<x<b} \varphi(x)$. В каком случае существует однозначная функция $f(x)$, определенная в интервале (A, B) и такая, что

$$\psi(x) = f(\varphi(x)) \text{ при } a < x < b?$$

§ 9. Равномерная непрерывность функции

1°. Определение равномерной непрерывности. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на данном множестве (интервале, сегменте и т. п.) $X = \{x\}$, если $f(x)$ определена на X и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых значений $x', x'' \in X$ из неравенства

$$|x' - x''| < \delta$$

следует неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

2°. Теорема Кантора. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная на ограниченном сегменте $[a, b]$, равномерно непрерывна на этом сегменте.

785. Цех завода вырабатывает квадратные пластинки, стороны которых x могут принимать значения в пределах от 1 до 10 см. С каким допуском δ можно обрабатывать стороны этих пластинок, чтобы независимо от их длины (в указанных границах) площадь их y отличалась от проектной меньше, чем на ε? Произвести численный расчет, если:

а) $\varepsilon = 1$ см^2; б) $\varepsilon = 0,01$ см^2; в) $\varepsilon = 0,0001$ см^2.

786. Цилиндрическая муфта, ширина которой ε и длина δ, надета на кривую $y = \sqrt[3]{x}$ и скользит по ней так, что ось муфты остается параллельной оси Ox. Чему должно быть равно δ, чтобы эта муфта свободно прошла участок кривой, определяемый неравенством $-10 \leqslant x \leqslant 10$, если: а) $\varepsilon = 1$; б) $\varepsilon = 0,1$; в) $\varepsilon = 0,01$; г) ε произвольно мало?

787. В положительном смысле сформулировать на языке «ε—δ» утверждение: функция $f(x)$ непрерывна на некотором множестве (интервале, сегменте и т. п.), но не является равномерно непрерывной на этом множестве.

788. Показать, что функция $f(x) = 1/x$ непрерывна в интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

789. Показать, что функция $f(x) = \sin \pi/x$ непрерывна и ограничена в интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

790. Показать, что функция $f(x) = \sin x^2$ непрерывна и ограничена в бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

791. Доказать, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна в области $a \leqslant x < +\infty$ и существует конечный

$$\lim_{x \to +\infty} f(x),$$

то $f(x)$ равномерно непрерывна в этой области.

792. Показать, что неограниченная функция

$$f(x) = x + \sin x$$

равномерно непрерывна на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

793. Является ли равномерно непрерывной функция $f(x) = x^2$ на интервале а) $(-l, l)$, где l — любое, сколько угодно большое положительное число; б) на интервале $(-\infty, +\infty)$?

Исследовать на равномерную непрерывность в заданных областях следующие функции:

794. $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ $\quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

795. $f(x) = \ln x$ $\quad (0 < x < 1)$.

796. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\quad (0 < x < \pi)$.

797. $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$ $\quad (0 < x < 1)$.

798. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$.

799. $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad (1 \leqslant x < +\infty)$.

800. $f(x) = x \sin x$ $\quad (0 \leqslant x < +\infty)$.

801. Показать, что функция $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ равномерно непрерывна на каждом интервале

$$J_1 = (-1 < x < 0) \text{ и } J_2 = (0 < x < 1)$$

по отдельности, но не является равномерно непрерывной на их сумме

$$J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}.$$

801.1. Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на каждом из сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$, то эта функция является равномерно непрерывной на суммарном сегменте $[a, b]$.

802. Для $\varepsilon > 0$ найти $\delta = \delta(\varepsilon)$ (какое-нибудь!), удовлетворяющее условиям равномерной непрерывности для функции $f(x)$ на данном промежутке, если:

а) $f(x) = 5x - 3$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$;

б) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ $\quad (-2 \leqslant x \leqslant 5)$.

в) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad (0{,}1 \leqslant x \leqslant 1)$;

г) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad (0 \leqslant x < +\infty)$;

д) $f(x) = 2\sin x - \cos x$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$;

е) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ и $f(0) = 0$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

803. На сколько равных между собой отрезков достаточно разбить сегмент $[1, 10]$, чтобы колебание функции $f(x) = x^2$ на каждом из этих отрезков было меньше 0,0001?

804. Доказать, что сумма и произведение ограниченного числа равномерно непрерывных на интервале (a, b) функций равномерно непрерывны на этом интервале.

805. Доказать, что если ограниченная монотонная функция $f(x)$ непрерывна на конечном или бесконечном интервале (a, b), то эта функция равномерно непрерывна на интервале (a, b).

806 (н). Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на конечном интервале (a, b), то существуют пределы

$$A = \lim_{x \to a+0} f(x) \text{ и } B = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Верна ли эта теорема для бесконечного интервала (a, b)?

806.1. Доказать что для того, чтобы функцию $f(x)$, определенную и непрерывную на конечном интервале (a, b), можно было продолжить непрерывным образом на сегмент $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была равномерно непрерывна на интервале (a, b).

807. *Модулем непрерывности* функции $f(x)$ на промежутке (a, b) называется функция

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|,$$

где x_1 и x_2 — любые точки из (a, b), связанные условием $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$.

Доказать, что для равномерной непрерывности функции $f(x)$ на промежутке (a, b) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0.$$

808. Получить оценку модуля непрерывности $\omega_f(\delta)$ (см. предыдущую задачу) вида

$$\omega_f(\delta) \leqslant C\delta^\alpha,$$

где C и α — константы, если:

а) $f(x) = x^3$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant a)$ и $(a < x < +\infty)$,

в) $f(x) = \sin x + \cos x$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

§ 10. Функциональные уравнения

809. Доказать, что единственная непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех вещественных значений x и y уравнению

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad (1)$$

есть линейная однородная $f(x) = ax$, где $a = f(1)$ — произвольная константа.

810. Доказать, что монотонная функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению (1), есть линейная однородная.

811. Доказать, что функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению (1) и ограниченная в сколь угодно малом интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, есть линейная однородная.

812. Доказать, что единственная не равная нулю тождественно непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех значений x и y уравнению

$$f(x+y) = f(x) f(y), \qquad (2)$$

есть показательная $f(x) = a^x$, где $a = f(1)$ — положительная постоянная.

813. Доказать, что не равная нулю тождественно функция $f(x)$, ограниченная в интервале $(0, \varepsilon)$ и удовлетворяющая уравнению (2), есть показательная.

814. Доказать, что единственная не равная нулю тождественно непрерывная функция $f(x)$ $(0 < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех положительных значений x и y уравнению

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

есть логарифмическая $f(x) = \log_a x$, где a — положительная константа $(a \neq 1)$.

815. Доказать, что единственная не равная нулю тождественно непрерывная функция $f(x)$ $(0 < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех положительных значений x и y уравнению

$$f(xy) = f(x) f(y), \qquad (3)$$

есть степенная $f(x) = x^a$, где a — постоянная.

816. Найти все непрерывные функции $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющие для всех вещественных значений x и y уравнению (3).

817. Показать, что разрывная функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ удовлетворяет уравнению (3).

818. Найти все непрерывные функции $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющие для всех вещественных значений x и y уравнению

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) f(y).$$

819. Найти все непрерывные ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющие для всех вещественных значений x и y системе уравнений:

$$f(x+y) = f(x) f(y) - g(x) g(y),$$
$$g(x+y) = f(x) g(y) + f(y) g(x),$$

и, сверх того, условиям нормировки:

$$f(0) = 1 \text{ и } g(0) = 0.$$

Указание. Рассмотреть функцию

$$F(x) = f^2(x) + g^2(x).$$

820. Пусть $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ и $\Delta^2 f(x) = \Delta\{\Delta f(x)\}$ суть конечные разности функции $f(x)$ соответственно первого и второго порядков.

Доказать, что если функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ непрерывная и $\Delta^2 f(x) \equiv 0$, то эта функция линейная, т. е. $f(x) = ax + b$, где a и b — постоянные.

ОТДЕЛ II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная явной функции

1°. Определение производной. Если x и $x_1 = x + \Delta x$ — значения независимой переменной, то разность

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

называется *приращением* функции $y = f(x)$ на сегменте $[x, x_1]$.

Выражение

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{1}$$

если оно имеет смысл, носит название *производной*, а сама функция $f(x)$ в этом случае называется *дифференцируемой*.

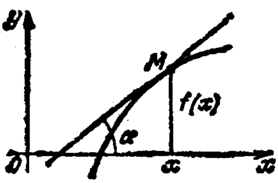

Рис. 6

Геометрически число $f'(x)$ представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке его x ($\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$) (рис. 6).

2°. Основные правила нахождения производной. Если c — постоянная величина и функции $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ имеют производные, то

1) $c' = 0$;
2) $(cu)' = cu'$;
3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;
4) $(uv)' = u'v + v'u$;
5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;
6) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (n — постоянное число);
7) если функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ имеют производные, то

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

3°. Основные формулы. Если x — независимая переменная, то

I. $(x^n)' = nx^{n-1}$ (n — постоянное число).

II. $(\sin x)' = \cos x$. III. $(\cos x)' = -\sin x$.

IV. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. V. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

VI. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VII. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VIII. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. IX. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

X. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$.

XI. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0)$;

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (a > 0,\ a \neq 1;\quad x > 0).$$

XII. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$. XIII. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

XIV. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. XV. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

4°. Односторонние производные. Выражения

$$f'_{-}(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

и

$$f'_{+}(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

называются соответственно *левой* или *правой производной* функции $f(x)$ в точке x.

Для существования производной $f'(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f'_{-}(x) = f'_{+}(x).$$

5°. Бесконечная производная. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

то говорят, что в точке x функция $f(x)$ имеет *бесконечную производную*. В этом случае касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x перпендикулярна к оси Ox.

821. Определить приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = \lg x$, если x изменяется от 1 до 1000.

822. Определить приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = 1/x^2$, если x изменяется от 0,01 до 0,001.

823. Переменная x получает приращение Δx. Определить приращение Δy, если:

а) $y = ax + b$; б) $y = ax^2 + bx + c$; в) $y = a^x$.

824. Доказать, что:

а) $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

б) $\Delta[f(x) g(x)] = g(x + \Delta x)\, \Delta f(x) + f(x)\, \Delta g(x)$.

825. Через точки $A(2, 4)$ и $A'(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$ кривой $y = x^2$ проведена секущая AA'. Найти угловой коэффициент этой секущей, если: а) $\Delta x = 1$; б) $\Delta x = 0,1$; в) $\Delta x = 0,01$; г) Δx произвольно мало.

Чему равен угловой коэффициент касательной к данной кривой в точке A?

826. Отрезок $1 \leqslant x \leqslant 1 + h$ оси Ox с помощью функции $y = x^3$ отображается на ось Oy. Определить средний коэффициент растяжения и произвести численный расчет, если: а) $h = 0,1$; б) $h = 0,01$; в) $h = 0,001$.

Чему равен коэффициент растяжения при этом отображении в точке $x = 1$?

827. Закон движения точки по оси Ox дается формулой

$$x = 10t + 5t^2,$$

где t — время в секундах и x — расстояние в метрах. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени $20 \leqslant t \leqslant 20 + \Delta t$ и произвести численный расчет, если: а) $\Delta t = 1$; б) $\Delta t = 0,1$; в) $\Delta t = 0,01$. Чему равна скорость движения в момент времени $t = 20$?

828. Исходя из определения производной, непосредственно найти производные следующих функций: а) x^2; б) x^3; в) $\frac{1}{x}$; г) $\sqrt{x}$; д) $\sqrt[3]{x}$; е) $\operatorname{tg} x$; ж) $\operatorname{ctg} x$; з) $\arcsin x$; и) $\arccos x$; к) $\operatorname{arctg} x$.

829. Найти $f'(1)$, $f'(2)$ и $f'(3)$, если

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3.$$

830. Найти $f'(2)$, если $f(x) = x^2 \sin(x-2)$.

831. Найти $f'(1)$, если

$$f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

832. Найти $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке a.

833. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема и n — натуральное число, то

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right] = f'(x). \qquad (1)$$

Обратно, если для функции $f(x)$ существует предел (1), то можно ли утверждать, что эта функция имеет производную? Рассмотреть пример функции Дирихле (см. отд. 1, задачу 734).

Пользуясь таблицей производных, найти производные следующих функций:

834. $y = 2 + x - x^2$.

Чему равно $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$?

835. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$.

При каких значениях x: а) $y'(x) = 0$; б) $y'(x) = -2$; в) $y'(x) = 10$?

836. $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$. **837.** $y = \frac{ax+b}{a+b}$.

838. $y = (x-a)(x-b)$.

839. $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

840. $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)$.

841. $y = (1+nx^m)(1+mx^n)$.

842. $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

842.1. $y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$.

843. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$.

844. Доказать формулу $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

Найти производные функций:

845. $y=\frac{2x}{1-x^2}$. **846.** $y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

847. $y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

848. $y=\frac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2}$.

849. $y=\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$. **850.** $y=\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

851. $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$.

852. $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

853. $y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$. **854.** $y=x\sqrt{1+x^2}$.

855. $y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$.

856. $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

857. $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

858. $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.

859. $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

860. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

861. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

862. $y=\cos 2x-2\sin x$.

863. $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

864. $y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$.

865. $y=\sin^n x\cos nx$. **866.** $y=\sin[\sin(\sin x)]$.

867. $y=\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$. **868.** $y=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

869. $y=\frac{1}{\cos^n x}$. **870.** $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$.

871. $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

872. $y=\operatorname{tg}x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$.

873. $y=4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}+\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}$.

874. $y=\sec^2\frac{x}{a}+\operatorname{cosec}^2\frac{x}{a}$.

875. $y=\sin[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$. **876.** $y=e^{-x^2}$.

877. $y=2^{\operatorname{tg}1/x}$. **878.** $y=e^x(x^2-2x+2)$.

879. $y=\left[\frac{1-x^2}{2}\sin x-\frac{(1-x)^2}{2}\cos x\right]e^{-x}$.

880. $y=e^x\left(1+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$.

881. $y=\frac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

882. $y=e^{ax}\,\frac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

883. $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$.

884. $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b$ $(a>0,\ b>0)$.

885. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$ $(a>0)$. **886.** $y=\lg^3 x^2$.

887. $y=\ln(\ln(\ln x))$. **888.** $y=\ln(\ln^2(\ln^3 x))$.

889. $y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2(1+x)}$.

890. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

891. $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$.

892. $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

893. $y=\frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$

$(0<k<1)$.

894. $y=\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$.

895. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

896. $y=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$.

897. $y=x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-$
$$-2\sqrt{1+x^2}\ \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x.$$

898. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

899. $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$ $(a>0,\ b>0)$.

900. $y=\frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2}+3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

901. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 902. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

903. $y=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln\sin x$.

904. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

905. $y=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$.

906. $y=\ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}$

$(0\leqslant|a|<|b|)$.

907. $y=\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)$.

908. $y=\frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{16x^4}$.

909. $y=\frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{1+x^2}\right)+3\ln\left(1+\sqrt[3]{1+x^2}\right)$.

910. $y=\ln\left[\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]$.

911. $y=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$.

912. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x$.

913. $y=\arcsin\frac{x}{2}$.

914. $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$. **915.** $y=\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a}$.

916. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{x}$. **917.** $y=\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

918. $y=x+\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x$.

919. $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

920. $y=\arccos\frac{1}{x}$. **921.** $y=\arcsin(\sin x)$.

922. $y=\arccos(\cos^2 x)$. **923.** $y=\arcsin(\sin x-\cos x)$.

924. $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$. **925.** $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$.

926. $y=\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$.

927. $y=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ $(a>b\geqslant 0)$

928. $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$. **929.** $y=\frac{1}{\arccos^2(x^2)}$.

930. $y=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3)$.

931. $y=\ln(1+\sin^2 x)-2\sin x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)$.

932. $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

933. $y=\ln\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}$ $(b\neq 0)$.

934. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ $(a>0)$.

935. $y=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

936. $$y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}.$$

937. $y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$.

938. $y = \dfrac{\arccos x}{x} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

939. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

940. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

941. $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

942. $y = \dfrac{x^6}{1+x^{12}} - \operatorname{arcctg} x^6$.

943. $y = \ln\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}$.

944. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

945. $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$ $(a>0)$.

946. $y = \dfrac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\dfrac{1+x}{\sqrt{2}}$.

947. $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

948. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$.

949. $y = \sqrt{1-x^2}\cdot\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} +$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$$

950. $y = x\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$.

951. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)$.

952. $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1 + x^2})$.

953. $y = \arcsin\left(\dfrac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x}\right)$.

954. $$y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$$

955. $$y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}.$$

956. $y = \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \dfrac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arcctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

957. $y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2)$.

958. $y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2)$.

959. $y = e^{m \arcsin x} [\cos(m \arcsin x) + \sin(m \arcsin x)]$.

960. $y = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

960.1. $y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}$.

960.2. $y = \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} \dfrac{1}{x^2}}}$.

960.3. $y = \ln^2\left(\sec 2\sqrt[3]{x}\right)$.

961. $y = x + x^x + x^{x^x}$ $(x>0)$.

962. $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$ $(a>0,\ x>0)$.

963. $y = \sqrt[x]{x}$ $(x>0)$.

964. $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$.

965. $y = (\ln x)^x : x^{\ln x}$.

965.1. $y = \left[\dfrac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\operatorname{arctg}^2 x}$.

966. $y=\log_x e$. **967.** $y=\ln(\operatorname{ch} x)+\dfrac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

968. $y=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}-\ln\left(\operatorname{cth}\dfrac{x}{2}\right)$.

969. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

970. $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

971. $y=\dfrac{b}{a}x+\dfrac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)$
$(0\leqslant|b|<a)$.

972. Найти производную функции

$$y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}),$$

вводя промежуточное переменное $u=\cos^2 x$.

Приемом, указанным в примере 972, найти производные функций:

973. $y=(\arccos x)^2\left[\ln^2(\arccos x)-\ln(\arccos x)+\dfrac{1}{2}\right]$.

974. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt[4]{1+x^4})+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

975. $y=\dfrac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\dfrac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$.

976. $y=\dfrac{a^x}{1+a^{2x}}-\dfrac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arcctg} a^{-x}$.

977. Найти производные и построить графики функций и их производных, если:

а) $y=|x|$; б) $y=x|x|$; в) $y=\ln|x|$.

978. Найти производные следующих функций:

а) $y=|(x-1)^2(x+1)^3|$; б) $y=|\sin^3 x|$;

в) $y=\arccos\dfrac{1}{|x|}$; г) $y=[x]\sin^2\pi x$.

Найти производные и построить графики функций и их производных:

979. $y=\begin{cases} 1-x & \text{при } -\infty<x<1; \\ (1-x)(2-x) & \text{при } 1\leqslant x\leqslant 2; \\ -(2-x) & \text{при } 2<x<+\infty. \end{cases}$

980. $y=\begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{при } a\leqslant x\leqslant b; \\ 0 & \text{вне отрезка } [a,\ b]. \end{cases}$

981. $y=\begin{cases} x & \text{при } x<0; \\ \ln(1+x) & \text{при } x\geqslant 0. \end{cases}$

982. $y=\begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{при } |x|\leqslant 1; \\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x+\dfrac{x-1}{2} & \text{при } |x|>1. \end{cases}$

983. $y=\begin{cases} x^2e^{-x^2} & \text{при } |x|\leqslant 1; \\ \dfrac{1}{e} & \text{при } |x|>1. \end{cases}$

984. Производная от логарифма данной функции $y=f(x)$ называется *логарифмической производной* этой функции:

$$\frac{y'}{y}=\frac{d}{dx}\ln|f(x)|\equiv\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Найти логарифмическую производную от функции y, если:

а) $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; б) $y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$;

в) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}$;

г) $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$.

985. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дифференцируемые функции от x. Найти производную от функции y, если:

а) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$; б) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$;

в) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ $(\varphi(x)\neq 0;\ \psi(x)>0)$;

г) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $(\varphi(x)>0;\ \psi(x)>0)$.

986. Найти y', если:

а) $y=f(x^2)$; б) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$;

в) $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$; г) $y=f\{f[f(x)]\}$,

где $f(u)$ — дифференцируемая функция.

986.1. Найти $f'(0)$, если

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-1000).$$

987. Доказать следующее правило дифференцирования определителя n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \ldots & f_{kn}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \ldots & f'_{kn}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

988. Найти $F'(x)$, если

$$F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}.$$

989. Найти $F'(x)$, если

$$F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

990. Дан график функции. Приближенно построить график ее производной.

991. Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0; \\ 0 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

имеет разрывную производную.

992. При каком условии функция

$$f(x)=x^n\sin\frac{1}{x}\quad (x\neq 0)\ \text{ и }\ f(0)=0$$

а) непрерывна при $x = 0$; б) дифференцируема при $x = 0$; в) имеет непрерывную производную при $x = 0$?

993. При каком условии функция

$$f(x)=|x|^n\sin\frac{1}{|x|^m}\ (x\neq 0) \text{ и } f(0)=0\ (m>0)$$

имеет: а) ограниченную производную в окрестности начала координат; б) неограниченную производную в этой окрестности?

994. Найти $f'(a)$, если

$$f(x)=(x-a)\,\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x=a$.

995. Показать, что функция

$$f(x)=|x-a|\,\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная функция и $\varphi(a)\neq 0$, не имеет производной в точке a.

Чему равны односторонние производные $f'_-(a)$ и $f'_+(a)$?

996. Построить пример непрерывной функции, не имеющей производной в данных точках: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

997. Показать, что функция

$$f(x)=x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|\quad (x\neq 0) \text{ и } f(0)=0$$

имеет точки недифференцируемости в любой окрестности точки $x=0$, но дифференцируема в этой точке.

Построить эскиз графика этой функции.

998. Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если } x \text{ рационально;} \\ 0, \text{ если } x \text{ иррационально,}\end{cases}$$

имеет производную лишь при $x=0$.

999. Исследовать на дифференцируемость следующие функции:

а) $y=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$; б) $y=|\cos x|$;

в) $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$; г) $y=\arcsin(\cos x)$;

д) $y=\begin{cases} \dfrac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{при } |x|\leqslant 1; \\ |x|-1 & \text{при } |x|>1.\end{cases}$

Для функции $f(x)$ определить левую производную $f'_-(x)$ и правую производную $f'_+(x)$, если:

1000. $f(x)=|x|$. **1001.** $f(x)=[x]\sin\pi x$.

1002. $f(x)=x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$.

1003. $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$.

1004. $f(x)=\frac{x}{1+e^{1/x}}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$.

1005. $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

1006. $f(x)=|\ln|x||$ $(x\neq 0)$.

1007. $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

1008. $f(x)=(x-2)\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}$ $(x\neq 2)$, $f(2)=0$.

1009. Показать, что функция $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$ непрерывна при $x=0$, но не имеет в этой точке ни левой, ни правой производной.

1009.1. Пусть x_0 — точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$. Выражения

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to -0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-0)}{h}$$

и

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to +0}\frac{e(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}$$

называются *обобщенными односторонними* (соответственно левой и правой) *производными* функции $f(x)$ в точке x_0.

Найти $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ в точках разрыва x_0 функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+x^3}{x}}$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$;

в) $f(x)=\frac{1}{1+e^{1/x}}$.

1010. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\leqslant x_0;\\ ax+b, & \text{если } x>x_0.\end{cases}$$

Как следует подобрать коэффициенты a и b, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной и дифференцируемой в точке $x = x_0$?

1011. Пусть

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x \leqslant x_0; \\ ax+b, & \text{если } x > x_0, \end{cases}$$

где функция $f(x)$ дифференцируема слева при $x = x_0$.

При каком выборе коэффициентов a и b функция $F(x)$ будет непрерывной и дифференцируемой в точке x_0?

1012. На сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ построить сопряжение двух полупрямых

$$y = k_1(x-a) \quad (-\infty < x < a),$$
$$y = k_2(x-b) \quad (b < x < +\infty)$$

с помощью кубической параболы

$$y = A(x-a)(x-b)(x-c),$$

(где параметры A и c подлежат определению).

1013. Часть кривой $y = \frac{m^2}{|x|}$ $(|x| > c)$ дополнить параболой

$$y = a + bx^2 \quad (|x| \leqslant c)$$

(где a и b — неизвестные параметры) так, чтобы получилась гладкая кривая.

1014. Можно ли утверждать, что сумма $F(x) = f(x) + g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0?

1015. Можно ли утверждать, что произведение

$$F(x) = f(x)\,g(x)$$

не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0?

Полагая $x_0 = 0$, рассмотреть примеры: а) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$; б) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|$.

1016. Что можно сказать о дифференцируемости функции

$$F(x) = f(g(x))$$

в данной точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке $x = g(x_0)$, а функция $g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$; б) функция $f(x)$ не имеет производной в точке $x = g(x_0)$, а функция $g(x)$ имеет производную в точке $x = x_0$; в) функция $f(x)$ не имеет производной в точке $x = g(x_0)$ и функция $g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$?

Полагая $x_0 = 0$, рассмотреть примеры:

а) $f(x) = x^2,\ g(x) = |x|$, б) $f(x) = |x|,\ g(x) = x^2$

в) $f(x) = 2x + |x|,\ g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$.

1017. В каких точках график функции $y = x + \sqrt[3]{\sin x}$ имеет вертикальные касательные? Построить этот график.

1018. Может ли функция $f(x)$ в точке ее разрыва иметь: а) конечную производную; б) бесконечную производную?

Рассмотреть пример: $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

1019. Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то обязательно ли

1) $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \infty$; 2) $\lim\limits_{x\to a} |f'(x)| = +\infty$?

Рассмотреть пример: $f(x) = \frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

1020. Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \infty$, то обязательно ли

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty?$$

Рассмотреть пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x \to 0$.

1021. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(x_0, +\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$?

Рассмотреть пример: $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$.

1022. Пусть ограниченная функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(x_0, +\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$; следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ конечный или бесконечный?

Рассмотреть пример: $f(x) = \cos(\ln x)$.

1023. Можно ли почленно дифференцировать неравенство между функциями?

1024. Вывести формулы для сумм:

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$$

и

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}.$$

Указание. Рассмотреть $(x + x^2 + \ldots + x^n)'$.

1025. Вывести формулы для сумм:

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$$

и

$$T_n = \cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx.$$

1025.1. Вывести формулу для суммы

$$S_n = \operatorname{ch} x + 2\operatorname{ch} 2x + \ldots + n \operatorname{ch} nx.$$

Указание. $S_n = (\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \ldots + \operatorname{sh} nx)'$.

1026. Пользуясь тождеством

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\dfrac{x}{2^n}},$$

вывести формулу для суммы

$$S_n = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}.$$

1027. Доказать, что производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная, а производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.

Дать геометрическую интерпретацию этого факта.

1028. Доказать, что производная дифференцируемой периодической функции есть функция снова периодическая с тем же периодом.

1029. С какой скоростью возрастает площадь круга в тот момент, когда радиус этого круга $R = 10$ см, если радиус круга растет равномерно со скоростью 2 см/с?

1030. С какой скоростью изменяются площадь и диагональ прямоугольника в тот момент, когда одна сторона его $x = 20$ м, а другая сторона $y = 15$ м, если первая сторона прямоугольника уменьшается со скоростью 1 м/с, а вторая возрастает со скоростью 2 м/с?

1031. Из одного и того же порта одновременно вышли пароход A с направлением на север и пароход B с направлением на восток. С какой скоростью возрастает расстояние между ними, если скорость парохода A равна 30 км/ч, а парохода B равна 40 км/ч?

1032. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 2x-2, \text{ если } 2<x<+\infty, \end{cases}$$

и $S(x)$ — площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью Ox и перпендикуляром к оси Ox, проведенным в точке x $(x \geqslant 0)$.

Составить аналитическое выражение функции $S(x)$, найти производную $S'(x)$ и построить график функции $y = S'(x)$.

1033. Функция $S(x)$ есть площадь, ограниченная дугой окружности $y=\sqrt{a^2-x^2}$, осью Ox и двумя перпендикулярами к оси Ox, проведенными в точках 0 и x $(|x| \leqslant a)$.

Составить аналитическое выражение функции $S(x)$, найти производную $S'(x)$ и построить график этой производной.

§ 2. Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически. Производная функции, заданной в неявном виде

1°. Производная обратной функции. Дифференцируемая функция $y = f(x)$ $(a < x < b)$ с производной $f'(x) \neq 0$ имеет однозначную непрерывную обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, причем обратная функция также дифференцируема и справедлива формула

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

2°. Производная функции, заданной параметрически. Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad (\alpha < t < \beta),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — дифференцируемые функции и $\varphi'(t) \neq 0$, определяет y, в некоторой области, как однозначную дифференцируемую функцию от x:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

причем производная этой функции может быть найдена по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

3°. Производная функции, заданной в неявном виде. Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$F(x, y) = 0,$$

то производная $y' = y'(x)$ этой неявной функции может быть найдена из уравнения

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0,$$

где $F(x, y)$ рассматривается как сложная функция переменной x.

(Более подробно о дифференцировании неявных функций см. ч. II, отд. VI, § 3.)

1034. Показать, что существует однозначная функция $y = y(x)$, определяемая уравнением $y^3 + 3y = x$, и найти ее производную y'_x.

1035. Показать, что существует однозначная функция $y = y(x)$, определяемая уравнением

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \leqslant \varepsilon < 1),$$

и найти производную y'_x.

1036. Определить области существования обратных функций $x = x(y)$ и найти их производные, если:

а) $y = x + \ln x$ $(x > 0)$; б) $y = x + e^x$;

в) $y = \operatorname{sh} x$; г) $y = \operatorname{th} x$.

1037. Выделить однозначные непрерывные ветви обратных функций $x = x(y)$, найти их производные и построить графики, если:

а) $y = 2x^2 - x^4$; б) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$; в) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

1038. Построить эскиз графика функции $y = y(x)$ и найти производную y'_x, если: $x = -1 + 2t - t^2$, $y = 2 - 3t + t^3$. Чему равна $y'_x(x)$ при $x = 0$ и при $x = -1$? В какой точке $M(x, y)$ производная $y'_x(x) = 0$?

Найти производные y'_x (параметры положительны) если:

1039. $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.
1040. $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.
1041. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.
1042. $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$.
1043. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.
1044. $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$.
1045. $x = e^{2t}\cos^2 t$, $y = e^{2t}\sin^2 t$.
1046. $x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

1047. Показать, что функция $y = y(x)$, определяемая системой уравнений

$$x = 2t + |t|, \quad y = 5t^2 + 4t|t|,$$

дифференцируема при $t = 0$, однако ее производная в этой точке не может быть найдена по обычной формуле.

Найти производные y'_x от следующих функций, заданных в неявном виде:

1048. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$.

Чему равно y' при $x = 2$ и $y = 4$ и при $x = 2$ и $y = 0$?

1049. $y^2 = 2px$ (парабола).

1050. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс).

1051. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (парабола).

1052. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроида).

1053. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ (логарифмическая спираль).

1054. Найти y'_x, если:

а) $r = a\varphi$ (спираль Архимеда);

б) $r = a(1 + \cos\varphi)$ (кардиоида);

в) $r = ae^{m\varphi}$ (логарифмическая спираль),

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$ и $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ — полярные координаты.

§ 3. Геометрический смысл производной

1°. **Уравнения касательной и нормали.** Уравнения *касательной* MT и *нормали* MN к графику дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке его $M(x, y)$ (рис. 7) соответственно имеют вид:

$$Y - y = y'(X - x)$$

и

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

где X, Y — текущие координаты касательной или нормали, а $y' = f'(x)$ — значение производной в точке касания.

2°. **Отрезки касательной и нормали.** Для отрезков касательной и нормали: PT — подкасательная, PN — поднормаль, MT — касательная, MN—нормаль (рис. 7);

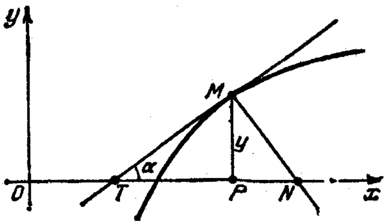

Рис. 7

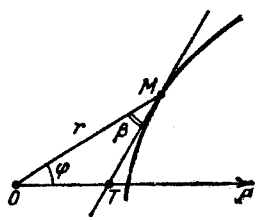

Рис. 8

учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha = y'$, получаем следующие значения:

$$PT = \left|\frac{y}{y'}\right|, \qquad PN = |yy'|,$$

$$MT = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1 + y'^2}, \qquad MN = |y|\sqrt{1 + y'^2}.$$

3°. **Угол между касательной и радиусом-вектором точки касания.** Если $r = f(\varphi)$ — уравнение кривой в полярной системе координат и β — угол, образованный касательной MT и радиусом-вектором OM точки касания M (рис. 8), то

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{r'}.$$

1055. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$y = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$$

в точках: а) $A(-1, 0)$; б) $B(2, 3)$; в) $C(3, 0)$.

1056. В каких точках кривой $y = 2 + x - x^2$ касательная к ней а) параллельна оси Ox; б) параллельна биссектрисе первого координатного угла?

1057. Доказать, что парабола

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (a \neq 0,\ x_1 < x_2)$$

пересекает ось Ox под углами α и β $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$, равными между собой.

1058. На кривой $y = 2\sin x$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ определить те участки ее, где «крутизна кривой» (т. е. $|y'|$) превышает 1.

1059. Функции $y = x$ и $y_1 = x + 0{,}01 \sin 1\,000\,\pi x$ отличаются друг от друга не больше чем на 0,01. Что можно сказать о максимальном значении разности производных этих функций?

Построить соответствующие графики.

1060. Под каким углом кривая $y = \ln x$ пересекает ось Ox?

1061. Под какими углами пересекаются кривые

$$y = x^2 \text{ и } x = y^2?$$

1062. Под какими углами пересекаются кривые

$$y = \sin x \text{ и } y = \cos x?$$

1063. При каком выборе параметра n кривая

$$y = \operatorname{arctg} nx \quad (n > 0)$$

пересекает ось Ox под углом, большим 89°?

1063.1. Показать, что кривая $y = |x|^\alpha$

а) при $0 < \alpha < 1$ касается оси Oy;

б) при $1 < \alpha < +\infty$ касается оси Ox.

1063.2. Показать, что для графика функции

$$y = \begin{cases} |x|^\alpha, & \text{если } \alpha \neq 0\ x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

предельное положение секущей, проходящей через точку $A(0, 1)$, есть ось Oy.

1064. Определить угол между левой и правой касательными к кривой: а) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}$ в точке $x = 0$; б) $y = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$ в точке $x = 1$.

1065. Показать, что касательная к логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$ (a и m — постоянные) образует постоянный угол с радиусом-вектором точки касания.

1066. Определив длину подкасательной к кривой $y = ax^n$, дать способ построения касательной к этой кривой.

1067. Доказать, что у параболы $y^2 = 2px$

а) подкасательная равна удвоенной абсциссе точки касания;

б) поднормаль постоянна.

Дать способ построения касательной к параболе.

1068. Доказать, что показательная кривая

$$y = a^x \quad (a > 0)$$

имеет постоянную подкасательную. Дать способ построения касательной к показательной кривой.

1069. Определить длину нормали к цепной линии

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$$

в любой ее точке $M(x_0, y_0)$.

1070. Доказать, что у астроиды

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad (a > 0)$$

длина отрезка касательной, заключенного между осями координат, есть величина постоянная.

1071. При каком соотношении между коэффициентами a, b и c парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается оси Ox?

1072. При каком условии кубическая парабола

$$y = x^3 + px + q$$

касается оси Ox?

1073. При каком значении параметра a парабола $y = ax^2$ касается кривой $y = \ln x$?

1074. Доказать, что кривые

$$y = f(x) \quad (f(x) > 0) \text{ и } y = f(x)\sin ax,$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция, касаются друг друга в общих точках.

1075. Показать, что семейства гипербол $x^2 - y^2 = a$ и $xy = b$ образуют *ортогональную сетку*, т. е. кривые этих семейств пересекаются под прямыми углами.

1076. Доказать, что семейства парабол

$$y^2 = 4a(a-x) \quad (a>0) \text{ и } y^2 = 4b(b+x) \quad (b>0)$$

образуют ортогональную сетку.

1077. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$x = 2t-t^2, \quad y = 3t-t^3$$

в точках: а) $t=0$; б) $t=1$.

1078. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}, \quad y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}$$

в точках: а) $t=0$, б) $t=1$, в) $t=\infty$.

1079. Написать уравнение касательной к циклоиде

$$x = a(t-\sin t), \quad y = a(1-\cos t)$$

в произвольной точке $t=t_0$. Дать способ построения касательной к циклоиде.

1080. Доказать, что трактриса

$$x = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right), \quad y = a\sin t \quad (a>0, \ 0<t<\pi)$$

имеет отрезок касательной постоянной длины.

Написать уравнения касательной и нормали в заданных точках к следующим кривым:

1081. $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1, \quad M(6;\ 6,4).$

1082. $xy+\ln y=1, \quad M(1;\ 1).$

§ 4. Дифференциал функции

1°. Дифференциал функции. Если приращение функции $y=f(x)$ от независимой переменной x может быть представлено в виде

$$\Delta y = A(x)\,dx + o(dx),$$

где $dx=\Delta x$, то линейная часть этого приращения называется *дифференциалом функции* y:

$$dy = A(x)\,dx.$$

Для существования дифференциала функции $y=f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $y'=f'(x)$, причем имеем:

$$dy = y'\,dx. \tag{1}$$

Формула (1) сохраняет свою силу и в том случае, если переменная x является функцией от новой независимой переменной (*свойство инвариантности первого дифференциала*).

2°. Оценка малых приращений функции. Для подсчета малых приращений дифференцируемой функции $f(x)$ можно пользоваться формулой

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x,$$

относительная погрешность которой сколь угодно мала при достаточно малом $|\Delta x|$, если $f'(x)\neq 0$.

В частности, если независимая переменная x определяется с предельной абсолютной погрешностью, равной Δ_x, то Δ_y и δ_y — предельные абсолютная и относительная погрешности функции $y=f(x)$ — приближенно выражаются следующими формулами:

$$\Delta_y=|y'|\,\Delta_x$$

и

$$\delta_y=\left|\frac{y'}{y}\right|\Delta_x$$

1083. Для функции

$$f(x)=x^3-2x+1$$

определить: 1) $\Delta f(1)$; 2) $df(1)$ и сравнить их, если: а) $\Delta x=1$; б) $\Delta x=0{,}1$; в) $\Delta x=0{,}01$.

1084. Уравнение движения дается формулой

$$x=5t^2,$$

где t измеряется в секундах и x — в метрах.

Для момента времени $t=2$ с определить Δx — приращение пути и dx — дифференциал пути и сравнить их, если:

а) $\Delta t=1$ с; б) $\Delta t=0{,}1$ с; в) $\Delta t=0{,}001$ с.

Найти дифференциал функции y, если:

1085. $y=\dfrac{1}{x}$. **1086.** $y=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$ $(a\neq 0)$.

1087. $y=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$. **1088.** $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$.

1089. $y=\arcsin\dfrac{x}{a}$ $(a\neq 0)$.

1090. Найти:

а) $d(xe^x)$; б) $d(\sin x - x\cos x)$; в) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$;

г) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$; д) $d\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)$; е) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

ж) $d\ln(1-x^2)$; з) $d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)$;

и) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$.

Пусть u, v, w — дифференцируемые функции от x. Найти дифференциал функции y, если:

1091. $y=uvw$. **1092.** $y=\frac{u}{v^2}$. **1093.** $y=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

1094. $y=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}$. **1095.** $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$.

1096. Найти: а) $\frac{d}{d(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)$;

б) $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$; в) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$; г) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$;

д) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

1097. В круговом секторе радиус $R=100$ см и центральный угол $\alpha=60^\circ$. Насколько изменится площадь этого сектора, если: а) радиус его R увеличить на 1 см; б) угол α уменьшить на $30'$?

Дать точное и приближенное решения.

1098. Период колебания маятника (в секундах) определяется по формуле $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина маятника в сантиметрах и $g=981$ см/с^2 — ускорение силы тяжести.

Насколько нужно изменить длину маятника $l=20$ см, чтобы период T увеличился на 0,05 с?

Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно следующие значения:

1099. $\sqrt[3]{1{,}02}$. **1100.** $\sin 29^\circ$. **1101.** $\cos 151^\circ$.

1102. $\operatorname{arctg} 1{,}05$. **1103.** $\lg 11$.

1104. Доказать приближенную формулу

$$\sqrt{a^2+x} \approx a+\frac{x}{2a} \qquad (a>0),$$

где $|x| \ll a$ (соотношение $A \ll B$ между положительными A и B означает, что A весьма мало по сравнению с B).

С помощью этой формулы приближенно вычислить:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{34}$; в) $\sqrt{120}$ и сравнить с табличными данными.

1104.1. Доказать формулу

$$\sqrt{a^2+x} = a+\frac{x}{2a}-r \qquad (a>0,\ x>0),$$

где

$$0<r<\frac{x^2}{8a^3}.$$

1105. Доказать приближенную формулу

$$\sqrt[n]{a^n+x} \approx a+\frac{x}{na^{n-1}} \qquad (a>0),$$

где $|x| \ll a$.

С помощью этой формулы приближенно вычислить:

а) $\sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[4]{80}$; в) $\sqrt[7]{100}$; г) $\sqrt[10]{1000}$.

1106. Сторона квадрата $x = 2{,}4$ м $\pm$ 0,05 м. С какими предельной абсолютной и относительной погрешностями можно вычислить площадь этого квадрата?

1107. С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус R шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до 1 %?

1108. Для определения ускорения силы тяжести с помощью колебания маятника пользуются формулой $g = 4\pi^2 l/T^2$, где l — длина маятника, T — полный период колебаний маятника. Как отразится на значении g относительная погрешность δ при измерении: а) длины l; б) периода T?

1109. Определить абсолютную погрешность десятичного логарифма числа x ($x > 0$), если относительная погрешность этого числа равна δ.

1110. Доказать, что углы по логарифмической таблице тангенсов определяются точнее, чем по логарифмической таблице синусов с тем же самым числом десятичных знаков.

§ 5. Производные и дифференциалы высших порядков

1°. Основные определения. *Производные высших порядков* от функции $y = f(x)$ определяются последовательно соотношениями (предполагается, что соответствующие операции имеют смысл!):

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}^{n} \qquad (n = 2,\ 3,\ \ldots).$$

Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на интервале (a, b), то кратко пишут: $d(x) \in C^{(n)}(a, b)$. В частности, если $f(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков на (a, b), то употребляется запись: $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$.

Дифференциалы высших порядков от функции $y = f(x)$ последовательно определяются формулами

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \qquad (n = 2,\ 3,\ \ldots),$$

где принято $d^1 y = dy = y'dx$.

Если x — независимая переменная, то полагают:

$$d^2x = d^3x = \ldots = 0.$$

В этом случае справедливы формулы

$$d^n y = y^{(n)}dx^n \quad \text{и} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2°. Основные формулы:

I. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \qquad (a > 0); \qquad (e^x)^{(n)} = e^x.$

II. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right).$

III. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right).$

IV. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}.$

V. $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$

3°. Формула Лейбница. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют производные n-го порядка (n-кратно дифференцируемы) то

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ и C_n^i — число сочетаний из n элементов по i.

Аналогично для дифференциала $d^n(uv)$ получаем:

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-i}u\, d^i v,$$

где положено $d^0 u = u$ и $d^0 v = v$.

Найти y'', если:

1111. $y = x\sqrt{1+x^2}$. **1112.** $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1113. $y = e^{-x^2}$. **1114.** $y = \operatorname{tg} x$.

1115. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$. **1116.** $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1117. $y = x\ln x$. **1118.** $y = \ln f(x)$.

1119. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

1120. Найти $y(0)$, $y'(0)$ и $y''(0)$, если

$$y = e^{\sin x}\cos(\sin x).$$

Пусть $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ — дважды дифференцируемые функции. Найти y'', если:

1121. $y = u^2$. **1122.** $y = \ln\dfrac{u}{v}$.

1123. $y = \sqrt{u^2+v^2}$. **1124.** $y = u^v$ $(u > 0)$.

Пусть $f(x)$ — трижды дифференцируемая функция. Найти y' и y''', если:

1125. $y = f(x^2)$. **1126.** $y = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1127. $y = f(e^x)$. **1128.** $y = f(\ln x)$.

1129. $y = f(\varphi(x))$, где $\varphi(x)$ — достаточное число раз дифференцируемая функция.

1130. Найти d^2y для функции $y = e^x$ в двух случаях: а) x — независимая переменная; б) x — промежуточный аргумент.

Считая x независимой переменной, найти d^2y, если:

1131. $y = \sqrt{1+x^2}$. **1132.** $y = \dfrac{\ln x}{x}$. **1133.** $y = x^x$.

Пусть u и v — дважды дифференцируемые функции от переменной x. Найти d^2y, если:

1134. $y = uv$. **1135.** $y = \dfrac{u}{v}$.

1136. $y = u^m v^n$ (m и n — постоянные).

1137. $y = a^u$ $(a > 0)$. **1138.** $y = \ln\sqrt{u^2 + v^2}$.

1139. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$.

Найти производные y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} от функции $y = y(x)$, заданной параметрически, если:

1140. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

1141. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

1142. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

1143. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$.

1144. $x = f'(t)$, $y = tf'(t) - f(t)$.

1145. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема достаточное число раз. Найти производные x', x'', x''', x^{IV} обратной функции $x = f^{-1}(y)$, предполагая, что эти производные существуют.

Найти y'_x, y''_{x^2} и y'''_{x^3} от функции $y = y(x)$, заданной неявно:

1146. $x^2 + y^2 = 25$. Чему равны y', y'' и y''' в точке $M(3, 4)$?

1147. $y^2 = 2px$. **1148.** $x^2 - xy + y^2 = 1$.

Найти y'_x и y''_x, если:

1149. $y^2 + 2\ln y = x^4$.

1150. $\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\operatorname{arctg} y/x}$ $(a > 0)$.

1151. Пусть функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема при $x \leqslant x_0$. Как следует подобрать коэффициенты a, b и c, чтобы функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \leqslant x_0; \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, & \text{если } x > x_0 \end{cases}$$

была дважды дифференцируема.

1152. Точка движется прямолинейно по закону

$$s = 10 + 20t - 5t^2.$$

Найти скорость и ускорение движения. Чему равны скорость и ускорение в момент времени $t = 2$?

1153. Точка $M(x, y)$ равномерно движется по окружности $x^2 + y^2 = a^2$, делая один оборот за T с. Найти скорость v и ускорение j проекции точки M на ось Ox, если при $t = 0$ точка занимала положение $M_0(a, 0)$.

1154. Тяжелая материальная точка $M(x, y)$ брошена в вертикальной плоскости Oxy под углом α к плоскости горизонта с начальной скоростью v_0. Составить (пренебрегая сопротивлением воздуха) уравнения движения и определить величину скорости v и ускорения j, а также траекторию движения. Чему равны наибольшая высота поднятия точки и дальность полета?

1155. Уравнения движения точки

$$x = 4\sin\omega t - 3\cos\omega t,\quad y = 3\sin\omega t + 4\cos\omega t$$

(ω — постоянно).

Определить траекторию движения и величину скорости и ускорения.

Найти производные указанного порядка.

1156. $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$; найти $y^{(6)}$ и $y^{(7)}$.

1157. $y = \dfrac{a}{x^m}$; найти y'''.

1158. $y = \sqrt{x}$; найти $y^{(10)}$.

1159. $y = \dfrac{x^2}{1-x}$; найти $y^{(8)}$.

1160. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; найти $y^{(100)}$.

1161. $y = x^2e^{2x}$; найти $y^{(20)}$.

1162. $y = \dfrac{e^x}{x}$, найти $y^{(10)}$.

1163. $y = x\ln x$; найти $y^{(5)}$.

1164. $y = \dfrac{\ln x}{x}$; найти $y^{(5)}$.

1165. $y = x^2\sin 2x$; найти $y^{(50)}$.

1166. $y = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$; найти y'''.

1167. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$; найти $y^{(10)}$.

1168. $y = x \operatorname{sh} x$; найти $y^{(100)}$

1169. $y = e^x \cos x$; найти y^{IV}.

1170. $y = \sin^2 x \ln x$; найти $y^{(6)}$.

В следующих примерах, считая x независимой переменной, найти дифференциалы указанного порядка:

1171. $y = x^5$; найти d^5y.

1172. $y = 1/\sqrt{x}$; найти d^3y.

1173. $y = x \cos 2x$; найти $d^{10}y$.

1174. $y = e^x \ln x$; найти d^4y.

1175. $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$; найти d^6y.

В следующих примерах найти дифференциалы указанного порядка, если u — функция от x, дифференцируемая достаточное число раз:

1176. $y = u^2$; найти $d^{10}y$.

1177. $y = e^u$; найти d^4y.

1178. $y = \ln u$; найти d^3y.

1179. Найти d^2y, d^3y и d^4y от функции $y = f(x)$, считая x функцией от некоторой независимой переменной.

1180. Выразить производные y'' и y''' от функции $y = f(x)$ через последовательные дифференциалы переменных x и y, не предполагая x независимой переменной.

1181. Показать, что функция $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению

$$y'' + y = 0.$$

1182. Показать, что функция $y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению

$$y'' - y = 0.$$

1183. Показать, что функция $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные и λ_1, λ_2 — постоянные, удовлетворяет уравнению

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2) y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0.$$

1184. Показать, что функция

$$y = x^n\,[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные и n — постоянная, удовлетворяет уравнению

$$x^2y'' + (1-2n)\,xy' + (1+n^2)\,y = 0.$$

1185. Показать, что функция

$$y = e^{x/\sqrt{2}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-x/\sqrt{2}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению

$$y^{\mathrm{IV}} + y = 0.$$

1186. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет производную n-го порядка, то

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

1187. Найти $P^{(n)}(x)$, если

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Найти $y^{(n)}$, если:

1188. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. 1189. $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$.

1190. $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

Указание. Разложить функцию на простейшие дроби.

1191. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$. 1192. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

1193. $y = \sin^2 x$. 1194. $y = \cos^2 x$. 1195. $y = \sin^3 x$.

1196. $y = \cos^3 x$. 1197. $y = \sin ax \sin bx$.

1198. $y = \cos ax \cos bx$. 1199. $y = \sin ax \cos bx$.

1200. $y = \sin^2 ax \cos bx$. 1201. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1202. $y = x\cos ax$. 1203. $y = x^2 \sin ax$.

1204. $y = (x^2+2x+2)\,e^{-x}$. 1205. $y = e^x/x$.

1206. $y = e^x\cos x$. 1207. $y = e^x \sin x$.

1208. $y = \ln \frac{a+bx}{a-bx}$.

1209. $y = e^{ax} P(x)$, где $P(x)$ — многочлен.

1210. $y = x \operatorname{sh} x$.

Найти $d^n y$, если:

1211. $y = x^n e^x$. **1212.** $y = \frac{\ln x}{x}$.

1213. Доказать равенства:

1) $[e^{ax} \sin(bx+c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2} \sin(bx+c+n\varphi)$

и

2) $[e^{ax} \cos(bx+c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2} \cos(bx+c+n\varphi)$,

где

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{и} \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

1214. Найти $y^{(n)}$, если:

а) $y = \operatorname{ch} ax \cos bx$; б) $y = \operatorname{ch} ax \sin bx$.

1215. Преобразовав функцию $f(x) = \sin^{2p} x$, где p — натуральное число, в тригонометрический многочлен $f(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k \cos 2kx$, найти $f^{(n)}(x)$.

Указание. Положить $\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$, где $t = \cos x + i \sin x$ и $\bar{t} = \cos x - i \sin x$, и воспользоваться формулой Муавра.

1216. Найти $f^{(n)}(x)$, если:

а) $f(x) = \sin^{2p+1} x$; б) $f(x) = \cos^{2p} x$;

в) $f(x) = \cos^{2p+1} x$,

где p — целое положительное число (см. предыдущую задачу).

Если

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x),$$

где i — мнимая единица и $f_1(x)$, $f_2(x)$ — действительные функции от действительной переменной x, то по определению принимаем:

$$f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x).$$

1217. Используя тождество

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right),$$

доказать, что

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}\sin[(n+1)\operatorname{arcctg}x].$$

Указание. Применить формулу Муавра.

1218. Найти n-ю производную от функции

$$f(x)=\operatorname{arctg}x.$$

Найти $f^{(n)}(0)$, если:

1219. а) $f(x)=\dfrac{1}{(1-2x)(1+x)}$; б) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$.

1220. а) $f(x)=x^2e^{ax}$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}x$;

в) $f(x)=\arcsin x$.

1221. а) $f(x)=\cos(m\arcsin x)$; б) $f(x)=\sin(m\arcsin x)$.

1222. а) $f(x)=(\operatorname{arctg}x)^2$; б) $f(x)=(\arcsin x)^2$.

1223. Найти $f^{(n)}(a)$, если

$$f(x)=(x-a)^n\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $(n-1)$-го порядка в окрестности точки a.

1224. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases}$$

(n — натуральное число) в точке $x=0$ имеет производные до n-го порядка включительно и не имеет производной $(n+1)$-го порядка.

1225. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases}$$

бесконечно дифференцируема при $x=0$.

Построить график этой функции.

1226. Доказать, что *многочлены Чебышева*

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)\,T''_m(x) - xT'_m(x) + m^2 T_m(x) = 0.$$

1227. Доказать, что *многочлены Лежандра*

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^2-1)^m]^{(m)} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)\,P''_m(x) - 2xP'_m(x) + m(m+1)\,P_m(x) = 0.$$

Указание. Продифференцировать $m+1$ раз равенство $(x^2-1)\,u' = 2mxu$, где $u = (x^2-1)^m$.

1228. *Многочлены Чебышева — Лагерра* определяются формулой

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Найти явное выражение для многочлена $L_m(x)$.

Доказать, что $L_m(x)$ удовлетворяет уравнению

$$xL''_m(x) + (1-x)\,L'_m(x) + mL(x) = 0.$$

Указание. Использовать равенство $xu' + (x-m)\,u = 0$, где $u = x^m e^{-x}$.

1229. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, где $f(u)$ и $\varphi(x)$ — n-кратно дифференцируемые функции.

Доказать, что

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\, f^{(k)}(u),$$

где коэффициенты $A_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ не зависят от функции $f(u)$.

1230. Доказать, что для n-й производной сложной функции $y = f(x^2)$ справедлива формула

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) + $$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + \ldots$$

1231. *Многочлены Чебышева—Эрмита* определяются формулой

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(m)} \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Найти явное выражение многочленов $H_m(x)$.

Доказать, что $H_m(x)$ удовлетворяет уравнению

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

Указание. Использовать равенство $u' + 2xu = 0$, где $u = e^{-x^2}$.

1232. Доказать равенство

$$\left(x^{n-1} e^{1/x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{1/x}.$$

Указание. Применить метод математической индукции.

1232.1. Доказать формулу

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n \ln x) = n!\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \quad (x > 0).$$

1232.2. Доказать формулу

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}[C_n(x)\sin x - S_n(x)\cos x],$$

где

$$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

и

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

1233. Пусть $\frac{d}{dx} = D$ обозначает операцию дифференцирования и

$$f(D) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) D^k$$

— символический дифференциальный многочлен, где $p_k(x)$ ($k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$) — некоторые непрерывные функции от x.

Доказать, что

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}f(D+\lambda)\,u(x),$$

где λ — постоянно.

1234. Доказать, что если в уравнении

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y_x^{(k)} = 0$$

положить $x = e^t$, где t — независимая переменная, то это уравнение примет вид:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1)\ldots(D-k+1)\,y = 0,$$

где $D = \frac{d}{dt}$.

§ 6. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши

1°. Теорема Ролля. Если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ внутри этого сегмента; 3) $f(a) = f(b)$, то существует по меньшей мере одно число c из интервала (a, b) такое, что

$$f'(c) = 0.$$

2°. Теорема Лагранжа. Если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ на интервале (a, b), то

$$f(b) - f(a) = (b-a)\,f'(c), \text{ где } a < c < b$$

(*формула конечных приращений*).

3°. Теорема Коши. Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ на интервале (a, b); 3) $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ при $a < x < b$; 4) $g(a) \neq g(b)$, то

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad \text{где } a < c < b.$$

1235. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

1236. Функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ обращается в нуль при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, но тем не менее $f'(x) \neq 0$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Объяснить кажущееся противоречие с теоремой Ролля.

1237. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в каждой точке конечного или бесконечного интервала (a, b) и

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to b-0} f(x).$$

Доказать, что $f'(c) = 0$, где c — некоторая точка интервала (a, b).

1238. Пусть: 1) функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную производную $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$ на сегменте $[x_0, x_n]$; 2) $f(x)$ имеет производную n-го порядка $f^{(n)}(x)$ в интервале (x_0, x_n) и 3) выполнены равенства

$$f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \ldots < x_n).$$

Доказать, что в интервале (x_0, x_n) существует по меньшей мере одна точка ξ такая, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

1239. Пусть: 1) функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную производную $(p+q)$-го порядка $f^{(p+q)}(x)$ на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$, имеет производную $(p+q+1)$-го порядка $f^{(p+q+1)}(x)$ в интервале (a, b); 3) выполнены равенства

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(p)}(a) = 0$$

и

$$f(b) = f'(b) = \ldots = f^{(q)}(b) = 0.$$

Доказать, что в таком случае $f^{(p+q+1)}(c) = 0$, где c — некоторая точка интервала (a, b).

1240. Доказать, что если все корни многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

с действительными коэффициентами a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ вещественны, то его последовательные производные $P'_n(x)$, $P''_n(x)$, ..., $P_n^{(n-1)}(x)$ также имеют лишь вещественные корни.

1241. Доказать, что у многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2-1)^n\}$$

все корни вещественные и заключены в интервале $(-1, 1)$.

1242. Доказать, что у многочлена Чебышева—Лагерра

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

все корни положительные.

1243. Доказать, что у многочлена Чебышева—Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

все корни вещественные.

1244. Найти на кривой $y = x^3$ точку, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1, -1)$ и $B(2, 8)$.

1245. Верна ли формула конечных приращений для функции $f(x) = 1/x$ на сегменте $[a, b]$, если $ab < 0$?

1246. Найти функцию $\theta = \theta(x, \Delta x)$ такую, что

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1),$$

если:

а) $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$; б) $f(x) = x^3$;

в) $f(x) = 1/x$; г) $f(x) = e^x$.

1246.1. Пусть $f(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$ и для любых x и h справедливо тождество:

$$f(x + h) - f(x) \equiv hf'(x).$$

Доказать, что $f(x) = ax + b$, где a и b — постоянные.

1246.2. Пусть $f(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$ и для любых x и h справедливо тождество

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Доказать, что $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — постоянные.

1247. Доказать, что если $x \geqslant 0$, то

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x + \theta(x)}},$$

где

$$\frac{1}{4} \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{1}{2},$$

причем $\lim\limits_{x \to +0} \theta(x) = 1/4$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \theta(x) = 1/2$.

1248. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x} & \text{при } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

Определить промежуточное значение c формулы конечных приращений для функции $f(x)$ на сегменте $[0, 2]$.

1249. Пусть $f(x)-f(0)=xf'(\xi(x))$, где $0<\xi(x)<x$. Доказать, что если

$$f(x)=x\sin(\ln x) \text{ при } x>0 \text{ и } f(0)=0,$$

то функция $\xi=\xi(x)$ разрывна в любом сколь угодно малом интервале $(0, \xi)$, где $\varepsilon>0$.

1250. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b). Можно ли для всякой точки ξ из (a, b) указать две другие точки x_1 и x_2 из этого интервала такие, что

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi) \quad (x_1<\xi<x_2)?$$

Рассмотреть пример: $f(x)=x^3$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$, где $\xi=0$.

1251. Доказать неравенства:

а) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$;

б) $py^{p-1}(x-y)\leqslant x^p-y^p\leqslant px^{p-1}(x-y)$,

если $0<y<x$ и $p>1$;

в) $|\operatorname{arctg} a-\operatorname{arctg} b|\leqslant|a-b|$;

г) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$, если $0<b<a$.

1252. Объяснить, почему не верна формула Коши для функций

$$f(x)=x^2 \text{ и } g(x)=x^3$$

на сегменте $[-1, 1]$.

1253. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[x_1, x_2]$, причем $x_1x_2>0$. Доказать, что

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

где $x_1<\xi<x_2$.

1254. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема, но не ограничена на конечном интервале

(a, b), то ее производная $f'(x)$ также не ограничена на интервале (a, b). Обратная теорема не верна (построить пример).

1255. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет в конечном или бесконечном интервале (a, b) ограниченную производную $f'(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b).

1256. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, т. е. $f(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$.

1257. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и

$$f(x) = o(x) \text{ при } x \to +\infty,$$

то

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0.$$

В частности, если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = k$, то $k = 0$.

1258. а) Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[x_0, X]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в интервале (x_0, X); 3) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0)$, то существует соответственно конечная или бесконечная односторонняя производная $f'_+(x_0)$ и $f'_+(x_0) = f'(x_0+0)$.

б) Показать, что для функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1) \quad \text{и} \quad f(1) = 0$$

существует конечный предел $\lim\limits_{x\to1} f'(x)$, однако функция $f(x)$ не имеет односторонних производных $f'_-(1)$ и $f'_+(1)$. Дать геометрическую иллюстрацию этого факта.

Однако в этой точке существуют обобщенные односторонние производные (см. **1009.1**).

1259. Доказать, что если $f'(x) = 0$ при $a < x < b$, то

$$f(x) = \text{const при } a < x < b.$$

1260. Доказать, что единственная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, имеющая постоянную производную

$$f'(x) = k,$$

есть линейная:

$$f(x) = kx + b.$$

1261. Что можно сказать о функции $f(x)$, если $f^{(n)}(x) = 0$?

1261.1. Пусть $f(x) \in C^{(\infty)}(-\infty, +\infty)$ и для каждого x существует натуральное число n_x $(n_x \leqslant n)$ такое, что

$$f^{(n_x)}(x) = 0.$$

Доказать, что функция $f(x)$ есть полином.

1262. Доказать, что единственная функция $y = y(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая уравнению

$$y' = \lambda y \quad (\lambda = \text{const}),$$

есть показательная;

$$y = Ce^{\lambda x},$$

где C — произвольная постоянная.

Указание. Рассмотреть $(ye^{-\lambda x})'$.

1263. Проверить, что функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \quad \text{и} \quad g(x) = \operatorname{arctg} x$$

имеют одинаковые производные в областях:

1) $x < 1$ и 2) $x > 1$.

Вывести зависимость между этими функциями.

1264. Доказать тождества:

а) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x$ при $|x| \geqslant 1$;

б) $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$ при $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

1265. Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) имеет конечную производную $f'(x)$ внутри него; 3) не является линейной, то в интервале (a, b) найдется по меньшей мере одна точка c такая, что

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

Дать геометрическую иллюстрацию этого факта.

1266. Длказать, что если: 1) функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ на сегменте $[a, b]$ и 2) $f'(a) = f'(b) = 0$, то в интервале (a, b) существует по меньшей мере одна точка c такая, что

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

1267. Автомобиль, начав двигаться из некоторого начального пункта, закончил свой путь в t с, пройдя при этом расстояние s м. Доказать, что в некоторый момент времени абсолютная величина ускорения движения автомобиля была не меньше

$$\frac{4s}{t^2}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

§ 7. Возрастание и убывание функции. Неравенства

1°. Возрастание и убывание функции. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на сегменте $[a, b]$, если

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ при } a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$$

(или соответственно $f(x_2) < f(x_1)$ при $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$).

Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает (убывает) на сегменте $[a, b]$, то

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ при } a \leqslant x \leqslant b \text{ (или } f'(x) \leqslant 0 \text{ при } a \leqslant x \leqslant b).$$

2°. Достаточный признак возрастания (убывания функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и внутри него имеет положительную (отрицательную) производную $f'(x)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на $[a, b]$.

Определить промежутки монотонности в строгом смысле (возрастания или убывания) следующих функций:

1268. $y = 2 + x - x^2$. **1269.** $y = 3x - x^3$.

1270. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$. **1271.** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x \geqslant 0)$.

1272. $y = x + \sin x$. 1273. $y = x + |\sin 2x|$.

1274. $y = \cos\frac{\pi}{x}$. 1275. $y = \frac{x^2}{2^x}$.

1276. $y = x^n e^{-x}$ $(n > 0,\ x \geqslant 0)$. 1277. $y = x^2 - \ln x^2$.

1278. $f(x) = x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin\ln x\right)$, если $x > 0$ и $f(0) = 0$.

1279. Доказать, что при увеличении числа сторон n периметр p_n правильного n-угольника, вписанного в окружность, возрастает, а периметр P_n правильного n-угольника, описанного около этой окружности, убывает. Пользуясь этим, доказать, что p_n и P_n имеют общий предел при $n \to \infty$.

1280. Доказать, что функция $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ возрастает на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(0, +\infty)$.

1281. Доказать, что целая рациональная функция $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ $(n \geqslant 1,\ a_n \neq 0)$ является монотонной (в строгом смысле!) в интервалах $(-\infty, -x_0)$ и $(x_0, +\infty)$, где x_0 — достаточно большое положительное число.

1282. Доказать, что рациональная функция

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} \qquad (a_n b_m \neq 0),$$

отличная от тождественной постоянной, монотонна (в строгом смысле!) в интервалах $(-\infty, -x_0)$ и $(x_0, +\infty)$, где x_0 — достаточно большое положительное число.

1283. Производная монотонной функции обязательно ли является монотонной? Рассмотреть пример: $f(x) = x + \sin x$.

1284. Доказать, что если $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая дифференцируемая функция и

$$|f'(x)| \leqslant \varphi'(x) \text{ при } x \geqslant x_0,$$

то

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0) \text{ при } x \geqslant x_0.$$

Дать геометрическую интерпретацию этого факта.

1285. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $a \leqslant x < +\infty$ и сверх того $f'(x) > k > 0$ при $x > a$, где k — постоянная.

Доказать, что если $f(a) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет один и только один действительный корень в интервале $\left(a,\ a - \frac{f(a)}{k}\right)$.

1286. Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке* x_0, если в некоторой окрестности $|x - x_0| < \delta$ знак приращения функции $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком приращения аргумента $\Delta x_0 = x - x_0$.

Доказать, что если функция $f(x)$ $(a < x < b)$ возрастает в каждой точке некоторого конечного или бесконечного интервала (a, b), то она является возрастающей на этом интервале.

1287. Показать, что функция

$$f(x) = x + x^2 \sin\frac{2}{x}, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 0,$$

возрастает в точке $x = 0$, но не является возрастающей ни в каком интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, окружающем эту точку, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало.

Построить эскиз графика функции.

1288. Доказать теорему: если 1) функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ n-кратно дифференцируемы; 2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$; 3) $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ при $x > x_0$, то имеет место неравенство

$$\varphi(x) > \psi(x) \text{ при } x > x_0.$$

1289. Доказать следующие неравенства:

а) $e^x > 1 + x$ при $x \neq 0$;

б) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$ при $x > 0$;

в) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ при $x > 0$;

г) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

д) $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$ при $x > 0$, $y > 0$ и $0 < \alpha < \beta$.

Дать геометрическую иллюстрацию неравенств а) — г).

1290. Доказать неравенство

$$\frac{2}{\pi} x < \sin x < x \quad \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

1291. Доказать, что при $x > 0$ имеет место неравенство

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

1292. У арифметической и геометрической прогрессий число членов и крайние члены соответственно одинаковы и все члены прогрессий положительны. Доказать, что у арифметической прогрессии сумма членов больше, чем у геометрической.

1293. Исходя из неравенства

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2 \geqslant 0,$$

где x, a_k, b_k $(k = 1, \ldots, n)$ вещественны, доказать *неравенство Коши*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

1294. Доказать, что среднее арифметическое положительных чисел не больше среднего квадратичного этих же чисел, т. е.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

1295. Доказать, что среднее геометрическое положительных чисел не больше среднего арифметического этих же чисел, т. е.

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Указание. Применить метод математической индукции.

1296. *Средней порядка* s для двух положительных чисел a и b называется функция, определяемая равенством

$$\Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{1/s}, \quad \text{если } s \neq 0,$$

и

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s \to 0} \Delta_s(a, b).$$

В частности, получаем: при $s = -1$ *среднее гармоническое*; при $s = 0$ *среднее геометрическое* (доказать!);

при $s=1$ *среднее арифметическое*; при $s=2$ *среднее квадратичное*.

Доказать, что:

1) $\min(a, b) \leqslant \Delta_s(a, b) \leqslant \max(a, b)$;

2) функция $\Delta_s(a, b)$ при $a \neq b$ есть возрастающая функция переменной s;

3) $\lim\limits_{s\to-\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b)$;

$\lim\limits_{s\to+\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b)$.

Указание. Рассмотреть $\dfrac{d}{ds}[\ln \Delta_s(a, b)]$.

1297(н). Доказать неравенства:

а) $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$ при $\alpha \geqslant 2$, $x > 1$;

б) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$, если $n > 1$, $x > a > 0$;

в) $1 + 2\ln x \leqslant x^2$ при $x > 0$.

§ 8. Направление вогнутости. Точки перегиба

1°. Достаточные условия вогнутости. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым вверх* или *выпуклым вниз* (*вогнутым вниз* или *выпуклым вверх*) на сегменте $[a, b]$, если отрезок кривой

$$y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

расположен выше (соответственно ниже) касательной, проведенной в любой точке этого отрезка. Достаточным условием вогнутости графика вверх (вниз), в предположении существования второй производной $f''(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, является выполнение неравенства

$$f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0) \text{ при } a < x < b.$$

2°. Достаточное условие точки перегиба. Точки, в которых меняется направление вогнутости графика функции, называются *точками перегиба*. Точка x_0, для которой либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует, причем $f'(x_0)$ имеет смысл, есть точка перегиба, если $f''(x)$ меняет свой знак при переходе через значение x_0.

1298. Исследовать направление вогнутости кривой

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ и $C(0, 0)$.

Найти промежутки вогнутости определенного знака и точки перегиба графиков следующих функций:

1299. $y = 3x^2 - x^3$. 1300. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$ $(a > 0)$.

1301. $y = x + x^{5/3}$. 1302. $y = \sqrt{1 + x^2}$.

1303. $y = x + \sin x$. 1304. $y = e^{-x^2}$.

1305. $y = \ln(1 + x^2)$. 1306. $y = x \sin(\ln x)$ $(x > 0)$.

1307. $y = x^x$ $(x > 0)$.

1308. Показать, что кривая

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой. Построить график этой функции.

1309. При каком выборе параметра h «кривая вероятности»

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \quad (h > 0)$$

имеет точки перегиба $x = \pm \sigma$?

1310. Исследовать направление вогнутости циклоиды

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ (a > 0).$$

1311. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в промежутке $a \leqslant x < +\infty$, причем: 1) $f(a) = A > 0$; 2) $f'(a) < 0$; 3) $f''(x) \leqslant 0$ при $x > a$.

Доказать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет один и только один действительный корень в интервале $(a, +\infty)$.

1312. Функция $f(x)$ называется *выпуклой снизу* (*сверху*) на интервале (a, b), если для любых точек x_1 и x_2 из этого интервала и произвольных чисел λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) имеет место неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(или соответственно противоположное неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)).$$

Доказать, что: 1) функция $f(x)$ выпукла снизу на (a, b), если $f''(x) > 0$, при $a < x < b$; 2) $f(x)$ выпукла сверху на (a, b), если, $f''(x) < 0$, при $a < x < b$.

1313. Показать, что функции

$$x^n \quad (n > 1), \ e^x, \ x \ln x$$

выпуклы снизу на интервале $(0, +\infty)$, а функции

$$x^n \quad (0 < n < 1), \ \ln x$$

выпуклы сверху на интервале $(0, +\infty)$.

1314. Доказать неравенства и выяснить их геометрический смысл:

а) $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x>0, \ y>0, \ x \neq y, \ n>1)$;

б) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y)$;

в) $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}$, если $x>0$ и $y>0$.

1314.1. Пусть $f''(x) \geqslant 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$.

Доказать, что

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$$

при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$.

1315. Доказать, что ограниченная выпуклая функция всюду непрерывна и имеет односторонние левую и правую производные.

1316. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в интервале (a, b) и $f''(\xi) \neq 0$, где $a < \xi < b$.

Доказать, что в интервале (a, b) можно найти два значения x_1 и x_2 такие, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

1317. Доказать, что если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

то в интервале $(x_0, +\infty)$ имеется по меньшей мере одна точка ξ такая, что $f''(\xi) = 0$.

§ 9. Раскрытие неопределенностей

1-й случай правила Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности U_ε *) точки a, где a — число или символ ∞, и при $x \to a$ обе стремятся к нулю:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0;$$

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в окрестности U_ε точки a, за исключением, быть может, самой точки a, причем одновременно не обращаются в нуль при $x \neq a$; 3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то имеем:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2-й случай правила Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$ обе стремятся к бесконечности:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

где a — число или символ ∞;

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют для всех x, принадлежащих некоторой окрестности U_ε точки a и отличных от a, причем

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0 \text{ при } x \in U_\varepsilon \text{ и } x \neq a;$$

3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогичные правила справедливы для односторонних пределов.

Раскрытие неопределенностей видов $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0 и т. п. путем алгебраических преобразований и логарифмирова-

---

*) Под окрестностью U_ε точки a понимается совокупность чисел x, удовлетворяющих неравенству: 1) $0 < |x-a| < \varepsilon$, если a — число, и 2) $|x| > 1/\varepsilon$, если a — символ ∞.

ния приводится к раскрытию неопределенностей двух основных типов:

$$\frac{0}{0} \text{ и } \frac{\infty}{\infty}.$$

Определить значения следующих выражений:

1318. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$. 1319. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$.

1320. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$. 1321. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\operatorname{tg} 4x - 12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x - 12\sin x}$.

1322. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$. 1323. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$.

1324. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$. 1325. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$.

1326. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$. 1327. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$.

1328. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$.

1329. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$ $(a>0)$. 1330. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}\right)$.

1331. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$. 1332. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

1333. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$. 1334. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

1335. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arsh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{Arsh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x - \sin x}$, где $\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

1336. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}$ $(\varepsilon > 0)$.

1337. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}}$ $(a > 0,\ n > 0)$. 1338. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}$.

1339. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 e^{-0{,}01x}$. 1340. $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \cdot \ln(1 - x)$.

1341. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\varepsilon} \ln x$ $(\varepsilon > 0)$. 1342. $\lim\limits_{x\to +0} x^x$.

1343. $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^x - 1}$. 1344. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^{x^x} - 1\right)$.

1345. $\lim\limits_{x\to+0} x^{k/(1+\ln x)}$. **1346.** $\lim\limits_{x\to1} x^{1/(1-x)}$.

1347. $\lim\limits_{x\to1} (2-x)^{\operatorname{tg}\pi x/2}$. **1348.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}2x}$.

1349. $\lim\limits_{x\to0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$. **1350.** $\lim\limits_{x\to+0} \left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$.

1351. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$. **1352.** $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$.

1353. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{1/x^2}$. **1354.** $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

1355. $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. **1356.** $\lim\limits_{x\to0} \left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

1357. $\lim\limits_{x\to0} \left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

1358. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$. **1359.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$.

1360. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$ $(a>0)$.

1361. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$. **1362.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (\operatorname{th} x)^x$.

1363. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$. **1363.1.** $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

1363.2. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$ **1363.3.** $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x^2}$.

1363.4. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\operatorname{Arsh} x}{x}\right)^{1/x^2}$, где $\operatorname{Arsh} x=$ $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

1364. $\lim\limits_{x\to0} \left[\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]^{1/x}$. **1365.** $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$.

1366. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/x^2}$. **1367.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln\operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}$.

1368. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth} x}$. **1368.1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

1369. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$.

1370. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+(1/x)}-x^{1+1/(x+a)}\right]$.

1371. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y}{x}$, если кривая $y=f(x)$ входит при $x\to 0$ в начале координат $(0, 0)$ $(\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)=0)$ под углом α.

1372. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+0} x^{f(x)} = 1$, если непрерывная кривая $y=f(x)$ входит при $x\to+0$ в начало координат $(\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0)$ и при $0<x<\varepsilon$ целиком остается внутри острого угла, образованного прямыми: $y = -kx$ и $y=kx$ $(k\neq\infty)$.

1373. Доказать, что если для функции $f(x)$ существует вторая производная $f''(x)$, то

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

1373.1. Исследовать на дифференцируемость в точке $x=0$ функцию:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}, & \text{если } x\neq 0;\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

1373.2. Найти асимптоту кривой $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ $(x>0)$.

1374. Исследовать возможность применения правила Лопиталя к следующим примерам:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)\,e^{\sin x}}$.

1375. Найти предел отношения площади кругового сегмента, имеющего хорду b и стрелку h, к площади равнобедренного треугольника, вписанного в этот сегмент, если дуга сегмента при неизменном радиусе R

стремится к нулю. Пользуясь полученным результатом, вывести приближенную формулу для площади сегмента:

$$S \approx \frac{2}{3} bh.$$

§ 10. Формула Тейлора

1°. Локальная формула Тейлора. Если 1) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $|x-x_0| < \varepsilon$ точки x_0; 2) $f(x)$ имеет в этой окрестности производные $f'(x), \ldots$ $\ldots, f^{(n-1)}(x)$ до $(n-1)$-го порядка включительно; 3) в точке x_0 существует производная n-го порядка $f^{(n)}(x_0)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n, \tag{1}$$

где

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

В частности, при $x_0 = 0$ имеем:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \tag{2}$$

При указанных условиях представление (1) единственно.

Если в точке x_0 существует производная $f^{(n+1)}(x_0)$, то остаточный член в формуле (1) может быть взят в виде $O^*((x-x_0)^{n+1})$.

Из локальной формулы Тейлора (2) получаем следующие пять важных разложений:

$$\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\text{IV. } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

2°. Формула Тейлора. Если 1) функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет на этом сегменте непрерывные производные $f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$; 3) при $a < x < b$ существует конечная производная $f^{(n)}(x)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \quad (0<\theta<1)$$

(*остаточный член в форме Лагранжа*), или

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}(x-a)^n \quad (0<\theta_1<1)$$

(*остаточный член в форме Коши*).

1376. Многочлен

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

расположить по целым неотрицательным степеням двучлена $x+1$.

Написать разложения по целым неотрицательным степеням переменной x до членов указанного порядка включительно следующих функций:

1377. $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ до члена с x^4. Чему равно $f^{(4)}(0)$?

1378. $\dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ до члена с x^2.

1379. $\sqrt[m]{a^m+x}$ $(a>0)$ до члена с x^2.

1380. $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x}$ до члена с x^3.

1381. e^{2x-x^2} до члена с x^5.

1382. $\dfrac{x}{e^x-1}$ до члена с x^4.

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ до члена с x^{13}.

1384. $\ln\cos x$ до члена с x^6

1385. $\sin(\sin x)$ до члена с x^3

1386. $\operatorname{tg} x$ до члена с x^5.

1387. $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ до члена с x^6.

1388. Найти три члена разложения функции $f(x) = \sqrt{x}$ по целым неотрицательным степеням разности $x-1$.

1389. Функцию $f(x) = x^x - 1$ разложить по целым неотрицательным степеням бинома $x-1$ до члена с $(x-1)^3$.

1390. Функцию $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ $(a > 0)$ в окрестности точки $x = 0$ приближенно заменить параболой 2-го порядка.

1391. Функцию $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ $(x > 0)$ разложить по целым неотрицательным степеням дроби $\frac{1}{x}$ до члена с $\frac{1}{x^3}$.

1392. Найти разложение функции $f(h) = \ln(x+h)$ $(x > 0)$ по целым неотрицательным степеням приращения h до члена с h^n (n — натуральное число).

1393. Пусть

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h)$$

$(0 < \theta < 1)$, причем $f^{(n+1)}(x) \neq 0$.

Доказать, что $\lim\limits_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

1393.1. Пусть при $x \to 0$ имеем

$$f(x) = 1 + kx + o(x).$$

Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} [f(x)]^{1/x} = e^k$.

1393.2. Пусть $f(x) \in C^{(2)}[0, 1]$ и $f(0) = f(1) = 0$, причем $|f''(x)| \leqslant A$ при $x \in (0, 1)$. Доказать, что $|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1393.3. Пусть $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ — дважды дифференцируемая функция и

$$M_k = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f^{(k)}(x)| < +\infty \quad (k = 0, 1, 2).$$

Доказать неравенство $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

1394. Оценить абсолютную погрешность приближенных формул:

а) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$ при $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg} x \approx x + \dfrac{x^3}{3}$ при $|x| \leqslant 0{,}1$;

г) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1395. Для каких x справедлива с точностью до 0,0001 приближенная формула: $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2}$?

1395.1. Доказать формулу

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a + \frac{x}{na^{n-1}} - r$$

$$(n > 2,\ a > 0,\ x > 0), \quad 0 < r < \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{x^2}{a^{2n-1}}.$$

1396. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить:

а) $\sqrt[3]{30}$; б) $\sqrt[5]{250}$; в) $\sqrt[12]{4000}$;

г) $\sqrt{e}$; д) $\sin 18^\circ$; е) $\ln 1{,}2$;

ж) $\operatorname{arctg} 0{,}8$; з) $\arcsin 0{,}45$; и) $(1{,}1)^{1{,}2}$

и оценить погрешность.

1397. Вычислить:

а) e с точностью до 10^{-9};

б) $\sin 1^\circ$ » » » 10^{-8};

в) $\cos 9^\circ$ » » » 10^{-5};

г) $\sqrt{5}$ » » » 10^{-4};

д) $\lg 11$ » » » 10^{-5}.

Используя разложения I—V, найти следующие пределы:

1398. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$. **1399.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

1400. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$.

1401. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

1402. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

1403. $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$ $(a>0)$.

1404. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

1405. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$. **1406.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)$.

1406.1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

1406.2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$. **1406.3.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x)-x}{x^3}$.

Для бесконечно малой при $x\to0$ величины y определить главный член вида Cx^n (C — постоянная), если

1407. $y=\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)$.

1408. $y=(1+x)^x-1$. **1409.** $y=1-\frac{(1+x)^{1/x}}{e}$.

1410. При каком подборе коэффициентов a и b величина

$$x-(a+b\cos x)\sin x$$

будет бесконечно малой 5-го порядка относительно x?

1410.1. Подобрать коэффициенты A и B так, чтобы при $x\to0$ имело место асимптотическое равенство

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+O(x^5).$$

1410.2. При каких коэффициентах A, B, C и D справедлива при $x\to0$ асимптотическая формула

$$e^x=\frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}+O(x^5).$$

1411. Считая $|x|$ малой величиной, вывести простые приближенные формулы для следующих выражений:

а) $\frac{1}{R^2}-\frac{1}{(R+x)^2}$ $(R>0)$;

б) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;

в) $\frac{A}{x}\left[1-\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-n}\right]$; г) $\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{101}\right)}$.

1412. Считая x малым по абсолютной величине, вывести приближенную формулу вида $x=\alpha \sin x+\beta \operatorname{tg} x$ с точностью до члена с x^5.

Применить эту формулу для приближенного спрямления дуг малой угловой величины.

1413. Оценить относительную погрешность следующего *правила Чебышева*: круговая дуга приближенно равна сумме боковых сторон равнобедренного треугольника, построенного на хорде этой дуги и имеющего высотой $\sqrt{4/3}$ ее стрелки.

§ 11. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции

1°. Необходимое условие экстремума. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум (*максимум* или *минимум*), если функция определена в двухсторонней окрестности точки x_0 и для всех точек x некоторой области: $0<|x-x_0|<\delta$, выполнено соответственно неравенство

$$f(x)<f(x_0) \text{ или } f(x)>f(x_0).$$

В точке экстремума производная $f'(x_0)=0$, если она существует.

2°. Достаточные условия экстремума. *Первое правило.* Если 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности $|x-x_0|<\delta$ точки x_0 такой, что $f'(x_0)=0$ или не существует (*критическая точка*); 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в области $0<|x-x_0|<\delta$; 3) производная $f'(x)$ сохраняет определенный знак слева от x_0 и справа от x_0, то поведение функции $f(x)$ характеризуется следующей таблицей:

	Знак производной		Вывод
	$x<x_0$	$x>x_0$	
I	+	+	Экстремума нет
II	+	−	Максимум
III	−	+	Минимум
IV	−	−	Экстремума нет

Второе правило. Если функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ и в некоторой точке x_0 выполнены условия

$$f'(x_0) = 0 \text{ и } f''(x_0) \neq 0,$$

то в этой точке функция $f(x)$ имеет экстремум, а именно: максимум, когда $f''(x_0) < 0$, и минимум, когда $f''(x_0) > 0$.

Третье правило. Пусть функция $f(x)$ имеет в некотором интервале $|x-x_0| < \delta$ производные $f'(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ и в точке x_0 производную $f^{(n)}(x_0)$, причем

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n-1), \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

В таком случае: 1) если n — число четное, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум, а именно: максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$; 2) если n — число нечетное, то в точке x_0 функция $f(x)$ экстремума не имеет.

3°. Абсолютный экстремум. Наибольшее (наименьшее) значение на сегменте $[a, b]$ непрерывной функции $f(x)$ достигается или в критической точке этой функции (т. е. там, где производная $f'(x)$ или равна нулю, или не существует), или в граничных точках a и b данного сегмента.

Исследовать на экстремум следующие функции:

1414. $y = 2 + x - x^2$. **1415.** $y = (x-1)^3$.

1416. $y = (x-1)^4$.

1417. $y = x^m (1-x)^n$ (m и n — целые положительные числа).

1418. $y = \cos x + \operatorname{ch} x$. **1419.** $y = (x+1)^{10} e^{-x}$.

1420. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ (n — натуральное число).

1421. $y = |x|$. **1422.** $y = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$.

1423. Исследовать на экстремум в точке $x = x_0$ функцию

$$f(x) = (x-x_0)^n \varphi(x)$$

(n — натуральное число), где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $\varphi(x_0) \neq 0$.

1424. Пусть $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)}$ и x_0—стационарная точка функции $f(x)$, т. е. $P_1(x_0) = 0$, $Q(x_0) \neq 0$.

Доказать, что $\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P_1'(x_0)$.

1425. Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки x_0 функция $f(x)$ возрастает, а справа от нее убывает?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = 2 - x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 2.$$

1426 (н). Доказать, что функция

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \text{ если } x \neq 0, \text{ и } f(0) = 0,$$

имеет в точке $x = 0$ минимум, а функция

$$g(x) = xe^{-1/x^2}, \text{ если } x \neq 0, \text{ и } g(0) = 0$$

не имеет в точке $x = 0$ экстремума, хотя

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad g^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Построить графики этих функций.

1427. Исследовать на экстремум функции:

а) $f(x) = e^{-1/|x|}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$;

б) $f(x) = e^{-1/|x|}\left(\sqrt{2} + \cos\frac{1}{x}\right)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Построить графики этих функций.

1428. Исследовать на экстремум в точке $x = 0$ функцию

$$f(x) = |x|\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right), \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 0.$$

Построить график этой функции.

Найти экстремумы следующих функций:

1429. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$. **1430.** $y = 2x^2 - x^4$.

1431. $y = x(x-1)^2(x-2)^3$. **1432.** $y = x + \frac{1}{x}$.

1433. $y = \frac{2x}{1+x^2}$. **1434.** $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

1435. $y = \sqrt{2x - x^2}$ **1436.** $y = x\sqrt[3]{x-1}$.

1437. $y = xe^{-x}$. **1438.** $y = \sqrt{x}\ln x$.

1439. $y=\frac{\ln^2 x}{x}$. **1440.** $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$.

1441. $y=\frac{10}{1+\sin^2 x}$. **1442.** $y=\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

1443. $y=e^x\sin x$. **1444.** $y=|x|\,e^{-|x-1|}$.

Найти наименьшие и наибольшие значения следующих функций:

1445. $f(x)=2^x$ на сегменте $[-1;\ 5]$.
1446. $f(x)=x^2-4x+6$ на сегменте $[-3;\ 10]$.
1447. $f(x)=|x^2-3x+2|$ на сегменте $[-10;\ 10]$.

1448. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ на сегменте $[0{,}01;\ 100]$.

1449. $f(x)=\sqrt{5-4x}$ на сегменте $[-1;\ 1]$.

Найти нижнюю грань (inf) и верхнюю грань (sup) следующих функций:

1450. $f(x)=xe^{-0{,}01x}$ на интервале $(0,\ +\infty)$.

1451. $f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ на интервале $(0,\ +\infty)$.

1452. $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$ на интервале $(0,\ +\infty)$.

1453. $f(x)=e^{-x^2}\cos x^2$ на интервале $(-\infty,\ +\infty)$.

1454. Определить нижнюю и верхнюю грани функции $f(\xi)=\frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ на интервале $x<\xi<+\infty$.

Построить графики функций

$$M(x)=\sup_{x<\xi<+\infty} f(\xi) \quad \text{и} \quad m(x)=\inf_{x<\xi<+\infty} f(\xi).$$

1454.1. Пусть

$$M_k=\sup_x \|f^{(k)}(x)\|, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Найти M_0, M_1 и M_2, если $f(x)=e^{-x^2}$.

1455. Определить наибольший член последовательности:

а) $\frac{n^{10}}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$; б) $\frac{\sqrt{n}}{n+10000}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$;

в) $\sqrt[n]{n}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

1456. Доказать неравенства:

а) $|3x-x^3|\leqslant 2$ при $|x|\leqslant 2$;

б) $\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$, если $0\leqslant x\leqslant 1$ и $p>1$;

в) $x^m(a-x)^n\leqslant \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$ при $m>0$, $n>0$ и $0\leqslant x\leqslant a$;

г) $\frac{x+a}{2^{(n-1)/n}}\leqslant\sqrt[n]{x^n+a^n}\leqslant x+a$ $(x>0,\ a>0,\ n>1)$;

д) $|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

1456.1. Доказать неравенство

$$\frac{2}{3}\leqslant\frac{x^2+1}{x^2+x+1}\leqslant 2$$

при $-\infty<x<+\infty$.

1457. Определить «отклонение от нуля» многочлена

$$P(x)=x(x-1)^2(x+2)$$

на сегменте $[-2, 1]$, т. е. найти

$$E_P=\sup_{-2\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|.$$

1458. При каком выборе коэффициента q многочлен

$$P(x)=x^2+q$$

наименее отклоняется от нуля на сегменте $[-1, 1]$, т. е.

$$E_P=\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|=\min.$$

1459. *Абсолютным отклонением* двух функций $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $[a, b]$ называется число

$$\Delta=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|.$$

Определить абсолютное отклонение функций:

$$f(x)=x^2 \text{ и } g(x)=x^3$$

на сегменте $[0, 1]$.

1460. Функцию $f(x)=x^2$ на сегменте $[x_1, x_2]$ приближенно заменить линейной функцией

$$g(x)=(x_1+x_2)x+b$$

так, чтобы абсолютное отклонение функций $f(x)$ и $g(x)$

(см. предыдущую задачу) было наименьшим, и определить это наименьшее абсолютное отклонение.

1461. Определить минимум функции

$$f(x) = \max\{2|x|,\ |1+x|\}.$$

Определить число вещественных корней уравнения и отделить эти корни, если:

1462. $x^3-6x^2+9x-10=0$.

1463. $x^3-3x^2-9x+h=0$.

1464. $3x^4-4x^3-6x^2+12x-20=0$.

1465. $x^5-5x=a$.

1466. $\ln x = kx$. **1467.** $e^x = ax^2$.

1468. $\sin^3 x\cdot\cos x = a$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

1469. $\operatorname{ch} x = kx$.

1470. При каком условии уравнение $x^3+px+q=0$ имеет: а) один вещественный корень; б) три вещественных корня. Изобразить соответствующие области на плоскости $(p,\ q)$.

§ 12. Построение графиков функций по характерным точкам

Для построения графика функции $y=f(x)$ нужно: 1) определить область существования этой функции и исследовать поведение функции в граничных точках последней; 2) выяснить симметрию графика и периодичность; 3) найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности; 4) определить нули функции и области постоянства знака; 5) найти точки экстремума и выяснить промежутки возрастания и убывания функции; 6) определить точки перегиба и установить промежутки вогнутости определенного знака графика функции; 7) найти асимптоты в случае существования их; 8) указать те или иные особенности графика. В частных случаях общая схема упрощается.

В задачах, отмеченных звездочкой, точки перегиба определяются приближенно.

Построить графики следующих функций:

1471. $y=3x-x^3$. **1472.** $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$.

1473. $y=(x+1)(x-2)^2$. **1474*.** $y=\dfrac{2-x^2}{1+x^4}$.

1475*. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$. **1476*.** $y=\dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.

1477. $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$. **1478.** $y=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$.

1479. $y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$. 1480. $y=\frac{x}{(1-x^2)^2}$.

1481. $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$. 1482*. $y=\frac{x^4+8}{x^3+1}$.

1483. $y=\frac{1}{1+x}-\frac{10}{3x^2}+\frac{1}{1-x}$. 1484. $y=(x-3)\sqrt{x}$.

1485. $y=\pm\sqrt{8x^2-x^4}$. 1485.1. $y=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

1486. $y=\pm\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

1487*. $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$.

1488. $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$.

1489. $y=(x+2)^{2/3}-(x-2)^{2/3}$.

1490. $y=(x+1)^{2/3}+(x-1)^{2/3}$. 1491. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

1492. $y=\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$. 1493. $y=\frac{|1+x|^{3/2}}{\sqrt{x}}$.

1494. $y=1-x+\sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$. 1495. $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$.

1496*. $y=\sqrt{\frac{x^4+3}{x^2+1}}$. 1497. $y=\sin x+\cos^2 x$.

1498. $y=(7+2\cos x)\sin x$. 1499. $y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$.

1500. $y=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x$. 1501. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

1502. $y=\sin x\cdot\sin 3x$. 1503. $y=\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

1504. $y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$. 1504.1. $y=\frac{\sin x}{2+\cos x}$.

1505. $y=2x-\operatorname{tg} x$. 1506. $y=e^{2x-x^2}$.

1507. $y=(1+x^2)e^{-x^2}$. 1508. $y=x+e^{-x}$.

1509. $y=x^{2/3}e^{-x}$. 1509.1. $y=e^{-2x}\sin^2 x$.

1510. $y=\frac{e^x}{1+x}$. 1511. $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

1512. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 1513. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

1514. $y=\sqrt{x^2+1}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

1515. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 1516. $y=x+\operatorname{arctg} x$.

1517. $y=\frac{x}{2}+\operatorname{arcctg} x$. 1518. $y=x\operatorname{arctg} x$.

1519. $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$. 1520. $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

1521. $y=(x+2)e^{1/x}$. 1522. $y=2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

1523*. $y=\ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$.

1524. $y=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$.

1525. $y=\arccos\frac{1-x}{1-2x}$. 1526. $y=x^x$.

1527*. $y=x^{1/x}$. 1528. $y=(1+x)^{1/x}$.

1529*. $y=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $(x>0)$.

1530*. $y=\frac{e^{1/1-x^2}}{1+x^2}$ (без исследования вогнутости).

Построить кривые, заданные в параметрической форме:

1531. $x=\frac{(t+1)^2}{4}$, $y=\frac{(t-1)^2}{4}$.

1532. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$.

1533*. $x=\frac{t^2}{t-1}$, $y=\frac{t}{t^2-1}$.

1534. $x=\frac{t^2}{1-t^2}$, $y=\frac{1}{1+t^2}$.

1535. $x=t+e^{-t}$, $y=2t+e^{-2t}$.

1536. $x=a\cos 2t$, $y=a\cos 3t$ $(a>0)$.

1537. $x = \cos^4 t, \qquad y = \sin^4 t.$

1538. $x = t \ln t, \qquad y = \frac{\ln t}{t}.$

1539. $x = \frac{a}{\cos^3 t}, \qquad y = a \operatorname{tg}^3 t \quad (a > 0.)$

1540. $x = a(\operatorname{sh} t - t), \qquad y = a(\operatorname{ch} t - 1) \quad (a > 0).$

Представив уравнения кривых в параметрической форме, построить эти кривые, если

1541. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$.

Указание. Положить $y = tx$.

1542. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

1543. $x^2y^2 = x^3 - y^3$.

1544. $x^y = y^x$ $(x > 0,\ y > 0)$.

1545. Построить график кривой: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = 1$.

Построить графики функций, заданных в полярной системе координат (φ, r) $(r \geqslant 0)$:

1546. $r = a + b \cos \varphi$ $(0 < a \leqslant b)$.

1547. $r = a \sin 3\varphi$ $(a > 0)$. **1548.** $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ $(a > 0)$.

1549*. $r = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1}$, где $\varphi > 1$ $(a > 0)$.

1550*. $\varphi = \arccos \frac{r-1}{r^2}$.

Построить графики семейств кривых (a — переменный параметр):

1551. $y = x^2 - 2x + a$. **1552.** $y = x + \frac{a^2}{x}$.

1553. $y = x \pm \sqrt{a(1 - x^2)}$.

1554. $y = \frac{x}{2} + e^{-ax}$. **1555.** $y = xe^{-x/a}$.

§ 13. Задачи на максимум и минимум функций

1556. Доказать, что если функция $f(x)$ неотрицательна, то функция $F(x) = Cf^2(x)$ $(C > 0)$ имеет в точности те же точки экстремума, что и функция $f(x)$.

1557. Доказать, что если функция $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая в строгом смысле при $-\infty < x < +\infty$, то функции $f(x)$ и $\varphi(f(x))$ имеют одни и те же точки экстремума.

1558. Определить наибольшее значение произведения m-й и n-й степеней ($m > 0$, $n > 0$) двух положительных чисел, сумма которых постоянна и равна a.

1559. Найти наименьшее значение суммы m-й и n-й степеней ($m > 0$, $n > 0$) двух положительных чисел, произведение которых постоянно и равно a.

1560. В каких системах логарифмов существуют числа, равные своему логарифму?

1561. Из всех прямоугольников данной площади S определить тот, периметр которого наименьший.

1562. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма катета и гипотенузы его постоянна.

1563. При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность?

1564. В данный круговой сегмент, не превышающий полукруга, вписать прямоугольник с наибольшей площадью.

1565. В эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписать прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса, площадь которого наибольшая.

1566. В треугольник с основанием b и высотой h вписать прямоугольник с наибольшим периметром.

Исследовать возможность решения этой задачи.

1567. Из круглого бревна диаметра d вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b и высота h. При каких размерах балка будет иметь наибольшую прочность, если прочность ее пропорциональна bh^2?

1568. В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием наибольшего объема.

1569. В шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объема.

1570. В шар радиуса R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

1571. Около данного шара описать конус наименьшего объема.

1572. Найти наибольший объем конуса с данной образующей l.

1573. В прямой круговой конус с углом 2α в осевом сечении и радиусом основания R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

1574. Найти кратчайшее расстояние точки $M(p, p)$ от параболы $y^2 = 2px$.

1575. Найти кратчайшее и наибольшее расстояния точки $A(2,0)$ от окружности $x^2 + y^2 = 1$.

1576. Найти наибольшую хорду эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$, проходящую через вершину $B(0, -b)$.

1577. Через точку $M(x, y)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ провести касательную, образующую с осями координат треугольник, площадь которого наименьшая.

1578. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершенный сверху полушаром. При каких линейных размерах это тело будет иметь наименьшую полную поверхность, если объем его равен V.

1579. Поперечное сечение открытого канала имеет форму равнобедренной трапеции. При каком наклоне φ боков «мокрый периметр» сечения будет наименьшим, если площадь «живого сечения» воды в канале равна S, а уровень воды равен h?

1580. «*Извилистостью*» замкнутого контура, ограничивающего площадь S, называется отношение периметра этого контура к длине окружности, ограничивающей круг той же площади S.

Какова форма равнобедренной трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$, обладающей наименьшей извилистостью, если основание $AD = 2a$ и острый угол $BAD = \alpha$?

1581. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости.

1582. Завод A отстоит от железной дороги, идущей с юга на север и проходящей через город B, считая по кратчайшему расстоянию, на a км. Под каким углом φ к железной дороге следует построить подъездной путь от завода, чтобы транспортировка грузов из A в B была наиболее экономичной, если стоимость провоза тонны груза на расстоянии 1 км составляет по подъездному пути p р., по железной дороге q р. $(p > q)$ и город B расположен на b км севернее завода A?

1583. Два корабля плывут с постоянными скоростями u и v по прямым линиям, составляющим угол θ

между собой. Определить наименьшее расстояние между кораблями, если в некоторый момент расстояния их от точки пересечения путей были соответственно равны a и b.

1584. В точках A и B находятся источники света соответственно силой S_1 и S_2 свечей. На отрезке $AB = a$ найти наименее освещенную точку M.

1585. Светящаяся точка находится на линии центров двух непересекающихся шаров радиусов R и r $(R > r)$ и расположена вне этих шаров. При каком положении точки сумма освещенных частей поверхностей шаров будет наибольшая?

1586. На какой высоте над центром круглого стола радиуса a следует поместить электрическую лампочку, чтобы освещенность края стола была наибольшей?

Указание. Яркость освещения выражается формулой

$$I = k\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

где φ — угол наклона лучей, r — расстояние источника света от освещаемой площадки, k — сила источника света.

1587. К реке шириной a м построен под прямым углом канал шириной b м. Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал?

1588. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a р, и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным?

1589. Груз весом P, лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости, требуется сдвинуть с места приложенной силой. При каком наклоне этой силы к горизонту величина ее будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k?

1590. В чашку, имеющую форму полушара радиуса a, опущен стержень длины $l > 2a$. Найти положение равновесия стержня.

§ 14. Касание кривых. Круг кривизны. Эволюта

1°. Касание n-го порядка. Говорят, что кривые

$$y = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \tilde{y} = \psi(x)$$

имеют в точке x_0 *касание n-го порядка* (в строгом смысле!), если $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ и $\varphi^{(n+1)}(x_0) \neq \psi^{(n+1)}(x_0)$.

В этом случае при $x \to x_0$ имеем:

$$\varphi(x) - \psi(x) = O^*[x - x_0]^{n+1}.$$

2°. Круг кривизны. Окружность

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta^2) = R^2,$$

имеющая с данной кривой $y = f(x)$ касание не ниже 2-го порядка, называется *кругом кривизны* в соответствующей точке. Радиус этого круга

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

называется *радиусом кривизны*, а величина $k = \frac{1}{R}$ — *кривизной*.

3°. Эволюта. Геометрическое место центров (ξ, η) кругов кривизны (*центры кривизны*)

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \qquad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

называется *эволютой* данной кривой $y = f(x)$.

1591. Подобрать параметры k и b прямой $y = kx + b$ так, чтобы она имела с кривой $y = x^3 - 3x^2 + 2$ касание порядка выше первого.

1592. При каком выборе коэффициентов a, b и c парабола

$$y = ax^2 + bx + c$$

имеет в точке $x = x_0$ касание 2-го порядка с кривой $y = e^x$?

1593. Какой порядок касания с осью Ox имеют в точке $x = 0$ кривые:

а) $y = 1 - \cos x$; б) $y = \operatorname{tg} x - \sin x$;

в) $y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$.

1594. Доказать, что кривая $y = e^{-1/x^2}$ при $x \neq 0$ и $y = 0$ при $x = 0$ имеет в точке $x = 0$ с осью Ox касание бесконечно большого порядка.

1595. Найти радиус и центр кривизны гиперболы $xy = 1$ в точках: а) $M(1, 1)$; б) $N(100; 0{,}01)$.

Определить радиусы кривизны следующих кривых:

1596. Параболы $y^2 = 2px$.

1597. Эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \geqslant b > 0)$.

1598. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

1599. Астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

1600. Эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

1601. Циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

1602. Эвольвенты круга $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$.

1603. Доказать, что радиус кривизны линии 2-го порядка $y^2=2px-qx^2$ пропорционален кубу отрезка нормали.

1604. Написать формулу радиуса кривизны линии, заданной в полярных координатах.

Определить радиусы кривизны кривых, заданных в полярных координатах (параметры положительны):

1605. Спирали Архимеда $r=a\varphi$.

1606. Логарифмической спирали $r=ae^{m\varphi}$.

1607. Кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$.

1608. Лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

1609. На кривой $y=\ln x$ найти точку, кривизна в которой наибольшая.

1610. Максимальная кривизна кубической параболы $y=\frac{kx^3}{6}$ $(0\leqslant x<+\infty,\ k>0)$ равна $\frac{1}{1000}$. Найти точку x, в которой достигается эта максимальная кривизна.

Составить уравнения:

1611. Эволюты параболы $y^2=2px$.

1612. Эволюты эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1613. Эволюты астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

1614. Эволюты трактрисы

$$x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}.$$

1615. Эволюты логарифмической спирали $r=ae^{m\varphi}$.

1616. Доказать, что эволюта циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

есть также циклоида, отличающаяся от данной только положением.

§ 15. Приближенное решение уравнений

1°. Правило пропорциональных частей (метод хорд). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и

$$f(a)\, f(b) < 0,$$

причем $f'(x) \neq 0$ при $a < x < b$, то уравнение

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

имеет один и только один действительный корень ξ в промежутке (a, b). За первое приближение этого корня можно принять значение

$$x_1 = a + \delta_1,$$

где

$$\delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Применяя далее этот способ к тому из промежутков (a, x_1) или (x_1, b), на концах которого функция $f(x)$ равнозначна, получим второе приближение x_2 корня ξ и т. д. Для оценки n-го приближения x_n справедлива формула

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \qquad (2)$$

где $m = \inf\limits_{a<x<b} |f'(x)|$, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

2°. Правило Ньютона (метод касательных). Если $f''(x) \neq 0$ на сегменте $[a, b]$ и $f(a)\, f''(a) > 0$, то за первое приближение ξ_1 корня ξ уравнения (1) можно принять значение

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Повторяя этот прием, получаем быстро сходящиеся к корню ξ последовательные приближения ξ_n ($n = 1, 2, \ldots$), точность которых оценивается, например, по формуле (2).

Для грубой ориентировки полезно нарисовать набросок графика функции $y = f(x)$.

Пользуясь методом пропорциональных частей, определить с точностью до 0,001 корни следующих уравнений:

1617. $x^3 - 6x + 2 = 0$. **1618.** $x^4 - x - 1 = 0$.

1619. $x - 0{,}1 \sin x = 2$. **1620.** $\cos x = x^2$.

Пользуясь методом Ньютона, определить с указанной точностью корни следующих уравнений:

1621. $x^2+\frac{1}{x^2}=10x$ (с точностью до 10^{-3}).

1622. $x\lg x=1$ (с точностью до 10^{-4}).

1623. $\cos x\cdot\operatorname{ch} x=1$ (с точностью до 10^{-3}) (для положительного корня).

1624. $x+e^x=0$ (с точностью до 10^{-5}).

1625. $x\operatorname{th} x=1$ (с точностью до 10^{-6}).

1626. С точностью до 0,001 найти три первых положительных корня уравнения $\operatorname{tg} x=x$.

1627. С точностью до 10^{-3} найти два положительных корня уравнения $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$.

ОТДЕЛ III

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Простейшие неопределенные интегралы

1°. **Понятие неопределенного интеграла.** Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке (a, b) и $F(x)$ — ее первообразная, т. е. $F'(x) = f(x)$ при $a < x < b$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad a < x < b,$$

где C — произвольная постоянная.

2°. **Основные свойства неопределенного интеграла:**

а) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)\,dx$; б) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$;

в) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$ (A = const; $A \neq 0$);

г) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

3°. **Таблица простейших интегралов:**

I. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.

II. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$.

III. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$

IV. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$.

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

VI. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$.

VII. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$; $\int e^x dx = e^x + C$.

VIII. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$. IX. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

X. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

XI. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

XII. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$ XIII. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

XIV. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

XV. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

4°. **Основные методы интегрирования.**

а) *Метод введения нового аргумента.* Если

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u)\, du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

б) *Метод разложения.* Если

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

то

$$\int f(x)\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx.$$

в) *Метод подстановки.* Если $f(x)$ — непрерывна, то, полагая

$$x = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$, получим

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

г) *Метод интегрирования по частям.* Если u и v — некоторые дифференцируемые функции от x, то

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Применяя таблицу простейших интегралов, найти следующие интегралы:

1628. $\int (3 - x^2)^3\, dx.$ **1629.** $\int x^2 (5 - x)^4\, dx.$

1630. $\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x)\, dx.$

1631. $\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx.$

1632. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx.$ **1633.** $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}}\, dx.$

1634. $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx.$

1635. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx.$

1636. $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx.$

1637. $\int \frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}\,dx.$

1638. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\,dx.$ **1639.** $\int \frac{x^2dx}{1+x^2}.$

1640. $\int \frac{x^2dx}{1-x^2}.$ **1641.** $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx.$

1642. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$

1643. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx.$

1644. $\int (2^x+3^x)^2\,dx.$

1645. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,dx.$ **1646.** $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx.$

1647. $\int (1+\sin x+\cos x)\,dx.$

1648. $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$

1649. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx.$ **1650.** $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

1651. $\int (a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)\,dx.$ **1652.** $\int \operatorname{th}^2 x\,dx.$

1653. $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx.$

1654. Доказать, что если $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \qquad (a\neq 0).$$

Найти интегралы:

1655. $\int \frac{dx}{x+a}.$ **1656.** $\int (2x-3)^{10}\,dx.$

1657. $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx.$

1658. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$.

1659. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}$.

1660. $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\,dx$.

1661. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$. 1662. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

1663. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

1664. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

1665. $\int (e^{-x}+e^{-2x})\,dx$. 1666. $\int (\sin 5x - \sin 5\alpha)\,dx$.

1667. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

1668. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$. 1669. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$.

1670. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

1671. $\int [\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]\,dx$.

1672. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$. 1673. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}$.

Путем надлежащего преобразования подынтегрального выражения найти следующие интегралы:

1674. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1675. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$.

1676. $\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}$. 1677. $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

1678. $\int \frac{x\,dx}{4+x^4}$. 1679. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8-2}$.

1680. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Указание. $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$.

1681. $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$

1682. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

1683. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. 1684. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

1685. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{3/2}}$. 1686. $\int \frac{x^2\,dx}{(8x^3+27)^{2/3}}$.

1687. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$. 1688. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

1689. $\int xe^{-x^2}dx$. 1690. $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$.

1691. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

1693. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$. 1694. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

1695. $\int \sin^5 x\cos x\,dx$.

1696. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx$.

1697. $\int \operatorname{tg} x\,dx$. 1698. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

1699. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx$.

1700. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,dx$.

1700.1. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx$. 1700.2. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx$.

1700.3. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\,dx$.

1701. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$.

1702. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$. 1703. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

1704. $\int \frac{dx}{\cos x}$. 1705. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$. 1706. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

1707. $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}}\, dx$. 1708. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}$.

1709. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$.

1710. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$.

1711. $\int \sqrt{\frac{\ln (x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\, dx$.

1712. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$.

Указание. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

1713. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\, dx$. 1714. $\int \frac{x^4\, dx}{(x^5+1)^4}$.

1715. $\int \frac{x^{n/2}\, dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}$.

1716. $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx$.

1717. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$.

1718. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$. 1719. $\int \frac{2^x : 3^x}{9^x - 4^x}\, dx$.

1720. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

Применяя метод разложения, вычислить интегралы:

1721. $\int x^2 (2-3x^2)^2\, dx$. 1721.1. $\int x(1-x)^{10}\, dx$.

1722. $\int \frac{1+x}{1-x}\, dx$. 1723. $\int \frac{x^2}{1+x}\, dx$.

1724. $\int \frac{x^3}{3+x}\,dx.$ **1725.** $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx.$

1726. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}\,dx.$ **1727.** $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx.$

1728. $\int \frac{x^5}{x+1}\,dx.$

1729. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$

1730. $\int x\sqrt{2-5x}\,dx.$

Указание. $x=-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}.$

1731. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}}.$

1732. $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$

1733. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$

Указание $1=\frac{1}{4}[(x+3)-(x-1)].$

1734. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}.$ **1735.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$

1736. $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}.$

1737. $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}.$ **1738.** $\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2}.$

1739. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$ $(a\neq b).$

1740. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a^2\neq b^2).$

1741. $\int \sin^2 x\,dx.$

1742. $\int \cos^2 x\,dx.$ **1743.** $\int \sin x\sin(x+\alpha)\,dx.$

1744. $\int \sin 3x\cdot\sin 5x\,dx.$

1745. $\int \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\,dx.$

1746. $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)dx.$

1747. $\int \sin^3 x\,dx.$ **1748.** $\int \cos^3 x\,dx.$

1749. $\int \sin^4 x\,dx.$ **1750.** $\int \cos^4 x\,dx.$

1751. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx.$ **1752.** $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx.$

1753. $\int \sin^2 3x \sin^3 2x\,dx.$ **1754.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

Указание. $1 \equiv \sin^2 x + \cos^2 x.$

1755. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}.$ **1756.** $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$

1757. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx.$ **1758.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$

1759. $\int \frac{dx}{1+e^x}.$ **1760.** $\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}\,dx.$

1761. $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx.$

1762. $\int \operatorname{ch}^2 x\,dx.$ **1763.** $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x\,dx.$

1764. $\int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x\,dx.$ **1765.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}.$

Применяя подходящие подстановки, найти следующие интегралы:

1766. $\int x^3 \sqrt[3]{1-x}\,dx.$

1767. $\int x^3 (1-5x^2)^{10}\,dx.$

1768. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x}}\,dx.$ **1769.** $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

1770. $\int x^5 (2-5x^3)^{2/3}\,dx.$ **1771.** $\int \cos^5 x \cdot \sqrt{\sin x}\,dx.$

1772. $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx.$ **1773.** $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx.$

1774. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

1775. $\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}.$

1776. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

1777. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}.$

Применяя тригонометрические подстановки $x = a\sin t$, $x = a\operatorname{tg} t$, $x = a\sin^2 t$ и т. п., найти следующие интегралы (параметры положительны):

1778. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$. **1779.** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

1780. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$.

1781. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$.

1782. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\, dx$. **1783.** $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-a}}\, dx$.

1784. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

Указание. Применить подстановку $x-a=(b-a)\sin^2 t$.

1785. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx$.

Применяя гиперболические подстановки $x = a\operatorname{sh} t$, $x = a\operatorname{ch} t$ и т. п., найти следующие интегралы (параметры положительны):

1786. $\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx$.

1787. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\, dx$.

1788. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\, dx$.

1789. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

1790. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\, dx$.

Указание. Положить $x+a=(b-a)\operatorname{sh}^2 t$.

Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

1791. $\int \ln x\, dx$. **1792.** $\int x^n \ln x\, dx$ $(n \neq -1)$.

1793. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$. **1794.** $\int \sqrt{x}\ln^2 x\, dx$.

1795. $\int xe^{-x}\, dx$. **1796.** $\int x^2e^{-2x}\, dx$.

1797. $\int x^3e^{-x^2}dx$. **1798.** $\int x\cos x\, dx$.

1799. $\int x^2 \sin 2x\,dx$. 1800. $\int x \operatorname{sh} x\,dx$.

1801. $\int x^3 \operatorname{ch} 3x\,dx$. 1802. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

1803. $\int \arcsin x\,dx$. 1804. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$.

1805. $\int x^2 \arccos x\,dx$. 1806. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$.

1807. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

1808. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\,dx$.

1809. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\,dx$. 1810. $\int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)\,dx$.

Найти интегралы:

1811. $\int x^5 e^{x^3}\,dx$. 1812. $\int (\arcsin x)^2\,dx$.

1813. $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx$.

1814. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x}\,dx$.

1815. $\int \frac{x \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

1816. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$. 1817. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.

1818. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$. 1819. $\int \sqrt{x^2+a}\,dx$.

1820. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx$. 1821. $\int x \sin^2 x\,dx$.

1822. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$. 1823. $\int x \sin \sqrt{x}\,dx$.

1824. $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$.

1825. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$. 1826. $\int \sin(\ln x)\,dx$.

1827. $\int \cos(\ln x)\,dx$. 1828. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$.

1829. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$. 1830. $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx$.

1831. $\int (e^x - \cos x)^2\,dx$.

1832. $\int \frac{\operatorname{arcctg} e^x}{e^x}\,dx$. 1833. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,dx$.

1834. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. 1835. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$.

Нахождение следующих интегралов основано на приведении квадратного трехчлена к каноническому виду и применении формул:

I. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$.

II. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0)$.

III. $\int \frac{x\,dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C$.

IV. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$.

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0)$.

VI. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0)$.

VII. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} +$

$$+ \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

VIII. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm$

$$\pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0).$$

Найти интегралы:

1836. $\int \frac{dx}{a+bx^2} \quad (ab \neq 0)$. **1837.** $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$.

1838. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$. **1839.** $\int \frac{x\,dx}{x^4-2x^2-1}$.

1840. $\int \frac{(x+1)}{x^2+x+1} dx$. **1841.** $\int \frac{x\,dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$.

1842. $\int \frac{x^3 dx}{x^4-x^2+2}$. **1843.** $\int \frac{x^5\,dx}{x^6-x^3-2}$.

1844. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$.

1845. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}$.

1846. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} \quad (b \neq 0)$.

1847. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. 1848. $\int \frac{ax}{\sqrt{x+x^2}}$.

1849. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$.

1850. Доказать, что если

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0),$$

то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\frac{y'}{2} + \sqrt{ay}\right| + C \text{ при } a>0$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}} + C \text{ при } a<0.$$

1851. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$. 1852. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

1853. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$.

1853.1. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}$.

1854. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

1855. $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx$.

1856. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

1857. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$.

1858. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

1859. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

1860. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

1861. $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx$. 1862. $\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx$.

1863. $\int \sqrt{x^4+2x^2-1}\, x\, dx$.

1864. $\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}} dx$. 1865. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx$.

§ 2. Интегрирование рациональных функций

Применяя метод неопределенных коэффициентов, найти следующие интегралы:

1866. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$.

1867. $\int \frac{x\, dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

1868. $\int \frac{x^{10} dx}{x^2+x-2}$. 1869. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$.

1870. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx$. 1871. $\int \frac{x\, dx}{x^3-3x+2}$.

1872. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx$.

1873. $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$.

1874. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

1875. $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$.

1876. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx$. 1877. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

1878. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

1879. $\int \frac{x\, dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

1880. $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$.

1881. $\int \frac{dx}{x^3+1}$. 1882. $\int \frac{x\, dx}{x^3-1}$.

1883. $\int \frac{dx}{x^4-1}$. 1884. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

1885. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$. 1886. $\frac{dx}{x^6+1}$.

1887. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$.

1888. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$.

1889. $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1}$.

1890. При каком условии интеграл

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3 (x-1)^2}\, dx$$

представляет собой рациональную функцию?

Применяя метод Остроградского, найти интегралы

1891. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2 (x+1)^3}$. **1892.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

1893. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$. **1894.** $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

1895. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

1896. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\, dx$.

1897. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

Выделить алгебраическую часть следующих интегралов:

1898. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\, dx$. **1899.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}$.

1900. $\displaystyle\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\, dx$.

1901. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}.$$

1902. При каком условии интеграл

$$\int \frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(ax^2 + 2bx + c)^2}\, dx$$

представляет собой рациональную функцию?

Применяя различные приемы, найти следующие интегралы:

1903. $\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}}\,dx$. **1904.** $\int \frac{x\,dx}{x^8-1}$.

1905. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8+3}$. **1906.** $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx$.

1907. $\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,dx$. **1908.** $\int \frac{x^4\,dx}{(x^{10}-10)^2}$.

1909. $\int \frac{x^{11}\,dx}{x^8+3x^4+2}$. **1910.** $\int \frac{x^9\,dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$.

1911. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,dx$. **1912.** $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\,dx$.

1913. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}$. **1914.** $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$.

1915. $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,dx$.

1916. $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}\,dx$.

1917. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx$.

1918. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx$.

1919. $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,dx$. **1920.** $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$.

1921. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (a \neq 0).$$

Пользуясь этой формулой, вычислить

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$$

Указание. Использовать тождество

$$4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2 + (4ac-b^2).$$

1922. Применить подстановку $t = \frac{x+a}{x+b}$ для вычисления интеграла

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n}$$

(m и n — натуральные числа).

Пользуясь этой подстановкой, найти

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2 (x+3)^3}.$$

1923. Вычислить

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx,$$

если $P_n(x)$ есть многочлен степени n относительно x.

Указание. Применить формулу Тейлора.

1924. Пусть $R(x) = R^*(x^2)$, где R^* — рациональная функция. Какими особенностями обладает разложение функции $R(x)$ на рациональные дроби?

1925. Вычислить

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}},$$

где n — целое положительное число.

§ 3. Интегрирование некоторых иррациональных функций

С помощью приведения подынтегральных функций к рациональным функциям найти следующие интегралы:

1926. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

1927. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}.$

1928. $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx.$

1929. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$

1930. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}.$

1931. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx.$

1932. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

1933. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$ $(a>0)$.

1934. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ (n—натуральное число).

1935. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

Указание. Положить $x=\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2$.

1936. Доказать, что интеграл

$$\int R\left[x,\ (x-a)^{p/n}(x-b)^{q/n}\right]dx,$$

где R — рациональная функция и p, q, n — целые числа, является элементарной функцией, если

$$p+q=kn,$$

где k — целое число.

Найти интегралы от простейших квадратичных иррациональностей:

1937. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$.

1938. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

1939. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

1940. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx$.

1941. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

1942. $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$.

Применяя формулу

$$\int \frac{P_n(x)}{y}\,dx=Q_{n-1}(x)\,y+\lambda\int\frac{dx}{y},$$

где $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ — многочлен степени n,

$Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$ и λ — число, найти следующие интегралы:

1943. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx.$ **1944.** $\int \frac{x^{10}dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

1945. $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

1946. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx.$

1947. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}.$ **1948.** $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}.$

1949. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}.$

1950. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}.$

1951. При каком условии интеграл

$$\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

представляет собой алгебраическую функцию?

Найти $\int \frac{P(x)}{Q(x)\,y}\,dx$, где $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, разлагая рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби.

1952. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}.$

1953. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}.$

1954. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\,dx.$

1955. $\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx.$

1956. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}.$

1957. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

1958. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

1959. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$.

1960. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,dx$.

Приводя квадратные трехчлены к каноническому виду, вычислить следующие интегралы:

1961. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

1962. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

1963. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

1964. С помощью дробно-линейной подстановки $x = \dfrac{\alpha+\beta t}{1+t}$ вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

1965. Найти

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

Применяя подстановки Эйлера

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + z$, если $a>0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xz \pm \sqrt{c}$, если $c>0$;

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = z(x-x_1)$,

найти следующие интегралы:

1966. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

1967. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

1968. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

1969. $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx.$

1970. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left[1+\sqrt{x(1+x)}\right]^2}.$

Применяя различные методы, найти следующие интегралы:

1971. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}.$

1972. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}.$

1973. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}.$

1974. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$

1975. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx.$

1976. $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}.$

1977. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}.$

1978. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}.$

1979. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

1980. Доказать, что нахождение интеграла

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{cx+d}\right)dx,$$

где R — рациональная функция, сводится к интегрированию рациональной функции.

Интеграл от дифференциального бинома

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx,$$

где m, n и p — рациональные числа, может быть приведен к интегрированию рациональных функций лишь в следующих трех случаях (*теорема Чебышева*):

Случай 1. Пусть p — целое. Полагаем $x=z^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n.

Случай 2. Пусть $\frac{m+1}{n}$ — целое. Полагаем $a+bx^n=z^N$, где N — знаменатель дроби p.

Случай 3. Пусть $\frac{m+1}{n}+p$ — целое. Применяем подстановку $ax^{-n}+b=z^N$, где N — знаменатель дроби p.

Если $n=1$, то эти случаи эквивалентны следующим:
1) p — целое; 2) m — целое; 3) $m+p$ — целое.

Найти следующие интегралы:

1981. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$.

1982. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$.

1983. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

1984. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1985. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

1986. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

1987. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

1988. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

1989. $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$.

1990. В каких случаях интеграл

$$\int \sqrt{1+x^m}\,dx,$$

где m — рациональное число, представляет собой элементарную функцию?

§ 4. Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, где m и n — целые числа, вычисляются с помощью искусственных преобразований или применением формул понижения.

Найти интегралы:

1991. $\int \cos^5 x\,dx$. **1992.** $\int \sin^6 x\,dx$.

1993. $\int \cos^6 x\,dx$. **1994.** $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$.

1995. $\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx$. **1996.** $\int \sin^5 x \cos^5 x\,dx$.

1997. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$. **1998.** $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx$.

1999. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$. **2000.** $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

2001. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$. **2002.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

2003. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$.

2004. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$. **2005.** $\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx$.

2006. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$.

2007. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

2008. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$. **2009.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

2010. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$.

2011. Вывести формулы понижения для интегралов:

а) $I_n = \int \sin^n x\,dx$; б) $K_n = \int \cos^n x\,dx$ $(n>2)$

и с помощью их вычислить

$$\int \sin^6 x\,dx \quad \text{и} \quad \int \cos^8 x\,dx.$$

2012. Вывести формулы понижения для интегралов:

а) $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$; б) $K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n>2)$

и с помощью их вычислить

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\cos^7 x}.$$

Следующие интегралы вычисляются с помощью применения формул:

$$\text{I. } \sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)].$$

$$\text{II. } \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

$$\text{III. } \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].$$

Найти интегралы:

2013. $\int \sin 5x\cos x\,dx$. **2014.** $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$.

2015. $\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx$.

2016. $\int \sin x\sin(x+a)\sin(x+b)\,dx$.

2017. $\int \cos^2 ax\cos^2 bx\,dx$. **2018.** $\int \sin^3 2x\cdot\cos^2 3x\,dx$.

Следующие интегралы вычисляются путем применения тождеств:

$$\sin(\alpha-\beta)\equiv\sin[(x+\alpha)-(x+\beta)]$$

и

$$\cos(\alpha-\beta)\equiv\cos[(x+\alpha)-(x+\beta)].$$

Найти интегралы:

2019. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

2020. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$.

2021. $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$.

2022. $\int \frac{dx}{\sin x-\sin\alpha}$. **2023.** $\int \frac{dx}{\cos x+\cos a}$.

2024. $\int \operatorname{tg} x\operatorname{tg}(x+a)\,dx$.

Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx,$$

где R — рациональная функция, в общем случае приводятся к интегрированию рациональных функций с помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

а) Если выполнено равенство

$$R(-\sin x, \cos x)\equiv -R(\sin x, \cos x)$$

или

$$R(\sin x, -\cos x)\equiv -R(\sin x, \cos x),$$

то выгодно применять подстановку $\cos x = t$ или соответственно $\sin x = t$.

б) Если выполнено равенство

$$R(-\sin x, -\cos x)\equiv R(\sin x, \cos x),$$

то полезно применять подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

Найти интегралы:

2025. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

2026. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

2027. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x}\,dx$. **2028.** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$;

а) $0<\varepsilon<1$; б) $\varepsilon>1$.

2029. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$. **2030.** $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$.

2031. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2}$.

2032. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$.

2033. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2}$.

2034. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

2035. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

2036. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\,dx$.

2037. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx$. **2038.** $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$.

2039. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$. **2040.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$.

2041. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$, приведя знаменатель к логарифмическому виду.

2042. Доказать, что

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}\,dx = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + C,$$

где A, B, C — постоянные.

Указание. Положить

$a_1\sin x + b_1\cos x = A\,(a\sin x + b\cos x) + B\,(a\cos x - b\sin x)$, где A и B — постоянные.

Найти интегралы:

2043. $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\,dx$. **2043.1.** $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x}\,dx$.

2044. $\int \frac{dx}{3+5\operatorname{tg} x}$. **2045.** $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a_1 \sin x + b \cos x)^2}\, dx$.

2046. Доказать, что

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c}\, dx = Ax + B \ln|a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c},$$

где A, B, C — некоторые постоянные коэффициенты.

Найти интегралы:

2047. $\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}\, dx$.

2048. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}\, dx$.

2049. $\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2}\, dx$.

2050. Доказать, что

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x}\, dx = A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

где A, B, C — постоянные коэффициенты.

Найти интегралы:

2051. $\int \frac{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx$.

2052. $\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x}\, dx$.

2053. Доказать, что если $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$, то

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x}\, dx = A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

где A, B — неопределенные коэффициенты, λ_1, λ_2 — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2),$$

$$u_i = (a-\lambda_i)\sin x + b\cos x \text{ и } k_i = \frac{1}{a-\lambda_i} \quad (i = 1,\ 2).$$

Найти интегралы:

2054. $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx.$

2055. $\int \frac{(\sin x + \cos x)\,dx}{2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x}.$

2056. $\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x\cos x}\,dx$

2057. Доказать, что

$$\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} =$$
$$= \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}},$$

где A, B, C — неопределенные коэффициенты.

2058. Найти $\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}.$

2059. Доказать, что

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} +$$
$$+ B\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-2}} \quad (|a| \neq |b|),$$

и определить коэффициенты A, B и C, если n — натуральное число, большее единицы.

Найти интегралы:

2060. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$

2061. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}\,dx.$

2062. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}}.$

2063. $\int \frac{dx}{(1 + \varepsilon\cos x)^2} \quad (0 < \varepsilon < 1).$

2064. $\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}\,dx.$

Указание. Положить $t=\dfrac{\cos\dfrac{x+a}{2}}{\sin\dfrac{x-a}{2}}$.

2065. Вывести формулу понижения для интеграла

$$I_n=\int\left(\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\sin\dfrac{x+a}{2}}\right)^n dx$$

(n — натуральное число).

§ 5. Интегрирование различных трансцендентных функций

2066. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени n, то

$$\int P(x)\,e^{ax}dx=$$
$$=e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\ldots+(-1)^n\frac{P^n(x)}{a^{n+1}}\right]+C.$$

2067. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени n, то

$$\int P(x)\cos ax\,dx=$$
$$=\frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{IV}(x)}{a^4}-\ldots\right]+$$
$$+\frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{V}(x)}{a^4}-\ldots\right]+C$$

и

$$\int P(x)\sin ax\,dx=$$
$$=-\frac{\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{IV}(x)}{a^4}-\ldots\right]+$$
$$+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{V}(x)}{a^4}-\ldots\right]+C.$$

Найти интегралы:

2068. $\int x^3e^{3x}dx$. **2069.** $\int (x^2-2x+2)\,e^{-x}\,dx$.

2070. $\int x^5\sin 5x\,dx$. **2071.** $\int (1+x^2)^2\cos x\,dx$.

2072. $\int x^7 e^{-x^2}\,dx$.

2073. $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\,dx$.

2074. $\int e^{ax}\cos^2 bx\,dx$. 2075. $\int e^{ax}\sin^3 bx\,dx$.

2076. $\int xe^x \sin x\,dx$. 2077. $\int x^2 e^x \cos x\,dx$.

2078. $\int xe^x \sin^2 x\,dx$. 2079. $\int (x-\sin x)^3\,dx$.

2080. $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$.

2081. Доказать, что если R — рациональная функция и числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соизмеримы, то интеграл

$$\int R\left(e^{a_1x}, e^{a_2x}, \ldots, e^{a_nx}\right)dx$$

есть элементарная функция.

Найти следующие интегралы:

2082. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$. 2083. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$.

2084. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$.

2085. $\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$.

2086. $\int \frac{1+e^{x/2}}{(1+e^{x/4})^2}\,dx$. 2087. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

2088. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx$.

2089. $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx$.

2090. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

2091. Доказать, что интеграл

$$\int R(x)\,e^{ax}\,dx,$$

где R — рациональная функция, знаменатель которой имеет лишь действительные корни, выражается через элементарные функции и трансцендентную функцию

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \operatorname{li}(e^{ax}) + C,$$

где

$$\operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\ln x}.$$

2092. В каком случае интеграл

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x\,dx,$$

где $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$ и $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — постоянны, представляет собой элементарную функцию?

Найти интегралы:

2093. $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x\,dx$. **2094.** $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\,dx$.

2095. $\int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2}\,dx$. **2096.** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$.

2097. $\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2}\,dx$.

Найти интегралы, содержащие функции $\ln f(x)$, $\operatorname{arctg} f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, где $f(x)$ — алгебраическая функция:

2098. $\int \ln^n x\,dx$ (n — натуральное число).

2099. $\int x^3 \ln^3 x\,dx$. **2100.** $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx$.

2101. $\int \ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right] \cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

2102. $\int \ln^2\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx$.

2103. $\int \ln\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right) dx$.

2104. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$. **2105.** $\int x \operatorname{arctg}(x+1)\,dx$.

2106. $\int \sqrt{x} \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$. **2107.** $\int x \arcsin(1-x)\,dx$.

2108. $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$. **2109.** $\int x \arccos\frac{1}{x}\,dx$.

2110. $\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,dx$.

2111. $\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$. **2112.** $\int \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

2113. $\int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2)\,dx$.

2114. $\int x \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$. **2115.** $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx}{(1+x^2)^{3/2}}$.

Найти интегралы, содержащие гиперболические функции:

2116. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\,dx$. 2117. $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx$.

2118. $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx$. 2119. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x\,dx$.

2120. $\int \operatorname{th} x\,dx$. 2121. $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$. 2122. $\int \sqrt{\operatorname{th} x}\,dx$.

2123. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x}$.

2123.1. $\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x - 4\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + 9\operatorname{ch}^2 x}$.

2123.2. $\int \frac{dx}{0{,}1 + \operatorname{ch} x}$. 2123.3. $\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{3\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x}$.

2124. $\int \operatorname{sh} ax \sin bx\,dx$. 2125. $\int \operatorname{sh} ax \cos bx\,dx$.

§ 6. Разные примеры на интегрирование функций

Найти интегралы:

2126. $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$. 2127. $\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^3}$.

2128. $\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$. 2129. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

2130. $\int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$. 2131. $\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2132. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx$.

2133. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1+x^3}}$. 2134. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

2135. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$. 2136. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

2137. $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2138. $\int \frac{(1+x)\,dx}{1+\sqrt{x+x^2}}$. 2139. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\,dx$.

2140. $\int (2x+3)\arccos(2x-3)\,dx$.

2141. $\int x\ln(4+x^4)\,dx$.

2142. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

2143. $\int \frac{x \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

2144. $\int x\sqrt{x^2+1}\,\ln\sqrt{x^2-1}\,dx.$

2145. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

2146. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}.$ 2147. $\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\,dx.$

2148. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}.$

2149. $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \operatorname{arctg} x\,dx.$

2150. $\int \frac{ax^2+b}{x^2-1} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| dx.$

2151. $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

2152. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$ 2153. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx.$

2154. $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

2155. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$ 2156. $\int \frac{x \operatorname{arcctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

2157. $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1-x^2)^2}\,dx.$

2158. $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x\,dx.$

2159. $\int x(1+x^2) \operatorname{arcctg} x\,dx.$ 2160. $\int x^x(1+\ln x)\,dx.$

2161. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx.$ 2162. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)}\,dx.$

2163. $\int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2-(e^{x-1}+1)^2}.$

2164. $\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x+1}\,dx.$ 2165. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x\,dx.$

2166. $\int |x|\,dx.$ 2167. $\int x|x|\,dx.$ 2168. $\int (x+|x|)^2 dx.$

2169. $\int \{|1+x|-|1-x|\}\,dx.$

2170. $\int e^{-|x|}\,dx.$ 2171. $\int \max(1,\ x^2)\,dx.$

2172. $\int \varphi(x)\,dx$, где $\varphi(x)$ — расстояние числа x до ближайшего целого числа.

2173. $\int [x]\,|\sin \pi x|\,dx$ $(x \geqslant 0)$.

2174. $\int f(x)\,dx$, где $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } |x| \leqslant 1; \\ 1 - |x| & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$

2175. $\int f(x)\,dx$, где $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\infty < x < 0; \\ x + 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2x, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$

2176. Найти $\int x f''(x)\,dx$.

2177. Найти $\int f'(2x)\,dx$.

2178. Найти $f(x)$, если $f'(x^2) = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.

2179. Найти $f(x)$, если $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$.

2180. Найти $f(x)$, если

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x \leqslant 1; \\ x & \text{при } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

и $f(0) = 0$.

2180.1. Пусть $f(x)$ — монотонная непрерывная функция и $f^{-1}(x)$ — ее обратная функция.

Доказать, что если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f^{-1}(x)\,dx = x f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.$$

Рассмотреть примеры: а) $f(x) = x^n$ $(n > 0)$; б) $f(x) = e^x$; в) $f(x) = \arcsin x$; г) $f(x) = \operatorname{Arth} x$.

ОТДЕЛ IV

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определенный интеграл как предел суммы

1°. Интеграл в смысле Римана. Если функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, то *интегралом* функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ называется число

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \qquad (1)$$

где $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$ и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Для существования предела (1) необходимо и достаточно, чтобы *нижняя интегральная сумма*

$$\underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

и *верхняя интегральная сумма*

$$\overline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

где

$$m_i = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x) \quad \text{и} \quad M_i = \sup_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x),$$

имели общий предел при $\max|\Delta x_i| \to 0$.

Функции $f(x)$, для которых предел в правой части равенства (1) существует, называются *интегрируемыми* (собственно) на соответствующем промежутке. В частности, а) непрерывная функция; б) ограниченная функция, имеющая конечное число точек разрыва; в) ограниченная монотонная функция,— интегрируемы на любом конечном сегменте. Если функция $f(x)$ не ограничена на сегменте $[a, b]$, то она собственно неинтегрируема на $[a, b]$.

2°. Условие интегрируемости. Необходимым и достаточным условием интегрируемости на данном сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ является выполнение равенства

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

где $\omega_i = M_i - m_i$ — колебание функции $f(x)$ на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$.

2181. Найти интегральную сумму S_n для функции

$$f(x) = 1 + x$$

на сегменте $[-1, 4]$, разбивая его на n равных промежутков и выбирая значения аргумента ξ_i $(i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1)$ в серединах этих промежутков.

2182. Для данных функций $f(x)$ найти нижнюю $\underline{S}_n$ и верхнюю $\overline{S}_n$ интегральные суммы на соответствующих сегментах, деля их на n равных частей, если

а) $f(x) = x^3$ $\quad [-2 \leqslant x \leqslant 3]$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad [0 \leqslant x \leqslant 1]$;

в) $f(x) = 2^x$ $\quad [0 \leqslant x \leqslant 10]$.

2183. Найти нижнюю интегральную сумму для функции $f(x) = x^4$ на сегменте $[1, 2]$, разбивая этот сегмент на n частей, длины которых образуют геометрическую прогрессию. Чему равен предел этой суммы при $n \to \infty$?

2184. Исходя из определения интеграла, найти

$$\int_0^T (v_0 + gt)\,dt,$$

где v_0 и g — постоянны.

Вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм и производя разбиение промежутка интеграции надлежащим образом:

2185. $\int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx$. **2186.** $\int\limits_0^1 a^x\,dx$ $(a>0)$. **2187.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx$.

2188. $\int\limits_0^x \cos t\,dt$. **2189.** $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2}$ $(0<a<b)$.

Указание. Положить $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

2190. $\int\limits_a^b x^m\,dx$ $\quad (0<a<b;\ \ m \neq -1)$.

Указание. Выбрать точки деления так, чтобы их абсциссы x_i образовывали геометрическую прогрессию.

2191. $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$ $(0<a<b)$.

2192. Вычислить интеграл Пуассона

$$\int\limits_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$$

при: а) $|\alpha|<1$; б) $|\alpha|>1$.

Указание. Воспользоваться разложением многочлена $\alpha^{2n}-1$ на квадратичные множители.

2193. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Доказать, что

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\varphi(\theta_i)\,\Delta x_i=\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

где $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$, $x_i\leqslant\theta_i\leqslant x_{i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ и $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ $(x_0=a,\ x_n=b)$.

2193.1. Пусть $f(x)$ ограничена и монотонна на $[0, 1]$. Доказать, что

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2193.2. Пусть функция $f(x)$ ограничена и выпукла сверху (см. 1312) на сегменте $[a, b]$.

Доказать, что

$$(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}\leqslant\int\limits_a^b f(x)\,dx\leqslant(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2193.3. Пусть $f(x)\in C^{(2)}\,[1, +\infty)$ и $f(x)\geqslant 0$, $f'(x)\geqslant 0$, $f''(x)\leqslant 0$ при $x\in[1, +\infty)$.

Доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\frac{1}{2}f(n)+\int\limits_1^n f(x)\,dx+O(1)$$

при $n\to\infty$.

2193.4. Пусть $f(x)\in C^{(1)}\,[a, b]$ и

$$\Delta_n=\int\limits_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} n\Delta_n$.

2194. Показать, что разрывная функция

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

интегрируема на промежутке $[0, 1]$.

2195. Показать, что функция Римана

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1/n, & \text{если } x = m/n, \end{cases}$$

где m и n $(n \geqslant 1)$ — взаимно простые целые числа, интегрируема на любом конечном промежутке.

2196. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], \text{ если } x \neq 0$$

и $f(0) = 0$, интегрируема на сегменте $[0, 1]$.

2197. Доказать, что функция Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \end{cases}$$

не интегрируема на любом промежутке.

2198. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$

$$f_n(x) = \sup f(x) \text{ при } x_i \leqslant x < x_{i+1},$$

где

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \quad (i = 0, 1, \ldots, n; \quad n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

2199. Доказать, что если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то существует последовательность непрерывных функций $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такая, что

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^c \varphi_n(x)\,dx \text{ при } a \leqslant c \leqslant b.$$

2200. Доказать, что если ограниченная функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то абсолютная величина ее $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

2201. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на сегменте $[a, b]$, т. е. интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ существует. Является ли эта функция интегрируемой на $[a, b]$?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально;} \\ -1, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

2202. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $A \leqslant f(x) \leqslant B$ при $a \leqslant x \leqslant b$, а функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[A, B]$. Доказать, что функция $\varphi(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$.

2203. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы, то обязательно ли функция $f(\varphi(x))$ также интегрируема?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x \neq 0, \end{cases}$$

и $\varphi(x)$ — функция Римана (см. задачу 2195).

2204. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[A, B]$. Доказать, что $f(x)$ обладает свойством *интегральной непрерывности*, т. е. $\lim\limits_{h \to 0} \int\limits_a^b |f(x+h) - f(x)|\,dx = 0$, где $[a, b] \subset [A, B]$.

2205. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Доказать, что равенство $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, принадлежащих сегменту $[a, b]$.

§ 2. Вычисление определенных интегралов с помощью неопределенных

1°. Формула Ньютона — Лейбница. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $F(x)$ — ее *первообразная*, т. е. $F'(x) = f(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $f(x) \geqslant 0$ геометрически представляет собой площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя перпендикулярами к оси Ox: $x = a$ и $x = b$ (рис. 9).

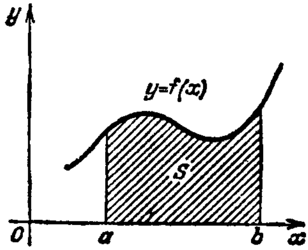

Рис. 9

2°. Формула интегрирования по частям. Если $f(x),\ g(x) \in C^{(1)}[a,\ b]$, то

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\, f'(x)\, dx.$$

3°. Замена переменной. Если: 1) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,\ b]$; 2) функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на сегменте $[\alpha,\ \beta]$, где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$; 3) сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на $[\alpha,\ \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

Применяя формулу Ньютона—Лейбница, найти следующие определенные интегралы и нарисовать соответствующие криволинейные площади:

2206. $\displaystyle\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\, dx.$ **2207.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\, dx.$

2208. $\displaystyle\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$ **2209.** $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2210. $\displaystyle\int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$ **2211.** $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\, dx.$

2212. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ $(0<\alpha<\pi)$.

2213. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$ $(0 \leqslant \varepsilon < 1)$.

2214. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$

$(|a|<1,\ |b|<1,\ ab>0)$.

2215. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$ $(ab \neq 0)$.

2216. Объяснить, почему формальное применение формулы Ньютона—Лейбница приводит к неверным результатам, если:

а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$; б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x\,dx}{2+\operatorname{tg}^2 x}$; в) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx$.

2217. Найти $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right)dx$.

2218. Найти $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$.

С помощью определенных интегралов найти пределы следующих сумм:

2219. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

2220. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$.

2221. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

2222. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

2223. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$.

2224. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots\right.$

$\left.\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

Найти

2225. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. 2226. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]$.

Отбрасывая равномерно бесконечно малые высших порядков, найти пределы следующих сумм:

2227. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\ldots \right.$
$$\left. \ldots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right].$$

2228. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

2229. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}$ $(x>0)$.

2230. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

2231. Найти:
$$\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2dx,\quad \frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2dx,\quad \frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2dx.$$

2232. Найти:

а) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$; б) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;

в) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,dt$.

2233. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos x^2dx}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} x)^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2x^2}\,dx}$.

2233.1. Пусть $f(x) \in C\,[0, +\infty]$ и $f(x) \to A$ при $x \to +\infty$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(nx)\,dx$.

2234. Доказать, что $\int\limits_0^x e^{x^2}dx \sim \dfrac{1}{2x}e^{x^2}$ при $x \to \infty$.

2235. Найти $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin x}\,dx}$.

2236. Пусть $f(x)$ — непрерывная положительная функция. Доказать, что функция $\varphi(x) = \dfrac{\int\limits_0^x tf(t)\,dt}{\int\limits_0^x f(t)\,dt}$ возрастает при $x > 0$.

2237. Найти:

а) $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$, если $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$

б) $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, если $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t\cdot\dfrac{1-x}{1-t} & \text{при } t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

2238. Вычислить и построить графики интегралов $I = I(\alpha)$, рассматривая их как функции параметра α, если:

а) $I = \int\limits_0^1 x\,|x-\alpha|\,dx$;

б) $I = \int\limits_0^\pi \dfrac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}\,dx$;

в) $I = \int\limits_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$.

Применяя формулу интегрирования по частям, найти следующие определенные интегралы:

2239. $\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$. **2240.** $\int\limits_0^\pi x\sin x\,dx$.

2241. $\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$. **2242.** $\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$.

2243. $\int\limits_0^1 \arccos x\,dx$. **2244.** $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

Применяя подходящую замену переменной, найти следующие определенные интегралы:

2245. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$. **2246.** $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

2247. $\int\limits_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$. **2248.** $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

2249. $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$.

2250. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$, полагая $x-\frac{1}{x}=t$.

2251. Объяснить, почему формальная замена $x = \varphi(t)$ приводит к неверным результатам, если:

а) $\int\limits_{-1}^1 dx$, где $t=x^{2/3}$; б) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$, где $x=\frac{1}{t}$;

в) $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, где $\mathrm{tg}\,x=t$.

2252. Можно ли в интеграле $\int\limits_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ положить $x=\sin t$?

2253. Можно ли в интеграле $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ при замене переменной $x=\sin t$ в качестве новых пределов взять числа π и $\frac{\pi}{2}$?

2254. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int\limits_0^1 f(a+(b-a)x)\,dx.$$

2255. Доказать равенство

$$\int\limits_0^a x^3 f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} xf(x)\,dx \quad (a>0).$$

2256. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на сегменте $[A, B]\supset[a, b]$. Найти $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b f(x+y)\,dy$ при $[a-x, b-x]\subset[A, B]$.

2257. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, то

а) $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx=\int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$;

б) $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$.

2258. Доказать, что для непрерывной на $[-l, l]$ функции $f(x)$ имеем: 1) $\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx=2\int\limits_0^{l} f(x)\,dx$, если функция $f(x)$ четная, и 2) $\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx=0$, если функция $f(x)$ нечетная. Дать геометрическую интерпретацию этих фактов.

2259. Доказать, что одна из первообразных четной функции есть функция нечетная, а всякая первообразная нечетной функции есть функция четная.

2260. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{1/2}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+(1/x)}\,dx,$$

введя новую переменную

$$t = x + \frac{1}{x}.$$

2261. В интеграле $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$ выполнить замену переменного $\sin x = t$.

2262. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-2\pi n}^{1} \left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]\right| dx,$$

где n — натуральное число.

2263. Найти $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$

2264. Найти интеграл $\int\limits_{-1}^{3} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$, если

$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}.$$

2265. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, определенная при $-\infty < x < +\infty$ и имеющая период T, то

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx,$$

где a — любое число.

2266. Доказать, что при n нечетном функции

$$F(x) = \int\limits_0^x \sin^n x\,dx \quad \text{и} \quad G(x) = \int\limits_0^x \cos^n x\,dx$$

периодические с периодом 2π; а при n четном каждая из этих функций есть сумма линейной функции и периодической функции.

2267. Доказать, что функция $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, где $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом T, в общем случае, есть сумма линейной функции и периодической функции периода T.

Вычислить интегралы:

2268. $\int\limits_0^1 x(2-x^2)^{12}\,dx$.

2269. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$.

2270. $\int\limits_1^e (x\ln x)^2\,dx$. 2271. $\int\limits_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx$.

2272. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. 2273. $\int\limits_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$.

2274. $\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$.

2275. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$.

2276. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

2277. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$. 2278. $\int\limits_0^{\pi} (x\sin x)^2\,dx$.

2279. $\int\limits_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx$. 2280. $\int\limits_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^4 x\,dx$.

С помощью формул понижения вычислить интегралы, зависящие от параметра n, принимающего целые положительные значения:

2281. $I_n=\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$. 2282. $I_n=\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$

2283. $I_n=\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx$. 2284. $I_n=\int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx$.

2285. $I_n=\int\limits_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 2286. $I_n=\int\limits_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx$.

2287. $I_n = \int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx.$

Если $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ есть комплексная функция от действительной переменной x, где $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$ и $i^2 = -1$, то по определению полагают:

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + i\int f_2(x)\,dx.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Re}\int f(x)\,dx = \int \operatorname{Re} f(x)\,dx$$

и

$$\operatorname{Im}\int f(x)\,dx = \int \operatorname{Im} f(x)\,dx.$$

2288. Пользуясь формулой Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

показать, что

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{если } m = n \end{cases}$$

(n и m — целые).

2289. Показать, что

$$\int\limits_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}\,dx = \frac{e^{b(\alpha+i\beta)} - e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta}$$

(α и β — постоянные).

Пользуясь формулами Эйлера:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

вычислить интегралы (m и n — целые положительные числа):

2290. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\,dx.$

2291. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx.$ 2292. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx.$

2293. $\int\limits_0^{\pi} \cos^n x \cos nx\,dx.$ 2294. $\int\limits_0^{\pi} \sin^n x \sin nx\,dx.$

Найти интегралы (n — натуральное число):

2295. $\int\limits_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos (n+1) x\, dx.$

2296. $\int\limits_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin (n+1) x\, dx.$

2297. $\int\limits_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x\, dx.$

2298. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \cos x \cdot \cos 2nx\, dx.$

2299. Применяя многократное интегрирование по частям, вычислить *интеграл Эйлера:* $\mathrm{B}(m, n) = \int\limits_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx$, где m и n — целые положительные числа.

2300. *Многочлен Лежандра* $P_n(x)$ определяется формулой: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]$ $(n = 0, 1, 2\ .\ .\ .)$.

Доказать, что

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

2301. Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема на $[a, b]$ и $F(x)$ — функция такая, что $F'(x) = f(x)$ всюду в $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа внутренних точек c_i $(i = 1, \ .\ .\ .\ , p)$ и точек a и b, где функция $F(x)$ терпит разрыв 1-го рода («обобщенная первообразная»). Доказать, что

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p} [F(c_i+0) - F(c_i-0)].$$

2302. Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема на сегменте $[a, b]$ и

$$F(x) = C + \int\limits_a^x f(\xi)\, d\xi$$

— ее неопределенный интеграл.

Доказать, что функция $F(x)$ непрерывна и во всех точках непрерывности функции $f(x)$ имеет место равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Что можно сказать о производной функции $F(x)$ в точках разрыва функции $f(x)$?

Рассмотреть примеры:

а) $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и $f(x) = 0$ при $x \neq \frac{1}{n}$;

б) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Найти неопределенные интегралы от ограниченных разрывных функций:

2303. $\int \operatorname{sgn} x\,dx$. **2304.** $\int \operatorname{sgn}(\sin x)\,dx$.

2305. $\int [x]\,dx$ $(x \geqslant 0)$. **2306.** $\int x[x]\,dx$ $(x \geqslant 0)$.

2307. $\int (-1)^{[x]}\,dx$.

2308. $\int\limits_0^x f(x)\,dx$, где $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < l, \\ 0, & \text{если } |x| > l. \end{cases}$

Вычислить определенные интегралы от ограниченных разрывных функций:

2309. $\int\limits_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3)\,dx$. **2310.** $\int\limits_0^2 [e^x]\,dx$.

2311. $\int\limits_0^6 [x] \sin \pi x/6\,dx$. **2312.** $\int\limits_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x)\,dx$.

2313. $\int\limits_1^{n+1} \ln [x]\,dx$, где a — натуральное число.

2314. $\int\limits_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]\,dx$.

2315. Найти $\int\limits_E |\cos x| \sqrt{\sin x}\,dx$, где E — множество тех значений сегмента $[0, 4\pi]$, для которых подынтегральное выражение имеет смысл.

§ 3. Теоремы о среднем

1°. Среднее значение функции. Число

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

называется *средним значением* функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$M[f] = f(c).$$

2°. Первая теорема о среднем. Если: 1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены и соответственно интегрируемы на сегменте $[a, b]$; 2) функция $\varphi(x)$ не меняет знака при $a < x < b$, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \mu \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

где $m \leq \mu \leq M$ и $m = \inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$; 3) если, сверх того, функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то $\mu = f(c)$, где $a \leq c \leq b$.

3°. Вторая теорема о среднем. Если: 1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены и собственно интегрируемы на сегменте $[a, b]$; 2) функция $\varphi(x)$ монотонна при $a < x < b$, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

где $a \leq \xi \leq b$; 3) если, сверх того, функция $\varphi(x)$ монотонно убывающая (в широком смысле!) и неотрицательная, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx \quad (a \leq \xi \leq b);$$

3') если же функция $\varphi(x)$ монотонно возрастающая (в широком смысле) и неотрицательная, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx \quad (a \leq \xi \leq b).$$

2316. Определить знаки следующих определенных интегралов:

а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \sin x\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$,

в) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx$; г) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} x^2 \ln x\,dx$.

2317. Какой интеграл больше:

а) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x\,dx$ или $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$?

б) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$ или $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$?

в) $\int\limits_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$ или $\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$?

2318. Определить средние значения данных функций в указанных промежутках:

а) $f(x) = x^2$ на $[0,\ 1]$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0,\ 100]$;

в) $f(x) = 10 + 2\sin x + 3\cos x$ на $[0,\ 2\pi]$;

г) $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$ на $[0,\ 2\pi]$.

2319. Найти среднее значение длины фокального радиуса-вектора эллипса

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

2320. Найти среднее значение скорости свободно падающего тела, начальная скорость которого равна v_0.

2321. Сила переменного тока меняется по закону

$$i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right),$$

где i_0 — амплитуда, t — время, T — период и φ — начальная фаза. Найти среднее значение квадрата силы тока.

2321.1. Пусть $f(x) \in C\,[0,\ +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Найти

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(x)\,dx.$$

Рассмотреть пример $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

2322. Пусть

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt = xf(\theta x).$$

Найти θ, если:

а) $f(t) = t^n$ $(n > -1)$; б) $f(t) = \ln t$; в) $f(t) = e^t$.

Чему равны $\lim\limits_{x\to+0}\theta$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta$?

Пользуясь первой теоремой о среднем, оценить интегралы:

2323. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0{,}5\cos x}$. **2324.** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

2325. $\displaystyle\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,dx.$

2326. Доказать равенства:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0;$ б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = 0.$

2326.1. Найти:

а) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^2+1};$ б) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to +0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x},$

где $a>0$, $b>0$ и $f(x)\in C[0, 1]$.

2327. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), причем

$$\varphi'(x) \geqslant 0 \text{ при } a<x<b.$$

Доказать вторую теорему о среднем, применяя интегрирование по частям и используя первую теорему о среднем.

Пользуясь второй теоремой о среднем, оценить интегралы:

2328. $\displaystyle\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$

2329. $\displaystyle\int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x\,dx \quad (\alpha \geqslant 0;\ 0<a<b).$

2330. $\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,dx \quad (0<a<b).$

2331. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ интегрируемы на промежутке $[a, b]$ вместе со своими квадратами. Доказать *неравенство Коши—Буняковского*

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right\}^2 \leqslant \int_a^b \varphi^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx.$$

2332. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и $f(a)=0$.

Доказать неравенство $M^2 \leqslant (b-a)\int\limits_a^b f'^2(x)\,dx$, где $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$.

2333. Доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx = 0 \quad (p>0).$$

§ 4. Несобственные интегралы

1°. Несобственная интегрируемость функций. Если функция $f(x)$ собственно интегрируема на каждом конечном сегменте $[a, b]$, то, по определению, полагают:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности точки b и собственно интегрируема на каждом сегменте $[a, b-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, то принимают:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Если пределы (1) или (2) существуют, то соответствующий интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся* (в элементарном смысле!).

2°. Критерий Коши. Для сходимости интеграла (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $b = b(\varepsilon)$ такое, что при любых $b' > b$ и $b'' > b$ было бы выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Аналогично формулируется критерий Коши для интеграла типа (2).

3°. Признаки абсолютной сходимости. Если $|f(x)|$ несобственно интегрируема, то соответствующий элементарный интеграл (1) или (2) от функции $f(x)$ называется *абсолютно сходящимся* и является интегралом заведомо сходящимся.

Признак сравнения I. Пусть $|f(x)| \leqslant F(x)$ при $x \geqslant a$. Если $\int\limits_a^{+\infty} F(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно.

Признак сравнения II. Если $\psi(x) > 0$ и $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$ при $x \to +\infty$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \psi(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. В частности, это имеет место, если $\varphi(x) \sim \psi(x)$ при $x \to +\infty$.

Признак сравнения III. а) Пусть

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right) \text{ при } x \to +\infty.$$

В таком случае интеграл (1) сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \leqslant 1$.

б) Пусть

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right) \text{ при } x \to b-0.$$

В таком случае интеграл (2) сходится, если $p < 1$ и расходится, если $p \geqslant 1$.

4°. Специальный признак сходимости. Если: 1) функция $\varphi(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$ и 2) функция $f(x)$ имеет ограниченную первообразную

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi,$$

то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

сходится, вообще говоря, не абсолютно.

В частности, интегралы

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (a > 0)$$

сходятся, если $p > 0$.

5°. Главное значение в смысле Коши. Если функция $f(x)$ такова, что при любом $\varepsilon > 0$ существуют собственные интегралы

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx \quad \text{и} \quad \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx \quad (a < c < b),$$

то под *главным значением в смысле Коши* (*v*. p.) понимается число

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx\right].$$

Аналогично

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\, dx.$$

Вычислить интегралы:

2334. $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (a > 0)$. **2335.** $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$.

2336. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. **2337.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2338. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$. **2339.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

2340. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$. **2341.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

2342. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

2343. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

2344. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$. **2345.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$.

2346. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx \quad (a>0)$.

2347. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx \quad (a>0)$.

С помощью формул понижения вычислить следующие несобственные интегралы (n — натуральное число):

2348. $I_n = \int\limits_{0}^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$.

2349. $I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} \quad (ac-b^2>0)$.

2350. $I_n = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\ldots(x+n)}$.

2351. $I_n = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

2352. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x}$.

2353. а) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x\, dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \cos x\, dx$.

2354. Найти $\int\limits_E e^{-x/2} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}}\, dx$, где E — множество тех значений x интервала $(0, +\infty)$, для которых подынтегральное выражение имеет смысл.

2355. Доказать равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int\limits_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2 + 4ab}\right) dx,$$

где $a > 0$ и $b > 0$, предполагая, что интеграл в левой части равенства имеет смысл.

2356. *Средним значением функции* $f(x)$ на интервале $(0, +\infty)$ называется число $M|f| = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x f(\xi)\, d\xi$.

Найти средние значения следующих функций:

а) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 (x\sqrt{2})$;

б) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; в) $f(x) = \sqrt{x} \sin x$.

2357. Найти:

а) $\lim\limits_{x \to 0} x \int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\, dt$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\int\limits_0^x \sqrt{1+t^4}\, dt}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int\limits_x^{+\infty} t^{-1} e^{-t}\, dt}{\ln \frac{1}{x}}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \int\limits_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt$,

где $\alpha > 0$ и $f(t)$ — непрерывная функция на сегменте $[0, 1]$.

Исследовать сходимость интегралов

2358. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$. **2359.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2+1}}$.

2360. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$. **2361.** $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$.

2362. $\int\limits_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\, dx$. **2363.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ $(n \geqslant 0)$.

2364. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx$ $(a \neq 0)$. **2365.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$.

2366. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^n} dx$ $(n \geqslant 0)$.

2367. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx$ $(n \geqslant 0)$.

2368. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$. **2369.** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$.

2370. $\int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$. **2370.1.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$.

2371. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$. **2372.** $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$.

2373. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$. **2374.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$.

2375. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$.

2376. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1} |x-a_2|^{p_2} \dots |x-a_n|^{p_n}}$

$(a_1 < a_2 < \dots < a_n)$.

2376.1. $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha |x-1|^\beta\, dx$.

2377. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\, dx$, где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ — взаимно простые многочлены соответственно степеней m и n.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие интегралы:

2378. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Указание. $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$.

2379. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\, dx$. **2380.** $\int\limits_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)\, dx$ $(q \neq 0)$.

2380.1. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin(\sec x)\, dx$. **2380.2.** $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x)\, dx$.

2381. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q}\, dx$ $(q \geqslant 0)$.

2382. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\, dx$. **2383.** $\int\limits_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x\, dx$,

где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ — целые многочлены и $P_n(x) > 0$, если $x \geqslant a \geqslant 0$.

2384. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится, то обязательно ли $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$?

Рассмотреть примеры:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]}\, dx$.

2384.1. Пусть $f(x) \in C^{(1)}[x_0, +\infty)$, $|f'(x)| < C$ при $x_0 \leqslant x < +\infty$ и $\int\limits_{x_0}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ сходится. Доказать, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Указание. Рассмотреть интеграл

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x) f'(x)\, dx.$$

2385. Можно ли сходящийся несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

от неограниченной функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$, рассматривать как предел соответствующей интегральной суммы $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$ и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$?

2386. Пусть

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \tag{1}$$

сходится и функция $\varphi(x)$ ограничена.

Обязательно ли сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx? \tag{2}$$

Привести соответствующий пример.

Что можно сказать о сходимости интеграла (2), если интеграл (1) сходится абсолютно?

2387. Доказать, что если $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится и $f(x)$ — монотонная функция, то $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

2388. Пусть функция $f(x)$ монотонна в промежутке $0 < x \leqslant 1$ и не ограничена в окрестности точки $x = 0$. Доказать, что если существует $\int_0^1 f(x)\, dx$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

2389. Доказать, что если функция $f(x)$ монотонна и ограничена в интервале $0 < x < a$ и существует несобственный интеграл $\int_0^a x^p f(x)\, dx$, то

$$\lim_{x\to+0} x^{p+1} f(x) = 0.$$

2390. Показать, что:

а) $\text{v. p.} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0;$ б) $\text{v. p.} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0;$

в) $\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\, dx = 0.$

2391. Доказать, что при $x > 0$ существует

$$\operatorname{li} x = \text{v. p.} \int\limits_{0}^{x} \frac{d\xi}{\ln \xi}.$$

Найти следующие интегралы:

2392. $\text{v. p.} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$ **2393.** $\text{v. p.} \int\limits_{1/2}^{2} \frac{dx}{x \ln x}.$

2394. $\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\, dx.$ **2395.** $\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\, dx.$

§ 5. Вычисление площадей

1°. Площадь в прямоугольных координатах. Площадь S плоской фигуры $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 10),

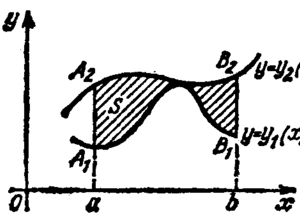

Рис. 10

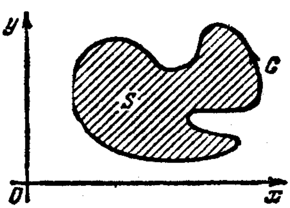

Рис. 11

ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ $(y_2(x) \geq y_1(x))$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, равна

$$S = \int\limits_{a}^{b} [y_2(x) - y_1(x)]\, dx.$$

2°. Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде.

Если $x = x(t)$, $y = y(t)$ $[0 \leqslant t \leqslant T]$ — параметрические уравнения кусочно гладкой простой замкнутой кривой C, пробегаемой против хода часовой стрелки и ограничивающей слева от себя фигуру с площадью S (рис. 11), то

$$S = -\int_0^T y(t)\,x'(t)\,dt = \int_0^T x(t)\,y'(t)\,dt,$$

или

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T [x(t)\,y'(t) - x'(t)\,y(t)]\,dt.$$

3°. Площадь в полярных координатах. Площадь S сектора OAB (рис. 12), ограниченного непрерывной

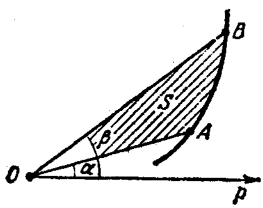

Рис. 12

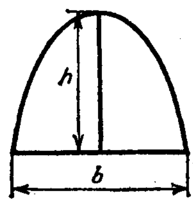

Рис. 13

кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полупрямыми $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, равна

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

2396. Доказать, что площадь прямого параболического сегмента равна

$$S = \frac{2}{3}bh,$$

где b — основание и h — высота сегмента (рис. 13).

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в прямоугольных координатах *):

2397. $ax = y^2$, $ay = x^2$.

2398. $y = x^2$, $x + y = 2$.

2399. $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$.

2400. $y = |\lg x|$, $y = 0$, $x = 0{,}1$, $x = 10$.

2400.1. $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$.

2400.2. $y = (x+1)^2$, $x = \sin \pi y$, $y = 0$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$.

*) Все параметры в этом и следующих параграфах отдела IV считаются положительными.

2401. $y = x$; $y = x + \sin^2 x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

2402. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$, $y = 0$.

2403. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

2404. $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

2405. $y^2 = 2px$, $27py^2 = 8(x - p)^3$.

2406. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ $(A > 1,\ AC - B^2 > 0)$.

2407. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ (циссоида), $x = 2a$.

2408. $x = a \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$, $y = 0$ (трактриса).

2409. $y^2 = \dfrac{x^n}{(1 + x^{n+2})^2}$ $(x > 0;\ n > -2)$.

2410. $y = e^{-x}|\sin x|$, $y = 0$ $(x \geqslant 0)$.

2411. В каком отношении парабола $y^2 = 2x$ делит площадь круга $x^2 + y^2 = 8$?

2412 (н). Выразить координаты точки $M(x, y)$ гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ как функции площади гиперболического сектора $S = OM'M$, ограниченного дугой гиперболы $M'M$ и двумя лучами OM и OM', где $M'(x, -y)$ — точка, симметричная M относительно оси Ox.

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически:

2413. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (циклоида) и $y = 0$.

2414. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

2415. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (развертка круга) и $x = a$, $y \leqslant 0$.

2416. $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

2417. $x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t$ $(c^2 = a^2 - b^2)$ (эволюта эллипса).

2417.1. $x = a\cos t$, $y = \dfrac{a \sin^2 t}{2 + \sin t}$.

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

2418. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската).

2419. $r = a(1 + \cos\varphi)$ (кардиоида).
2420. $r = a \sin 3\varphi$ (трилистник).
2421. $r = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}$ (парабола), $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.
2422. $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ (эллипс).
2422.1. $r = 3 + 2\cos\varphi$.
2422.2. $r = \dfrac{1}{\varphi}$, $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$ $\left(0 < \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$.
2423. $r = a\cos\varphi$, $r = a(\cos\varphi + \sin\varphi)$ $\left(M\left(\dfrac{a}{2}, 0\right) \in S\right)$.

2424. Найти площадь сектора, ограниченного кривой

$$\varphi = r \operatorname{arctg} r$$

и двумя лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

2424.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$r^2 + \varphi^2 = 1.$$

2424.2. Найти площадь фигуры, ограниченной лепестком кривой

$$\varphi = \sin(\pi r) \quad (0 \leqslant r \leqslant 1).$$

2424.3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\varphi = 4r - r^3, \ \varphi = 0.$$

2424.4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\varphi = r - \sin r, \ \varphi = \pi.$$

2425. Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой

$$r = \frac{2at}{1 + t^2}, \quad \varphi = \frac{\pi t}{1 + t}.$$

Перейдя к полярным координатам, найти площади фигур, ограниченных кривыми:
2426. $x^3 + y^3 = 3axy$ (лист Декарта).
2427. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.
2428. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ (лемниската).

Приведя уравнения к параметрическому виду, найти площади фигур, ограниченных кривыми:

2429. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (астроида).

2430. $x^4+y^4=ax^2y$.

Указание. Положить $y=tx$.

§ 6. Вычисление длин дуг

1°. Длина дуги в прямоугольных координатах. Длина дуги отрезка гладкой (непрерывно дифференцируемой) кривой

$$y=y(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

равна

$$s=\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

2°. Длина дуги кривой, заданной параметрически. Если кривая C задана уравнениями

$$x=x(t),\ y=y(t)\qquad (t_0\leqslant t\leqslant T),$$

где $x(t),\ y(t)\in C^{(1)}\,[t_0,\ T]$, то длина дуги кривой C равна

$$s=\int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

3°. Длина дуги в полярных координатах. Если

$$r=r(\varphi)\quad (\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta),$$

где $r(\varphi)\in C^{(1)}[\alpha,\ \beta]$, то длина дуги соответствующего отрезка кривой равна

$$s=\int\limits_{\alpha}^{a}\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

Длины дуг пространственных кривых см. в отд. VIII.

Найти длины дуг следующих кривых:

2431. $y=x^{3/2}$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$.

2432. $y^2=2px$ $(0\leqslant x\leqslant x_0)$.

2433. $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ от точки $A\,(0,\ a)$ до точки $B\,(b,\ h)$.

2434. $y=e^x$ $(0\leqslant x\leqslant x_0)$.

2435. $x=\dfrac{1}{4}y^2-\dfrac{1}{2}\ln y$ $(1\leqslant y\leqslant e)$.

2436. $y=a\ln\dfrac{a^2}{a^2-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant b<a)$.

2437. $y=\ln\cos x$ $\left(0\leqslant x\leqslant a<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2438. $x = a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$ $(0<b\leqslant y\leqslant a)$.

2439. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$ $\left(0\leqslant x\leqslant \dfrac{5}{3}a\right)$.

2440. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (астроида).

2441. $x=\dfrac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t$, $c^2=a^2-b^2$ (эволюта эллипса).

2442. $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$.

2443. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

2444. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ при $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ (развертка окружности).

2445. $x=a(\operatorname{sh} t-t)$, $y=a(\operatorname{ch} t-1)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$.

2445.1. $x=\operatorname{ch}^3 t$, $y=\operatorname{sh}^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant T)$.

2446. $r=a\varphi$ (спираль Архимеда) при $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$

2447. $r=ae^{m\varphi}$ $(m>0)$ при $0<r<a$.

2448. $r=a(1+\cos\varphi)$.

2449. $r=\dfrac{p}{1+\cos\varphi}$ $\left(|\varphi|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2450. $r=a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.

2451. $r=a\operatorname{th}\dfrac{\varphi}{2}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$.

2452. $\varphi=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)$ $(1\leqslant r\leqslant 3)$.

2452.1. $\varphi=\sqrt{r}$ $(0\leqslant r\leqslant 5)$.

2452.2. $\varphi=\displaystyle\int_0^r\frac{\operatorname{sh}\rho}{\rho}\,d\rho$ $(0\leqslant r\leqslant R)$.

2452.3. $r=1+\cos t$, $\varphi=t-\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$ $(0\leqslant t\leqslant T<\pi)$.

2453. Доказать, что длина дуги эллипса

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t$$

равна длине одной волны синусоиды $y=c\sin\dfrac{x}{b}$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

2454. Парабола $4ay=x^2$ катится по оси Ox. Доказать, что фокус параболы описывает цепную линию.

2455. Найти отношение площади, ограниченной петлей кривой

$$y = \pm\left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x},$$

к площади круга, длина окружности которого равна длине контура этой кривой.

§ 7. Вычисление объемов

1°. Объем тела по известным поперечным сечениям. Если объем V тела существует и $S = S(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$ есть площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке x, то

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

2°. Объем тела вращения. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant y(x),$$

где $y(x)$ — непрерывная однозначная функция, равен

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx.$$

В более общем случае, объем кольца, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные неотрицательные функции, равен

$$V = \pi \int_a^b \left[y_2^2(x) - y_1^2(x)\right] dx.$$

2456. Найти объем чердака, основание которого есть прямоугольник со сторонами a и b, верхнее ребро равно c, а высота равна h.

2457. Найти объем обелиска, параллельные основания которого суть прямоугольники со сторонами A, B и a, b, а высота равна h.

2458. Найти объем усеченного конуса, основания которого суть эллипсы с полуосями A, B и a, b, а высота равна h.

2459. Найти объем параболоида вращения, основание которого S, а высота равна H.

2460. Пусть для кубируемого тела площадь $S = S(x)$ его поперечного сечения, перпендикулярного к оси Ox, изменяется по квадратичному закону:

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \quad [a \leqslant x \leqslant b],$$

где A, B и C — постоянные.

Доказать, что объем этого тела равен

$$V = \frac{H}{6}\left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right],$$

где $H = b - a$ (*формула Симпсона*).

2461. Тело представляет собой множество точек $M(x, y, z)$, где $0 \leqslant z \leqslant 1$, причем $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, если z рационально, и $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$, если z иррационально. Доказать, что объем этого тела не существует, хотя соответствующий интеграл

$$\int\limits_0^1 S(z)\,dz = 1.$$

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

2462. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = \dfrac{c}{a}x, \quad z = 0.$

2463. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (эллипсоид).

2464. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = \pm c.$

2465. $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

2466. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$.

2467. $z^2 = b(a - x)$, $x^2 + y^2 = ax$.

2468. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{z^2} = 1 \quad (0 < z < a).$

2469. $x + y + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2470. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2$.

2471. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant y(x),$$

где $y(x)$ — однозначная непрерывная функция, равен

$$V_y = 2\pi \int\limits_a^b xy(x)\,dx.$$

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении отрезков следующих линий:

2472. $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ вокруг оси Ox (нейлоид).

2473. $y = 2x - x^2$, $y = 0$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

2474. $y = \sin x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

2475. $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$, $y = b\left|\dfrac{x}{a}\right|$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy

2476. $y = e^{-x}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x < +\infty)$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

2477. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(0 < a \leqslant b)$ вокруг оси Ox.

2478. $x^2 - xy + y^2 = a^2$ вокруг оси Ox.

2479. $y = e^{-x}\sqrt{\sin x}$ $(0 \leqslant x < +\infty)$ вокруг оси Ox.

2480. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, $y = 0$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy; в) вокруг прямой $y = 2a$.

2481. $x = a\sin^3 t$, $y = b\cos^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

2481.1. Найти объем тела, образованного вращением площади петли кривой $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$ вокруг: а) оси Ox; б) оси Oy.

2482. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси плоской фигуры

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)$$

(φ и r — полярные координаты), равен

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi.$$

Найти объемы тел, образованных вращением плоских фигур, заданных в полярных координатах:

2483. $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$: а) вокруг полярной оси; б) вокруг прямой $r\cos\varphi = -\dfrac{a}{4}$.

2484. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy; в) вокруг прямой $y = x$.

Указание. Перейти к полярным координатам.

2484.1. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной полувитком спирали Архимеда

$$r = a\varphi \quad (a > 0;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi),$$

вокруг полярной оси.

2484.2. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $\varphi = \pi r^3$, $\varphi = \pi$, вокруг полярной оси.

2485. Найти объем тела, образованного вращением фигуры $a \leqslant r \leqslant a\sqrt{2\sin 2\varphi}$ вокруг полярной оси.

§ 8. Вычисление площадей поверхностей вращения

Площадь поверхности, образованной вращением гладкой кривой AB вокруг оси Ox, равна

$$P = 2\pi \int_A^B |y|\, ds,$$

где ds — дифференциал дуги.

Найти площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

2486. $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ вокруг оси Ox.

2487. $y = a\cos\frac{\pi x}{2b}$ $(|x| \leqslant b)$ вокруг оси Ox.

2488. $y = \operatorname{tg} x \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ вокруг оси Ox.

2489. $y^2 = 2px$ $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$: а) вокруг оси Ox б) вокруг оси Oy.

2490. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b \leqslant a)$; а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

2491. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(b \geqslant a)$ вокруг оси Ox.

2492. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ вокруг оси Ox.

2493. $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ $(|x| \leqslant b)$; а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

2494. $\pm x = a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ вокруг оси Ox.

2495. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$; а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy; в) вокруг прямой $y = 2a$.

2496. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ вокруг прямой $y = x$.

2497. $r = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

2498. $r^2 = a^2\cos 2\varphi$: а) вокруг полярной оси; б) вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{2}$; в) вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2499. Тело образовано вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $ay = a^2 - x^2$ и осью Ox.

Найти отношение поверхности тела вращения к поверхности равновеликого шара.

2500. Фигура, ограниченная параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = p/2$, вращается вокруг прямой $y = p$. Найти объем и поверхность тела вращения.

§ 9. Вычисление моментов. Координаты центра тяжести

1°. Моменты. Если на плоскости Oxy масса M плотности $\rho = \rho(y)$ заполняет некоторый ограниченный континуум Ω (линию, плоскую область) и $\omega = \omega(y)$ — соответствующая мера (длина дуги, площадь) той части континуума Ω, ординаты которой не превышают y, то *k-м моментом* массы M относительно оси Ox называется число

$$M_k = \lim_{\max \Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(y_i)\, y_i^k \Delta\omega(y_i) = \int_{\Omega} \rho y^k d\omega(y_i) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ и $\Delta\omega(y_i) = \omega(y_i) - \omega(y_{i-1})$.

Как частные случаи, получаем при $k = 0$ *массу* M, при $k = 1$ — *статический момент*, при $k = 2$ — *момент инерции*.

Аналогично определяются моменты массы относительно координатных плоскостей.

Если $\rho = 1$, то соответствующий момент называется *геометрическим* (момент линии, плоской фигуры, тела и т. д.).

2°. Центр тяжести. Координаты центра тяжести (x_0, y_0) однородной плоской фигуры площади S определяются по формулам

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S},$$

где $M_1^{(y)}$, $M_1^{(x)}$ — геометрические статические моменты фигуры относительно осей Oy и Ox.

2501. Найти статический момент и момент инерции дуги полуокружности радиуса a относительно диаметра, проходящего через концы этой дуги.

2501.1. Найти статический момент дуги параболы

$$y^2 = 2px \quad (0 \leqslant x \leqslant p/2)$$

относительно прямой $x = p/2$.

2502. Найти статический момент и момент инерции однородной треугольной пластинки с основанием b и высотой h относительно основания ($\rho = 1$).

2502.1. Найти моменты инерции $I_x = M_2^{(x)}$ и $I_y = M_2^{(y)}$ относительно осей Ox и Oy параболического сегмента, ограниченного кривыми

$$ay = 2ax - x^2 \ (a > 0) \ \text{и} \ y = 0.$$

Чему равны *радиусы инерции* r_x и r_y, т. е. величины, определяемые соотношениями

$$I_x = Sr_x^2, \quad I_y = Sr_y^2,$$

где S — площадь сегмента?

2503. Найти моменты инерции однородной эллиптической пластинки с полуосями a и b относительно ее главных осей ($\rho = 1$).

2504. Найти статический момент и момент инерции однородного кругового конуса с радиусом основания r и высотой h относительно плоскости основания этого конуса ($\rho = 1$).

2504.1. Найти момент инерции однородного шара радиуса R и массы M относительно его диаметра.

2505. Доказать первую теорему Гульдена: площадь поверхности, образованной вращением плоской дуги C вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в плоскости дуги, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести дуги C.

2506. Доказать вторую теорему Гульдена: объем тела, образованного вращением плоской фигуры S вокруг не пересекающей ее оси, расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади S на длину окружности, описываемой центром тяжести этой фигуры.

2507. Определить координаты центра тяжести круговой дуги: $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ ($|\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi$).

2508. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной параболами $ax = y^2$, $ay = x^2$ ($a > 0$).

2509. Определить координаты центра тяжести области $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ ($0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$).

2510. Определить центр тяжести однородного полушара радиуса a.

2511. Определить координаты центра тяжести $C(\varphi_0, r_0)$ дуги OP логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$ ($m > 0$) от точки $O(-\infty, 0)$ до точки $P(\varphi, r)$. Какую кривую описывает точка C при движении точки P?

2512. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной кривой $r = a(1 + \cos\varphi)$.

2513. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ и осью Ox.

2514. Определить координаты центра тяжести тела, образованного вращением площади $0 \leqslant x \leqslant a$; $y^2 \leqslant 2px$ вокруг оси Ox.

2515. Определить координаты центра тяжести полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$.

§ 10. Задачи из механики и физики

Составляя соответствующие интегральные суммы и находя их пределы, решить следующие задачи:

2516. Определить массу стержня длины $l = 10$ м, если линейная плотность стержня меняется по закону $\delta = 6 + 0{,}3x$ кг/м, где x — расстояние от одного из концов стержня.

2517. Какую работу надо затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту h? Чему равна эта работа, если тело удаляется в бесконечность?

2518. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть упругую пружину на 10 см, если сила в 1 кгс растягивает эту пружину на 1 см?

Указание. Использовать закон Гука.

2519. Цилиндр диаметра 20 см и длины 80 см заполнен паром под давлением 10 кгс/см^2. Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем пара в два раза, считая, что температура пара остается постоянной?

2520. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса a, диаметр которого находится на поверхности воды.

2521. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму трапеции, нижнее основание которой $a = 10$ м, верхнее $b = 6$ м и высота $h = 5$ м, если уровень погружения нижнего основания $c = 20$ м.

Составляя дифференциальные уравнения, решить следующие задачи:

2522. Скорость точки меняется по закону: $v = v_0 + at$.

Какой путь пройдет эта точка за промежуток времени $[0, T]$?

2523. Однородный шар радиуса R и плотности δ вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω. Определить кинетическую энергию шара.

2524. С какой силой притягивает материальная бесконечная прямая с постоянной линейной плотностью μ_0 материальную точку массы m, находящуюся на расстоянии a от этой прямой?

2525. Определить, с какой силой притягивает круглая пластинка радиуса a и постоянной поверхностной плотности δ_0 материальную точку P массы m, находящуюся на перпендикуляре к плоскости пластинки, проходящем через центр ее Q, на кратчайшем расстоянии PQ, равном b.

2526. Согласно закону Торичелли скорость истечения жидкости из сосуда равна $v = c\sqrt{2gh}$, где g — ускорение силы тяжести, h — высота уровня жидкости над отверстием и $c = 0{,}6$ — опытный коэффициент.

В какое время опорожнится наполненная доверху вертикальная цилиндрическая бочка диаметра $D = 1$ м и высотой $H = 2$ м через круглое отверстие в дне диаметра $d = 1$ см?

2527. Какую форму должен иметь сосуд, представляющий собой тело вращения, чтобы понижение уровня жидкости при истечении было равномерным?

2528. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличному количеству. Найти закон распада радия, если в начальный момент $t = 0$ имелось Q_0 граммов радия, а через время $T = 1600$ лет его количество уменьшится в два раза.

2529. Для случая процесса второго порядка скорость химической реакции, переводящей вещество A в вещество B, пропорциональна произведению концентрации этих веществ. Какой процент вещества B будет содержаться в сосуде через $t = 1$ ч., если при $t = 0$ мин. имелось 20 % вещества B, а при $t = 15$ мин. его стало 80 %?

2530. Согласно закону Гука относительное удлинение ε стержня пропорционально напряжению силы σ в соответствующем поперечном сечении, т. е. $\varepsilon = \sigma/E$, где E — модуль Юнга.

Определить удлинение тяжелого стержня конической формы, укрепленного основанием и обращенного вершиной вниз, если радиус основания равен R, высота конуса H и удельный вес γ.

§ 11. Приближенное вычисление определенных интегралов

1°. Формула прямоугольников. Если функция $y = y(x)$ непрерывна и дифференцируема достаточное число раз на конечном сегменте $[a, b]$ и $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$ $(i=0, 1, \ldots, n)$, $y_i = y(x_i)$, то

$$\int_a^b y(x)\,dx = h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{(b-a)h}{2} y'(\xi) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

2°. Формула трапеций. При тех же обозначениях имеем:

$$\int_b^a y(x)\,dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) + R_n$$

где

$$R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi') \quad (a \leqslant \xi' \leqslant b).$$

3°. Параболическая формула (формула Симпсона). Полагая $n = 2k$, получим:

$$\int_a^b y(x)\,dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2k-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2k-2})] + R_n,$$

где

$$R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{IV}(\xi'') \quad (a \leqslant \xi'' \leqslant b).$$

2531. Применяя формулу прямоугольников ($n = 12$), приближенно вычислить

$$\int_0^{2\pi} x \sin x\,dx$$

и результат сравнить с точным ответом.

С помощью формулы трапеций вычислить интегралы и оценить их погрешности, если:

2532. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ $(n = 8)$. **2533.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ $(n = 12)$.

2534. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\, dx \quad (n=6).$

С помощью формулы Симпсона вычислить интегралы:

2535. $\int\limits_{1}^{9} \sqrt{x}\, dx \quad (n=4).$

2536. $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\, dx \ (n=6).$

2537. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx \quad (n=10).$

2538. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\, dx}{\ln(1+x)} \quad (n=6).$

2539. Принимая $n=10$, вычислить *константу Каталана*

$$G=\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx.$$

2540. Пользуясь формулой $\frac{\pi}{4}=\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$, вычислить число π с точностью до 10^{-5}.

2541. Вычислить $\int\limits_{0}^{1} e^{x^2} dx$ с точностью до 0,001.

2542. Вычислить $\int\limits_{0}^{1} (e^x-1)\ln\frac{1}{x}\, dx$ с точностью до 10^{-4}.

2543. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл вероятностей $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

2544. Приближенно найти длину эллипса, полуоси которого $a=10$ и $b=6$.

2545. Построить по точкам график функции

$$y=\int\limits_{0}^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi),$$

приняв $\Delta x = \pi/3$.

ОТДЕЛ V

РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов

1°. Общие понятия. Числовой ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

называется *сходящимся*, если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad (\textit{сумма ряда}),$$

где $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. В противном случае ряд (1) называется *расходящимся*.

2°. Критерий Коши. Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N$ и $p > 0$ (n и p — натуральные числа) было выполнено неравенство

$$|S_{n+p}-S_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| < \varepsilon.$$

В частности, если ряд сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

3°. Признак сравнения 1. Пусть, кроме ряда (1), имеем ряд

$$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots \tag{2}$$

Если при $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n,$$

то 1) из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1); 2) из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

В частности, если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то ряды с знакоположительными членами (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

4°. Признак сравнения II. Если

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)^{*)},$$

то а) при $p > 1$ ряд (1) сходится и б) при $p \leq 1$ расходится.

5°. Признак Даламбера. Если $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то а) при $q < 1$ ряд (1) сходится и б) при $q > 1$ расходится.

6°. Признак Коши. Если $a_n \geqslant 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то а) при $q < 1$ ряд (1) сходится и б) при $q > 1$ расходится.

7°. Признак Раабе. Если $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) и

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p,$$

то а) при $p > 1$ ряд (1) сходится и б) при $p < 1$ расходится.

8°. Признак Гаусса. Если $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

где $|\theta_n| < C$ и $\varepsilon > 0$, то а) при $\lambda > 1$ ряд (1) сходится и б) при $\lambda < 1$ расходится; в) при $\lambda = 1$ ряд (1) сходится, если $\mu > 1$, и расходится, если $\mu \leq 1$.

9°. Интегральный признак Коши. Если $f(x)$ ($x \geqslant 1$) — неотрицательная невозрастающая непрерывная функция, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их суммы:

2546. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots$

2547. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \ldots$
$$\ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \ldots$$

*) Значение символа O^* см. отдел I, § 6, 1°.

2548. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$

2549. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

2550. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$

2551. а) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\ldots+q^n\sin n\alpha+\ldots$;

б) $q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\ldots+q^n\cos n\alpha+\ldots$

$(|q|<1)$.

2552. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

2553. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$.

Указание. Показать, что при $x\neq k\pi$ (k — целое) невозможно, чтобы $\sin nx\to 0$ при $n\to\infty$!

2554. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n,\ \text{где}\ A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\quad(p_1=1,\quad p_1<p_2<\ldots),$$

полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения порядка следования их, также сходится и имеет ту же сумму. Обратное неверно; привести пример.

2555. Доказать, что если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ положительны и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, полученный в результате группировки членов этого ряда, сходится, то данный ряд также сходится.

Исследовать сходимость рядов:

2556. $1-1+1-1+1-1+\ldots$

2557. $0{,}001+\sqrt{0{,}001}+\sqrt[3]{0{,}001}+\ldots$

2558. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

2559. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$

2560. $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\ldots+\frac{1}{1000n+1}+\ldots$

2561. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

2562. $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$

2563. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots$

$$\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\ldots$$

2564. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\ldots$

$$\ldots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\ldots$$

2565. Доказать, что ряд чисел, обратных членам арифметической прогрессии, расходится.

2566. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (*A*) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$(*B*) сходятся и $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ ($n=1, 2, \ldots$), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ (*C*) также сходится. Что можно сказать о сходимости ряда (*C*), если ряды (*A*) и (*B*) расходятся?

2567. Пусть даны два расходящихся ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ с неотрицательными членами.

Что можно сказать о сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ и б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$?

2568. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geqslant 0$) сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится. Обратное утверждение неверно; привести примеры.

2569. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то сходятся также ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$.

2570. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

2571. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными и монотонно убывающими членами сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

2572. Является ли сходящимся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}) = 0$$

при $p = 1, 2, 3, \ldots$?

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

2573. $a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \ldots + \dfrac{a_n}{10^n} + \ldots \quad (|a_n| < 10)$.

2574. $\dfrac{\sin x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin nx}{2^n} + \ldots$

2575. $\dfrac{\cos x - \cos 2x}{1} + \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \ldots$

$$\ldots + \frac{\cos nx - \cos (n+1)x}{n} + \ldots$$

2575.1. $\dfrac{\cos x}{1^2} + \dfrac{\cos x^2}{2^2} + \ldots + \dfrac{\cos x^n}{n^2} + \ldots$

Указание. Использовать неравенство

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость следующих рядов:

2576. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$

2577. $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \ldots$

2577.1. $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \ldots$

Пользуясь признаками сравнения, Даламбера или Коши, исследовать сходимость рядов:

2578. $\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\ldots+\frac{1000^n}{n!}+\ldots$

2579. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n!)}+\ldots$

2580. $\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$

2581. а) $\frac{2\cdot 1!}{1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\ldots$

$$\ldots+\frac{2^n n!}{n^n}+\ldots;$$

б) $\frac{3\cdot 1!}{1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\ldots$

$$\ldots+\frac{3^n n!}{n^n}+\ldots$$

2582. $\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\ldots+\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\ldots$

2583. $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3}+\frac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots$

2584. $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\ldots$

2585. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\ldots$

$$\ldots\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right).$$

2585.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

где

$$a_n=\begin{cases}1/n, & \text{если } n=m^2,\\ 1/n^2, & \text{если } n\neq m^2\end{cases}\quad (m \text{ — натуральное число}).$$

2585.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$.

2586. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

2587. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

2588. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$. **2589.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{(2n^2+n+1)^{n+1/2}}$.

2589.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$. **2589.2.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

2590. $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+$

$$+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$$

Указание. $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$.

2591. Доказать, что если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=q \quad (a_n>0),$$

то $a_n = o(q_1^n)$, где $q_1 > q$.

2591.1. Пусть для членов знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n>0)$ выполнено неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \rho < 1 \text{ при } n \geqslant n_0.$$

Доказать, что для остатка ряда

$$R_n = a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots$$

имеет место оценка

$$R_n \leqslant a_{n_0}\frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}, \quad \text{если } n \geqslant n_0.$$

2591.2. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(4n)!!}$, где $[(2n)!!]^2 = 2\cdot 4\ldots 2n$, достаточно взять, чтобы соответствующая частная сумма S_n отличалась от суммы ряда S меньше, чем на $\varepsilon = 10^{-6}$?

2592. Доказать, что если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ $(a_n>0)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Обратное утверждение неверно. Рассмотреть пример

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots$$

2593. Доказать, что если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \; (a_n>0)$ существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q, \qquad \text{(А)}$$

то существует также

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q. \qquad \text{(Б)}$$

Обратное утверждение неверно: если существует предел (Б), то предел (А) может и не существовать. Рассмотреть пример

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

2594. Доказать, что если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q \quad (a_n>0)$, то а) при $q<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; б) при $q>1$ этот ряд расходится (*обобщенный признак Коши*).

Исследовать сходимость рядов:

2595. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$. **2596.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos^2 n\pi/3}{2^n}$.

2597. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$.

2597.1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$.

Пользуясь признаками Раабе и Гаусса, исследовать сходимость следующих рядов:

2598. $\displaystyle\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p+\ldots$

2599. $\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(b+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\ldots$
$(a>0,\ b>0,\ d>0)$.

2600. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

2601. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})}$.

2602. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\ldots(q+n)}$ $(q>0)$.

2603. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$.

2604. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$.

2605(н). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{q(q+1)\ldots(q+n-1)}\right]^{\alpha}$ $(p>0,\ q>0)$.

2606 (н). Доказать, что если для знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ при $n\to\infty$ выполнено условие

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right),$$

где $\varepsilon>0$ произвольно мало; причем, если $p>0$, то $a_n\downarrow 0$ при $n\to\infty$, т. е. a_n при $n\geqslant n_0$, монотонно убывая, стремится к нулю, когда $n\to\infty$.

Определив порядок убывания общего члена a_n, исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, если

2607. $a_n = \dfrac{n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_q}$, где $n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_q > 0$.

2608. $a_n = \dfrac{1}{n^p} \sin \dfrac{\pi}{n}$.

2609. $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \dfrac{n-1}{n+1}$ $(n > 1)$.

2610. $a_n = \ln^p \left(\sec \dfrac{\pi}{n} \right)$.

2611. $a_n = \log_{b^n} \left(1 + \dfrac{\sqrt[n]{a}}{n} \right)$ $(a > 0,\ b > 0)$.

2612. $a_n = \left[e - \left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^n \right]^p$.

2613. $a_n = \dfrac{1}{n^{1+k/\ln n}}$. **2614.** $a_n = \dfrac{1}{n^{1+1/n}}$.

2614.1. Доказать *признак Жамэ*: знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geqslant 0)$ сходится, если

$$\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \frac{n}{\ln n} \geqslant p > 1 \quad \text{при} \quad n > n_0,$$

и расходится, если

$$\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \frac{n}{\ln n} \leqslant 1 \quad \text{при} \quad n > n_0.$$

2615. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ сходится, если существует $\alpha > 0$ такое, что $\dfrac{\ln \dfrac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant 1 + \alpha$ при $n \geqslant n_0$, и расходится, если $\dfrac{\ln \dfrac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant 1$ при $n \geqslant n_0$ (*логарифмический признак*).

Исследовать сходимость рядов с общим членом:

2616. $a_n = n^{\ln x}$ $(x > 0)$.

2617. $a_n = \dfrac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$ $(n > 1)$.

2618. $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$ $(n > 1)$.

Пользуясь интегральным признаком Коши, исследовать сходимость рядов с общим членом:

2619. $a_n = \dfrac{1}{n \ln^p n} \quad (n > 1).$

2620. $a_n = \dfrac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q} \quad (n > 2).$

2620.1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \ldots \ln (n+1)}{\ln (2+p) \cdot \ln (3+p) \ldots \ln (n+1+p)} \quad (p > 0).$$

2620.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\nu(n)}{n^2}$, где $\nu(n)$ — число цифр числа n.

2620.3. Пусть λ_n ($n = 1, 2, \ldots$) — последовательные положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$.

Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$.

2621. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln (n!)}$.

2622. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными монотонно убывающими членами сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

2623. Пусть $f(x)$ — положительная монотонно невозрастающая функция.

Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то для остатка его

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$$

справедлива оценка

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Пользуясь этим, найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ с точностью до 0,01.

2624. Доказать *признак Ермакова*: пусть $f(x)$ — положительная монотонно убывающая функция и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, если $\lambda < 1$, и расходится, если $\lambda > 1$.

2625. Доказать *признак Лобачевского*: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными и монотонно стремящимися к нулю членами сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$, где p_m — наибольший номер членов a_n, удовлетворяющих неравенству

$$a_n \geqslant 2^{-m} \quad (n = 1, 2, \ldots, p_m).$$

Исследовать сходимость следующих рядов:

2626. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$.

2627. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}\right)$.

2628. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1}\right)$.

2629. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}}\right)$.

2630. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$. **2631.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

2632. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$.

2633. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$. **2634.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a \ln n+b}{c \ln n+d}}$.

2635. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2\left(\sin \frac{1}{n}\right)}.$$

2636. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^3}$.

2637. $$\sum_{n=3}^{\infty} \ln\left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}}\right).$$

2638. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$. **2639.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

2640. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{1/n}-\frac{b^{1/n}+c^{1/n}}{2}\right) \quad (a>0,\ b>0,\ c>0)$.

2641. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{n^{\alpha}}-1\right)$.

2642. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\ln \frac{1}{n^{\alpha}}-\ln\left(\sin \frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right]$.

2643. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{-(b \ln n+c \ln^2 n)} \quad (a>0)$.

2644. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} \quad (a>0,\ b>0).$$

2645. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \ldots (2n)!}.$$

Исследовать сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ со следующими общими членами:

2646. $u_n = \int\limits_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$.

2647. $u_n = \frac{1}{\int\limits_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx}$.

2648. $u_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$.

2649. $u_n = \int\limits_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

2650. $u_n = \int\limits_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x}\,dx$.

2651. $u_n = \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}$.

2652. $u_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2 k}{n^\alpha}$.

Заменив последовательности x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ соответствующими рядами, исследовать сходимость их, если:

2653. $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

2654. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}$.

2655. Сколько примерно надо взять членов ряда, чтобы найти его сумму с точностью до 10^{-5}, если

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$.

§ 2. Признаки сходимости знакопеременных рядов

1°. Абсолютная сходимость ряда. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{2}$$

В этом случае ряд (1) также сходится. Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка слагаемых.

Для определения абсолютной сходимости ряда (1) достаточно применить к ряду (2) известные признаки сходимости для знакопостоянных рядов.

Если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) называется *условно* (*не абсолютно*) *сходящимся*. Сумму условно сходящегося ряда путем перестановки слагаемых можно сделать равной любому числу (*теорема Римана*).

2°. Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n-1} b_n + \ldots$$

($b_n \geqslant 0$) сходится (вообще говоря, не абсолютно), если а) $b_n \geqslant b_{n+1}$ ($n = 1, 2, \ldots$) и б) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. В этом случае для остатка ряда

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \ldots$$

имеем оценку

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leqslant \theta_n \leqslant 1).$$

3°. Признак Абеля. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3}$$

сходится, если: 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; 2) числа b_n ($n = 1, 2, \ldots$) образуют монотонную и ограниченную последовательность.

4°. Признак Дирихле. Ряд (3) сходится, если: 1) частичные суммы $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ ограничены в совокупности; 2) b_n монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$.

2656. Доказать, что члены не абсолютно сходящегося ряда можно без перестановки сгруппировать так, что полученный новый ряд будет абсолютно сходящимся.

2657. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является сходящимся, если выполнены условия: а) общий член этого ряда a_n стремится к нулю при $n \to \infty$; б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения их порядка, сходится; в) число слагаемых a_i, входящих в член $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \; (1=p_1<p_2<\ldots)$, ограничено.

2658. Доказать, что сумма сходящегося ряда не изменится, если члены этого ряда переставить так, что ни один из них не удаляется от своего прежнего положения больше чем на m мест, где m — некоторое заранее заданное число.

Доказать сходимость следующих рядов и найти их суммы:

2659. $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots$

2660. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots$

2661. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$

Указание. Применить формулу $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=$ $= C+\ln n+\varepsilon_n$, где C — постоянная Эйлера и $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

2662. Зная, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$, найти суммы рядов, полученных из данного в результате перестановки его членов:

а) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$

и

б) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$

2663. Члены сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ переставить так, чтобы он стал расходящимся.

Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

2664. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n}$.

2665. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

2666. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\ldots$

2666.1. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n, \qquad (1)$$

где $b_n > 0$ и $b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следует ли отсюда, что ряд (1) сходится? Рассмотреть пример

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}.$$

2667. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100} n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$. **2668.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$.

2669. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

2670. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

2671. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)$.

2672. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

2673. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

2673.1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1}$.

2674. Доказать, что знакочередующийся ряд
$$b_1-b_2+b_3-b_4+\ldots+(-1)^{n-1}b_n+\ldots \quad (b_n>0)$$
сходится, если
$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$
где $p>0$ (см. 2606 (н)).

Исследовать на абсолютную (кроме 2690) и условную сходимость следующие ряды:

2675. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$. **2676.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}$.

2677. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$.

2678. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$.

2679. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$. **2680.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$.

2681. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^p}$.

2682. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$.

2683. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

2684. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\frac{n^{100}}{2^n}$.

2685. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$.

2686. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}$. **2687.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$.

2688. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

2689. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)}\right]^p$.

2690. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$. **2691.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

Указание. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2 \neq 0$.

2692. Пусть

$$R(x) = \frac{a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_p}{b_0x^q + b_1x^{q-1} + \ldots + b_q}$$

— рациональная функция, где $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ и $|b_0x^q + b_1x^{q-1} + \ldots + b_q| > 0$ при $x \geqslant n_0$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n).$$

Исследовать сходимость рядов:

2693. $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \ldots$

2694. $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \ldots$

2695. $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \ldots$

2696. $1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \ldots$

2697. Доказать, что ряды

а) $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots;$

б) $\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \ldots$

не абсолютно сходятся в интервале $(0, \pi)$.

2698. Для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (0 < x < \pi)$$

определить для совокупности параметров (p, x): а) область абсолютной сходимости; б) область неабсолютной сходимости.

2698.1. Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n};$

б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)};$ в) $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10\sin n}.$

2699. Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\ldots(n+p)}{n!\, n^q}$$

определить: а) область абсолютной сходимости; б) область условной сходимости.

2700. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n},$$

где $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$.

2701. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1,$$

то можно ли утверждать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится?

Рассмотреть примеры

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right].$$

2702. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — не абсолютно сходящийся ряд и

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i| + a_i}{2}, \quad N_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i| - a_i}{2}.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{P_n} = 1.$$

2703. Доказать, что сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

для каждого $p > 0$ лежит между $\frac{1}{2}$ и 1.

2703.1. Сколько членов ряда следует взять, чтобы получить его сумму с точностью до $\varepsilon = 10^{-6}$, если:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n^0}{\sqrt{n}}$.

2704. Доказать, что если члены ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

переставить так, чтобы группу p последовательных положительных членов сменяла группа q последовательных отрицательных членов, то сумма нового ряда будет

$$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

2705. Доказать, что гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

останется расходящимся, если, не переставляя его членов, изменить знаки их так, чтобы за p положительными членами следовало бы q отрицательных ($p \neq q$). Сходимость будет иметь место лишь при $p = q$.

§ 3. Действия над рядами

Сумма и произведение рядов. По определению полагают:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$,

где

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1.$$

Равенство а) имеет неформальный смысл, если оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, а равенство б) —если, сверх того, по меньшей мере один из этих рядов сходится абсолютно.

2706. Что можно сказать о сумме двух рядов, из которых а) один ряд сходится, а другой расходится; б) оба ряда расходятся?

2707. Найти сумму двух рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right].$$

Найти суммы следующих рядов:

2708. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right]$.

2709. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

2710. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{[n/2]} y^{[(n+1)/2]}$ $(|xy| < 1)$.

2711. Показать, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.

2712. Показать, что $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n \quad (|q|<1)$.

2713. Показать, что квадрат сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

есть ряд расходящийся.

2714. Доказать, что произведение двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \quad (\alpha>0) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \quad (\beta>0)$$

есть ряд сходящийся, если $\alpha+\beta>1$, и расходящийся, если $\alpha+\beta<1$.

2715. Проверить, что произведение двух расходящихся рядов

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{и} \quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

есть абсолютно сходящийся ряд.

§ 4. Функциональные ряды

1°. Область сходимости. Совокупность X_0 тех значений x, для которых сходится *функциональный ряд*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \tag{1}$$

называется *областью сходимости* этого ряда, а функция

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} u_i(x) \quad (x\in X_0)$$

— его *суммой*.

2°. Равномерная сходимость. Последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

называется *равномерно сходящейся* на множестве X, если:

1) существует предельная функция

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x\in X);$$

2) для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать число $N=N(\varepsilon)$ такое, что

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

при $n>N$ и $x\in X$. В этом случае пишут: $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

Функциональный ряд (1) называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если равномерно сходится на этом множестве последовательность его частичных сумм:

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

3°. Критерий Коши. Для равномерной сходимости ряда (1) на множестве X необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N$ и $p > 0$ было выполнено неравенство

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) \right| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in X.$$

4°. Признак Вейерштрасса. Ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на множестве X, если существует сходящийся числовой ряд

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \tag{2}$$

такой, что

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \text{ при } x \in X \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

5°. Признак Абеля. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x) \tag{3}$$

сходится равномерно на множестве X, если: 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на множестве X; 2) функции $b_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) ограничены в совокупности и при каждом x образуют монотонную последовательность.

6°. Признак Дирихле. Ряд (3) сходится равномерно на множестве X, если: 1) частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)$ в совокупности ограничены; 2) последовательность $b_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) монотонна для каждого x и равномерно на X стремится к нулю при $n \to \infty$.

7°. Свойства функциональных рядов. а) Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть функция непрерывная.

б) Если функциональный ряд (1) сходится равномерно на каждом $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ и существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = A_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится и 2) имеет место равенство

$$\lim_{x \to a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \to a} u_n(x) \right\}.$$

в) Если члены сходящегося ряда (1) непрерывно дифференцируемы при $a < x < b$ и ряд производных $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на интервале (a, b), то

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \text{ при } x \in (a, b).$$

г) Если члены ряда (1) непрерывны и этот ряд сходится равномерно на конечном сегменте $[a, b]$, то

$$\int_a^b \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx. \qquad (4)$$

Вообще формула (4) верна, если $\int_a^b R_n(x)\, dx \to 0$ при $n \to \infty$, где $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$. Это последнее условие годится также и для случая бесконечных пределов интеграции.

Определить области сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

2716. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$. **2717.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

2718. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

2719. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots (2n)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$.

2720. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 3^{2n}}{2n} x^n (1-x)^n$. **2721.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$.

2722. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$.

2723. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q}$ $(q>0;\quad 0<x<\pi)$.

2724. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ (ряд Ламберта).

2725. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$. 2726. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

2727. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}$.

2728. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$. 2729. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^2}$.

2730. $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-x^{1/2})(2-x^{1/3})\ldots(2-x^{1/n})$ $(x>0)$.

2731. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$. 2732. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}$ $(x>0;\ y>0)$.

2733. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+y^n}$ $(y\geqslant 0)$. 2734. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$.

2735. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$ $(x\geqslant 0)$. 2736. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)$.

2737. Доказать, что если *ряд Лорана* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ сходится при $x=x_1$ и при $x=x_2$ $(|x_1|<|x_2|)$, то этот ряд сходится также при $|x_1|<|x|<|x_2|$.

2738. Определить область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{n}{2^{|n|}}x^n$$

и найти его сумму.

2739. Определить области сходимости (абсолютной и условной) *рядов Ньютона*:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{[n]}}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\frac{x^{[n]}}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$,

где $x^{[n]}=x(x-1)\ldots[x-(n-1)]$.

2740. Доказать, что если *ряд Дирихле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится при $x = x_0$, то этот ряд сходится также при $x > x_0$.

2741. Доказать, что для равномерной сходимости на множестве X последовательности $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ к предельной функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \sup_{x \in X} r_n(x) \right\} = 0,$$

где $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

2742. Что значит, что последовательность $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$: а) сходится на интервале $(x_0, +\infty)$; б) сходится равномерно на каждом конечном интервале $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$; в) сходится равномерно на интервале $(x_0, +\infty)$?

2743. Для последовательности

$$f_n(x) = x^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (0 < x < 1)$$

определить наименьший номер члена $N = N(\varepsilon, x)$, начиная с которого отклонение членов последовательности в данной точке x от предельной функции не превышает 0,001, если $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[m]{10}}, \dots$

Сходится ли эта последовательность равномерно на интервале (0, 1)?

2744. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ следует взять, чтобы частная сумма $S_n(x)$ отличалась при $-\infty < x < +\infty$ от суммы ряда меньше чем на ε? Произвести численный расчет при: а) $\varepsilon = 0,1$; б) $\varepsilon = 0,01$; в) $\varepsilon = 0,001$.

2745. При каких n будет обеспечено выполнение неравенства

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \right| < 0,001 \quad (0 \leqslant x \leqslant 10)?$$

Исследовать последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках:

2746. $f_n(x)=x^n$; а) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; б) $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2747. $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2748. $f_n(x)=x^n-x^{2n}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2749. $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$; $0<x<+\infty$.

2750. $f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2751. $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$; а) $0 \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$;

б) $1-\varepsilon \leqslant x \leqslant 1+\varepsilon$; в) $1+\varepsilon \leqslant x<+\infty$, где $\varepsilon>0$.

2752. $f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$; а) $0 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $1<x<+\infty$.

2753. $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$; $-\infty<x<+\infty$.

2754. $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$; $0<x<+\infty$.

2755. а) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$; $-\infty<x<+\infty$;

б) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$; $-\infty<x<+\infty$.

2756. а) $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$; $0<x<+\infty$; б) $f_n(x)=$ $=x \operatorname{arctg} nx$; $0<x<+\infty$.

2757. $f_n(x)=e^{n(x-1)}$; $0<x<1$.

2758. $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$; а) $-l<x<l$, где l — любое положительное число; б) $-\infty<x<+\infty$.

2759. $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$; $0<x<1$.

2760. $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$; а) на конечном интервале (a, b); б) на интервале $(-\infty, +\infty)$.

2761. $f_n(x)=n(x^{1/n}-1)$; $1 \leqslant x \leqslant a$.

2762. $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$; $0 \leqslant x \leqslant 2$.

2763. $f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{n};\\ n^2\left(\dfrac{2}{n}-x\right), & \text{если } \dfrac{1}{n}<x<\dfrac{2}{n};\\ 0, & \text{если } x\geqslant \dfrac{2}{n} \end{cases}$

на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$.

2764. Пусть $f(x)$ — произвольная функция, определенная на сегменте $[a, b]$, и $f_n(x)=\dfrac{[nf(x)]}{n}$ ($n=1, 2, \ldots$).

Доказать, что $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ ($a\leqslant x\leqslant b$) при $n\to\infty$.

2765. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b) и

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

Доказать, что $f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$ на сегменте $\alpha\leqslant x\leqslant \beta$, где $a<\alpha<\beta<b$.

2766. Пусть $f_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{1}{n}f\left(x+\dfrac{i}{n}\right)$, где $f(x)$ — непрерывная на $(-\infty, +\infty)$ функция. Доказать, что последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на любом конечном сегменте $[a, b]$.

Исследовать характер сходимости следующих рядов:

2767. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ а) на интервале $|x|<q$, где $q<1$; б) на интервале $|x|<1$.

2768. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ на сегменте $-1\leqslant x\leqslant 1$.

2768.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ на интервале $(0, +\infty)$.

2769. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$.

2770. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$; $\quad -1 \leqslant x \leqslant 1$.

2771. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$; $\quad 0<x<+\infty$.

2772. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$; $\quad 0<x<+\infty$.

2773. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)}$;

а) $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$; б) $\varepsilon \leqslant x < +\infty$.

2774. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$, $\quad -\infty<x<+\infty$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $\quad -2<x<+\infty$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $\quad 0 \leqslant x<+\infty$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $\quad |x|<+\infty$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$, $\quad \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, $\quad |x|<a$, где a — произвольное положительное число;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $|x| < +\infty$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $|x| < +\infty$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $|x| < +\infty$;

к) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$, $|x| < a$;

л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $0 \leqslant x < +\infty$;

м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$, $|x| < +\infty$.

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие функциональные ряды:

2775. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ а) на сегменте $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$; б) на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2776. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$; $0 < x < +\infty$.

2777. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$; $0 < x < +\infty$.

Указание. Оценить остаток ряда.

2778. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$; $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2779. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$; $|x| \leqslant 10$.

2780. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$; $-\infty < x < +\infty$.

2781. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$; $0 \leqslant x < +\infty$.

2782. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$; $0 \leqslant x < +\infty$.

2783. Может ли последовательность разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции?

Рассмотреть пример

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\psi(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально.} \end{cases}$

2784. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на $[a, b]$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ также сходится равномерно на $[a, b]$.

2785. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$, то обязательно ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на $[a, b]$?

Рассмотреть пример $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x) x^n$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2786. Доказать, что абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

где $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)}; \\ \dfrac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{если } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}; \\ 0, & \text{если } 2^{-n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$

нельзя мажорировать сходящимся числовым рядом с неотрицательными членами.

2787. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, члены которого суть монотонные функции на сегменте $[a, b]$, сходится абсолютно в концевых точках этого сегмента, то данный ряд сходится абсолютно и равномерно на сегменте $[a, b]$.

2788. Доказать, что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно и равномерно на любом сегменте, целиком лежащем внутри его интервала сходимости.

2789. Пусть $a_n \to \infty$ так, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|$ сходится. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$ сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном замкнутом множестве, не содержащем точек a_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

2790. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то *ряд Дирихле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно при $x \geqslant 0$.

2791. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ сходится равномерно в области $x \geqslant 0$.

2792. Показать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную в области $-\infty < x < +\infty$.

2793. Показать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n - x)^2}$$

а) определена и непрерывна во всех точках, за исключением целочисленных: $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; б) периодическая с периодом, равным 1.

2794. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}]$ сходится неравномерно на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$, однако его сумма есть функция, непрерывная на этом сегменте.

2795. Определить области существования функций $f(x)$ и исследовать их на непрерывность, если

а) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$; б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$;

в) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

2796. Пусть r_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — рациональные числа сегмента $[0, 1]$. Показать, что функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

обладает следующими свойствами: 1) непрерывна; 2) дифференцируема в иррациональных точках и недифференцируема в рациональных.

2797. Доказать, что *дзета-функция Римана*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

непрерывна в области $x > 1$ и имеет в этой области непрерывные производные всех порядков.

2798. Доказать, что *тэта-функция*

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

2799. Определить область существования функции $f(x)$ и исследовать ее на дифференцируемость, если:

а) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x}$; б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$.

2800. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится равномерно на интервале $(-\infty, +\infty)$, но

$$\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(1).$$

2801. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

сходится равномерно на интервале $(-\infty, +\infty)$, но

$$\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]' \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

2802. При каких значениях параметра α: а) последовательность

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \qquad (1)$$

$(n = 1, 2, \ldots)$ сходится на сегменте $[0, 1]$; б) последовательность (1) сходится равномерно на $[0, 1]$; в) возможен предельный переход под знаком интеграла

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx?$$

2803. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится на сегменте $[0, 1]$, но

$$\int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

2804. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится неравномерно на сегменте $[0, 1]$, однако

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

2805. Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2x^4}\, dx?$$

Найти:

2806. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$.

2807. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})$.

2808. $\lim\limits_{x\to +0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$. **2808.1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}$.

2809. Законно ли почленное дифференцирование ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}?$$

2810. Законно ли почленное интегрирование ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

на сегменте $[0, 1]$?

2811. Пусть $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ — бесконечно дифференцируемая функция и последовательность ее производных $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится равномерно на каждом конечном интервале (a, b) к функции $\varphi(x)$. Доказать, что $\varphi(x) = Ce^x$, где C — постоянная величина. Рассмотреть пример $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, $n = 1, 2, \ldots$

2811.1. Пусть функции $f_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, — определены и ограничены на $(-\infty, +\infty)$ и $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на каждом сегменте $[a, b]$. Следует ли отсюда, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x f(x) = \sup_x \varphi(x)?$$

§ 5. Степенные ряды

1°. Интервал сходимости. Для каждого степенного ряда

$$a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

существует замкнутый *интервал сходимости*: $|x-a| \leqslant R$, внутри которого данный ряд сходится, а вне расходится. *Радиус* *сходимости* R определяется по *формуле Коши — Адамара*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Радиус сходимости R может быть вычислен также по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

если этот предел существует.

2°. Теорема Абеля. Если степенной ряд $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x| < R)$ сходится в концевой точке $x = R$ интервала сходимости, то

$$S(R) = \lim_{x\to R-0} S(x).$$

3°. Ряд Тейлора. Аналитическая в точке a функция $f(x)$ в некоторой окрестности этой точки разлагается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Остаточный член этого ряда

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

может быть представлен в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

(*форма Лагранжа*), или в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a))}{n!}(1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

(*форма Коши*).

Необходимо помнить следующие пять основных разложений:

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

$(-\infty < x < +\infty).$

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$

$(-\infty < x < +\infty).$

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$

$(-\infty < x < +\infty).$

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1).$$

V. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$

$$(-1 < x \leqslant 1).$$

4°. Действия со степенными рядами. Внутри общего интервала сходимости $|x-a| < R$ имеем:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-a)^n$;

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$,

где $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$;

в) $\frac{d}{dx}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right] = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-a)^n$;

г) $\int\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right] dx = C + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$.

5°. Степенные ряды комплексной области. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где

$$c_n = a_n + ib_n, \quad a = \alpha + i\beta, \quad z = x + iy, \quad i^2 = -1.$$

Для каждого такого ряда имеется замкнутый *круг сходимости* $|z-a| \leqslant R$, внутри которого данный ряд сходится (и притом абсолютно), а вне расходится. *Радиус сходимости* R равен радиусу сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

в действительной области.

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

2812. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$. **2813.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$.

2814. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

2815. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n \quad (0<\alpha<1)$.

2816. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

2817. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a>1)$.

2818. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)}\right]^p \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

2819. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n$.

2820. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n$.

2821. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right) x^n \quad (a>0,\ b>0)$.

2822. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n} \quad (a>0,\ b>0)$.

2823. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a>0)$.

2824. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}\, x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

2825. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$.

2826. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n.$

2827. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) x^n.$

2828. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n.$

2829. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} x^n.$ **2830.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$

2831. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$ *(ряд Принсгейма)*.

2831.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n}(1-x)^n$, где $\nu(n)$ — число цифр числа n.

2831.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n}\right)^n.$

2832. Определить область сходимости *гипергеометрического ряда*

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\ldots n\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n+\ldots$$

Найти область сходимости обобщенных степенных рядов:

2833. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n.$ **2834.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}.$

2835. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$. **2836.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$.

2837. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \operatorname{tg}^n x$.

2838. Функцию

$$f(x) = x^3$$

разложить по целым неотрицательным степеням бинома $x+1$.

2839. Функцию

$$f(x) = \frac{1}{a-x} \quad (a \neq 0)$$

разложить в степенной ряд: а) по степеням x; б) по степеням бинома $x-b$, где $b \neq a$; в) по степеням $\frac{1}{x}$. Указать соответствующие области сходимости.

2840. Функцию $f(x) = \ln x$ разложить по целым неотрицательным степеням разности $x-1$ и выяснить интервал сходимости разложения.

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Написать разложения следующих функций по целым неотрицательным степеням переменной x и найти соответствующие интервалы сходимости:

2841. $f(x) = \operatorname{sh} x$. **2842.** $f(x) = \operatorname{ch} x$.

2843. $f(x) = \sin^2 x$. **2844.** $f(x) = a^x$ $(a > 0)$.

2845. $f(x) = \sin(\mu \arcsin x)$.

2846. $f(x) = \cos(\mu \arcsin x)$.

2847. Написать три члена разложения функции $f(x) = x^x$ по целым неотрицательным степеням разности $x-1$.

2848. Написать три члена разложения функции $f(x) = (1+x)^{1/x}$ $(x \neq 0)$ и $f(0) = e$ по целым неотрицательным степеням переменной x.

2849. Функции $\sin(x+h)$ и $\cos(x+h)$ разложить по целым неотрицательным степеням переменной h.

2850. Определить интервал сходимости разложения в степенной ряд функции:

$$f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6}$$

а) по степеням x; б) по степеням бинома $x-5$, не производя самого разложения.

2850.1. Можно ли утверждать, что

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\rightrightarrows \sin x \text{ на } (-\infty,\ +\infty)$$

при $N\to\infty$?

Пользуясь основными разложениями I—V, написать разложения в степенной ряд относительно x следующих функций:

2851. e^{-x^2}. **2852.** $\cos^2 x$. **2853.** $\sin^3 x$.

2854. $\dfrac{x^{10}}{1-x}$. **2855.** $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. **2856.** $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

2857. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. **2858.** $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$.

Указание. Разложить данную дробь на простейшие.

2859. $\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$. **2860.** $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

2861. $\dfrac{1}{1-x-x^2}$. **2862.** $\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

2862.1. $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$.

Чему равно $f^{(1000)}(0)$?

2863. $\dfrac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$. **2864.** $\dfrac{x\sin a}{1-2x\cos a+x^2}$.

2865. $\dfrac{x\operatorname{sh} a}{1-2x\operatorname{ch} a+x^2}$. **2866.** $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

2867. $\ln(1+x+x^2+x^3)$. **2868.** $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.

Указание. Применить формулы Эйлера.

Разложив предварительно производные, путем почленного интегрирования получить разложения в степенной ряд следующих функций:

2869. $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

2870. $f(x) = \arcsin x$. **2871.** $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

2872. $f(x) = \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$.

2873. Применяя различные методы, найти разложения в степенной ряд следующих функций:

а) $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$;

б) $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;

в) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$;

г) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$;

д) $f(x) = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$;

е) $f(x) = \arccos(1-2x^2)$;

ж) $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

з) $f(x) = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$.

2874. Используя единственность разложения

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots,$$

найти производные n-го порядка от следующих функций:

а) $f(x) = e^{x^2}$; б) $f(x) = e^{a/x}$; в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

2875. Функцию $f(x) = \ln\frac{1}{2+2x+x^2}$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+1$.

2876. Функцию $f(x) = \frac{1}{1-x}$ разложить в степенной ряд по отрицательным степеням переменной x.

2877. Функцию $f(x) = \ln x$ разложить в степенной ряд по целым положительным степеням дроби $\frac{x-1}{x+1}$.

2878. Функцию $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ разложить в степенной ряд по целым положительным степеням дроби $\frac{x}{1+x}$.

2879. Пусть $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Доказать непосредственно, что

$$f(x)\,f(y)=f(x+y).$$

2880. Пусть по определению

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{и} \quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Доказать, что

а) $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$; б) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

2881. Написать несколько членов разложения в степенной ряд функции

$$f(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right]^{-1}$$

Производя соответствующие действия со степенными рядами, получить разложения в степенные ряды следующих функций:

2882. $f(x)=(1+x)e^{-x}$. 2883. $f(x)=(1-x)^2\operatorname{ch}\sqrt{x}$.

2884. $f(x)=\ln^2(1-x)$. 2885. $f(x)=(1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

2886. $f(x)=e^x\cos x$. 2887. $f(x)=e^x\sin x$.

2888. $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$. 2889. $f(x)=(\operatorname{arctg} x)^2$.

2890. $f(x)=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

Написать три члена разложения (отличные от нуля) в степенной ряд по положительным степеням переменной x следующих функций:

2891. $f(x)=\operatorname{tg} x$. 2892. $f(x)=\operatorname{th} x$.

2893. $f(x)=\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}$.

2894. Пусть разложение $\sec x$ записано в виде

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Вывести рекуррентное соотношение для коэффициентов E_n (*числа Эйлера*).

2895. Разложить в степенной ряд функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} \quad (|x| < 1).$$

2896. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^x$. Написать разложение функции $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$.

2897. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R_1, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ — радиус сходимости R_2, то какой радиус сходимости R имеют ряды

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$?

2898. Пусть $l = \varliminf\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ и $L = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

Доказать, что радиус сходимости R степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ удовлетворяет неравенству

$$l \leqslant R \leqslant L.$$

2899. Доказать, что если $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, причем

$$|n!\, a_n| < M \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где M — постоянная, то: 1) $f(x)$ бесконечно дифференцируема в любой точке a; 2) справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (|x| < +\infty).$$

2899.1. Пусть $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$ и $|f^{(n)}(x)| \leqslant c^n$ ($n =$

$= 0, 1, 2, \ldots$) при $x \in (a, b)$. Доказать, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (x_0 \in (a, b)),$$

сходящийся в интервале (a, b).

2899.2. Пусть $f(x) \in C^{(\infty)}[-1,1]$ и $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) при $x \in [-1,1]$. Доказать, что в интервале $(-1,1)$ функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Указание. Используя монотонность производных $f^{(n)}(x)$ для остаточного члена $R_n(x)$ ряда Тейлора функции $f(x)$, получить оценку

$$|R_n(x)| \leqslant |x|^{n+1} f(1).$$

2900. Доказать, что если 1) $a_n \geqslant 0$ и 2) существует

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S, \text{ то } \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

Разложить в степенной ряд функции:

2901. $\int\limits_0^x e^{-t^2} dt$. **2902.** $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

2903. $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. **2904.** $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$.

2905. $\int\limits_0^x \frac{t\,dt}{\ln(1+t)}$ (написать четыре члена).

Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы следующих рядов:

2906. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

2907. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$

2908. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

2909. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots$

2910. $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\ldots$

Указание. Производную ряда умножить на $1-x$.

Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы рядов:

2911. $x+2x^2+3x^3+\ldots$

2912. $x-4x^2+9x^3-16x^4+\ldots$

2913. $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots$

2914. Показать, что ряд $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ удовлетворяет уравнению $y^{\mathrm{IV}}=y$.

2915. Показать, что ряд $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ удовлетворяет уравнению $xy''+y'-y=0$.

Определить радиус и круг сходимости степенных рядов в комплексной области ($z=x+iy$):

2916. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-i)^n}{n\cdot 2^n}$.

2917. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.

2918. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\, z^n}{(1+i)(1+2i)\ldots(1+ni)}$.

2919. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}$.

2920. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}$.

2921. Пользуясь формулой бинома Ньютона, приближенно вычислить $\sqrt[3]{9}$ и оценить ошибку, которая получится, если взять три члена разложения.

2922. Приближенно вычислить:

а) $\operatorname{arctg} 1{,}2$; б) $\sqrt[10]{1000}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; г) $\ln 1{,}25$

и оценить соответствующие погрешности.

Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с указанной степенью точности следующие значения функций:

2923. $\sin 18°$ с точностью до 10^{-5}.

2924. $\cos 1°$ с точностью до 10^{-6}.

2925. $\operatorname{tg} 9°$ с точностью до 10^{-3}.

2926. e с точностью до 10^{-6}.

2927. $\ln 1{,}2$ с точностью до 10^{-4}.

2928. Исходя из равенства

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2},$$

найти число π с точностью до 10^{-4}.

2929. Пользуясь тождеством

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

вычислить число π с точностью до 0,001.

2930. Пользуясь тождеством

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

определить число π с точностью до 10^{-9}.

2931. Пользуясь формулой

$$\ln(n+1) = \ln n + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \ldots\right],$$

найти $\ln 2$ и $\ln 3$ с точностью до 10^{-5}.

2932. С помощью разложений подынтегральных функций в ряды вычислить с точностью до 0,001 следующие интегралы:

а) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$; б) $\int\limits_2^4 e^{1/x}dx$; в) $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$;

г) $\int\limits_0^1 \cos x^2 dx$; д) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx$; е) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

ж) $\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$; з) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

и) $\int\limits_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$;

к) $\int\limits_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$; л) $\int\limits_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{x} dx$; м) $\int\limits_0^1 x^x dx$.

2933. Найти с точностью до 0,01 длину дуги одной полуволны синусоиды

$$y = \sin x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

2934. Найти с точностью до 0,01 длину дуги эллипса с полуосями $a = 1$ и $b = 1/2$.

2935. Провод, подвешенный на двух столбах, расстояние между которыми равно $2l = 20$ м, имеет форму параболы. Вычислить с точностью до 1 см длину провода, если стрелка прогиба $h = 40$ см.

§ 6. Ряды Фурье

1°. Теорема разложения. Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную $f'(x)$ в интервале $(-l, l)$, причем ее точки разрыва ξ регулярны (т. е. $f(\xi) = \frac{1}{2}[f(\xi-0) + f(\xi+0)]$), то функция $f(x)$ в этом интервале может быть представлена рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

и

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (2')$$

В частности:

а) если функция $f(x)$ четная, то имеем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad (3)$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

б) если функция $f(x)$ нечетная, то получаем:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (4)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Функцию $f(x)$, определенную в интервале $(0, l)$ и обладающую в нем приведенными выше свойствами непрерывности, можно в этом интервале представить как формулой (3), так и формулой (4).

2°. Условие полноты. Для всякой интегрируемой на отрезке $[-l, l]$ вместе со своим квадратом функции $f(x)$ формально построенный ряд (1) с коэффициентами (2), (2′) удовлетворяет *равенству Ляпунова*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx.$$

3°. Интегрирование рядов Фурье. Ряд Фурье (1), даже расходящийся, интегрируемой по Риману в интервале $(-l, l)$ функции $f(x)$ можно интегрировать почленно в этом интервале.

2936. Функцию

$$f(x) = \sin^4 x$$

разложить в ряд Фурье.

2937. Каков будет ряд Фурье для тригонометрического многочлена

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)?$$

2938. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (-\pi < x < \pi).$$

Нарисовать график функции и графики нескольких частных сумм ряда Фурье этой функции.

Пользуясь разложением, найти сумму *ряда Лейбница*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Разложить в ряд Фурье в указанных интервалах следующие функции:

2939. $f(x) = \begin{cases} A, & \text{если } 0 < x < l; \\ 0, & \text{если } l < x < 2l, \end{cases}$

где A — постоянная, в интервале $(0, 2l)$.

2940. $f(x) = x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

2941. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ в интервале $(0, 2\pi)$.

2942. $f(x) = |x|$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

2943. $f(x) = \begin{cases} ax, & \text{если } -\pi < x < 0; \\ bx, & \text{если } 0 < x < \pi, \end{cases}$

где a и b — постоянные, в интервале $(-\pi, \pi)$.

2944. $f(x) = \pi^2 - x^2$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

2945. $f(x) = \cos ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$ (a — не целое).

2946. $f(x) = \sin ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$ (a — не целое).

2947. $f(x) = \operatorname{sh} ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

2948. $f(x) = e^{ax}$ в интервале $(-h, h)$.

2949. $f(x) = x$ в интервале $(a, a + 2l)$.

2950. $f(x) = x \sin x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

2951. $f(x) = x \cos x$ в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Разложить в ряды Фурье следующие периодические функции:

2952. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.

2953. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

2954. $f(x) = \arcsin(\cos x)$. **2955.** $f(x) = x - [x]$.

2956. $f(x) = (x)$ — расстояние x до ближайшего целого числа.

2957. $f(x) = |\sin x|$. **2958.** $f(x) = |\cos x|$.

2959. $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \qquad (|\alpha| < 1).$$

2960. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \sec x \qquad \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right).$$

Указание. Вывести соотношение между коэффициентами a_n и a_{n-2}.

2961. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье: а) в интервале $(-\pi, \pi)$ по косинусам кратных дуг; б) в интервале $(0, \pi)$ по синусам кратных дуг; в) в интервале $(0, 2\pi)$.

Нарисовать график функций и графики сумм рядов Фурье для случаев а), б) и в).

Пользуясь этими разложениями, найти суммы рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

2962. Исходя из разложения

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi < x < \pi),$$

почленным интегрированием получить разложения в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$ функций x^2, x^3 и x^4.

2963. Написать равенство Ляпунова для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < \alpha; \\ 0 & \text{при } \alpha < |x| < \pi. \end{cases}$$

Исходя из равенства Ляпунова, найти суммы рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

2964. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 1, & \text{если } 1<x<2;\\ 3-x, & \text{если } 2\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

Пользуясь формулами

$$\cos x=\frac{1}{2}(t+\bar{t}), \qquad \sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t}),$$

где $t = e^{ix}$ и $\bar{t} = e^{-ix}$, получить разложение в ряд Фурье следующих функций:

2965. $\cos^{2m} x$ (m — целое положительное число).

2966. $\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

2967. $\dfrac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

2968. $\dfrac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

2969. $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ $(|q|<1)$.

Разложить в ряд Фурье неограниченные периодические функции:

2970. $f(x)=\ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$.

2971. $f(x)=\ln\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|$.

2972. $f(x)=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$.

2973. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\int_0^x \ln\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\,dt \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

2974. Разложить в ряд Фурье функции

$$x = x(s),\; y = y(s) \quad (0\leqslant s\leqslant 4a),$$

дающие параметрическое представление контура квадрата: $0<x<a$, $0<y<a$, где s — длина дуги, отсчитанная против хода часовой стрелки от точки O (0, 0).

2975. Как следует продолжить заданную в интервале $(0, \pi/2)$ интегрируемую функцию $f(x)$ в интервал $(-\pi, \pi)$, чтобы ее разложение в ряд Фурье имело вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \qquad (-\pi<x<\pi)?$$

2976. Как следует продолжить заданную в интервале $(0, \pi/2)$ интегрируемую функцию $f(x)$ в интервал $(-\pi, \pi)$, чтобы ее разложение в ряд Фурье имело вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x \qquad (-\pi<x<\pi)?$$

2977. Функцию

$$f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

разложить в интервале $(0, \pi/2)$:

а) по косинусам нечетных дуг; б) по синусам нечетных дуг.

Нарисовать графики суммы рядов Фурье для случаев а) и б).

2978. Функция $f(x)$ *антипериодична* с периодом π, т. е.

$$f(x+\pi) \equiv -f(x).$$

Какой особенностью обладает ряд Фурье этой функции в интервале $(-\pi, \pi)$?

2979. Какой особенностью обладает ряд Фурье функции $f(x)$ в интервале $(-\pi, \pi)$, если $f(x+\pi) \equiv f(x)$?

2980. Какими особенностями обладают коэффициенты Фурье a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ функции $y = f(x)$ периода 2π, если график функции: а) имеет центры симметрии в точках $(0, 0)$, $(\pm\pi/2, 0)$; б) имеет центр симметрии в начале координат и оси симметрии $x = \pm\pi/2$?

2981. Как связаны между собой коэффициенты Фурье a_n, b_n и α_n, β_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, если

$$\varphi(-x) \equiv \psi(x)?$$

2982. Как связаны между собой коэффициенты Фурье a_n, b_n и a_n, β_n $(a = 0, 1, 2, \ldots)$ функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, если

$$\varphi(-x) \equiv -\psi(x)?$$

2983. Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ интегрируемой функции $f(x)$, имеющей период 2π, вычислить коэффициенты Фурье $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ «смещенной» функции $f(x + h)$ $(h = \text{const})$.

2984. Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n $(a = 0, 1, 2, \ldots)$ интегрируемой функции $f(x)$ периода 2π, вычислить коэффициенты Фурье A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *функции Стеклова*

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\, d\xi.$$

2985. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π и a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — ее коэффициенты Фурье. Определить коэффициенты Фурье A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *свернутой функции*

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x + t)\, dt.$$

Пользуясь полученным результатом, вывести равенство Ляпунова.

§ 7. Суммирование рядов

1°. Непосредственное суммирование. Если

$$u_n = v_{n+1} - v_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v_\infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1.$$

В частности, если

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m}},$$

где числа a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ образуют арифметическую прогрессию со знаменателем d, то

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m-1}}.$$

В некоторых случаях искомый ряд удается представить в виде линейной комбинации известных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{и т. п.}$$

2°. Метод Абеля. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в простейших примерах находится с помощью почленного дифференцирования или интегрирования.

3°. Суммирование тригонометрических рядов. Для нахождения сумм рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

их обычно рассматривают как действительную часть и соответственно как коэффициент мнимой части суммы степенного ряда в комплексной области $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, где $z = e^{ix}$.

Здесь во многих случаях полезен ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < 1).$$

Найти суммы рядов:

2986. $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \ldots$

2987. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$

2988. $\dfrac{1}{1\cdot 2} - \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} - \dfrac{1}{4\cdot 5} + \ldots$

2989. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

2990. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+m)}$ (m — натуральное число).

2991. $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot6\cdot7}+\ldots$

2992. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-1}$. **2993.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$.

2994. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(2n+1)}$. **2995.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}$.

2996. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n(n+1)}{n!}$. **2997.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$.

2998. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

2999. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$. **3000.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

3001. Пусть $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n.$$

Найти суммы следующих рядов:

3002. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^n n!}x^n$. **3003.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$.

3004. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!}x^{2n}$. **3005.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2x^n}{(2n+1)!}$.

С помощью почленного дифференцирования найти суммы рядов:

3006. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$. **3007.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$.

3008. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

3009. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a(a+d)\ldots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\ldots nd}\, x^n \quad (d>0)$.

Указание. Производную ряда умножить на $1-x$.

3010. $\dfrac{1}{3}\,\dfrac{x}{2}+\dfrac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3+\ldots$

С помощью почленного интегрирования найти суммы рядов:

3011. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$. **3012.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+2)\,x^n$.

3013. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n+1)\,x^{2n}}{n!}$.

Используя метод Абеля, найти суммы следующих рядов:

3014. $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\ldots$

3015. $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots$

3016. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots$

3017. $1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{1}{5}+\ldots$

Найти суммы следующих тригонометрических рядов:

3018. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$. **3019.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n}$.

3020. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha \sin nx}{n}$.

3021. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \qquad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$

3022. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1) x}{2n-1}.$

3023. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}.$

3024. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1) x}{(2n-1)^2}.$

3025. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}.$

3026. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}.$

3027. Построить кривую

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2} = 0.$$

Найти суммы следующих рядов:

3028. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}.$ **3029.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

3030. $\frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \ldots$

3031. $\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \ldots$ при условии, что $x>0$, $a_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ расходящийся.

3032. $\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\ldots$, если а) $|x|<1$; б) $|x|>1$.

3033. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, если а) $|x|<1$; б) $|x|>1$.

§ 8. Нахождение определенных интегралов с помощью рядов

С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить следующие интегралы:

3034. $\int\limits_0^1 \ln\frac{1}{1-x}\,dx$. 3035. $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\,dx$.

3036. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

3037. $\int\limits_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx \quad (p>0,\ q>0)$.

3038. $\int\limits_0^1 \ln x\cdot\ln(1-x)\,dx$.

3039. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{e^{2\pi x}-1}$. 3040. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{e^x+1}$.

3041. Разложить по целым положительным степеням модуля k $(0\leqslant k<1)$ *полный эллиптический интеграл 1-го рода*

$$F(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

3042. Разложить по целым положительным степеням модуля k $(0\leqslant k<1)$ *полный эллиптический интеграл 2-го рода*

$$E(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

3043. Выразить длину дуги эллипса

$$x=a\cos t,\ x=b\sin t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

с помощью ряда, расположенного по целым положительным степеням эксцентриситета.

Доказать равенства:

3044. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

3045. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax\,dx = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}$.

3046. $\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx\,dx = \frac{\pi}{n!}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Найти:

3047. $\int\limits_0^{2\pi} e^{a \cos x} \cos(a \sin x - nx)\,dx$ (n — натуральное число).

3048. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin \alpha}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}\,dx$.

Указание См. пример 2864.

3049. $\int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\,dx$.

3050. Доказать формулу

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{a+x}\,dx = \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{\theta_n n!}{a^{n+1}}, \quad (1)$$

где $a > 0$ и $0 < \theta_n < 1$.

С какой точностью выразится интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x}\,dx,$$

если в формуле (1) взять два члена?

§ 9. Бесконечные произведения

1°. Сходимость произведения. Бесконечное произведение

$$p_1 p_2 \ldots p_n \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \tag{1}$$

называется *сходящимся*, если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} p_i = \lim_{n=\infty} P_n = P.$$

Если $P = 0$ и ни один из сомножителей p_n не равен нулю, то произведение (1) называется *расходящимся к нулю*; в противном случае произведение называется *сходящимся к нулю*.

Необходимым условием сходимости является

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

Сходимость произведения (1) равносильна сходимости ряда

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln p_n. \tag{2}$$

Если $p_n = 1 + \alpha_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и α_n не меняет знака, то для сходимости произведения (1) необходимо и достаточно, чтобы был сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1). \tag{3}$$

В общем случае, когда α_n не сохраняет постоянного знака и ряд (3) сходится, произведение (1) будет сходиться или расходиться к нулю вместе с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2.$$

2°. Абсолютная сходимость. Произведение (1) называется *абсолютно* или *условно* (*не абсолютно*) сходящимся в зависимости от того, абсолютно или условно сходится ряд (2). Необходимым и достаточным условием абсолютной сходимости произведения (1) является абсолютная сходимость ряда (3).

3°. Разложение функций в бесконечные произведения. При $-\infty < x < +\infty$ имеют место разложения

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \quad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right].$$

В частности, из первого при $x = \pi/2$ получаем *формулу Валлиса*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

Доказать следующие равенства:

3051. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$

3052. $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}.$

3053. $\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{3}.$

3054. $\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right] = 2.$

3055. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$

3056. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$

3057. $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$

3058. $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$

3059. $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$

3060. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

Доказать сходимость и определить значения следующих бесконечных произведений:

3061. $\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}.$ **3062.** $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right].$

3063. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$.

3064. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a^{(-1)^n/n}$ $(a>0)$.

3065. Следует ли из сходимости произведений $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ сходимость произведений: а) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (p_n+q_n)$; б) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n^2$; в) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n q_n$; г) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$?

Исследовать сходимость следующих бесконечных произведений:

3066. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. **3067.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

3068. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n^p}\right)$. **3069.** $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)$.

3070. $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$.

3071. $\prod\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$, где $n^2+an+b>0$ при $n \geqslant n_0$.

3072. $\prod\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\ldots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\ldots(n-b_p)}$, где $n_0>b_i$ $(i=1, 2, \ldots, p)$.

3073. $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$. **3074.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

3075. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

3076. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$ **3077.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}$.

3078. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{x/n}$, где $c>0$.

3079. $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$. 3080. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$.

3081. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right]$.

3082. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)e^{x/\sqrt{n}+x^2/2n}$.

3083. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\cos\frac{x^n}{n^q}$.

3084. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$.

3085. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$.

3086. Доказать, что произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ сходится, если сходится ряд $\prod_{n=1}^{\infty}x_n^2$.

3087. Доказать, что произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)$ $\left(|\alpha_n|<\frac{\pi}{4}\right)$ сходится, если абсолютно сходится ряд $\sum_{n=1}^{n}\alpha_n$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие бесконечные произведения:

3088. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$.

3089. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]$.

3090. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]$. **3091.** $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right]$.

3092. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. **3093.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty}n^{(-1)^n}$.

3094. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$. **3095.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n}\right]$.

3096. $\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\times$

$$\times\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ldots$$

3097. $\left(1+\frac{1}{1^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{4^\alpha}\right)\times$

$$\times\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{6^\alpha}\right)\ldots$$

3098. Показать, что произведение

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ldots$$

сходится, хотя ряд

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)+$$
$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots$$

расходится.

3099. Показать, что произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$, где

$$\alpha_n=\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{если } n=2k-1,\\ \frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}, & \text{если } n=2k,\end{cases}$$

сходится, хотя оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ расходятся.

3100. Пусть

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

(*дзета-функция Римана*) и p_n ($n = 1, 2, \ldots$) — последовательные простые числа.

Доказать, что $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x)$.

3101. Доказать, что произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{p_n}\right)^{-1}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{p_n}$, где p_n ($n=1, 2, \ldots$)—последовательные простые числа, расходятся (Эйлер).

3102. Пусть $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \quad (\varepsilon > 0).$$

Доказать, что

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

Указание. Рассмотреть

$$\lim_{n\to\infty} a_n n^p = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p.$$

3103. С помощью формулы Валлиса доказать, что

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

3104. Доказать, что выражение

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$$

имеет отличный от нуля предел A при $n \to \infty$.

Вывести отсюда формулу Стирлинга

$$n! = An^{n+1/2}e^{-n}(1 + \varepsilon_n),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ $A = \sqrt{2\pi}$.

Указание. Искомый предел представить в виде бесконечного произведения

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} a_{n+1}/a_n.$$

Для определения константы A воспользоваться формулой Валлиса.

3105. Согласно Эйлеру *гамма-функция* $\Gamma(x)$ определяется следующей формулой:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Исходя из этой формулы: а) представить функцию $\Gamma(x)$ в виде бесконечного произведения; б) показать, что $\Gamma(x)$ имеет смысл для всех действительных x, не равных целому отрицательному числу; в) вывести свойство

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

г) получить значение $\Gamma(n)$ для n целого и положительного.

3106. Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема на сегменте $[a, b]$ и

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}, \quad f_{in} = f(a + i\delta_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} (1 + \delta_n f_{in}) = e^{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

3107. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=0}^{n-1} (a + ib)}}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} (a + ib)} = \frac{2}{e},$$

где $a > 0$ и $b > 0$.

3108. Пусть $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — непрерывные функции на интервале (a, b) и $|f_n(x)| \leqslant c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится.

Доказать, что функция

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)] \quad (|f_n(x)| < 1).$$

непрерывна на интервале (a, b).

3109. Найти выражение для производной функции

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)].$$

Каковы достаточные условия существования $F'(x)$?

3110. Доказать, что если $0 < x < y$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{y(y+1)\ldots(y+n)} = 0.$$

§ 10. Формула Стирлинга

Для вычисления $n!$ при больших значениях n полезна *формула Стирлинга*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\theta_n/12n} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

Пользуясь формулой Стирлинга, приближенно вычислить:

3111. $\lg 100!$ **3112.** $1\cdot3\cdot5\ldots1999$.

3113. $\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots99}{2\cdot4\cdot6\ldots100}$. **3114.** C_{100}^{40}.

3115. $\dfrac{100!}{20!\,30!\,50!}$.

3116. $\int\limits_0^1 (1-x^2)^{50}\,dx$. **3117.** $\int\limits_0^{2\pi} \sin^{200} x\,dx$.

3118. Вывести асимптотическую формулу для произведения

$$(2n-1)!! = 1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1).$$

3119. Приближенно вычислить C_{2n}^n, если n велико.

3120. Пользуясь формулой Стирлинга, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$.

§ 11. Приближение непрерывных функций многочленами

1°. Интерполяционная формула Лагранжа. *Многочлен Лагранжа*

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}\,y_i$$

обладает свойством $P_n(x_i)=y_i$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$.

2°. Многочлены Бернштейна. Если $f(x)$ — непрерывная на сегменте $[0,\ 1]$ функция, то *многочлены Бернштейна*

$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)C_n^i x^i(1-x)^{n-i}$$

при $n\to\infty$ сходятся равномерно на сегменте $[0,\ 1]$ к функции $f(x)$.

3121. Построить многочлен $P_n(x)$ наименьшей степени n, принимающий заданную систему значений:

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

Чему приближенно равны

$$P_n(-1),\quad P_n(1),\quad P_n(6)?$$

3122. Написать уравнение параболы $y=ax^2+bx+c$, проходящей через три точки: $A(x_0-h,\ y_{-1})$, $B(x_0,\ y_0)$, $C(x_0+h,\ y_1)$.

3123. Вывести формулу для приближенного извлечения корней $y=\sqrt{x}$ $(1\leqslant x\leqslant 100)$, используя значения $x_0=1$, $y_0=1$; $x_1=25$, $y_1=5$; $x_2=100$, $y_2=10$.

3124. Вывести приближенную формулу вида

$$\sin x^\circ\approx ax+bx^3\quad(0\leqslant x\leqslant 90;\ x=\operatorname{arc}x^\circ),$$

используя значения

$$\sin 0^\circ=0,\ \sin 30^\circ=\frac{1}{2},\ \sin 90^\circ=1.$$

Пользуясь этой формулой, приближенно найти:

$$\sin 20^\circ,\ \sin 40^\circ,\ \sin 80^\circ.$$

3125. Построить для функции $f(x) = |x|$ на сегменте $[-1, 1]$ интерполяционный многочлен Лагранжа, приняв за узлы точки: $x = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$.

3126. Заменив функцию $y(x)$ многочленом Лагранжа, приближенно вычислить $\int\limits_0^2 y(x)\,dx$, где

x	0	0,5	1	1,5	2
$y(y)$	5	4,5	3	2,5	5

3127. Составить многочлены Бернштейна $B_n(x)$ для функций x, x^2, x^3 на сегменте $[0, 1]$.

3128. Написать формулу многочленов Бернштейна $B_n(x)$ для функции $f(x)$, заданной на сегменте $[a, b]$.

3129. Приблизить функцию $f(x) = \frac{|x| + x}{2}$ на сегменте $[-1, 1]$ многочленом Бернштейна $B_4(x)$.

Построить графики функций $y = \frac{|x| + x}{2}$ и $y = B_4(x)$.

3130. Приблизить функцию $f(x) = |x|$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ многочленами Бернштейна четного порядка.

3131. Написать многочлен Бернштейна $B_n(x)$ для функции

$$f(x) = e^{kx} \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

3132. Вычислить многочлен $B_n(x)$ для функции $f(x) = \cos x$ на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

3133. Доказать, что $|x| = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$ на сегменте $[-1, 1]$, где

$$P_n(x) = 1 - \frac{1 - x^2}{2} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1\cdot 3 \ldots (2i-3)}{2\cdot 4 \ldots (2i)} (1 - x^2)^i.$$

3133.1. Пусть $f(x) \in C[a, b]$ и

$$M_k = \int_a^b x^k f(x)\,dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что $f(x) \equiv 0$ при $x \in [a, b]$.

Указание. Использовать теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции многочленами.

3134. Пусть $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция и a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — ее коэффициенты Фурье. Доказать, что тригонометрические многочлены Фейера

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)(a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

равномерно сходятся к функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

3135. Построить многочлен Фейера $\sigma_{2n-1}(x)$ для функции

$$f(x) = |x| \quad \text{при} \; -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ОТДЕЛ VI

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Предел функции. Непрерывность

1°. Предел функции. Пусть функция $f(P) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена на множестве E, имеющем точку сгущения P_0. Говорят, что

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, P_0) > 0$ такое, что

$$|f(P) - A| < \varepsilon,$$

если только $P \in E$ и $0 < \rho(P, P_0) < \delta$, где $\rho(P, P_0)$ — расстояние между точками P и P_0.

2°. Непрерывность. Функция $f(P)$ называется *непрерывной в точке* P_0, если

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$$

Функция $f(P)$ *непрерывна в данной области*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

3°. Равномерная непрерывность. Функция $f(P)$ называется *равномерно непрерывной* в области G, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых точек P' и P'' из G имеет место неравенство

$$|f(P') - f(P'')| < \varepsilon,$$

если только

$$\rho(P', P'') < \delta.$$

Функция, непрерывная в ограниченной и замкнутой области, равномерно непрерывна в этой области.

Определить и изобразить области существования следующих функций:

3136. $u = x + \sqrt{y}$. **3137.** $u = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$.

3138. $u = \sqrt{1-x^2-y^2}$. **3139.** $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

3141. $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

3142. $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

3143. $u=\ln(-x-y)$.

3144. $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

3145. $u=\arccos\dfrac{x}{x+y}$.

3146. $u=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

3147. $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

3148. $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3149. $u=\ln(xyz)$. 3150. $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

Построить линии уровня следующих функций:

3151. $z=x+y$. 3152. $z=x^2+y^2$.

3153. $z=x^2-y^2$. 3154. $z=(x+y)^2$.

3155. $z=\dfrac{y}{x}$. 3156. $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

3157. $z=\sqrt{xy}$. 3158. $z=|x|+y$.

3159. $z=|x|+|y|-|x+y|$.

3159.1. $z=\min(x, y)$. 3159.2. $z=\max(|x|, |y|)$.

3159.3. $z=\min(x^2, y)$. 3160. $z=e^{2x/x^2+y^2}$.

3161. $z=x^y$ $(x>0)$. 3162. $z=x^ye^{-x}$ $(x>0)$.

3163. $z=\ln\sqrt{\dfrac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}}$ $(a>0)$.

3164. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$ $(a>0)$.

3165. $z=\operatorname{sgn}(\sin x\sin y)$.

Найти поверхности уровня следующих функций:

3166. $u=x+y+z$. 3167. $u=x^2+y^2+z^2$.

3168. $u=x^2+y^2-z^2$. 3169. $u=(x+y)^2+z^2$.

3170. $u=\operatorname{sgn}\sin(x^2+y^2+z^2)$.

Исследовать характер поверхностей по данным их уравнениям:

3171. $z = f(y-ax)$. **3172.** $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$.

3173. $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$. **3174.** $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

3175. Построить график функции

$$F(t) = f(\cos t, \sin t),$$

где

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \geqslant x, \\ 0, & \text{если } y < x. \end{cases}$$

3176. Найти $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, если $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

3177. Найти $f(x)$, если

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \quad (x > 0).$$

3178. Пусть

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1).$$

Определить функции f и z, если $z = x$ при $y = 1$.

3179. Пусть

$$z = x + y + f(x-y).$$

Найти функции f и z, если $z = x^2$ при $y = 0$.

3180. Найти $f(x, y)$, если $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$.

3181. Показать, что для функции

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} f(x, y)\right\} = 1; \quad \lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f(x, y)\right\} = -1,$$

в то время как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ не существует.

3182. Показать, что для функции

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} f(x, y)\right\} = \lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f(x, y)\right\} = 0,$$

тем не менее $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ не существует.

3183. Показать, что для функции

$$f(x, y) = (x + y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

оба повторных предела $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)\right\}$ и $\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)\right\}$ не существуют, тем не менее существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$.

3183.1. Существует ли предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}?$$

3183.2. Чему равен предел функции

$$f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$$

вдоль любого луча

$$x = t\cos\alpha,\ y = t\sin\alpha\ (0 \leqslant t < +\infty)$$

при $t \to +\infty$?

Можно ли эту функцию назвать бесконечно малой при $x \to \infty$ и $y \to \infty$?

3184. Найти $\lim\limits_{x\to a}\left\{\lim\limits_{y\to b} f(x, y)\right\}$ и $\lim\limits_{y\to b}\left\{\lim\limits_{x\to a} f(x, y)\right\}$, если:

а) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}$, $a = \infty$, $b = \infty$;

б) $f(x, y) = \dfrac{x^y}{1 + x^y}$, $a = \infty$, $b = +0$;

в) $f(x, y) = \sin\dfrac{\pi x}{2x + y}$, $a = \infty$, $b = \infty$;

г) $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1 + xy}$, $a = 0$, $b = \infty$;

д) $f(x, y) = \log_x(x + y)$, $a = 1$, $b = 0$.

Найти следующие двойные пределы:

3185. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$. **3186.** $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$.

3187. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$. **3188.** $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (x^2 + y^2)\, e^{-(x+y)}$.

3189. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$. **3190.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

3191. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2/(x+y)}$.

3192. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3193. По каким направлениям φ существует конечный предел:

а) $\lim\limits_{\rho\to+0} e^{x/(x^2+y^2)}$; б) $\lim\limits_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2}\cdot\sin 2xy$,

если $x=\rho\cos\varphi$ и $y=\rho\sin\varphi$?

Найти точки разрыва следующих функций:

3194. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **3195.** $u=\dfrac{xy}{x+y}$.

3196. $u=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$. **3197.** $u=\sin\dfrac{1}{xy}$.

3198. $u=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$. **3199.** $u=\ln(1-x^2-y^2)$.

3200. $u=\dfrac{1}{xyz}$.

3201. $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

3202. Показать, что функция

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности (при фиксированном значении другой переменной), но не является непрерывной по совокупности этих переменных.

3203. Показать, что функция

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

в точке O (0, 0) непрерывна вдоль каждого луча

$$x=t\cos\alpha,\ y=t\sin\alpha \quad (0\leqslant t<+\infty),$$

проходящего через эту точку, т. е. существует

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha) = f(0,\ 0);$$

однако эта функция не является непрерывной в точке $(0,\ 0)$.

3203.1. Исследовать на равномерную непрерывность линейную функцию $u = 2x - 3y + 5$ в бесконечной плоскости $E^2 = \{|x| < +\infty,\ |y| < +\infty\}$.

3203.2. Исследовать на равномерную непрерывность в плоскости $E^2 = \{|x| < +\infty,\ |y| < +\infty\}$ функцию

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3203.3. Будет ли равномерно непрерывной функция

$$f(x,\ y) = \sin\frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}$$

в области $x^2 + y^2 < 1$.

3203.4. Дана функция $u = \arcsin\frac{x}{y}$. Является ли эта функция непрерывной в своей области определения E?

Будет ли функция u равномерно непрерывной в области E?

3204. Показать, что множество точек разрыва функции $f(x,\ y) = x\sin\frac{1}{y}$, если $y \neq 0$ и $f(x,\ 0) = 0$, не является замкнутым.

3205. Доказать, что если функция $f(x,\ y)$ в некоторой области G непрерывна по переменной x и равномерно относительно x непрерывна по переменной y, то эта функция непрерывна в рассматриваемой области.

3206. Доказать, что если в некоторой области G функция $f(x,\ y)$ непрерывна по переменной x и удовлетворяет условию Липшица по переменной y, т. е.

$$|f(x,\ y') - f(x,\ y'')| \leqslant L\,|y' - y''|,$$

где $(x,\ y') \in G$, $(x,\ y'') \in G$ и L — постоянная, то эта функция непрерывна в данной области.

3207. Доказать, что если функция $f(x,\ y)$, где $(x,\ y) \in E$, непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности и монотонна по одной из них, то эта функция непрерывна по совокупности переменных в области E (*теорема Юнга*).

3208. Пусть функция $f(x,\ y)$ непрерывна в области $a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B$, а последовательность функций

$\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится равномерно на $[a, A]$ и удовлетворяет условию $b \leqslant \varphi_n(x) \leqslant B$. Доказать, что последовательность функций

$$F_n(x) = f(x, \varphi_n(x)) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

также сходится равномерно на $[a, A]$.

3209. Пусть: 1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области R $(a < x < A;\ b < y < B)$; 2) функция $\varphi(x)$ непрерывна в интервале (a, A) и имеет значения, принадлежащие интервалу (b, B). Доказать, что функция

$$F(x) = f(x, \varphi(x))$$

непрерывна в интервале (a, A).

3210. Пусть: 1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области R $(a < x < A;\ b < y < B)$; 2) функции $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$ непрерывны в области R' $(a' < u < A';\ b' < v < B')$ и имеют значения, принадлежащие соответственно интервалам (a, A) и (b, B). Доказать, что функция

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

непрерывна в области R'.

§ 2. Частные производные. Дифференциал функции

1°. Частные производные. Результат частного дифференцирования функции нескольких переменных не зависит от порядка дифференцирования, если все производные, входящие в вычисление, непрерывны.

2°. Дифференциал функции. Если полное приращение функции $f(x, y, z)$ от независимых переменных x, y, z может быть представлено в виде

$$\Delta f(x, y, z) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho),$$

где коэффициенты A, B, C не зависят от Δx, Δy, Δz и $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, то функция $f(x, y, z)$ называется *дифференцируемой* в точке (x, y, z), а линейная часть приращения $A\,\Delta x + B\,\Delta y + + C\,\Delta z$, равная

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\,dx + f'_y(x, y, z)\,dy + f'_z(x, y, z)\,dz, \quad (1)$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$, называется *дифференциалом* этой функции.

Формула (1) сохраняет свое значение и в том случае, когда переменные x, y, z являются некоторыми дифференцируемыми функциями от независимых переменных.

Если x, y, z — независимые переменные, и функция $f(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до n-го порядка включительно, то для *дифференциалов высших порядков* имеет место символическая формула

$$d^n f(x, y, z) = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x, y, z).$$

3°. Производная сложной функции. Если $w = f(x, y, z)$ дифференцируема и $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, где функции φ, ψ, χ дифференцируемы, то

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Для вычисления производных второго порядка функции w полезно пользоваться символическими формулами:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \left(P_1\frac{\partial}{\partial x} + Q_1\frac{\partial}{\partial y} + R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 w + \frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial z}$$

и

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = \left(P_1\frac{\partial}{\partial x} + Q_1\frac{\partial}{\partial y} + R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(P_2\frac{\partial}{\partial x} + Q_2\frac{\partial}{\partial y} + R_2\frac{\partial}{\partial z}\right) w + \frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial z},$$

где

$$P_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad Q_1 = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad R_1 = \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$P_2 = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad Q_2 = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad R_2 = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4°. Производная в данном направлении. Если направление l в пространстве $Oxyz$ характеризуется направляющими косинусами $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ и функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема, то *производная по направлению* l вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Скорость наибольшего роста функций в данной точке, по величине и направлению, определяется вектором — *градиентом функции*:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\boldsymbol{k},$$

величина которого равна

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

3211. Показать, что

$$f'_x(x, b) = \frac{d}{dx}[f(x, b)].$$

3212. Найти $f'_x(x, 1)$, если

$$f(x, y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

3212.1. Найти $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$, если $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$. Является ли эта функция дифференцируемой в точке $O(0, 0)$?

3212.2. Является ли дифференцируемой в точке $O(0, 0)$ функция

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}?$$

3212.3. Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0, 0)$ функцию $f(x, y) = e^{-1/x^2+y^2}$ при $x^2 + y^2 > 0$ и $f(0, 0) = 0$.

Найти частные производные первого и второго порядков от следующих функций:

3213. $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$. **3214.** $u = xy + \frac{x}{y}$.

3215. $u = \frac{x}{y^2}$. **3216.** $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3217. $u = x\sin(x+y)$. **3218.** $u = \frac{\cos x^2}{y}$.

3219. $u = \operatorname{tg}\frac{x^2}{y}$. **3220.** $u = x^y$.

3221. $u = \ln(x + y^2)$. **3222.** $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3223. $u = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$. **3224.** $u = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3225. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. **3226.** $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.

3227. $u = x^{y/z}$. **3228.** $u = x^{y^z}$.

3229. Проверить равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},$$

если

а) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$; б) $u = x^{y^2}$;

в) $u = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

3230. Пусть $f(x, y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, если $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$. Показать, что $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

3230.1. Существует ли $f''_{xy}(0, 0)$, если

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 > 0; \\ 0 & \text{при } x = y = 0. \end{cases}$$

3231. Пусть $u = f(x, y, z)$ — однородная функция измерения n. Проверить теорему Эйлера об однородных функциях на следующих примерах:

а) $u = (x - 2y + 3z)^2$; б) $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

в) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{y/z}$.

3232. Доказать, что если дифференцируемая функция $u = f(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu,$$

то она является однородной функцией измерения n.

Указание. Рассмотреть вспомогательную функцию

$$F(t) = \frac{f(tx, ty, tz)}{t^n}.$$

3233. Доказать, что если $f(x, y, z)$ — дифференцируемая однородная функция измерения n, то ее частные производные $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ — однородные функции измерения $n-1$.

3234. Пусть $u = f(x, y, z)$ — дважды дифференцируемая однородная функция измерения n. Доказать, что

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

Найти дифференциалы первого и второго порядков от следующих функций (x, y, z — независимые переменные):

3235. $u = x^m y^n$. **3236.** $u = \dfrac{x}{y}$.

3237. $u=\sqrt{x^2+y^2}$. **3238.** $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3239. $u=e^{xy}$. **3240.** $u=xy+yz+zx$.

3241. $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

3242. Найти $df\,(1, 1, 1)$ и $d^2f\,(1, 1, 1)$, если

$$f(x, y, z)=\sqrt[z]{\frac{x}{y}}.$$

3243. Показать, что если $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то $d^2u \geqslant 0$.

3244. Предполагая, что x, y малы по абсолютной величине, вывести приближенные формулы для следующих выражений:

а) $(1+x)^m(1+y)^n$; б) $\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)$;

в) $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1+xy}$.

3245. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить

а) $1{,}002\cdot 2{,}003^2\cdot 3{,}004^3$; б) $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}}$;

в) $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$; г) $\sin 29^\circ\cdot\operatorname{tg}46^\circ$; д) $0{,}97^{1{,}05}$.

3246. На сколько изменятся диагональ и площадь прямоугольника со сторонами $x=6$ м и $y=8$ м, если первая сторона увеличится на 2 мм, а вторая сторона уменьшится на 5 мм?

3247. Центральный угол сектора $\alpha=60^\circ$ увеличился на $\Delta\alpha=1^\circ$. На сколько следует уменьшить радиус сектора $R=20$ см, чтобы площадь сектора осталась без изменения?

3248. Доказать, что относительная погрешность произведения приближенно равна сумме относительных погрешностей сомножителей.

3249. При измерении радиуса основания R и высоты H цилиндра были получены следующие результаты:

$$R=2{,}5\text{ м}\pm 0{,}1\text{ м};\quad H=4{,}0\text{ м}\pm 0{,}2\text{ м}.$$

С какой абсолютной погрешностью Δ и относительной погрешностью δ может быть вычислен объем цилиндра?

3250. Стороны треугольника $a=200$ м ± 2 м, $b=300$ м ± 5 м и угол между ними $C=60^\circ\pm 1^\circ$.

С какой абсолютной погрешностью может быть вычислена третья сторона треугольника c?

3251. Показать, что функция

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

непрерывна в точке (0, 0), имеет в этой точке обе частные производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$, однако не является дифференцируемой в точке (0, 0).

Выяснить поведение производных $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в окрестности точки (0, 0).

3252. Показать, что функция

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{если } x^2+y^2 \neq 0$$

и

$$f(0, 0) = 0,$$

в окрестности точки (0, 0) непрерывна и имеет ограниченные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, однако эта функция недифференцируема в точке (0, 0).

3253. Показать, что функция

$$f(x, y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, \quad \text{если } x^2+y^2 \neq 0$$

и

$$f(0, 0) = 0,$$

имеет в окрестности точки (0, 0) частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, которые разрывны в точке (0, 0) и неограничены в любой окрестности ее; тем не менее эта функция дифференцируема в точке (0, 0).

3254. Доказать, что функция $f(x, y)$, имеющая ограниченные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в некоторой выпуклой области E, равномерно непрерывна в этой области.

3255. Доказать, что если функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x при каждом фиксированном значении y и имеет ограниченную производную $f'_y(x, y)$ по переменной y, то эта функция непрерывна по совокупности переменных x и y.

Найти указанные частные производные в следующих задачах:

3256. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, если

$$u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4.$$

3257. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, если $u = x \ln(xy)$.

3258. $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$, если $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$.

3259. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$, если $u = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz}$.

3260. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$, если $u = e^{xyz}$.

3261. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\, \partial y\, \partial \xi\, \partial \eta}$, если $u = \ln \dfrac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$.

3262. $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$, если $u = (x - x_0)^p (y - y_0)^q$.

3263. $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, если $u = \dfrac{x+y}{x-y}$.

3264. $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, если $u = (x^2 + y^2)\, e^{x+y}$.

3265. $\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$, если $u = xyze^{x+y+z}$.

3266. Найти $f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,\ 0)$, если $f(x,\ y) = e^x \sin y$.

3267. Показать, что если $u = f(xyz)$, то

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = F(t),$$

где $t = xyz$, и найти функцию F.

3268. Найти $d^4 u$, если $u = x^4 - 2x^3 y - 2xy^3 + y^4 + x^3 - 3x^2 y - 3xy^2 + y^3 + 2x^2 - xy + 2y^2 + x + y + 1$.

Чему равны производные $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\, \partial y^3}$ и $\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}$?

Найти полные дифференциалы указанного порядка в следующих примерах:

3269. $d^3 u$, если $u = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$.

3270. $d^3 u$, если $u = \sin(x^2 + y^2)$.

3271. $d^{10} u$, если $u = \ln(x + y)$.

3272. $d^6 u$, если $u = \cos x \operatorname{ch} y$.

3273. $d^3 u$, если $u = xyz$.

3274. $d^4 u$, если $u = \ln(x^x y^y z^z)$.

3275. $d^n u$, если $u = e^{ax+by}$.
3276. $d^n u$, если $u = X(x)\,Y(y)$.
3277. $d^n u$, если $u = f(x+y+z)$.
3278. $d^n u$, если $u = e^{ax+by+cz}$.

3279. Пусть $P_n(x, y, z)$ — однородный многочлен степени n. Доказать, что

$$d^n P_n(x, y, z) = n!\, P_n(dx, dy, dz).$$

3280. Пусть

$$Au = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Найти Au и $A^2u = A(Au)$, если

а) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; б) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3281. Пусть

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Найти Δu, если

а) $u = \sin x \operatorname{ch} y$; б) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3282. Пусть

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

и

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Найти $\Delta_1 u$ и $\Delta_2 u$, если

а) $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$; б) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Найти производные первого и второго порядков от следующих сложных функций:

3283. $u = f(x^2+y^2+z^2)$.

3284. $u = f\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$.

3285. $u = f(x, xy, xyz)$.

3286. Найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, если $u = f(x+y, xy)$.

3287. Найти $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, если

$$u = f(x + y + z,\ x^2 + y^2 + z^2).$$

Найти полные дифференциалы первого и второго порядков от следующих сложных функций (x, y и z — независимые переменные):

3288. $u = f(t)$, где $t = x + y$.

3289. $u = f(t)$, где $t = \frac{y}{x}$. **3290.** $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

3291. $u = f(t)$, где $t = xyz$. **3292.** $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$.

3293. $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = ax$, $\eta = by$.

3294. $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

3295. $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$.

3296. $u = f(x + y, z)$.

3297. $u = f(x + y + z,\ x^2 + y^2 + z^2)$.

3298. $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

3299. $u = f(x, y, z)$, где $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

3300. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, где $\xi = ax$, $\eta = by$, $\zeta = cz$.

3301. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, где $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$, $\zeta = 2xy$.

Найти $d^n u$, если:

3302. $u = f(ax + by + cz)$. **3303.** $u = f(ax, by, cz)$.

3304. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, где $\xi = a_1x + b_1y + c_1z$, $\eta = a_2x + b_2y + c_2z$, $\zeta = a_3x + b_3y + c_3z$.

3305. Пусть $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и f — дважды дифференцируемая функция. Показать, что

$$\Delta u = F(r),$$

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, и найти функцию F.

3306. Пусть u и v — дважды дифференцируемые функции и Δ — оператор Лапласа (см. задачу 3305). Доказать, что

$$\Delta(uv) = u\,\Delta v + v\,\Delta u + 2\Delta(u, v),$$

где

$$\Delta(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}.$$

3307. Показать, что функция

$$u = \ln\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

(a и b — постоянные) удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

3308. Доказать, что если функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (см. задачу **3307**), то функция

$$v=u\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

также удовлетворяет этому уравнению.

3309. Показать, что функция

$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$$

(a и b — постоянные) удовлетворяет *уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3310. Доказать, что если функция $u = u(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (см. задачу **3309**), то функция

$$v=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u\left(\frac{x}{a^2t},\ -\frac{x}{a^4t}\right)\quad(t>0)$$

также удовлетворяет этому уравнению.

3311. Доказать, что функция

$$u=\frac{1}{r},$$

где $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, удовлетворяет при $r\neq 0$ *уравнению Лапласа*

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

3312. Доказать, что если функция $u = u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (см. задачу **3311**), то функция

$$v=\frac{1}{r}u\left(\frac{k^2x}{r^2},\ \frac{k^2y}{r^2},\ \frac{k^2z}{r^2}\right),$$

где k — постоянная и $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, также удовлетворяет этому уравнению.

3313. Доказать, что функция

$$u=\frac{C_1e^{-ar}+C_2e^{ar}}{r},$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и C_1, C_2 — постоянные, удовлетворяет *уравнению Гельмгольца*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2u.$$

3314. Пусть функции $u_1=u_1(x, y, z)$ и $u_2=u_2(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u=0$.

Доказать, что функция

$$v=u_1(x, y, z)+(x^2+y^2+z^2)\,u_2(x, y, z)$$

удовлетворяет *бигармоническому уравнению*

$$\Delta(\Delta v)=0.$$

3315. Пусть $f(x, y, z)$ есть m раз дифференцируемая однородная функция измерения n. Доказать, что

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x, y, z)=$$
$$=n(n-1)\ldots(n-m+1)f(x, y, z).$$

3316. Упростить выражение

$$\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y},$$

если $z=\sin y+f(\sin x-\sin y)$, где f — дифференцируемая функция.

3317. Показать, что функция $z=x^nf\left(\frac{y}{x^2}\right)$, где f — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz.$$

3318. Показать, что $z=yf(x^2-y^2)$, где f — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz.$$

3319. Упростить выражение $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}$, если

$$u=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz+f(y-x, z-x),$$

где f — дифференцируемая функция.

3320. Пусть $x^2 = vw$, $y^2 = uw$, $z^2 = uv$ и

$$f(x, y, z) = F(u, v, w).$$

Доказать, что

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w.$$

Предполагая, что произвольные функции φ, ψ и т. п. дифференцируемы достаточное число раз, проверить следующие равенства:

3321. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $z = \varphi(x^2 + y^2)$.

3322. $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, если $z = \dfrac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$.

3323. $(x^2 - y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = xyz$,

если $z = e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$.

3324. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha y\dfrac{\partial u}{\partial y} + \beta z\dfrac{\partial u}{\partial z} = nu$,

если $u = x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x^\alpha}, \dfrac{z}{x^\beta}\right)$.

3325. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = u + \dfrac{xy}{z}$,

если $u = \dfrac{xy}{z}\ln x + x\varphi\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$.

3326. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$.

3327. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,

если $u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$.

3328. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,

если $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

3329. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$,

если $u = x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + x^{1-n}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

3330. $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u = \varphi[x + \psi(y)]$.

Путем последовательного дифференцирования исключить произвольные функции φ и ψ:

3331. $z=x+\varphi(xy)$. **3332.** $y=x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right)$.

3333. $z=\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. **3334.** $u=\varphi(x-y,\ y-z)$.

3335. $u=\varphi\left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{z}\right)$.

3336. $z=\varphi(x)+\psi(y)$. **3337.** $z=\varphi(x)\psi(y)$.

3338. $z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$.

3339. $z=x\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

3340. $z=\varphi(xy)+\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

3341. Найти производную функции $z=x^2-y^2$ в точке M (1, 1), в направлении l, составляющем угол $\alpha=60°$ с положительным направлением оси Ox.

3342. Найти производную функции $z=x^2-xy+y^2$ в точке M (1, 1) в направлении l, составляющем угол α с положительным направлением оси Ox. В каком направлении эта производная имеет: а) наибольшее значение; б) наименьшее значение; в) равна 0.

3343. Найти производную функции $z=\ln(x^2+y^2)$ в точке M $(x_0,\ y_0)$ в направлении, перпендикулярном к линии уровня, проходящей через эту точку.

3344. Найти производную функции $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ в точке $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ по направлению внутренней нормали в этой точке к кривой:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

3345. Найти производную функции $u=xyz$ в точке M (1, 1, 1), в направлении l $\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$.

Чему равна величина градиента функции в этой точке?

3346. Найти величину и направление градиента функции

$$u=\frac{1}{r},$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, в точке M_0 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

3347. Определить угол между градиентами функции $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точках $A\ (\varepsilon,\ 0,\ 0)$ и $B\ (0,\ \varepsilon,\ 0)$.

3348. На сколько отличается в точке $M\ (1,\ 2,\ 2)$ величина градиента функции $u = x + y + z$ от величины градиента функции

$$v = x + y + z + 0{,}001 \sin (10^6 \pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})?$$

3349. Показать, что в точке $M_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ угол между градиентами функций

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2$$

и

$$v = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz$$

($a,\ b,\ c,\ m,\ n,\ p$ — постоянны и $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) стремится к нулю, если точка M_0 удаляется в бесконечность.

3350. Пусть $u = f\ (x,\ y,\ z)$ — дважды дифференцируемая функция. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)$, если $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы направления l.

3351. Пусть $u = f\ (x,\ y,\ z)$ — дважды дифференцируемая функция и

$$l_1\{\cos\alpha_1,\ \cos\beta_1,\ \cos\gamma_1\},\ l_2\{\cos\alpha_2,\ \cos\beta_2,\ \cos\gamma_2\},$$
$$l_3\{\cos\alpha_3,\ \cos\beta_3,\ \cos\gamma_3\}$$

— три взаимно перпендикулярных направления.

Доказать, что:

а) $$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$$

б) $$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3352. Пусть $u = u\ (x,\ y)$ — дифференцируемая функция и при $y = x^2$ имеем:

$$u\ (x,\ y) = 1 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x} = x.$$

Найти $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $y = x^2$.

3353. Пусть функция $u = u\ (x,\ y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

и, кроме того, следующим условиям:

$$u(x, 2x) = x, \quad u'_x(x, 2x) = x^2.$$

Найти

$$u''_{xx}(x, 2x), \quad u''_{xy}(x, 2x), \quad u''_{yy}(x, 2x).$$

Полагая $z = z(x, y)$, решить следующие уравнения:

3354. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$ **3355.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0.$

3356. $\dfrac{\partial^n z}{\partial y^n} = 0.$

3357. Полагая $u = u(x, y, z)$, решить уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 0.$$

3358. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y,$$

удовлетворяющее условию: $z(x, x^2) = 1$.

3359. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

удовлетворяющее условиям: $z(x, 0) = 1$, $z'_y(x, 0) = x$.

3360. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = x + y,$$

удовлетворяющее условиям: $z(x, 0) = x$, $z(0, y) = y^2$.

§ 3. Дифференцирование неявных функций

1°. Теорема существования. Если: 1) функция $F(x, y, z)$ обращается в нуль в некоторой точке $\widehat{A}_0(x_0, y_0, z_0)$; 2) $F(x, y, z)$ и $F'_z(x, y, z)$ определены и непрерывны в окрестности точки $\widehat{A}_0$; 3) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то в некоторой достаточно малой окрестности точки $A_0(x_0, y_0)$ существует единственная однозначная непрерывная функция

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

удовлетворяющая уравнению

$$F(x, y, z) = 0$$

и такая, что $z_0 = f(x_0, y_0)$.

2°. **Дифференцируемость неявной функции.** Если, сверх того, 4) функция $F(x, y, z)$ дифференцируема в окрестности точки $\widehat{A}_0(x_0, y_0, z_0)$, то функция (1) дифференцируема в окрестности точки $A_0(x_0, y_0)$ и ее производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ могут быть найдены из уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0. \qquad (2)$$

Если функция $F(x, y, z)$ дифференцируема достаточное число раз, то последовательным дифференцированием равенств (2) вычисляются также производные высших порядков от функции z.

3°. **Неявные функции, определяемые системой уравнений.** Пусть функции $F_i(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) обращаются в нуль в точке $\widehat{A}_0(x_{10}, \ldots, x_{m0}; y_{10}, \ldots, y_{n0})$,

2) дифференцируемы в окрестности точки $\widehat{A}_0$;

3) функциональный определитель $\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \neq 0$ в точке $\widehat{A}_0$.

В таком случае система уравнений

$$F_i(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)=0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3)$$

однозначно определяет в некоторой окрестности точки $A_0(x_{10}, \ldots, x_{m0})$ систему дифференцируемых функций

$$y_i = f(x_1, \ldots, x_m) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

удовлетворяющих уравнениям (3) и условиям

$$f_i(x_{10}, \ldots, x_{m0}) = y_{i0} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Дифференциалы этих неявных функций могут быть найдены из системы

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}dx_j+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}dy_k=0$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$*).

3361. Показать, что разрывная в каждой точке функция Дирихле

$$y=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально},\end{cases}$$

*) При формулировке большинства задач этого раздела без оговорок предполагается, что выполнены условия существования неявных функций и их соответствующих производных.

удовлетворяет уравнению

$$y^2 - y = 0.$$

3362. Пусть функция $f(x)$ определена в интервале (a, b). В каком случае уравнение

$$f(x)\, y = 0$$

имеет при $a < x < b$ единственное непрерывное решение $y = 0$?

3363. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в интервале (a, b). В каком случае уравнение

$$f(x)\, y = g(x)$$

имеет в интервале (a, b) единственное непрерывное решение?

3364. Пусть дано уравнение

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1)$$

и

$$y = y(x) \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \qquad (2)$$

— однозначная функция, удовлетворяющая уравнению (1).

1) Сколько однозначных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

2) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

3) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1), если: а) $y(0) = 1$; б) $y(1) = 0$?

3365. Пусть дано уравнение

$$x^2 = y^2 \qquad (1)$$

и

$$y = y(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \qquad (2)$$

есть однозначная функция, удовлетворяющая уравнению (1).

1) Сколько однозначных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

2) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

3) Сколько однозначных дифференцируемых функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

4) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1), если: а) $y(1) = 1$; б) $y(0) = 0$?

5) Сколько однозначных непрерывных функций $y = y(x)$ $(1-\delta < x < 1 + \delta)$ удовлетворяет уравнению (1), если $y(1) = 1$ и δ достаточно мало?

3366. Уравнение $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$ определяет y как многозначную функцию от x. В каких областях эта функция 1) однозначна, 2) двузначна, 3) трехзначна, 4) четырехзначна? Определить точки ветвления этой функции и ее однозначные непрерывные ветви.

3367. Найти точки ветвления и непрерывные однозначные ветви $y = y(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ многозначной функции y, определяемой уравнением $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

3368. Пусть $f(x)$ — непрерывна при $a < x < b$ и $\varphi(y)$ — монотонно возрастает и непрерывна при $c < y < d$. В каком случае уравнение $\varphi(y) = f(x)$ определяет однозначную функцию $y = \varphi^{-1}(f(x))$?

Рассмотреть примеры: а) $\sin y + \operatorname{sh} y = x$; б) $e^{-y} = -\sin^2 x$.

3369. Пусть

$$x = y + \varphi(y), \tag{1}$$

где $\varphi(0) = 0$ и $|\varphi'(y)| \leqslant k < 1$ при $-a < y < a$. Доказать, что при $-\varepsilon < x < \varepsilon$ существует единственная дифференцируемая функция $y = y(x)$, удовлетворяющая уравнению (1), и такая, что $y(0) = 0$.

3370. Пусть $y = y(x)$ — неявная функция, определяемая уравнением

$$x = ky + \varphi(y),$$

где постоянная $k \neq 0$, и $\varphi(y)$ — дифференцируемая периодическая функция периода ω такая, что $|\varphi'(y)| < |k|$. Доказать, что

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x),$$

где $\psi(x)$ — периодическая функция с периодом $|k|\,\omega$.

Найти y' и y'' для функций y, определяемых следующими уравнениями:

3371. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$. **3372.** $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3373. $y - \varepsilon\sin y = x$ $(0 < \varepsilon < 1)$.

3374. $x^y = y^x$ $(x \neq y)$. **3375.** $y = 2x\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3376. Доказать, что при

$$1 + xy = k(x-y),$$

где k — постоянная величина, имеет место равенство

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}.$$

3377. Доказать, что если

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

то при $xy > 0$ имеет место равенство

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

3378. Доказать, что уравнение

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \quad (a \neq 0)$$

в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$ определяет две дифференцируемые функции: $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$. Найти $y_1'(0)$ и $y_2'(0)$.

3379. Найти y' при $x = 0$ и $y = 0$, если

$$(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3.$$

3380. Найти y', y'' и y''', если $x^2 + xy + y^2 = 3$.

3381. Найти y', y'' и y''' при $x = 0$, $y = 1$, если

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0.$$

3382. Доказать, что для кривой 2-го порядка

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

справедливо равенство

$$\frac{d^3}{dx^3}[(y'')^{-2/3}] = 0.$$

Для функции $z = z(x, y)$ найти частные производные первого и второго порядков, если:

3383. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. **3384.** $z^3 - 3xyz = a^3$.

3385. $x + y + z = e^z$.

3386. $z = \sqrt{x^2-y^2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

3387. $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$.

3388. Пусть

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 \qquad (1)$$

и

$$f(x, y, z) = xy^2z^3.$$

Найти: а) $f'_x(1, 1, 1)$, если $z = z(x, y)$ есть неявная функция, определяемая уравнением (1); б) $f'_x(1, 1, 1)$, если $y = y(x, z)$ есть неявная функция, определяемая уравнением (1). Объяснить, почему эти производные различны.

3389. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ при $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$, если $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$.

Найти dz и d^2z, если:

3390. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

3391. $xyz = x + y + z$.

3392. $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1$. 3393. $z = x + \operatorname{arctg}\frac{y}{z - x}$.

3394. Найти du, если $u^3 - 3(x + y)u^2 + z^3 = 0$.

3395. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, если

$$F(x + y + z,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

3396. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$F(x - y,\ y - z, z - x) = 0.$$

3397. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если

$$F(x,\ x + y, x + y + z) = 0.$$

3398. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $F(xz, yz) = 0$.

3399. Найти d^2z, если:

а) $F(x + z,\ y + z) = 0$; б) $F\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right) = 0$.

3391.1. Пусть $z = z(x, y)$ — та дифференцируемая функция, определяемая уравнением

$$z^3 - xz + y = 0,$$

которая при $x = 3$, $y = -2$ принимает значение $z = 2$. Найти $dz\,(3, -2)$ и $d^2z\,(3, -2)$.

3400. Пусть $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ — функции, определяемые уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Доказать, что

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

3401. Найти $\frac{dx}{dz}$ и $\frac{dy}{dz}$, если $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$.

3402. Найти $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$ и $\frac{d^2y}{dz^2}$ при $x=1$, $y=-1$, $z=2$, если $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2$, $x+y+z=2$.

3403. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, если $xu-yv=0$, $yu+xv=1$.

3403.1. Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} xe^{u+v}+2uv&=1,\\ ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}&=2x \end{aligned}\right\}$$

определяет дифференцируемые функции $u=u(x, y)$ и $v=v(x, y)$ такие, что $u(1, 2)=0$ и $v(1, 2)=0$. Найти $du(1, 2)$ и $dv(1, 2)$.

3404. Найти du, dv, d^2u и d^2v, если

$$u+v=x+y, \quad \frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y}.$$

3405. Найти du, dv, d^2u и d^2v при $x=1$, $y=1$, $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$, если

$$e^{u/x}\cos\frac{v}{y}=\frac{x}{\sqrt{2}}, \quad e^{u/x}\sin\frac{v}{y}=\frac{y}{\sqrt{2}}.$$

3406. Пусть

$$x=t+t^{-1}, \; y=t^2+t^{-2}, \quad z=t^3+t^{-3}.$$

Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и $\frac{d^2z}{dx^2}$.

3407. В какой области плоскости Oxy система уравнений

$$x=u+v, \; y=u^2+v^2, \; z=u^3+v^3,$$

где параметры u и v принимают всевозможные вещественные значения, определяет z как функцию от переменных x и y? Найти производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3407.1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $u=1$, $v=1$, если

$$\left.\begin{aligned} x &= u + \ln v, \\ y &= v - \ln u, \\ z &= 2u + v. \end{aligned}\right\}$$

3407.2. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ в точке $u = 2$, $v = 1$, если

$$\left.\begin{aligned} x &= u + v^2, \\ y &= u^2 - v^3 \\ z &= 2uv. \end{aligned}\right\}$$

3408. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если

$$x = \cos\varphi \cos\psi,\ y = \cos\varphi \sin\varphi,\ z = \sin\varphi.$$

3409. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v.$$

3410. Пусть $z = z(x, y)$ функция определяется системой уравнений:

$$x = e^{u+v},\quad y = e^{u-v},\quad z = uv$$

(u и v — параметры). Найти dz и d^2z, при $u = 0$ и $v = 0$.

3411. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{d^2z}{dx^2}$, если $z = x^2 + y^2$, где $y = y(x)$ определяется из уравнения

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

3412. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, если $u = \frac{x+z}{y+z}$, где z определяется из уравнения $ze^z = xe^x + ye^y$.

3413. Пусть уравнения $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$ определяют z как функцию от x и y. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3414. Пусть $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$. Найти частные производные первого и второго порядков от обратных функций: $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.

3415. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, если

а) $x = u\cos\frac{v}{u}$, $y = u\sin\frac{v}{u}$;

б) $x = e^u + u\sin v$, $y = e^u - u\cos v$.

3416. Функция $u = u(x)$ определяется системой уравнений

$$u = f(x, y, z),\ g(x, y, z) = 0,\ h(x, y, z) = 0.$$

Найти $\dfrac{du}{dx}$ и $\dfrac{d^2u}{dx^2}$.

3417. Функция $u = u(x, y)$ определяется системой уравнений

$$u = f(x, y, z, t),\ g(y, z, t) = 0,\ h(z, t) = 0.$$

Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

3418. Пусть $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

3419. Пусть функция $z = z(x, y)$ удовлетворяет системе уравнений $f(x, y, z, t) = 0$, $g(x, y, z, t) = 0$, где t — переменный параметр. Найти dz.

3420. Пусть $u = f(z)$, где z — неявная функция от переменных x и y, определяемая уравнением $z = x + y\varphi(z)$.

Доказать *формулу Лагранжа*

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^n \frac{\partial u}{\partial x}\right\}.$$

Указание. Доказать формулу для $n = 1$ и применить метод математической индукции.

3421. Показать, что функция $z = z(x, y)$, определяемая уравнением

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0, \qquad (1)$$

где $\Phi(u, v)$ — произвольная дифференцируемая функция от переменных u и v (a и b — постоянные), являются решением уравнения

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Выяснить геометрические свойства поверхности (1).

3422. Показать, что функция $z = z(x, y)$, определяемая уравнением

$$\Phi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0, \qquad (2)$$

где $\Phi(u, v)$ — произвольная дифференцируемая функция от переменных u и v, удовлетворяет уравнению

$$(x - x_0)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial z}{\partial y} = z - z_0.$$

Выяснить геометрические свойства поверхности (2).

3423. Показать, что функция $z = z(x, y)$, определяемая уравнением

$$ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2), \qquad (3)$$

где $\Phi(u)$ — произвольная дифференцируемая функция от переменной u и a, b и c — постоянные, удовлетворяет уравнению

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

Выяснить геометрические свойства поверхности (3).

3424. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right).$$

Показать, что

$$(x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

3425. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением

$$F(x + zy^{-1},\ y + zx^{-1}) = 0.$$

Показать, что

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

3426. Показать, что функция $z = z(x, y)$, определяемая системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z &= f(\alpha),\\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha &= f'(\alpha),\end{aligned}\right\}$$

где $\alpha = \alpha(x, y)$ — переменный параметр и $f(\alpha)$ — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2.$$

3427. Показать, что функция $z = z(x, y)$, заданная системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z &= \alpha x + \frac{y}{\alpha} + f(\alpha),\\ 0 &= x - \frac{y}{\alpha^2} + f'(\alpha),\end{aligned}\right\}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

3428. Показать, что функция $z = z(x, y)$, заданная уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &[z-f(\alpha)]^2 = x^2(y^2-\alpha^2), \\ &[z-f(\alpha)]\, f'(\alpha) = \alpha x^2, \end{aligned}\right\}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

3429. Показать, что функция $z = z(x, y)$, заданная уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ &0 = x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha), \end{aligned}\right\}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0.$$

3430. Показать, что неявная функция $z = z(x, y)$, определяемая уравнением

$$y = x\varphi(z) + \psi(z),$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

§ 4. Замена переменных

1°. Замена переменных в выражении, содержащем обыкновенные производные. Пусть в дифференциальном выражении

$$A = \Phi\left(x,\ y,\ y'_x,\ y''_{xx},\ \ldots\right)$$

требуется перейти к новым переменным: t — независимой переменной и u — функции, связанным с прежними переменными x и y уравнениями

$$x = f(t, u),\quad y = g(t, u). \tag{1}$$

Дифференцируя уравнения (1), будем иметь:

$$y'_x = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial u}\,u'_t}{\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\,u'_t}.$$

Аналогично выражаются высшие производные $y''_{xx}, \ldots$ В результате мы получаем:

$$A = \Phi_1\left(t,\ u,\ u'_t,\ u''_{tt},\ \ldots\right).$$

2°. Замена независимых переменных в выражении, содержащем частные производные. Если в дифференциальном выражении

$$B = F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \ldots\right)$$

положить

$$x = f(u,\ v),\ y = g(u,\ v), \tag{2}$$

где u и v — новые независимые переменные, то последовательные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ... определяются из следующих уравнений:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v},$$

и т. п.

3°. Замена независимых переменных и функции в выражении, содержащем частные производные. В более общем случае, если имеем уравнения

$$x = f(u,\ v,\ w),\ y = g(u,\ v,\ w),\ z = h(u,\ v,\ w), \tag{3}$$

где u, v — новые независимые переменные и $w = w(u,\ v)$ — новая функция, то для частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ... получаем такие уравнения:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right) = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right) = \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v},$$

и т. п.

В некоторых случаях замены переменных удобно пользоваться полными дифференциалами.

3431. Преобразовать уравнение $y'y''' - 3y''^2 = x$, приняв y за новую независимую переменную.

3432. Таким же образом преобразовать уравнение

$$y'^2 y^{\mathrm{IV}} - 10y'y''y''' + 15y''^3 = 0.$$

3433. Преобразовать уравнение

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0,$$

приняв x за функцию и $t = xy$ — за независимое переменное.

Вводя новые переменные, преобразовать следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

3434. $x^2y'' + xy' + y = 0$, если $x = e^t$.

3435. $y''' = \frac{6y}{x^3}$, если $t = \ln|x|$.

3436. $(1-x^2)\,y'' - xy' + n^2y = 0$, если $x = \cos t$.

3437. $y'' + y'\operatorname{th} x + \frac{m^2}{\operatorname{ch}^2 x}\,y = 0$, если $x = \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}$.

3438. $y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0$, если $y=ue^{-1/2\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi}$ где $p(x) \in C^{(1)}$.

3439. $x^4y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, если $x = e^t$ и $y = ue^{2t}$, где $u = u(t)$.

3440. $(1 + x^2)^2y'' = y$, если $x = \operatorname{tg} t$ и $y = \frac{u}{\cos t}$, где $u = u(t)$.

3441. $(1-x^2)^2y'' = -y$, если $x = \operatorname{th} t$ и $y = \frac{u}{\operatorname{ch} t}$, где $u = u(t)$.

3442. $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0$, если $x = u + t$ и $y = u-t$, где $u = u(t)$.

3443. $y''' - x^3y'' + xy' - y = 0$, если $x = \frac{1}{t}$ и $y = \frac{u}{t}$, где $u = u(t)$.

3444. Преобразовать *уравнение Стокса*

$$y'' = \frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2},$$

полагая

$$u = \frac{y}{x-b}, \quad t = \ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|$$

и принимая u за функцию переменной t.

3445. Показать, что если уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = 0$$

преобразовать подстановкой $x = \varphi(\xi)$ в уравнение

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + P(\xi)\frac{dy}{d\xi} + Q(\xi)y = 0,$$

то

$$[2P(\xi)Q(\xi) + Q'(\xi)]\,[Q(\xi)]^{-3/2} = $$
$$= [2p(x)q(x) + q'(x)]\,[q(x)]^{-3/2}.$$

3446. В уравнении $\Phi(y, y', y'') = 0$, где Φ — однородная функция переменных y, y', y'', положить

$$y = e^{\int\limits_{x_0}^{x} u\,dx}.$$

3447. В уравнении $F(x^2y'', xy', y) = 0$, где F — однородная функция своих аргументов, положить

$$u = x\frac{y'}{y}.$$

3448. Доказать, что уравнение

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0$$

не меняет своего вида при гомографическом преобразовании

$$x = \frac{a_1\xi + b_1\eta + c_1}{a\xi + b\eta + c}, \quad y = \frac{a_2\xi + b_2\eta + c_2}{a\xi + b\eta + c}.$$

Указание. Данное преобразование представить в виде композиции простейших преобразований:

$$x = \alpha X + \beta Y + \gamma, \; y = Y;$$
$$X = \frac{1}{X_1}, \qquad Y = \frac{Y_1}{X_1}$$

и

$$X_1 = a\xi + b\eta + c, \; Y_1 = a_2\xi + b_2\eta + c_2.$$

3449. Доказать, что *шварциан*

$$S[x(t)] = \frac{x'''(t)}{x'(t)} - \frac{3}{2}\left[\frac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2$$

не меняет своего значения при дробно-линейном преобразовании:

$$y = \frac{ax(t) + b}{cx(t) + d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

Преобразовать к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, следующие уравнения:

3450. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$.

3451. $(xy'-y)^2=2xy(1+y'^2)$.

3452. $(x^2+y^2)^2y''=(x+yy')^3$.

3453. Преобразовать к полярным координатам выражение $\dfrac{x+yy'}{xy'-y}$.

3454. Кривизну плоской кривой

$$K=\frac{|y''_{xx}|}{(1+y_x'^2)^{3/2}}$$

выразить в полярных координатах r и φ.

3455. В системе уравнений

$$\frac{dx}{dt}=y+kx(x^2+y^2),\qquad \frac{dy}{dt}=-x+ky(x^2+y^2)$$

перейти к полярным координатам.

3456. Преобразовать выражение

$$W=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2},$$

введя новые функции $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3457. В *преобразовании Лежандра* каждой точке (x, y) кривой $y=y(x)$ ставится в соответствие точка (X, Y), где

$$X=y',\ Y=xy'-y.$$

Найти Y', Y'' и Y'''.

Вводя новые независимые переменные ξ и η, решить следующие уравнения:

3458. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $\xi=x+y$ и $\eta=x-y$.

3459. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, если $\xi=x$ и $\eta=x^2+y^2$.

3460. $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$ $(a\neq0)$, если $\xi=x$ и $\eta=y-bz$.

3461. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, если $\xi=x$ и $\eta=\dfrac{y}{x}$.

Принимая u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

3462. $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\,\frac{\partial z}{\partial y}=xy$, если $u=\ln x$ и $v=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$.

3463. $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$, если $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ и $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3464. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, если $u=\frac{y}{x}$ и $v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3465. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z}$, если $u=2x-z^2$ и $v=\frac{y}{z}$.

3466. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y+z$, если $u=x+z$ и $v=y+z$.

3467. Преобразовать выражение

$$(z+e^x)\frac{\partial z}{\partial x}+(z+e^y)\frac{\partial z}{\partial y}-(z^2-e^{x+y}),$$

приняв за новые независимые переменные

$$\xi=y+ze^{-x},\quad \eta=x+ze^{-y}.$$

3468. Преобразовать выражение

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

полагая

$$x=uv,\quad y=\frac{1}{2}(u^2-v^2).$$

3469. В уравнении

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

положить $\xi=x$, $\eta=y-x$, $\zeta=z-x$.

3470. Преобразовать уравнение

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

приняв x за функцию, а y и z — за независимые переменные.

3471. Преобразовать уравнение

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

приняв x за функцию, а $u=y-z$, $v=y+z$ — за независимые переменные.

3472. Преобразовать выражение

$$A=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

приняв x за функцию и $u=xz$, $v=yz$ — за независимые переменные.

3473. В уравнении

$$(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=$$
$$=x+y+z$$

положить:

$$e^{\xi}=x-u,\quad e^{\eta}=y-u,\quad e^{\zeta}=z-u.$$

Перейти к новым переменным u, v, w, где $w=w(u, v)$, в следующих уравнениях:

3474. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$, если

$$u=x^2+y^2,\quad v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\quad w=\ln z-(x+y).$$

3475. $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$, если

$$u=x,\quad v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\quad w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}.$$

3476. $(xy+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+yz$, если

$$u=yz-x,\quad v=xz-y,\quad w=xy-z.$$

3477. $\left(x\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x=ue^w,\quad y=ve^w,\quad z=we^w.$$

3478. Преобразовать выражение

$$(x-y):\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

полагая

$$u = \ln\sqrt{x^2 + y^2},\quad v = \operatorname{arctg} z,\quad w = x + y + z,$$

где $w = w(u, v)$.

3479. Преобразовать выражение

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y},$$

полагая $u = xe^z$, $v = ye^z$, $w = ze^z$, где $w = w(u, v)$.

3480. В уравнении

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}$$

положить: $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = \frac{y}{z}$, $\zeta = z$, $w = \frac{u}{z}$, где $w = w(\xi, \eta, \zeta)$.

Преобразовать к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, следующие выражения:

3481. $w = x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}$. **3482.** $w = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$.

3483. $w = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$. **3484.** $w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

3485. $w = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

3486. $$w = y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

3487. В выражении

$$I = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

положить $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

3488. Решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, введя новые независимые переменные

$$\xi = x - at,\quad \eta = x + at.$$

Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

3489. $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0,$ если $u=x+2y+2$ и $v=x-y-1$.

3490. $(1+x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0,$ если $u=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ и $v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

3491. $ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ (a, b, c — постоянны), если $u=\ln x$ и $v=\ln y$.

3492. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$ если

$$u=\frac{x}{x^2+y^2} \text{ и } v=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

3493. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2z=0,$ если

$$x=e^u\cos v,\ y=e^u\sin v.$$

3494. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$ $(y>0)$, если

$$u=x-2\sqrt{y} \text{ и } v=x+2\sqrt{y}.$$

3495. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$ если $u=xy$ и $v=\frac{x}{y}$.

3496. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$ если $u=x+y$ и $v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

3497. $xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y\frac{\partial z}{\partial x}+$

$$+x\frac{\partial z}{\partial y}=0, \text{ если } u=\frac{1}{2}(x^2+y^2) \text{ и } v=xy.$$

3498. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\sin y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\sin^2 y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$ если

$$u=x\operatorname{tg}\frac{y}{2} \text{ и } v=x.$$

3499. $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ $(x>0,\ y>0)$, если

$$x=(u+v)^2 \text{ и } y=(u-v)^2.$$

3500. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(1 + \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^3$, если

$$u = x \text{ и } v = y + z.$$

3501. С помощью линейной замены

$$\xi = x + \lambda_1 y, \ \eta = x + \lambda_2 y$$

преобразовать уравнение

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

где A, B и C — постоянные и $AC - B^2 < 0$, к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Найти общий вид функции, удовлетворяющей уравнению (1).

3502. Доказать, что вид уравнения Лапласа

$$\Delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

не меняется при любой невырожденной замене переменных

$$x = \varphi(u, v), \ y = \psi(u, v),$$

удовлетворяющей условиям:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

3503. Преобразовать уравнения

а) $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; б) $\Delta(\Delta u) = 0$,

полагая $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3504. Какой вид принимает уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + cw = 0,$$

если положить

$$w = f(u),$$

где $u = (x - x_0)(y - y_0)$?

3505. Преобразовать выражение

$$A = x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x},$$

полагая

$$x + y = X, \ y = XY.$$

3506. Показать, что уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z=0$$

не меняет своего вида при преобразовании переменных

$$x=uv \text{ и } y=\frac{1}{v}.$$

3507. Показать, что уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

не меняет своего вида при замене переменных

$$u=x+z \text{ и } v=y+z.$$

3508. Преобразовать уравнение

$$xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=0,$$

полагая

$$x=\eta\zeta,\ y=\xi\zeta,\ z=\xi\eta.$$

3609. Преобразовать уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_3}=0,$$

полагая

$$y_1=x_2+x_3-x_1,\ y_2=x_1+x_3-x_2,\ y_3=x_1+x_2-x_3.$$

3510. Преобразовать уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+$$
$$+2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=0,$$

полагая

$$\xi=\frac{y}{x},\quad \eta=\frac{z}{x},\quad \zeta=y-z.$$

Указание. Записать уравнение в виде $A^2u-Au=0$, где

$$A=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}.$$

3511. Выражения

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

и

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

преобразовать к сферическим координатам, полагая

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta.$$

Указание. Замену переменных представить в виде композиции двух частичных замен

$$x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = z$$

и

$$R = r\sin\theta,\ \varphi = \varphi,\ z = r\cos\theta.$$

3512. В уравнении

$$z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

ввести новую функцию w, полагая $w = z^2$.

Приняв u и v за новые независимые переменные и $w = w(u, v)$ за новую функцию, преобразовать следующие уравнения:

3513. $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2}{x}$, если $u = \dfrac{x}{y}$, $v = x$, $w = xz - y$.

3514. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $u = x + y$, $v = \dfrac{y}{x}$, $w = \dfrac{z}{x}$.

3515. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy - z$.

3516. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial x} = z$, если $u = \dfrac{x+y}{2}$, $v = \dfrac{x-y}{2}$, $w = ze^y$.

3517. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \left(1 + \dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $u = x$, $v = x + y$, $w = x + y + z$.

3518. $(1 - x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 - y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x = \sin u$, $y = \sin v$, $z = e^w$.

3519. $(1-x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{1}{4}z=0$

$(|x|<1)$, если $u=\dfrac{1}{2}(y+\arccos x)$, $v=\dfrac{1}{2}(y-\arccos x)$,

$w=z\sqrt[4]{1-x^2}$.

3520. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\dfrac{x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}}{x^2-y^2}-$

$-\dfrac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^2}$ $(|x|>|y|)$, если $u=x+y$, $v=x-y$,

$w=\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

3521. Доказать, что всякое уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0$$

(a, b, c — постоянные) путем замены

$$z=ue^{\alpha x+\beta y},$$

где α и β — постоянные величины и $u=u(x, y)$, можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c_1u=0 \quad (c_1=\text{const}).$$

3522. Показать, что уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ не изменяет своего вида при замене переменных

$$x'=\frac{x}{y},\quad y'=-\frac{1}{y},\quad u'=\frac{u}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

где u' — функция переменных x' и y'.

3523. В уравнении

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(1+p+q+2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+$$
$$+p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

где $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$, положить $u=x+z$, $v=$ $=y+z$, $w=x+y+z$, считая, что $w=w(u, v)$.

3524. В уравнении

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

положить $x=e^{\xi}$, $y=e^{\eta}$, $z=e^{\zeta}$, $u=e^{w}$, где $w=w(\xi,\eta,\zeta)$.

3525. Показать, что вид уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$$

не меняется при любом распределении ролей между переменными x, y и z.

3526. Решить уравнение

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

приняв x за функцию от переменных y и z.

3527. Преобразовать уравнение

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

применяя *преобразование Лежандра*

$$X=\frac{\partial z}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial z}{\partial y},\quad Z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z,$$

где $Z=Z(X,\ Y)$.

§ 5. Геометрические приложения

1°. Касательная прямая и нормальная плоскость. Уравнение *касательной прямой* к кривой

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t)$$

в точке ее $M(x,\ y,\ z)$ имеет вид

$$\frac{X-x}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\dfrac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\dfrac{dz}{dt}}.$$

Уравнение *нормальной плоскости* в этой точке:

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{ds}(Z-z)=0.$$

2°. Касательная плоскость и нормаль. Уравнение *касательной плоскости* к поверхности $z = f(x, y)$ в точке ее $M(x, y, z)$ имеет вид

$$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y).$$

Уравнение *нормали* в точке M есть

$$\frac{X - x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{Z - z}{-1}.$$

Если уравнение поверхности задано в неявном виде $F(x, y, z) = 0$, то соответственно имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0$$

— уравнение касательной плоскости и

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

— уравнение нормали.

3°. Огибающая кривая семейства плоских кривых. *Огибающая кривая* однопараметрического семейства кривых $f(x, y, \alpha) = 0$ (α — параметр) удовлетворяет системе уравнений:

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

4°. Огибающая поверхность семейства поверхностей. *Огибающая поверхность* однопараметрического семейства поверхностей $F(x, y, z, \alpha) = 0$ удовлетворяет системе уравнений:

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \ F'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0.$$

В случае двупараметрического семейства поверхностей $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ огибающая поверхность удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \ \Phi'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$
$$\Phi'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Написать уравнения касательных прямых и нормальных плоскостей в данных точках к следующим кривым:

3528. $x = a\cos\alpha\cos t, \ y = a\sin\alpha\cos t, \ z = a\sin t$; в точке $t = t_0$.

3529. $x = a\sin^2 t, \ y = b\sin t\cos t, \ z = c\cos^2 t$; в точке $t = \frac{\pi}{4}$.

3530. $y = x$, $z = x^2$; в точке M (1, 1, 1).

3531. $x^2 + z^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 10$; в точке M (1, 1, 3).

3532. $x^2+y^2+z^2=6$, $x+y+z=0$; в точке M (1, —2,1).

3533. На кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ найти точку, касательная в которой параллельна плоскости $x + 2y + z = 4$.

3534. Доказать, что касательная к винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ образует постоянный угол с осью Oz.

3535. Доказать, что кривая

$$x=ae^t\cos t,\quad y=ae^t\sin t,\quad z=ae^t$$

пересекает все образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под одним и тем же углом.

3536. Доказать, что локсодрома

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=e^{k\varphi}\quad (k=\text{const}),$$

где φ — долгота, ψ — широта точки сферы, пересекает все меридианы сферы под постоянным углом.

3537. Найти тангенс угла, образованного касательной в точке M_0 (x_0, y_0) к кривой

$$z=f(x, y),\quad \frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha},$$

где f — дифференцируемая функция, с плоскостью Oxy.

3538. Найти производную функции

$$u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

в точке M (1, 2, — 2) в направлении касательной в этой точке к кривой

$$x = t,\ y = 2t^2,\ z = -2t^4.$$

Написать уравнения касательной плоскости и нормали в указанных точках к следующим поверхностям:

3539. $z = x^2 + y^2$; в точке M_0 (1, 2, 5).

3540. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$; в точке M_0 (3, 4, 12).

3541. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; в точке $M_0\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

3542. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$; в точке M_0 (x_0, y_0, z_0).

3543. $z = y + \ln\frac{x}{z}$; в точке M_0 (1, 1, 1).

3544. $2^{x/z}+2^{y/z}=8$; в точке M_0 (2, 2, 1).

3545. $x=a\cos\psi\cos\varphi$, $y=b\cos\psi\sin\varphi$, $z=c\sin\psi$; в точке M_0 (φ_0, ψ_0).

3546. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=r\operatorname{ctg}\alpha$; в точке M_0 (φ_0, r_0).

3547. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$; в точке M_0 (u_0, v_0).

3548. Найти предельное положение касательной плоскости к поверхности:

$$x=u+v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3+v^3,$$

когда точка касания M (u, v) $(u\neq v)$ неограниченно приближается к точке M_0 (u_0, u_0) линии края $u=v$ поверхности.

3549. На поверхности $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

3550. В какой точке эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

3551. К поверхности $x^2+2y^2+3z^2=21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости

$$x+4y+6z=0.$$

3552. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz=a^3$ $(a>0)$ образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема.

3553. Доказать, что касательные плоскости к поверхности

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\quad (a>0)$$

отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

3554. Доказать, что касательные плоскости к конусу

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

проходят через его вершину.

3555. Доказать, что нормали к поверхности вращения

$$z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\quad (f'\neq 0)$$

пересекают ось вращения.

3556. Найти проекции эллипсоида

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$$

на координатные плоскости.

3557. Квадрат $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ разбит на конечное число частей σ диаметра $\leqslant \delta$. Оценить сверху число δ, если направления нормалей к поверхности

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

в любых точках $P(x, y)$ и $P_1(x_1, y_1)$, принадлежащих одной и той же части σ, отличаются меньше чем на $1°$.

3558. Пусть

$$z = f(x, y), \text{ где } (x, y) \in D, \qquad (1)$$

— уравнение поверхности и $\varphi(P_1, P)$ — угол между нормалями к поверхности (1) в точках $P(x, y) \in D$ и $P_1(x_1, y_1) \in D$.

Доказать, что если область D ограничена и замкнута и функция $f(x, y)$ имеет ограниченные производные 2-го порядка в области D, то справедливо *неравенство Ляпунова*

$$\varphi(P_1, P) < C\rho(P_1, P), \qquad (2)$$

где C — постоянная и $\rho(P_1, P)$ — расстояние между точками P и P_1.

3559. Под каким углом пересекается цилиндр $x^2 + y^2 = a^2$ с поверхностью $bz = xy$ в общей точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$?

3560. Показать, что координатные поверхности сферических координат $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $y = x \operatorname{tg} \varphi$, $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2\theta$ попарно ортогональны.

3561. Показать, что сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2by$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$ образуют триортогональную систему.

3562. Через каждую точку $M(x, y, z)$ проходят при $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$ три поверхности второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = -1 \quad (a > b > c > 0).$$

Доказать ортогональность этих поверхностей.

3563. Найти производную функции $u = x + y + z$ в направлении внешней нормали сферы $x + y + z = 1$ в точке ее $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

В каких точках сферы нормальная производная функции u имеет: а) наибольшее значение, б) наименьшее значение, в) равна нулю?

3564. Найти производную функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в направлении внешней нормали эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке его M_0 (x_0, y_0, z_0).

3565. Пусть $\frac{\partial u}{\partial n}$ и $\frac{\partial v}{\partial n}$ — нормальные производные функций u и v в точке поверхности $F(x, y, z) = 0$. Доказать, что $\frac{\partial}{\partial n}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial n} + v\frac{\partial u}{\partial n}$.

Найти огибающие однопараметрических семейств плоских кривых.

3566. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ $(p = \text{const})$.

3567. $(x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$.

3568. $y = kx + \frac{a}{k}$ $(a = \text{const})$.

3569. $y^2 = 2px + p^2$.

3570. Найти кривую, огибаемую отрезком длины l, концы которого скользят по осям координат.

3571. Найти огибающую эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, имеющих постоянную площадь S.

3572. Найти огибающую траекторий снаряда, выпущенного в безвоздушном пространстве с начальной скоростью v_0, при варьировании в вертикальной плоскости угла бросания α.

3573. Доказать, что огибающая нормалей плоской кривой есть эволюта этой кривой.

3574. Исследовать характер *дискриминантных кривых* семейств следующих линий (c — переменный параметр):

а) кубических парабол $y = (x-c)^3$;
б) полукубических парабол $y^2 = (x-c)^3$;
в) парабол Нейля $y^3 = (x-c)^2$;
г) строфоид $(y-c)^2 = x^2\frac{a-x}{a+x}$.

3575. Определить огибающую семейства шаров радиуса r, центры которых расположены на окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = 0$ (t — параметр, $R > r$).

3576. Найти огибающую семейства шаров

$$(x-t\cos\alpha)^2+(y-t\cos\beta)^2+(z-t\cos\gamma)^2=1,$$

где $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ и t — переменный параметр.

3577. Определить огибающую семейства эллипсоидов $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, объем V которых постоянен.

3578. Найти огибающую семейства сфер радиуса ρ, центры которых расположены на поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$.

3579. Светящаяся точка находится в начале координат. Определить конус тени, отбрасываемой шаром

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant R^2,$$

если $x_0^2+y_0^2+z_0^2>R^2$.

3580. Найти огибающую семейства плоскостей

$$z-z_0=p\,(x-x_0)+q\,(y-y_0),$$

если параметры p и q связаны уравнением

$$p^2+q^2=1.$$

§ 6. Формула Тейлора

1°. Формула Тейлора. Если функция $f(x, y)$ имеет в некоторой окрестности точки (a, b) непрерывные все частные производные до $n+1$ порядка включительно, то в этой окрестности справедлива формула

$$f(x, y)=f(a, b)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^i f(a, b)+R_n(x, y), \qquad (1)$$

где

$$R_n(x, y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1}\times$$
$$\times f(a+\theta_n(x-a),\ b+\theta_n(y-b))$$
$$(0<\theta_n<1).$$

2°. Ряд Тейлора. Если функция $f(x, y)$ бесконечно дифференцируема и $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x, y)=0$, то эта функция допускает представление в виде степенного ряда

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i+j\geqslant 1}^{\infty} \frac{1}{i!j!} f^{(i+j)}_{x^i y^j}(a, b)(x-a)^i (y-b)^j. \quad (2)$$

Частные случаи формул (1) и (2) при $a = b = 0$ соответственно носят названия *формулы Маклорена* и *ряда Маклорена*.

Аналогичные формулы имеют место для функции более чем двух переменных.

3°. Особые точки плоских кривых. Точка $M_0(x_0, y_0)$ дифференцируемой кривой $F(x, y) = 0$ называется *особой*, если

$$F(x_0, y_0) = 0, \ F'_x(x_0, y_0) = 0, \ F'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Пусть $M_0(x_0, y_0')$ — изолированная особая точка кривой класса $C^{(2)}$ и числа

$$A = F''_{xx}(x_0, y_0) = 0, \quad B = F''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = F''_{yy}(x_0, y_0)$$

не все равны нулю. Тогда, если

1) $AC - B^2 > 0$, то M_0 — *изолированная точка*;

2) $AC - B^2 < 0$, то M_0 — *двойная точка* (*узел*);

3) $AC - B^2 = 0$, то M_0 — *точка возврата* или *изолированная точка*.

В случае $A = B = C = 0$ возможны более сложные типы особых точек. У кривых, не принадлежащих классу гладкости $C^{(2)}$, могут быть особенности более сложной природы: *точки прекращения*, *угловые точки* и др.

3581. Функцию $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1, -2)$.

3582. Функцию $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1, 1, 1)$.

3583. Найти приращение, получаемое функцией $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 2xy$, при переходе от значений $x = 1, y = -1$ к значениям $x_1 = 1 + h, y_1 = -1 + k$.

3584. Разложить $f(x + h, y + k, z + l)$ по целым положительным степеням величин h, k и l, если

$$f(x, y, z) = \\ = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz.$$

3585. В разложении функции $f(x, y) = x^y$ в окрестности точки $A(1, 1)$ выписать члены до второго порядка включительно.

3586. Разложить по формуле Маклорена до членов четвертого порядка включительно функцию

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

3587. Вывести приближенные формулы с точностью до членов второго порядка для выражений:

а) $\dfrac{\cos x}{\cos y}$; б) $\operatorname{arctg} \dfrac{1+x+y}{1-x+y}$,

если $|x|$ и $|y|$ малы по сравнению с 1.

3588. Упростить выражение

$$\cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z,$$

считая x, y, z малыми по абсолютной величине.

3589. Функцию

$$F(x, y) = \frac{1}{4}[f(x+h, y) + f(x, y+h) + f(x-h, y) + f(x, y-h)] - f(x, y)$$

разложить по степеням h с точностью до h^4.

3590. Пусть $f(P) = f(x, y)$ и $P_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, 3$) — вершины правильного треугольника, вписанного в окружность с центром в точке $P(x, y)$ радиуса ρ, причем $x_1 = x + \rho$, $y_1 = y$. Разложить по целым положительным степеням ρ с точностью до ρ^2 функцию

$$F(\rho) = \frac{1}{3}[f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)].$$

3591. Разложить по степеням h и k функцию

$$\Delta_{xy} f(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y).$$

3592. Разложить по степеням ρ функцию

$$F(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + \rho\cos\varphi, y + \rho\sin\varphi)\, d\varphi.$$

Разложить в ряд Маклорена следующие функции:

3593. $f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n$.

3594. $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$.

3595. $f(x, y) = e^x \sin y$.

3596. $f(x, y) = e^x \cos y$.

3597. $f(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$.

3598. $f(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$.

3599. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.

3600. $f(x, y) = \ln(1+x)\ln(1+y)$.

3601. Написать три члена разложения в ряд Маклорена функции $f(x, y) = \int\limits_0^1 (1+x)^{t^2 y}\, dt$.

3602. Функцию e^{x+y} разложить в степенной ряд по целым положительным степеням биномов $x-1$ и $y+1$.

3603. Написать разложение в ряд Тейлора функции $f(x, y)=\frac{x}{y}$ в окрестности точки $M(1, 1)$.

3604. Пусть z — та неявная функция от x и y, определяемая уравнением $z^3-2xz+y=0$, которая при $x=1$ и $y=1$ принимает значение $z=1$.

Написать несколько членов разложения функции z по возрастающим степеням биномов $x-1$ и $y-1$.

Изучить типы особых точек следующих кривых и примерно изобразить эти кривые:

3605. $y^2=ax^2+x^3$. **3606.** $x^3+y^3-3xy=0$.

3607. $x^2+y^2=x^4+y^4$. **3608.** $x^2+y^4=x^6$.

3609. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$. **3610.** $(y-x^2)^2=x^5$.

3611. $(a+x)y^2=(a-x)x^2$.

3612. Изучить форму кривой $y^2=(x-a)(x-b)\times\times(x-c)$ в зависимости от значений параметров a, b, c $(a\leqslant b\leqslant c)$.

Исследовать особые точки трансцендентных кривых:

3613. $y^2=1-e^{-x^2}$. **3614.** $y^2=1-e^{-x^3}$. **3615.** $y=x\ln x$.

3616. $y=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}$.

3617. $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$. **3618.** $y^2=\sin\dfrac{\pi}{x}$.

3619. $y^2=\sin x^2$. **3620.** $y^2=\sin^3 x$.

§ 7. Экстремум функции нескольких переменных

1°. Определение экстремума. Пусть функция $f(P)=f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в окрестности точки P_0. Если или $f(P_0)>f(P)$, или $f(P_0)<f(P)$ при $0<\rho(P_0, P)<\delta$, то говорят, что функция $f(P)$ имеет строгий *экстремум* (соответственно *максимум* или *минимум*) в точке P_0.

2°. Необходимое условие экстремума. Дифференцируемая функция $f(P)$ может достигать экстремума лишь в *стационарной* точке P_0, т. е. такой, что $df(P_0)=0$. Следовательно, точки экстремума функции $f(P)$ удовлетворяют системе уравнений $f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)=0$ $(i=1, \ldots, n)$.

3°. Достаточное условие экстремума. Функция $f(P)$ в точке P_0 имеет:

а) *максимум*, если $df(P_0)=0$, $d^2f(P_0)<0$, при $\sum\limits_{i=1}^{n}|dx_i|\neq 0$, и б) *минимум*, если $df(P_0)=0$, $d^2f(P_0)>0$ при $\sum\limits_{i=1}^{n}|dx_i|\neq 0$.

Исследование знака второго дифференциала $d^2f(P_0)$ может быть проведено путем приведения соответствующей квадратичной формы к каноническому виду.

В частности, для случая функции $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y в стационарной точке (x_0, y_0) $(df(x_0, y_0)=0)$ при условии, что $D=AC-B^2\neq 0$, где $A=f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0, y_0)$ имеем:

1) *минимум*, если $D>0$, $A>0$ $(C>0)$;
2) *максимум*, если $D>0$, $A<0$ $(C<0)$;
3) *отсутствие экстремума*, если $D<0$.

4°. Условный экстремум. Задача определения экстремума функции $f(P)=f(x_1, \ldots, x_n)$ при наличии ряда соотношений $\varphi_i(P)=0$ $(i=1, \ldots, m;\ m<n)$ сводится к нахождению обычного экстремума для *функции Лагранжа*

$$L(P)=f(P)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(P),$$

где λ_i $(i=1, \ldots, m)$ — постоянные множители. Вопрос о существовании и характере условного экстремума в простейшем случае решается на основании исследования знака второго дифференциала $d^2L(P_0)$ в стационарной точке P_0 функции $L(P)$ при условии, что переменные $dx_1, \ldots, dx_n$ связаны соотношениями

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx_j=0 \quad (i=1, \ldots, m).$$

5°. Абсолютный экстремум. Функция $f(P)$, дифференцируемая в ограниченной и замкнутой области, достигает своих наибольшего и наименьшего значений в этой области или в стационарной точке, или в граничной точке области.

Исследовать на экстремум следующие функции нескольких переменных:

3621. $z=x^2+(y-1)^2$. **3622.** $z=x^2-(y-1)^2$.
3623. $z=(x-y+1)^2$.
3624. $z=x^2-xy+y^2-2x+y$.
3625. $z=x^2y^3(6-x-y)$. **3626.** $z=x^3+y^3-3xy$.
3627. $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$.
3627.1. $z=2x^4+y^4-x^2-2y^2$.

3628. $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$ $(x>0,\ y>0)$.

3629. $z=xy\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ $(a>0,\ b>0)$.

3630. $z=\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

3631. $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

3632. $z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$.

3633. $z=e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

3634. $z=(5x+7y-25)\,e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

3635. $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

3636. $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ $(0\leqslant x\leqslant\pi/2;$ $0\leqslant y\leqslant\pi/2)$.

3637. $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$ $(0\leqslant x\leqslant\pi;\ 0\leqslant y\leqslant\pi)$.

3638. $z=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3639. $z=xy\ln(x^2+y^2)$.

3640. $z=x+y+4\sin x\sin y$.

3641. $z=(x^2+y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$.

3642. $u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$.

3643. $u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

3644. $u=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

3645. $u=xy^2z^3(a-x-2y-3z)$ $(a>0)$.

3646. $u=\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{b}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0,$ $a>0,\ b>0)$.

3647. $u=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$ $(0\leqslant x\leqslant\pi;\ 0\leqslant y\leqslant\pi;\ 0\leqslant z\leqslant\pi)$.

3648. $u=x_1x_2^2=x_n^n(1-x_1-2x_2-\ldots-nx_n)$ $(x_1>0,$ $x_2>0,\ \ldots,\ x_n>0)$.

3649. $u=x_1+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\ldots+\dfrac{x_n}{x_{n-1}}+\dfrac{2}{x_n}$ $(x_i>0,$ $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

3650. Задача Гюйгенса. Между двумя положительными числами a и b вставить n чисел x_1, $x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы величина дроби

$$u=\frac{x_1x_2\ldots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_n+b)}$$

была наибольшей.

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x и y:

3651. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$.

3652. $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0.$
3653. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2).$

Найти точки условного экстремума следующих функций:

3654. $z=xy$, если $x+y=1$.

3655. $z=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$, если $x^2+y^2=1$.

3656. $z=x^2+y^2$, если $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

3657. $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$, если $x^2+y^2=1$.

3657.1. $z=x^2+12xy+2y^2$, если $4x^2+y^2=25$.

3658. $z=\cos^2 x+\cos^2 y$, если $x-y=\dfrac{\pi}{4}$.

3659. $u=x-2y+2z$, если $x^2+y^2+z^2=1$.

3660. $u=x^m y^n z^p$, если $x+y+z=a$ $(m>0,$ $n>0,$ $p>0,$ $a>0)$.

3661. $u=x^2+y^2+z^2$, если $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c>0)$.

3662. $u=xy^2z^3$, если $x+2y+3z=a$ $(x>0,$ $y>0,$ $z>0,$ $a>0)$.

3663. $u=xyz$, если $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$.

3663.1. $u=xy+yz$, если $x^2+y^2=2$, $y+z=2$ $(x>0,$ $y>0,$ $z>0)$.

3664. $u=\sin x\sin y\sin z$, если $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ $(x>0,$ $y>0,$ $z>0)$.

3665. $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$, если $x^2+y^2+z^2=1$, $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$ $(a>b>c>0,$ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1)$.

3666. $u=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$, если $Ax+By+Cz=0$, $x^2+y^2+z^2=R^2$, $\dfrac{\xi}{\cos\alpha}=\dfrac{\eta}{\cos\beta}=\dfrac{\zeta}{\cos\gamma}$, где $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

3667. $u=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, если $\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\ldots+\dfrac{x_n}{a_n}=1$ $(a_i>0;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

3668. $u=x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p$ $(p>1)$, если $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$ $(a>0)$.

3669. $u=\frac{\alpha_1}{x_1}+\frac{\alpha_2}{x_2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{x_n}$, если

$$\beta_1x_1+\beta_2x_2+\ldots+\beta_nx_n=1$$

$$(\alpha_i>0,\ \beta_i>0,\ x_i>0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

3670. $u=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, если $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$ $(a>0,\ \alpha_i>1,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

3671. Найти экстремум квадратичной формы

$$u=\sum_{i,\,j}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1.$$

3672. Доказать неравенство

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,$$

если $n\geqslant1$ и $x\geqslant0$, $y\geqslant0$.

Указание. Найти минимум функции $z=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$ при условии $x+y=s$.

3673. Доказать *неравенство Гёльдера*

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{1/k}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{1/k'}$$

$$\left(a_i\geqslant0,\ x_i\geqslant0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ k>1,\ \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1\right).$$

Указание. Найти минимум функции

$$u=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{1/k}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{1/k'}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=A.$$

3674. Доказать *неравенство Адамара* для определителя $A=|a_{ij}|$ порядка n:

$$A^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right).$$

Указание. Рассмотреть экстремум определителя $A = |a_{ij}|$ при наличии соотношений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Определить наибольшие (sup) и наименьшие (inf) значения следующих функций в указанных областях:

3675. $z = x - 2y - 3$, если $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant x + y \leqslant 1$.

3676. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, если $x^2 + y^2 \leqslant 25$.

3677. $z = x^2 - xy + y^2$, если $|x| + |y| \leqslant 1$.

3678. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, если $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100$.

3679. $u = x + y + z$, если $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$.

3680. Найти нижнюю грань (inf) и верхнюю грань (sup) функции

$$u = (x + y + z)\, e^{-(x+2y+3z)}$$

в области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

3681. Показать, что функция $z = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ имеет бесконечное множество максимумов и ни одного минимума.

3682. Является ли достаточным для минимума функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, чтобы эта функция имела минимум вдоль каждой прямой, проходящей через точку M_0?

Рассмотреть пример $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$.

3683. Данное положительное число a разложить на n положительных сомножителей так, чтобы сумма обратных величин их была наименьшей.

3684. Данное положительное число a разложить на n слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

3685. Данное положительное число a разложить на n положительных множителей так, чтобы сумма заданных положительных степеней их была наименьшей.

3686. На плоскости даны n материальных точек $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $\ldots$, $P_n(x_n, y_n)$ с массами, соответственно равными $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

При каком положении точки $P(x, y)$ момент инерции системы относительно этой точки будет наименьшим?

3687. При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости V имеет наименьшую поверхность?

3688. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, поверхность которой равна S, имеет наибольшую вместимость?

3689. На сфере $x^2+y^2+z^2=1$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от n данных точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ была бы минимальной.

3690. Тело состоит из прямого кругового цилиндра, завершенного прямым круговым конусом. При данной полной поверхности тела, равной Q, определить его измерения так, чтобы объем тела был бы наибольшим.

3691. Тело, объем которого равен V, представляет собой прямой прямоугольный параллелепипед, нижнее и верхнее основания которого завершаются одинаковыми правильными четырехугольными пирамидами. При каком угле наклона боковых граней пирамид к их основаниям полная поверхность тела будет минимальной?

3692. Найти прямоугольник данного периметра $2p$, который вращением вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

3693. Найти треугольник данного периметра $2p$, который вращением вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

3694. В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

3695. В данный прямой круговой конус вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

3696. В эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

3697. В прямой круговой конус, образующая которого l наклонена к плоскости основания под углом α, вписать прямоугольный параллелепипед с наибольшей полной поверхностью.

3698. В сегмент эллиптического параболоида $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, $z=c$, вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

3699. Найти кратчайшее расстояние точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

3700. Определить кратчайшее расстояние d между двумя прямыми в пространстве

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-{}_1y}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

3701. Найти кратчайшее расстояние между параболой $y=x^2$ и прямой $x-y-2=0$.

3702. Найти полуоси центральной кривой второго порядка

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1.$$

3703. Найти полуоси центральной поверхности второго порядка

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1.$$

3704. Определить площадь эллипса, образованного пересечением цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

плоскостью

$$Ax+By+Cz=0.$$

3705. Определить площадь сечения эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

плоскостью

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0,$$

где

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

3706. Согласно принципу Ферма свет, исходящий из точки A и попадающий в точку B, распространяется по той кривой, для прохождения которой требуется минимум времени.

Предполагая, что точки A и B расположены в различных оптических средах, разделенных плоскостью, причем скорость распространения света в первой среде равна v_1, а во второй v_2, вывести закон преломления света.

3707. При каком угле падения отклонение светового луча (т. е. угол между падающим и выходящим лучами), проходящего через призму с преломляющим углом α и показателем преломления n, будет наименьшим? Определить это наименьшее отклонение.

3708. Переменные величины x и y удовлетворяют линейному уравнению $y = ax + b$, коэффициенты которого требуется определить. В результате ряда равноточных измерений для величин x и y получены значения x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пользуясь способом наименьших квадратов, определить наивероятнейшие значения коэффициентов a и b.

Указание. Согласно способу наименьших квадратов наивероятнейшими значениями коэффициентов a и b являются те, для которых сумма квадратов погрешностей

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

будет наименьшей.

3709. На плоскости дана система n точек $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

При каком положении прямой

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$$

сумма квадратов отклонений данных точек от этой прямой будет наименьшей?

3710. Функцию x^2 на интервале $(1, 3)$ приближенно заменить линейной функцией $ax + b$ так, чтобы абсолютное отклонение

$$\Delta = \sup|x^2 - (ax + b)| \quad (1 \leqslant x \leqslant 3)$$

было минимальным.

ОТДЕЛ VII

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1°. Непрерывность интеграла. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной области R $[a \leqslant x \leqslant A;\ b \leqslant y \leqslant B]$, то

$$F(y) = \int_a^A f(x, y)\,dx$$

представляет собой функцию, непрерывную на сегменте $b \leqslant y \leqslant B$.

2°. Дифференцирование под знаком интеграла. Если сверх указанного в 1°, частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывна в области R, то при $b < y < B$ справедлива *формула Лейбница*.

$$\frac{d}{dy}\int_a^A f(x, y)\,dx = \int_a^A f'_y(x, y)\,dx.$$

В более общем случае, когда пределы интеграции являются дифференцируемыми функциями $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ параметра y и $a < \varphi(y) < A$, $a < \psi(y) < A$ при $b < y < B$, имеем:

$$\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx = f(\psi(y), y)\,\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\,\varphi'(y) +$$

$$+ \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)\,dx \qquad (b < y < B).$$

3°. Интегрирование под знаком интеграла. При условиях 1° имеем:

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\,dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y)\,dy.$$

3711. Показать, что интеграл

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y)\,dx$$

от разрывной функции $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x-y)$ является функцией непрерывной. Построить график функции $u = F(y)$.

3712. Исследовать на непрерывность функцию

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx,$$

где функция $f(x)$ непрерывна и положительна на сегменте $[0, 1]$.

3713. Найти:

а) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \int\limits_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$;   б) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$;

в) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \int\limits_0^2 x^2 \cos\alpha x\,dx$;   г) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

3713.1. Найти

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\,d\theta.$$

3714. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[A, B]$. Доказать, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h)-f(t)]\,dt = f(x)-f(a) \quad (A<a<x<B).$$

3714.1. Пусть 1) $\varphi_n(x) \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ на $[-1, 1]$; 2) $\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n\to\infty$ на $0 < \varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1$; 3) $\int\limits_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx \to 1$ при $n\to\infty$.

Доказать, что, если $f(x) \in C[-1, 1]$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x)\,dx = f(0).$$

3715. Можно ли совершить предельный переход под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{y\to 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-x^2/y^2}\,dx?$$

3716. Можно ли вычислить по правилу Лейбница производную функции

$$F(y) = \int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

при $y = 0$?

3717. Вычислить $F'(x)$, если

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2}\,dy.$$

3718. Найти $F'(\alpha)$, если:

а) $F(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx;$ б) $F(\alpha) = \int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx;$

в) $F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx;$

г) $F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} f(x+\alpha,\ x-\alpha)\,dx;$

д) $F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha^2} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy.$

3719. Найти $F''(x)$, если

$$F(x) = \int_0^x (x+y)f(y)\,dy,$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция.

3720. Найти $F''(x)$, если

$$F(x) = \int_a^b f(y)|x-y|\,dy,$$

где $a < b$ и $f(y)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция.

3721. Найти $F''(x)$, если

$$F(x) = \frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi \int_0^h f(x+\xi+\eta)\,d\eta \quad (h>0),$$

где $f(x)$ — непрерывная функция.

3722. Найти $F^{(n)}(x)$, если

$$F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$$

3722.1. Доказать формулу

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^{n+1}}\int\limits_0^x y^n\cos\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)dy \qquad (1)$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Пользуясь формулой (1), получить оценку:

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n+1} \quad \text{при } x\in(-\infty,\ +\infty).$$

3723. Функцию $f(x)=x^2$ на промежутке $1\leqslant x\leqslant 3$ приближенно заменить линейной функцией $a+bx$ так, чтобы

$$\int\limits_1^3(a+bx-x^2)^2\,dx=\min.$$

3724. Получить приближенную формулу вида

$$\sqrt{1+x^2}\approx a+bx \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

из условия, что среднее квадратичное отклонение функций $a+bx$ и $\sqrt{1+x^2}$ на данном промежутке $[0,\ 1]$ является минимальным.

3725. Найти производные от *полных эллиптических интегралов*

$$E(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

и

$$F(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (0<k<1)$$

и выразить их через функции $E(k)$ и $F(k)$.

Показать, что $E(k)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

3726. Доказать, что *функция Бесселя целого индекса* n

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi$$

удовлетворяет *уравнению Бесселя*

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

3727. Пусть $I(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{\alpha-x}}$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(x)$ на сегменте $0\leqslant x\leqslant a$.

Доказать, что при $0<\alpha<a$ имеем:

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int\limits_0^{\alpha}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx.$$

Указание. Положить $x=\alpha t$.

3728. Показать, что функция

$$u(x)=\int\limits_0^1 K(x,\ y)\,v(y)\,dy,$$

где

$$K(x,\ y)=\begin{cases} x(1-y), & \text{если } x\leqslant y;\\ y(1-x), & \text{если } x>y,\end{cases}$$

и $v(y)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению

$$u''(x)=-v(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

3729. Найти $F''_{xy}(x,\ y)$, если

$$F(x,\ y)=\int\limits_{x/y}^{xy}(x-yz)\,f(z)\,dz,$$

где $f(z)$ — дифференцируемая функция.

3730. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция и $F(x)$ — дифференцируемая функция.

Доказать, что функция

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\,[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}F(z)\,dz$$

удовлетворяет *уравнению колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и начальным условиям: $u(x,\ 0)=f(x)$, $u'_t(x,\ 0)=F(x)$.

3731. Показать, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0,\ l]$ и $(x-\xi)^2+y^2+z^2\neq 0$ при $0\leqslant\xi\leqslant l$, то функция

$$u(x,\ y,\ z)=\int\limits_0^l\frac{(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}}$$

удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы:

3732. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\,dx.$

3733. $\int\limits_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx.$

3734. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx.$

3735. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x} \qquad (|a|<1)$

3736. Пользуясь формулой

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2},$$

вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3737. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx \qquad (a>0,\ b>0).$$

3738. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx;$

б) $\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx \quad (a>0,\ b>0).$

3739. Пусть $F(k)$ и $F(k)$ — полные эллиптические интегралы (см. задачу 3725). Доказать формулы

а) $\int\limits_0^k F(k)\,k\,dk = E(k) - k_1^2 F(k)$;

б) $\int\limits_0^k E(k)\,k\,dk = \frac{1}{3}\left[(1+k^2)\,E(k) - k_1^2 F(k)\right]$,

где $k_1^2 = 1 - k^2$.

3740. Доказать формулу

$$\int\limits_0^x xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x),$$

где $J_0(x)$ и $J_1(x)$ — функции Бесселя индексов 0 и 1 (см. задачу 3726).

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость интегралов

1°. Определение равномерной сходимости. Сходящийся несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x, y)\,dx, \tag{1}$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна в области $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$, называется *равномерно сходящимся* в интервале (y_1, y_2), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $B = B(\varepsilon)$ такое, что при всяком $b \geqslant B$ имеем:

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon \quad (y_1 < y < y_2).$$

Равномерная сходимость интеграла (1) эквивалентна равномерной сходимости всех рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, y)\,dx, \tag{2}$$

где $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Если интеграл (1) сходится равномерно в интервале (y_1, y_2), то он представляет собой непрерывную функцию параметра y в этом интервале.

2°. Критерий Коши. Для равномерной сходимости интеграла (1) в интервале (y_1, y_2) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $B = B(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad y_1 < y < y_2,$$

если только $b' > B$ и $b'' > B$.

3°. Критерий Вейерштрасса. Для равномерной сходимости интеграла (1) достаточно, чтобы существовала не зависящая от параметра y мажорирующая функция $F(x)$ такая, что

1) $|f(x, y)| \leqslant F(x)$ при $a \leqslant x < +\infty$

и

2) $\int\limits_a^{+\infty} F(x)\,dx < +\infty$.

4°. Аналогичные теоремы имеют место для несобственных интегралов от разрывных функций.

Определить области сходимости интегралов:

3741. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,dx.$

3742. $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^p + x^q}\,dx.$ **3743.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}\,dx.$

3744. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{|\ln x|^p}.$

3745. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos\dfrac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}\,dx.$

3746. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,dx \quad (p>0).$

При помощи сравнения с рядами исследовать сходимость следующих интегралов:

3747. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a}\,dx.$

3748. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^n \sin^2 x}$ $(n>0)$.

3749. $\int\limits_\pi^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

3750. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\,dx$.

3751. Сформулировать в положительном смысле, что значит, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ сходится неравномерно в заданном интервале (y_1, y_2)?

3752. Доказать, что если 1) интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и 2) функция $\varphi(x, y)$ ограничена и монотонна по x, то интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\varphi(x, y)\,dx$$

сходится равномерно (в соответствующей области).

3753. Доказать, что равномерно сходящийся интеграл

$$I = \int\limits_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} dx \qquad (0<y<1)$$

нельзя мажорировать сходящимся интегралом, не зависящим от параметра.

3754. Показать, что интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$

1) сходится равномерно в любом промежутке $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b$ и

2) сходится неравномерно в промежутке $0 \leqslant \alpha \leqslant b$.

3755. Доказать, что интеграл Дирихле

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$$

1) сходится равномерно на каждом сегменте $[a, b]$, не содержащем значения $\alpha = 0$, и 2) сходится неравномерно на каждом сегменте $[a, b]$, содержащем значение $\alpha = 0$.

3755.1. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

в следующих промежутках: а) $1 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$; б) $1 < \alpha < +\infty$.

3755.2. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ при } 0 < \alpha < 1.$$

3755.3. Показать, что интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha + 1}$ сходится неравномерно в интервале $1 < \alpha < +\infty$.

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие интегралы:

3756. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x \, dx \quad (0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

3757. $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx \quad (a \leqslant \alpha \leqslant b)$.

3758. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty)$.

3759. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + 1} \quad (0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

3760. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx \quad (0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

3760.1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx \quad (0 \leqslant p \leqslant 10)$.

3761. $\int\limits_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad (0 \leqslant \alpha < +\infty)$,

где $p > 0$ фиксировано.

3762. $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2} dx \quad (0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

3763. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$; а) $a < \alpha < b$; б) $-\infty < \alpha < +\infty$.

3764. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x\, dy \quad (-\infty < x < +\infty)$.

3765. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p}\, dx \quad (p \geqslant 0)$.

3765.1. Подобрать число $b > 0$ так, чтобы

$$0 < \int\limits_b^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} < \varepsilon \text{ при } 1{,}1 \leqslant n \leqslant 10, \text{ где } \varepsilon = 10^{-6}.$$

3766. $\int\limits_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x}\, dx$; а) $p \geqslant p_0 > 0$; б) $p > 0$ $(q > -1)$.

3767. $\int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad (0 \leqslant n < +\infty)$.

3768. $\int\limits_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n} \quad (0 < n < 2)$.

3769. $\int\limits_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \quad \left(|\alpha| < \frac{1}{2}\right)$.

3770. $\int\limits_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\, dx \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$.

3771. Интеграл называется *равномерно сходящимся при данном значении параметра*, если он равномерно сходится в некоторой окрестности этого значения. Доказать, что интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha\, dx}{1+\alpha^2 x^2}$$

сходится равномерно при каждом значении $\alpha \neq 0$ и не сходится равномерно при $\alpha = 0$.

3772. Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{\alpha\to+0} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx?$$

3773. Функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $(0, +\infty)$. Доказать формулу

$$\lim_{\alpha\to+0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx.$$

3773.1. Доказать, что если $f'(x)$ абсолютно интегрируема на $[a, +\infty]$, то существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3774. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx\, dx = 0,$$

если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $(0, +\infty)$.

3775. Доказать, что если 1) $f(x, y) \rightrightarrows f(x, y_0)$ в каждом конечном интервале (a, b); 2) $|f(x, y)| \leqslant F(x)$, где $\int_a^{+\infty} F(x)\, dx < +\infty$, то

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y\to y_0} f(x, y)\, dx.$$

3776. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right] dx,$$

используя предельный переход под знаком интеграла.

3776.1. Пусть $f(x)$ — непрерывна и ограничена на $[0, +\infty)$. Доказать, что

$$\lim_{y\to 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx = f(0).$$

3776.2. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^n + 1}.$$

3777. Доказать, что интеграл

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}\, dx$$

есть непрерывная функция параметра a.

3777.1. Показать, что

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^\alpha}\, dx$$

есть непрерывная функция в интервале $0 < \alpha < 1$.

3778. Определить точки разрыва функции

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin (1 - a^2)\, x}{x}\, dx.$$

Построить график функции $y = F(a)$.

Исследовать на непрерывность в указанных промежутках следующие функции:

3779. $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{2 + x^\alpha}$ при $\alpha > 2$.

3780. $F(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx$ при $\alpha > 0$.

3781. $F(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi - x)^\alpha}\, dx$ при $0 < \alpha < 2$.

3782. $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\, dx$ при $0 < \alpha < 1$.

3783. $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-x\alpha^2} dx$ при $-\infty < \alpha < +\infty$.

§ 3. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов под знаком интеграла

1°. Дифференцирование по параметру. Если 1) функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своей производной $f'_y(x, y)$ в области $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$; 2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ сходится; 3) $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)\, dx$ сходится равномерно в интервале (y_1, y_2), то

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)\, dx$$

при $y_1 < y < y_2$ (*правило Лейбница*).

2°. Формула интегрирования по параметру. Если 1) функция $f(x, y)$ непрерывна при $x \geqslant a$ и $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$; 2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ сходится равномерно в конечном сегменте $[y_1, y_2]$, то

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy. \qquad (1)$$

Если $f(x, y) \geqslant 0$, то формула (1) верна также и для бесконечного промежутка (y_1, y_2) в предположении, что внутренние интегралы равенства (1) непрерывны и одна из частей равенства (1) имеет смысл.

3784. Пользуясь формулой

$$\int\limits_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0),$$

вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 x^{n-1} \ln^m x\, dx, \text{ где } m \text{ — натуральное число.}$$

3785. Пользуясь формулой

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \quad (a > 0),$$

вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}}, \text{ где } n \text{ — натуральное число.}$$

3786. Доказать, что интеграл Дирихле

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

имеет при $\alpha \neq 0$ производную, однако ее нельзя найти с помощью правила Лейбница.

Указание. Положить $\alpha x = y$.

3787. Показать, что функция

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x+\alpha)^2}\, dx$$

непрерывна и дифференцируема в области

$$-\infty < \alpha < +\infty.$$

3788. Исходя из равенства

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}\, dy,$$

вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx \qquad (a>0,\ b>0).$$

3789. Доказать *формулу Фруллани*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \qquad (a>0,\ b>0),$$

где $f(x)$ — непрерывная функция и интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$ имеет смысл при любом $A > 0$.

Применяя формулу Фруллани, вычислить интегралы:

3790. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx \qquad (a>0,\ b>0).$

3791. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x}\, dx \qquad (a>0,\ b>0).$

3792. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx \quad (a>0,\ b>0).$

С помощью дифференцирования по параметру вычислить следующие интегралы:

3793. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$

3794. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$

3795. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$

3796. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$

Вычислить интегралы:

3797. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (|\alpha| \leqslant 1).$

3798. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (|\alpha| \leqslant 1).$

3799. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

3800. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,dx.$

3801. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \operatorname{arctg} \beta x}{x^2}\,dx.$

3802. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\,dx.$

3803. Вычислить *интеграл Эйлера — Пуассона*

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx,$$

исходя из формулы

$$I^2=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty} xe^{-x^2y^2}dy.$$

Пользуясь интегралом Эйлера — Пуассона, найти величины интегралов:

3804. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx \quad (a>0,\ ac-b^2>0).$

3805. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (a_1x^2+2b_1x+c_1)\,e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx$
$(a>0,\ ac-b^2>0).$

3806. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\operatorname{ch}bx\,dx \quad (a>0).$

3807. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x^2+a^2/x^2)}\,dx \quad (a>0).$

3808. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$

3809. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx \quad (a>0).$

3810. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx \quad (a>0).$

3811. $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$ (n — натуральное число).

3811.1. Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-axt^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a>0,\ \delta>0).$$

3812. Исходя из интеграла

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx \quad (\alpha\geqslant 0),$$

вычислить *интеграл Дирихле*

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx.$$

3812.1. Какой примерно вид имеет график *интегрального синуса*

$$y = \operatorname{Si} x,$$

где

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Используя интегралы Дирихле и Фруллани, найти величины интегралов:

3813. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2}\, dx \qquad (\alpha > 0).$

3814. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x}\, dx \qquad (|\alpha| \neq |\beta|).$

3815. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x}\, dx.$ **3816.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x}\, dx.$

3817. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2 dx.$ **3818.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^3 dx.$

3819. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\, dx.$

3820. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x}\, dx \qquad (\alpha\beta \neq 0).$

3821. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin (x^2)}{x}\, dx.$

3822. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx \quad (k \geqslant 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0).$

3823. Найти *разрывный множитель Дирихле*

$$D(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \sin \lambda \cos \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}$$

для различных значений x. Построить график функции $y = D(x)$.

3824. Вычислить интегралы:

а) v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b} dx$; б) v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b} dx$.

3825. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{1+x^2} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy,$$

вычислить *интеграл Лапласа*

$$L = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx.$$

3826. Вычислить интеграл $L_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx$.

Вычислить интегралы:

3827. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx.$ 3828. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx.$

3829. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{ax^2+2bx+c} dx \quad (a > 0,\ ac - b^2 > 0).$

3830. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy \quad (x > 0),$$

вычислить *интегралы Френеля*

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Найти величины интегралов:

3831. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2+2bx+c)\,dx \qquad (a \neq 0).$

3832. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax\,dx.$

3833. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \cdot \cos 2ax\,dx.$

3834. Доказать формулы:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a} \sin a\alpha;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2} \cos a\alpha,$

где $a \neq 0$ и интегралы понимаются в смысле главного значения Коши.

3835. Найти *преобразование Лапласа*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \qquad (p>0)$$

для функции $f(t)$, если:

а) $f(t) = t^n$ (n — натуральное число);

б) $f(t) = \sqrt{t}$; в) $f(t) = e^{\alpha t}$;

г) $f(t) = te^{-\alpha t}$; д) $f(t) = \cos t$;

е) $f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$;

ж) $f(t) = \sin \alpha \sqrt{t}$.

3836. Доказать формулу (*интеграл Липшица*)

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} J_0(bt)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (a>0),$$

где $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\varphi)\,d\varphi$ — функция Бесселя 0-го индекса (см. задачу 3726).

3837. Найти *преобразование Вейерштрасса*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y)\,dy,$$

если:

а) $f(y) = 1$; б) $f(y) = y^2$;
в) $f(y) = e^{2ay}$; г) $f(y) = \cos ay$.

3838. *Многочлены Чебышева — Эрмита* определяются формулами

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

3839. Вычислить интеграл

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\xi^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x-\xi)^2}{\sigma_2^2}\right]} d\xi$$

$$(\sigma_1 > 0, \ \sigma_2 > 0),$$

имеющий важное значение в теории вероятностей.

3840. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Доказать, что интеграл

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

удовлетворяет *уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и начальному условию

$$\lim_{t\to+0} u(x, t) = f(x).$$

§ 4. Эйлеровы интегралы

1°. Гамма-функция. При $x > 0$ имеем:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Основное свойство гамма-функции выражается *формулой понижения*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Если n — целое положительное число, то

$$\Gamma(n) = (n-1)!; \qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

2°. Формула дополнения. При $0 < x < 1$ имеем:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

3°. Бета-функция. При $x > 0$ и $y > 0$ имеем:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Справедлива формула

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

3841. Доказать, что гамма-функция $\Gamma(x)$ непрерывна и обладает непрерывными производными всех порядков в области $x > 0$.

3842. Доказать, что бета-функция $B(x, y)$ непрерывна и обладает непрерывными производными всех порядков в области $x > 0$, $y > 0$.

С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

3843. $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$. 3844. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$.

3845. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$.

3846. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

3847. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4}$.

3848. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^6 x \cdot \cos^4 x \, dx$.

3849. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$ $(n>1)$.

3850. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx$ (n — целое положительное).

Определить область существования и выразить через эйлеровы интегралы следующие интегралы:

3851. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ $(n>0)$.

3852. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx$.

3853. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}$ $(a>0,\ b>0,\ n>0)$.

3854. $\int\limits_{a}^{b} \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}} dx$ $(0<a<b,\ c>0)$.

3855. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$ $(m>0)$.

3856. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx$. 3857. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \operatorname{tg}^n x \, dx$.

8858. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k\cos x)^n} dx$ $(0<|k|<1)$.

3859. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx \quad (n>0).$

3860. $\int\limits_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}\,dx.$

3861. $\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx.$

3862. $\int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-ax}\ln x\,dx \quad (a>0).$

3863. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx.$

3864. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\,dx.$

3864.1. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\ln x}{1+x^3}\,dx.$ 3864.2. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx.$

3865. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\,dx.$

3866. $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx \quad (0<p<1).$

Указание. Этот интеграл можно рассматривать как

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\,[\mathrm{B}(p,\ \varepsilon)-\mathrm{B}(1-p,\ \varepsilon)].$$

3867. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}\,dx \,(0<\alpha<\beta).$

3868. $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx.$ 3869. $\int\limits_a^{a+1} \ln\Gamma(x)\,dx \,(a>0).$

3870. $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x\,dx.$

3871. $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx \quad$ (n — натуральное число).

Доказать равенства:

3872. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$

3873. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^4}dx \cdot \int_0^{+\infty} x^2e^{-x^4}dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$

3874. $\displaystyle\prod_{m=1}^{n} \int_0^{+\infty} x^{m-1}e^{-x^n}dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$

3875. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx = 1.$

Используя равенство $\displaystyle\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} t^{m-1}e^{-xt}dt \ (x>0)$, найти интегралы:

3876. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m}dx \qquad (0<m<1).$

3877. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^m}dx \qquad (0<m<2).$

3878. Доказать формулы Эйлера:

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x;$

б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x$

$\left(\lambda>0,\ x>0,\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$

3879. Найти длину дуги кривой

$r^n = a^n\cos n\varphi$ ($a>0$, n — натуральное).

3880. Найти площадь, ограниченную кривой

$|x|^n + |y|^n = a^n \qquad (n>0,\ a>0).$

§ 5. Интегральная формула Фурье

1°. **Представление функции интегралом Фурье.** Если 1) функция $f(x)$ задана на оси $-\infty < x < +\infty$, 2) кусочно-непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ в каждом конечном промежутке и 3) абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, +\infty)$, то во всех своих точках непрерывности она допускает представление в форме *интеграла Фурье*:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda, \qquad (1)$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi \text{ и } b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi.$$

В точках разрыва функции $f(x)$ левая часть формулы (1) должна быть заменена на $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Для четной функции $f(x)$, с тем же замечанием относительно точек разрыва, формула (1) дает:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda, \qquad (2)$$

где

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi.$$

Аналогично для нечетной функции $f(x)$ получаем:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda, \qquad (3)$$

где

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi.$$

2°. **Представление функции интегралом Фурье в интервале $(0, +\infty)$.** Функция $f(x)$, заданная в интервале $(0, +\infty)$ и кусочно-непрерывная вместе со своей производной $f'(x)$ на каждом конечном интервале $(a, b) \subset (0, +\infty)$, абсолютно интегрируемая на $(0, +\infty)$, по желанию может быть представлена в данном интервале или формулой (2) (*четное продолжение*), или формулой (3) (*нечетное продолжение*).

Представить интегралом Фурье следующие функции:

3881. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1; \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$

3882. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{если } |x| < 1; \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$

3883. $f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b) \qquad (b>a)$.

3884. $f(x) = \begin{cases} h\left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right), & \text{если } |x| \leqslant a; \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$

3885. $f(x) = \dfrac{1}{a^2+x^2} \quad (a>0)$.

3886. $f(x) = \dfrac{x}{a^2+x^2} \quad (a>0)$.

3887. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } |x| \leqslant \pi; \\ 0, & \text{если } |x| > \pi. \end{cases}$

3888. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } |x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{если } |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

3889. $f(t) = \begin{cases} A \sin \omega t, & \text{если } |t| \leqslant \dfrac{2\pi n}{\omega}; \\ 0, & \text{если } |t| > \dfrac{2\pi n}{\omega} \end{cases}$ (n — натуральное число).

3890. $f(x) = e^{-\alpha|x|} \quad (\alpha>0)$.

3891. $f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x \quad (\alpha>0)$.

3892. $f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \beta x \; (\alpha>0)$.

3893. $f(x) = e^{-x^2}$. **3894.** $f(x) = xe^{-x^2}$.

3895. Функцию $f(x) = e^{-x} \quad (0 < x < +\infty)$ представить интегралом Фурье, продолжая ее а) четным образом; б) нечетным образом.

Найти *преобразование Фурье*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-itx}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l\to+\infty} \int_{-l}^{l} f(t)\, e^{-itx} dt$$

для функции $f(t)$, если:

3896. $f(x) = e^{-\alpha|x|} \quad (\alpha>0)$.

3897. $f(x) = xe^{-\alpha|x|} \quad (\alpha>0)$.

3898. $f(x) = e^{-x^2/2}$. **3899.** $f(x) = e^{-x^2/2} \cos \alpha x$.

3900. Найти функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, если:

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(y) \cos xy\, dy = \frac{1}{1+x^2}$;

б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(y) \sin xy\, dy = e^{-x} \quad (x>0)$.

ОТДЕЛ VIII

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Двойные интегралы

1°. Непосредственное вычисление двойного интеграла. *Двойным интегралом* от непрерывной функции $f(x, y)$, распространенным на ограниченную замкнутую квадрируемую область Ω, называется число

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\,\Delta x_i \Delta y_j,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ и сумма распространяется на те значения i и j, для которых $(x_i, y_j) \in \Omega$.

Если область Ω задана неравенствами

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные функции на сегменте $[a, b]$, то соответствующий двойной интеграл может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

2°. Замена переменных в двойном интеграле. Если непрерывно дифференцируемые функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

осуществляют одно-однозначное отображение ограниченной и замкнутой области Ω в плоскости Oxy на область Ω' в плоскости Ouv, и якобиан

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

сохраняет постоянный знак в Ω за исключением, быть может, множества меры нуль, то справедлива формула

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v))\,|I|\,du\,dv.$$

В частности, для случая перехода к полярным координатам r и φ по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ имеем:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

3901. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy$, рассматривая его как предел интегральной суммы, разбивая область интегрирования на квадраты прямыми

$$x = i/n,\ y = j/n \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

и выбирая значение подынтегральной функции в правых верхних вершинах этих квадратов.

3902. Составить нижнюю $\underline{S}$ и верхнюю $\overline{S}$ интегральные суммы для функции $f(x,\ y) = x^2 + y^2$ в области $1 \leqslant x \leqslant 2$, $1 \leqslant y \leqslant 3$, разбивая последнюю на прямоугольники прямыми

$$x = 1 + \frac{i}{n},\ y = 1 + \frac{2j}{n} \quad (i,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Чему равны пределы этих сумм при $n \to \infty$?

3903. Приближенно вычислить интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{dx\,dy}{\sqrt{24 + x^2 + y^2}},$$

аппроксимируя область интегрирования системой вписанных квадратов, вершины которых A_{ij} находятся в целочисленных точках, и выбирая значения подынтегральной функции в вершинах этих квадратов, наиболее удаленных от начала координат. Сравнить полученный результат с точным значением интеграла.

3904. Приближенно вычислить интеграл $\iint\limits_S \sqrt{x+y}\,dS$, где S — треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = 1$, разбив область S прямыми $x = \mathrm{const}$, $y = \mathrm{const}$, $x + y = \mathrm{const}$ на четыре равных треугольника и выбрав значение подынтегральной функции в центрах тяжестей этих треугольников.

3905. Область $S\ \{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ разбита на конечное число квадрируемых частей ΔS_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ диаметра меньше чем δ. При каком значении δ будет обеспечено выполнение неравенства

$$\left|\iint\limits_S \sin(x+y)\,dS - \sum_{i=1}^{n} \sin(x_i + y_i)\,\Delta S_i\right| < 0{,}001,$$

где $(x_i,\ y_i) \in \Delta S_i$?

Вычислить интегралы:

3906. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 (x+y)\,dy$. **3907.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2\,dy$.

3908. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} r^2 \sin^2\varphi\,dr$.

3909. Доказать равенство

$$\iint\limits_R X(x)\,Y(y)\,dx\,dy = \int\limits_a^A X(x)\,dx \cdot \int\limits_b^B Y(y)\,dy,$$

если R — прямоугольник: $a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B$, и функции $X(x)$ и $Y(y)$ непрерывны на соответствующих сегментах.

3910. Вычислить $I = \int\limits_a^A dx \int\limits_b^B f(x, y)\,dy$, если

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y).$$

3911. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. Доказать неравенство

$$\left[\int\limits_a^b f(x)\,dx\right]^2 \leqslant (b-a)\int\limits_a^b f^2(x)\,dx,$$

где знак равенства имеет место лишь, если $f(x) = \mathrm{const}$.

Указание. Рассмотреть интеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_a^b [f(x) - f(y)]^2\,dy.$$

3912. Какой знак имеют интегралы:

а) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$;

б) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$;

в) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\,dx\,dy$?

3913. Найти среднее значение функции

$$f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$$

в квадрате: $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

3914. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$I = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10} \frac{dx\,dy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}.$$

3915. Найти среднее значение квадрата расстояния точки круга $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant R^2$ от начала координат.

В задачах **3916—3922** в двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке для указанных областей Ω.

3916. Ω — треугольник с вершинами $O\,(0, 0)$, $A\,(1, 0)$, $B\,(1, 1)$.

3917. Ω — треугольник с вершинами $O\,(0, 0)$, $A\,(2, 1)$, $B\,(-2, 1)$.

3918. Ω — трапеция с вершинами $O\,(0, 0)$, $A\,(1, 0)$, $B\,(1, 2)$, $C\,(0, 1)$.

3919. Ω — круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

3920. Ω — круг $x^2 + y^2 \leqslant y$.

3921. Ω — параболический сегмент, ограниченный кривыми $y = x^2$ и $y = 1$.

3922. Ω — круговое кольцо $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$.

3923. Доказать *формулу Дирихле*

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\,dx = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\,dx \quad (a > 0).$$

Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

3924. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x, y)\,dy$. **3925.** $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{(x^2/4)-1}^{2-x} f(x, y)\,dy$.

3926. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x, y)\,dy$.

3927. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\,dy$.

3928. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,dy$.

3929. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\,dy \quad (a > 0)$.

3930. $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x, y)\,dy$.

3931. $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\,dy$.

Вычислить следующие интегралы:

3932. $\iint\limits_{\Omega} xy^2 dx\,dy$, если область Ω ограничена параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = p/2$ $(p > 0)$.

3933. $\iint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy}{\sqrt{2a-x}}$ $(a > 0)$, если область Ω ограничена кратчайшей дугой окружности с центром в точке (a, a) радиуса a, касающейся осей координат, и осями координат.

3934. $\iint\limits_{\Omega} |xy|\,dx\,dy$, если Ω — круг радиуса a с центром в начале координат.

3935. $\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, если Ω — параллелограмм со сторонами $y = x$, $y = x + a$, $y = a$ и $y = 3a$ $(a > 0)$.

3936. $\iint\limits_{\Omega} y^2 dx\,dy$, если Ω ограничена осью абсцисс и первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

В двойном интеграле

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy$$

перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, и расставить пределы интегрирования, если:

3937. Ω — круг $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

3938. Ω — круг $x^2 + y^2 \leqslant ax$ $(a > 0)$.

3939. Ω — кольцо $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$.

3940. Ω — треугольник $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$.

3941. Ω — параболический сегмент $-a \leqslant x \leqslant a$; $x^2/a \leqslant y \leqslant a$.

3942. В каком случае после перехода к полярным координатам пределы интегрирования будут постоянные?

Перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в следующих интегралах:

3943. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x, y)\,dy$, **3944.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$.

3945. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy.$

3946. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\, dy.$

3947. $\iint\limits_\Omega f(x, y)\, dx\, dy$, где область Ω ограничена кривой $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ $(x \geqslant 0)$.

Предполагая, что r и φ — полярные координаты, изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

3948. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\varphi, r)\, dr$ $(a>0)$.

3949. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r)\, dr$ $(a>0)$.

3950. $\int\limits_a^0 d\varphi \int\limits_0^{\varphi} f(\varphi, r)\, dr$ $(0<a<2\pi)$.

Перейдя к полярным координатам, заменить двойные интегралы однократными:

3951. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy.$

3952. $\iint\limits_\Omega f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy$, $\Omega = \{|y| \leqslant |x|;\ |x| \leqslant 1\}$.

3953. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right) dx\, dy.$

Переходя к полярным координатам, вычислить следующие двойные интегралы:

3954. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy.$

3955. $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy.$

3956. Квадрат $S\ \{a<x<a+h,\ b<y<b+h\}$ $(a>0,\ b>0)$ с помощью системы функций

$$u = y^2/x, \quad v = \sqrt{xy}$$

преобразуется в область S'. Найти отношение площади области S' к площади S. Чему равен предел этого отношения при $h \to 0$?

Вместо x и y ввести новые переменные u и v и определить пределы интегрирования в следующих двойных интегралах:

3957. $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\, dy \quad (0 < a < b;\ 0 < \alpha < \beta)$, если $u = x$, $v = y/x$.

3958. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} f(x, y)\, dy$, если $u = x + y$, $v = x - y$.

3959. $\iint\limits_\Omega f(x, y)\, dx\, dy$, где область Ω ограничена кривыми $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$ $(a > 0)$, если $x = u \cos^4 v$, $y = u \sin^4 v$.

3960. Показать, что замена переменных

$$x + y = \xi, \quad y = \xi\eta$$

переводит треугольник $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$ в единичный квадрат $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

3961. При какой замене переменных криволинейный четырехугольник, ограниченный кривыми $xy = 1$, $xy = 2$, $x - y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$, перейдет в прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат?

Произведя соответствующие замены переменных, свести двойные интегралы к однократным:

3962. $\iint\limits_{|x|+|y| \leqslant 1} f(x + y)\, dx\, dy$.

3963. $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} f(ax + by + c)\, dx\, dy \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$.

3964. $\iint\limits_\Omega f(xy)\, dx\, dy$, где область Ω ограничена кривыми $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ $(x > 0,\ y > 0)$.

Вычислить следующие двойные интегралы:

3965. $\iint\limits_\Omega (x + y)\, dx\, dy$, где область Ω ограничена кривой $x^2 + y^2 = x + y$.

3966. $\iint\limits_{|x|+|y| \leqslant 1} (|x| + |y|)\, dx\, dy$.

3967. $\iint\limits_\Omega \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy$, где область Ω ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3968. $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy$.

3969. $\iint\limits_{\Omega} (x+y)\,dx\,dy$, где область Ω ограничена кривыми $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$.

3970. $\iint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy$, где область Ω ограничена кривыми $xy=1$, $x+y=5/2$.

3971. $\iint\limits_{\substack{0\leq x\leq\pi\\ 0\leq y\leq\pi}} |\cos(x+y)|\,dx\,dy$.

3972. $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left|\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right| dx\,dy$.

3973. $\iint\limits_{\substack{|x|\leq 1\\ 0\leq y\leq 2}} \sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy$.

Вычислить интегралы от разрывных функций:

3974. $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dx\,dy$.

3975. $\iint\limits_{\substack{0\leq x\leq 2\\ 0\leq y\leq 2}} [x+y]\,dx\,dy$. 3976. $\iint\limits_{x^2\leq y\leq 4} \sqrt{[y-x^2]}\,dx\,dy$.

3977. Доказать, что $\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} x^m y^n\,dx\,dy=0$, если m и n — целые положительные числа и по меньшей мере одно из них нечетно.

3978. Найти

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leq\rho^2} f(x,\ y)\,dx\,dy,$$

где $f(x,\ y)$ — непрерывная функция.

3979. Найти $F'(t)$, если

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leq x\leq t\\ 0\leq y\leq t}} e^{tx/y^2}\,dx\,dy.$$

3980. Найти $F'(t)$, если

$$F(t)=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leq 1} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

3981. Найти $F'(t)$, если

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2<t^2} f(x,\ y)\,dx\,dy \quad (t>0).$$

3982. Доказать, что если $f(x, y)$ непрерывна, то функция

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi, \eta)\,d\eta$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

3983. Пусть линии уровня функции $f(x, y)$ — простые замкнутые кривые и область $S(v_1, v_2)$ ограничена кривыми $f(x, y) = v_1$ и $f(x, y) = v_2$.

Доказать, что

$$\iint\limits_{S(v_1, v_2)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,dv,$$

где $F(v)$ — площадь, ограниченная кривыми $f(x, y) = v_1$ и $f(x, y) = v$.

Указание. Область интегрирования разбить на части, ограниченные бесконечно близкими линиями уровня функции $f(x, y)$.

§ 2. Вычисление площадей

Площадь области S, расположенной в плоскости Oxy, дается формулой

$$S = \iint\limits_S dx\,dy.$$

Найти площади, ограниченные следующими кривыми:

3984. $xy = a^2$, $x + y = \frac{5}{2}a$ $(a > 0)$.

3985. $y^2 = 2px + p^2$, $y^2 = -2qx + q^2$ $(p > 0, q > 0)$.

3986. $(x-y)^2 + x^2 = a^2$ $(a > 0)$.

Переходя к полярным координатам, вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:

3987. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$; $x^2 + y^2 \geqslant a^2$.

3988. $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3989. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3-3xy^2)$ $(a > 0)$.

3990. $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy$; $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leqslant a^2$ $(a > 0)$.

Вводя обобщенные полярные координаты r и φ по формулам

$$x = ar\cos^{\alpha}\varphi,\quad y = br\sin^{\alpha}\varphi\quad (r \geqslant 0),$$

где a, b и α — надлежащим образом подобранные постоянные и $\frac{D(x,\,y)}{D(r,\,\varphi)} = \alpha\, abr\cos^{\alpha-1}\varphi\,\sin^{\alpha-1}\varphi$, найти площади, ограниченные следующими кривыми (параметры считаются положительными):

3991. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$.

3992. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$; $x=0$, $y=0$.

3993. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$ $(x>0,\ y>0)$.

3994. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$ $(x>0,\ y>0)$.

3994.1 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{x^2y^2}{c^4}$.

3995. $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$; $x=0$, $y=0$.

Производя надлежащую замену переменных, найти площади фигур, ограниченных кривыми:

3996. $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta)$.

3997. $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=x$, $y=2x$ $(x>0;\ y>0)$.

3998. $y^2=2px$, $y^2=2qx$, $x^2=2ry$, $x^2=2sy$ $(0<p<q;\ 0<r<s)$.

3998.1. $x^2=ay$, $x^2=by$, $x^3=cy^2$, $x^3=dy^2$ $(0<a<b;\ 0<c<d)$.

3998.2. $y=ax^p$, $y=bx^p$, $y=cx^q$, $y=dx^q$, $(0<p<q;\ 0<a<b;\ 0<c<d)$.

3999. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$, $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $4\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ $(a>0,\ b>0)$.

3999.1. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=4$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $8\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ $(x>0,\ y>0)$.

4000. $\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$, где λ принимает следующие значения: $\frac{1}{3}c^2$, $\frac{2}{3}c^2$, $\frac{4}{3}c^2$, $\frac{5}{3}c^2$ $(x>0, y>0)$.

4001. Найти площадь, ограниченную эллипсом

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1,$$

где $\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

4002. Найти площадь, ограниченную эллипсами $\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u}+\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u}=c^2$ $(u=u_1, u_2)$ и гиперболами $\frac{x^2}{\cos^2 v}-\frac{y^2}{\sin^2 v}=c^2$ $(v=v_1, v_2)$ $(0<u_1<u_2;$ $0<v_1<v_2;$ $x>0,$ $y>0)$.

Указание. Положить $x=c\operatorname{ch}u\cos v$, $y=c\operatorname{sh}u\sin v$.

4003. Найти площадь сечения поверхности

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$$

плоскостью $x+y+z=0$.

4004. Найти площадь сечения поверхности

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$$

плоскостью $z=1-2(x+y)$.

§ 3. Вычисление объемов

Объем цилиндроида, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x, y)\geqslant 0$, снизу плоскостью $z=0$ и с боков

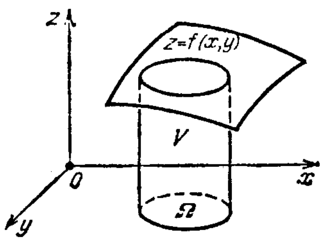

Рис. 14

прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей из плоскости Oxy квадрируемую область Ω (рис. 14), равен

$$V=\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy.$$

4005. Нарисовать тело, объем которого равен интегралу

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy.$$

4006. Изобразить объемы, выражаемые следующими двойными интегралами:

а) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}}(x+y)\,dx\,dy;$

б) $\displaystyle\iint\limits_{x^2/4+y^2/9\leqslant 1}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dx\,dy;$

в) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy;$

г) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

д) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\leqslant 2x}}\sqrt{xy}\,dx\,dy;$

е) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sin\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

4007. $z=1+x+y,\quad z=0,\quad x+y=1,\quad x=0,$ $y=0.$

4008. $x+y+z=a,\quad x^2+y^2=R^2,\quad x=0,\ y=0,$ $z=0\ \ (a\geqslant R\sqrt{2}).$

4009. $z=x^2+y^2,\ \ y=x^2,\ \ y=1,\ \ z=0.$

4010. $z=\cos x\cos y,\ \ z=0,\ \ |x+y|\leqslant\pi/2,$ $|x-y|\leqslant\pi/2.$

4011. $z=\sin\dfrac{\pi y}{2x},\ \ z=0,\ \ y=x,\ \ y=0,\ \ x=\pi.$

4012. $z=xy,\ \ x+y+z=1,\ \ z=0.$

Переходя к полярным координатам, найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

4013. $z^2=xy,\ x^2+y^2=a^2.$

4014. $z = x + y$, $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $z = 0$ $(x > 0$, $y > 0)$.

4015. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

4016. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 \geqslant a|x|$ $(a > 0)$.

4017. $x^2 + y^2 - az = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $z = 0$ $(a > 0)$.

4018. $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$.

4019. $z = c\cos\dfrac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}$, $z = 0$, $y = x\operatorname{tg}\alpha$, $y = x\operatorname{tg}\beta$ $(a > 0,\ c > 0,\ 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$.

4020. $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$.

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями (параметры предполагаются положительными):

4021. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$ $(z > 0)$.

4022. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

4023. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$, $z = 0$.

4024. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 + \dfrac{z}{c} = 1$, $z = 0$.

4025. $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^2 + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4026. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$.

4027. $z^2 = xy$, $x + y = a$, $x + y = b$ $(0 < a < b)$.

4028. $z = x^2 + y^2$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = \dfrac{x}{2}$, $y = 2x$, $z = 0$.

4029. $z = xy$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $z = 0$.

4030. $z = c\sin\dfrac{\pi xy}{a^2}$, $z = 0$, $xy = a^2$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$ $(0 < \alpha < \beta;\ x > 0)$.

4031. $z = x^{3/2} + y^{3/2}$, $z = 0$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

4032. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z}{c} = 1$, $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$, $z = 0$.

4033. $z = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $z = 0$, $\sqrt{x^2+y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ $(y \geqslant 0)$.

4033.1. $z = ye^{-xy/a^2}$, $xy=a^2$, $xy= 2a^2$, $y = m$, $y = n$, $z = 0$ $(0 < m < n)$.

4034. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(n>0)$.

4035. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(n>0,\ m>0)$.

§ 4. Вычисление площадей поверхностей

1°. Случай явного задания поверхности. Площадь гладкой криволинейной поверхности $z = z(x, y)$ выражается интегралом

$$S = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

где Ω — проекция данной поверхности на плоскость Oxy.

2°. Случай параметрического задания поверхности. Если уравнение поверхности задано параметрически:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

где $(u, v) \in \Omega$, Ω — ограниченная замкнутая квадрируемая область и функции x, y и z непрерывно дифференцируемы в области Ω, то для площади поверхности имеем формулу

$$S = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4036. Найти площадь части поверхности $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

4037. Найти площадь поверхности тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

4038. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(b \leqslant a)$.

4039. Найти площадь части поверхности $z^2 = 2xy$, отсекаемой плоскостями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

4040. Найти площадь части поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной вне цилиндров $x^2 + y^2 = \pm ax$ (задача Вивиани).

4041. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

4042. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.

4043. Найти площадь части поверхности $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, вырезанной плоскостями $x - y = \pm 1$, $x + y = \pm 1$.

4044. Найти площадь части поверхности $x^2 + y^2 = 2az$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$.

4045. Найти площадь части поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, вырезанной плоскостями $x + z = 0$, $x - z = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$.

4045.1. Найти площадь части поверхности

$$(x^2 + y^2)^{3/2} + z = 1,$$

отсекаемой плоскостью $z = 0$.

4045.2. Найти площадь части поверхности

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{2z}{c} = 1,$$

вырезанной плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$.

4045.3. Найти площадь части поверхности

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z,$$

вырезанной поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (z \geqslant 0).$$

4045.4. Найти площадь части поверхности

$$\sin z = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

отсекаемой плоскостями $x = 1$ и $x = 2$ $(y \geqslant 0)$.

4046. Найти поверхность и объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = \frac{1}{3} z^2$, $x + y + z = 2a$ $(a > 0)$.

4047. Найти площадь части сферы, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами.

4048. Найти площадь части геликоида $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h\varphi$, где $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$.

4049. Найти площадь части поверхности тора $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\psi$ $(0 < a \leqslant b)$, ограниченной двумя меридианами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и двумя параллелями $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$.

Чему равна поверхность всего тора?

4050. Найти телесный угол ω, под которым виден из начала координат прямоугольник $x = a > 0$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$.

Вывести приближенную формулу для ω, если a велико.

§ 5. Приложения двойных интегралов к механике

1°. Центр тяжести. Если x_0 и y_0 — координаты центра тяжести пластинки Ω, лежащей в плоскости Oxy, и $\rho = \rho(x, y)$ — плотность пластинки, то

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_{\Omega} \rho x\,dx\,dy, \quad y_0 = \frac{1}{M}\iint_{\Omega} \rho y\,dx\,dy, \tag{1}$$

где $M = \iint\limits_{\Omega} \rho\,dx\,dy$ — масса пластинки.

Если пластинка однородна, то в формулах (1) следует положить $\rho = 1$.

2°. Моменты инерции. I_x и I_y — *моменты инерции* пластинки Ω, лежащей в плоскости Oxy, относительно координатных осей Ox и Oy — выражаются соответственно формулами

$$I_x = \iint_{\Omega} \rho y^2\,dx\,dy, \quad I_y = \iint_{\Omega} \rho x^2\,dx\,dy, \tag{2}$$

где $\rho = \rho(x, y)$ — плотность пластинки.

Рассматривается также *центробежный момент инерции*

$$I_{xy} = \iint_{\Omega} \rho\,xy\,dx\,dy. \tag{3}$$

Полагая $\rho = 1$ в формулах (2) и (3), получим *геометрические моменты инерции* плоской фигуры.

4051. Найти массу квадратной пластинки со стороной a, если плотность пластинки в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки от одной из вершин квадрата и равна ρ_0 в центре квадрата.

Найти координаты центра тяжести однородных пластинок, ограниченных следующими кривыми:

4052. $ay = x^2$, $x + y = 2a$ $(a > 0)$.

4053. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$.

4054. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(x > 0,\ y > 0)$.

4055. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}$ (петля).

4056. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ $(x > 0,\ y > 0)$.

4057. $r = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi = 0$.

4058. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, $y = 0$.

4059. Найти координаты центра тяжести круглой пластинки $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, если плотность ее в точке $M(x, y)$ пропорциональна расстоянию точки M от точки $A(a, 0)$.

4060. Определить кривую, описываемую центром тяжести переменной площади, ограниченной кривыми:

$$y = \sqrt{2px},\ y = 0,\ x = X.$$

Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей координат Ox и Oy площадей $(\rho = 1)$, ограниченных следующими кривыми:

4061. $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1$, $\frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1$, $y = 0$ $(b_1 > 0,$ $b_2 > 0,\ h > 0)$.

4062. $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$.

4063. $r = a(1 + \cos\varphi)$.

4064. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

4065. $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$ $(x > 0,$ $y > 0)$.

4066. Найти полярный момент

$$I_0 = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

площади S, ограниченной кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

4066.1. Найти центробежный момент инерции I_{xy} однородной фигуры, ограниченной кривыми

$$ay = x^2,\ ax = y^2 \quad (a > 0).$$

4067. Доказать формулу $I_l = I_{l_0} + Sd^2$, где I_l, I_{l_0} — моменты инерции фигуры S относительно двух параллельных осей l и l_0, из которых l_0 проходит через центр тяжести фигуры и d — расстояние между этими осями.

4068. Доказать, что момент инерции плоской области S относительно прямой, проходящей через ее центр тяжести $O(0, 0)$ и составляющей угол α с осью Ox, равен

$$I = I_x \cos^2\alpha - 2I_{xy} \sin\alpha \cos\alpha + I_y \sin^2\alpha,$$

где I_x и I_y — моменты инерции области S относительно осей Ox и Oy и I_{xy} — центробежный момент:

$$I_{xy} = \iint\limits_S \rho\, xy\, dx\, dy.$$

4069. Найти момент инерции правильного треугольника со стороной a относительно прямой, проходящей через центр тяжести треугольника и составляющей угол α с его высотой.

4070. Определить силу давления воды на боковую стенку $x \geqslant 0$ цилиндрического сосуда $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, если уровень воды $z = h$.

4071. Шар радиуса a погружен в жидкость постоянной плотности δ на глубину h (считая от центра шара), где $h \geqslant a$. Найти силу давления жидкости на верхнюю и нижнюю части шаровой поверхности.

4072. Прямой круговой цилиндр, радиус основания которого равен a, а высота b, целиком погружен в жидкость плотности δ так, что центр его находится на глубине h под поверхностью воды, а ось цилиндра составляет угол α с вертикалью. Определить силу давления жидкости на нижнее и верхнее основания цилиндра.

4073. Определить силу притяжения однородным цилиндром $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$, материальной точки $P(0, 0, b)$, если масса цилиндра равна M, а масса точки равна m.

4074. Распределение давления тела на *площадку смятия*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$$

дается формулой $p = p_0\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)$.

Определить среднее давление тела на эту площадку.

4075. Луг, имеющий форму прямоугольника со сторонами a и b, равномерно покрыт скошенной травой с плотностью, равной p кгс/м^2. Какую минимальную работу надо затратить, чтобы собрать все сено в центре луга, если работа по транспортировке груза P кгс на расстояние r равна kPr $(0 < k < 1)$.

§ 6. Тройные интегралы

1°. Непосредственное вычисление тройного интеграла. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна и область V ограничена и определяется следующими неравенствами:

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \quad z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y),$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$, $z_2(x_2, y)$ — непрерывные функции, то тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$, распространенный на область V, может быть вычислен по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Иногда удобно также применять формулу

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \iint\limits_{S(x)} f(x, y, z)\,dy\,dz,$$

где $S(x)$ — сечение области V плоскостью $x = \text{const}$.

2°. Замена переменных в тройном интеграле. Если ограниченная кубируемая замкнутая область V пространства $Oxyz$ взаимно однозначно отображается на область V' пространства $O'uvw$ с помощью непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$$

причем якобиан $I = \dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ при $(u, v, w) \in V'$, почти всюду (в смысле меры) сохраняет постоянный знак, то справедлива формула

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\,|I|\,du\,dv\,dw.$$

Как частные случаи, имеем: 1) *цилиндрическую систему координат* φ, r, h, где

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h,$$

и

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, h)} = r,$$

и 2) *сферическую систему координат* φ, ψ, r, где

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\quad y = r\sin\varphi\cos\psi,\quad z = r\sin\psi,$$

и

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(r,\ \varphi,\ \psi)} = r^2\cos\psi.$$

Вычислить следующие тройные интегралы:

4076. $\iiint\limits_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

4077. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, где область V ограничена поверхностями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4078. $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4079. $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

4080. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностями

$$x^2 + y^2 = z^2,\quad z = 1.$$

Различными способами расставить пределы интеграции в следующих тройных интегралах:

4081. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,\ y,\ z)\,dz.$

4082. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,\ y,\ z)\,dz.$

4083. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,\ y,\ z)\,dz.$

Заменить тройные интегралы однократными:

4084. $\int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^\xi d\eta \int\limits_0^\eta f(\zeta)\,d\zeta.$ **4085.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x+y} f(z)\,dz.$

4086. Найти

$$\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x, y, z)\, dz,$$

если $f(x, y, z) = F'''_{xyz}(x, y, z)$ и a, b, c, A, B, C — постоянные.

Переходя к сферическим координатам, вычислить интегралы:

4087. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$, где область V ограничена поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

4088. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz.$

4089. Перейти к сферическим координатам в интеграле

$$\iiint\limits_V f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) dx\, dy\, dz,$$

где область V ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x = y$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

4090. Произведя соответствующую замену переменных, вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\, dx\, dy\, dz,$$

где V — внутренность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

4091. Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz,$$

где область V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.

4092. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V x^2 dx\, dy\, dz$, где область V ограничена поверхностями $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$ $(0 < a < b)$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ $(0 < \alpha < \beta)$, $z = h$ $(h > 0)$.

4093. Найти интеграл $\iiint\limits_V xyz\, dx\, dy\, dz$, где область V расположена в октанте $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

и ограничена поверхностями:

$$z=\frac{x^2+y^2}{m},\ z=\frac{x^2+y^2}{n},\ xy=a^2,\ xy=b^2,\ y=\alpha x,\ y=\beta x$$

$$(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta;\ 0<m<n).$$

4094. Найти среднее значение функции

$$f(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2$$

в области $x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$.

4095. Найти среднее значение функции

$$f(x,\ y,\ z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$$

в области $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

4096. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$u=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

где $a^2+b^2+c^2>R^2$.

4097. Доказать, что если функция $f(x,\ y,\ z)$ непрерывна в области V и

$$\iiint\limits_{\omega}f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=0$$

для любой области $\omega\subset V$, то $f(x,\ y,\ z)\equiv 0$ при $(x,\ y,\ z)\in V$.

4098. Найти $F'(t)$, если:

а) $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$,

где f — дифференцируемая функция;

б) $F(t)=\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}}f(xyz)\,dx\,dy\,dz$,

где f — дифференцируемая функция.

4099. Найти

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}x^m y^n z^p\,dx\,dy\,dz,$$

где m, n и p — целые неотрицательные числа.

4100. Вычислить *интеграл Дирихле*

$$\iiint\limits_{V}x^p y^q z^r(1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz$$

$$(p>0,\ q>0,\ r>0,\ s>0),$$

где область V ограничена плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, полагая

$$x+y+z=\xi,\ y+z=\xi\eta,\ z=\xi\eta\zeta.$$

§ 7. Вычисление объемов с помощью тройных интегралов

Объем области V выражается формулой

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz.$$

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

4101. $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, $y=x$, $y=x^2$.

4102. $z=x+y$, $z=xy$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

4103. $x^2+z^2=a^2$, $x+y=\pm a$, $x-y=\pm a$.

4104. $az=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$.

4105. $az=a^2-x^2-y^2$, $z=a-x-y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(a>0)$.

4106. $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Переходя к сферическим или цилиндрическим координатам, вычислить объемы, ограниченные поверхностями:

4107. $x^2+y^2+z^2=2az$, $x^2+y^2\leqslant z^2$.

4108. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

4109. $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$.

4110. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0)$ $(0<a<b)$.

В следующих примерах удобно пользоваться обобщенными сферическими координатами

$$r,\ \varphi \text{ и } \psi\left(r\geqslant 0;\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

вводя их по формулам

$$\left.\begin{aligned} x&=ar\cos^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi,\\ y&=br\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi,\\ z&=cr\sin^{\beta}\psi \end{aligned}\right\}\quad (a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta \text{ — постоянные}),$$

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(r,\ \varphi,\ \psi)}=\alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями;

4111. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$.

4112. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

4112.1. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$.

4113. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$.

4114. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}=1$. **4115.** $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=1$.

Пользуясь подходящей заменой переменных, вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями (параметры предполагаются положительными):

4116. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4116.1. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4117. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^4=\frac{xyz}{abc}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4118. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4118.1. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,$ $\geqslant 0)$.

4118.2. $\sqrt[3]{\frac{x}{a}}+\sqrt[3]{\frac{y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{z}{c}}=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,$ $z\geqslant 0)$.

4118.3. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$.

4119. $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$ $(x>0,\ y>0)$.

4120. $x^2+z^2=a^2$, $x^2+z^2=b^2$, $x^2-y^2-z^2=0$ $(x>0)$.

4121. $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

4122. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{h}\cdot e^{-\frac{z^2/c^2}{x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2}}$.

4123. $$\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right),$$
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad x=0,\quad x=a.$

4124. $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\ln\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}},\qquad x=0,\quad z=0,$$
$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

4125. В каком отношении делит объем шара $x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$ поверхность $x^2+y^2+az=4a^2$?

4126. Найти объем и поверхность тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=az$, $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$.

4127. Найти объем параллелепипеда, ограниченного плоскостями

$$a_ix+b_iy+c_iz=\pm h_i\qquad(i=1,\ 2,\ 3),$$

если

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

4128. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+\\ +(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2,$$

если

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

4129. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=\frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2}\quad(n>1).$$

4130. Найти объем тела, расположенного в положительном октанте пространства $Oxyz$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$

и ограниченного поверхностями:

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^p}{c^p}=1 \quad (m>0,\ n>0,\ p>0),$$

$$x=0,\ y=0,\ z=0.$$

§ 8. Приложения тройных интегралов к механике

1°. Масса тела. Если тело занимает объем V и $\rho=\rho(x, y, z)$ — плотность его в точке (x, y, z), то *масса тела* равна

$$M=\iiint\limits_V \rho\, dx\, dy\, dz. \qquad (1)$$

2°. Центр тяжести тела. *Координаты центра тяжести* (x_0, y_0, z_0) тела вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho x\, dx\, dy\, dz,\\ y_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho y\, dx\, dy\, dz,\\ z_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho z\, dx\, dy\, dz. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Если тело однородно, то в формулах (1) и (2) можно положить $\rho=1$.

3°. Моменты инерции. *Моментами инерции тела относительно координатных плоскостей* называются соответственно интегралы

$$I_{xy}=\iiint\limits_V \rho z^2 dx\, dy\, dz, \qquad I_{yz}=\iiint\limits_V \rho x^2 dx\, dy\, dz,$$

$$I_{zx}=\iiint\limits_V \rho y^2 dx\, dy\, dz.$$

Моментом инерции тела относительно некоторой оси l называется интеграл

$$I_l=\iiint\limits_V \rho r^2 dx\, dy\, dz,$$

где r — расстояние переменной точки тела (x, y, z) от оси l. В частности для координатных осей Ox, Oy и Oz соответственно имеем:

$$I_x=I_{xy}+I_{xz}, \qquad I_y=I_{yx}+I_{yz}, \qquad I_z=I_{zx}+I_{zy}.$$

Моментом инерции тела относительно начала координат называется интеграл

$$I_0=\iiint\limits_V \rho\,(x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Очевидно, имеем: $I_0=I_{xy}+I_{yz}+I_{zx}$.

4°. Потенциал поля тяготения. *Ньютоновым потенциалом тела* в точке $P(x, y, z)$ называется интеграл

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r},$$

где V — объем тела, $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность тела, и

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

Материальная точка массы m притягивается телом с силой $F = (X, Y, Z)$, проекции которой X, Y, Z на оси координат Ox, Oy, Oz равны:

$$X = km\frac{\partial u}{\partial x} = km \iiint\limits_V \rho \frac{\xi - x}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$Y = km\frac{\partial u}{\partial y} = km \iiint\limits_V \rho \frac{\eta - y}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$Z = km\frac{\partial u}{\partial z} = km \iiint\limits_V \rho \frac{\zeta - z}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где k — постоянная закона тяготения.

4131. Найти массу тела, занимающего единичный объем $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, если плотность тела в точке $M(x, y, z)$ дается формулой $\rho = x + y + z$.

4132. Найти массу тела, заполняющего бесконечную область $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1$, если плотность тела меняется по закону $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $\rho_0 > 0$ и $k > 0$ постоянны.

Найти координаты центра тяжести однородных тел, ограниченных следующими поверхностями:

4133. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

4134. $z = x^2 + y^2$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4135. $x^2 = 2pz$, $y^2 = 2px$, $x = \dfrac{p}{2}$, $z = 0$.

4136. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4137. $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$.

4138. $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y = z$.

4139. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{xyz}{abc}$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0;\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

4140. $z = x^2 + y^2$, $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$.

4141. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(n > 0,$ $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

4142. Определить координаты центра тяжести тела, имеющего форму куба: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, если плотность тела в точке (x, y, z) равна

$$\rho = x^{\frac{2\alpha - 1}{1 - \alpha}} y^{\frac{2\beta - 1}{1 - \beta}} z^{\frac{2\gamma - 1}{1 - \gamma}},$$

где $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$.

Определить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородных тел, ограниченных следующими поверхностями (параметры положительны):

4143. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4144. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. **4145.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

4146. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}$.

4147. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

4147.1. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

4147.2. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(n > 0;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

Определить моменты инерции относительно оси Oz однородных тел, ограниченных поверхностями:

4148. $z = x^2 + y^2$, $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$, $z = 0$.

4149. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(z > 0)$.

4149.1. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^5 z$.

4150. Найти момент инерции неоднородного шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ массы M относительно его диаметра, если плотность шара в текущей точке $P(x, y, z)$ пропорциональна расстоянию этой точки от центра шара.

4151. Доказать равенство $I_l = I_{l_0} + Md^2$, где I_l — момент инерции тела относительно некоторой оси l, I_{l_0} — момент инерции относительно оси l_0, параллельной l и проходящей через центр тяжести тела, d — расстояние между осями и M — масса тела.

4152. Доказать, что момент инерции тела, занимающего объем V, относительно оси l, проходящей через его центр тяжести O (0, 0, 0) и образующей углы α, β, γ с осями координат, равен:

$$I_l = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta - \\ -2K_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma,$$

где I_x, I_y, I_z — моменты инерции тела относительно осей координат и

$$K_{xy} = \iiint\limits_V \rho xy\,dx\,dy\,dz, \qquad K_{xz} = \iiint\limits_V \rho xz\,dx\,dy\,dz,$$

$$L_{yz} = \iiint\limits_V \rho yz\,dx\,dy\,dz$$

— центробежные моменты.

4153. Найти момент инерции однородного цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $z = \pm h$, плотности ρ_0 относительно прямой $x = y = z$.

4154. Найти момент инерции относительно начала координат однородного тела плотности ρ_0, ограниченного поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

4155. Найти ньютонов потенциал в точке $P(x, y, z)$ однородного шара $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R^2$ плотности ρ_0.

Указание. Положить, что ось $O\zeta$ проходит через точку $P(x, y, z)$.

4156. Найти ньютонов потенциал в точке $P(x, y, z)$ сферического слоя $R_1^2 \leqslant \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R_2^2$, если плотность $\rho = f(R)$, где f — известная функция и $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

4157. Найти ньютонов потенциал в точке $P(0, 0, z)$ цилиндра $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant \zeta \leqslant h$, постоянной плотности ρ_0.

4158. С какой силой притягивает однородный шар $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R^2$ массы M материальную точку $P(0, 0, a)$ массы m?

4159. Найти силу притяжения однородным цилиндром $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant \zeta \leqslant h$, плотности ρ_0, точки $P(0, 0, z)$ с единичной массой.

4160. Найти силу притяжения однородным шаровым сектором плотности ρ_0 материальной точки с массой, равной единице, помещенной в его вершине, если радиус шаровой поверхности равен R, а угол осевого сечения сектора равен 2α.

§ 9. Несобственные двойные и тройные интегралы

1°. Случай бесконечной области. Если двумерная область Ω не ограничена и функция $f(x, y)$ непрерывна на Ω, то по определению полагают:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega_n} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

где Ω_n — любая последовательность ограниченных замкнутых квадрируемых областей, исчерпывающая область Ω. Если предел в правой части существует и не зависит от выбора последовательности Ω_n, то соответствующий интеграл называется *сходящимся*; в противном случае — *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный тройной интеграл от непрерывной функции, распространенный на неограниченную трехмерную область.

2°. Случай разрывной функции. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной и замкнутой области Ω всюду, за исключением точки $P(a, b)$, то полагают:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to+0} \iint\limits_{\Omega-U_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{2}$$

где U_ε есть область диаметра ε, содержащая точку P, и в случае существования предела рассматриваемый интеграл называют *сходящимся*; в противном случае — *расходящимся*.

Предполагая, что вблизи точки $P(a, b)$ имеет место равенство

$$f(x, y) = \varphi(x, y)/r^\alpha,$$

где абсолютная величина функции $\varphi(x, y)$ заключена между числами $m > 0$ и $M > 0$ и $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, получим, что 1) при $\alpha < 2$ интеграл (2) сходится; 2) при $\alpha \geqslant 2$ — расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл (2), если функция $f(x, y)$ имеет линию разрыва.

Понятие несобственного интеграла от разрывной функции легко переносится на случай тройных интегралов.

Исследовать на сходимость несобственные интегралы с бесконечной областью интегрирования ($0 < m \leqslant |\varphi(x, y)| \leqslant M < +\infty$):

4161. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^p}\,dx\,dy.$

4162. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$

4163. $\displaystyle\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1+x^2+y^2)^p}\,dx\,dy.$

4164. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|>1} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q} \quad (p>0,\ q>0).$

4165. $\displaystyle\iint\limits_{x+y>1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p}\,dx\,dy.$

4166. Доказать, что если непрерывная функция $f(x, y)$ неотрицательна и S_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — какая-нибудь последовательность ограниченных и замкнутых областей, исчерпывающая область S, то

$$\iint\limits_{S} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{S_n} f(x, y)\,dx\,dy,$$

где левая часть имеет или не имеет смысла одновременно с правой.

4167. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\ |y|\leqslant n}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \pi,$$

тогда как

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = 0$$

(n — натуральное число).

4168. Показать, что интеграл

$$\iint\limits_{x>1,\ y>1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

расходится, хотя повторные интегралы

$$\int\limits_1^{+\infty} dx \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \quad \text{и} \quad \int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$$

сходятся.

Вычислить интегралы (параметры положительны):

4169. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{xy>1,\\ x>1}} \frac{dx\,dy}{x^p y^q}.$ **4170.** $\displaystyle\iint\limits_{\substack{x+y>1,\\ 0\leqslant x\leqslant 1}} \frac{dx\,dy}{(x+y)^p}.$

4171. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$ **4172.** $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}.$

4173. $\iint\limits_{y>x^2+1} \frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$. **4174.** $\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y} e^{-(x+y)}dx\,dy$.

Переходя к полярным координатам, вычислить интегралы:

4175. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$.

4176. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

4177. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

Вычислить интегралы:

4178. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f}\,dx\,dy$, где $a<0$, $ac-b^2>0$.

4179. $\iint\limits_{x^2/a^2+y^2/b^2>1} e^{-(x^2/a^2+y^2/b^2)}dx\,dy$.

4180. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy\ (0<|\varepsilon|<1)$.

Исследовать на сходимость несобственные двойные интегралы от разрывных функций $(0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant\leqslant M<+\infty)$:

4181. $\iint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$, где область Ω определяется условиями: $|y|\leqslant x^2$; $x^2+y^2\leqslant 1$.

4182. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\,dx\,dy$.

4183. $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$ $(p>0,\ q>0)$.

4184. $\int\limits_0^a\int\limits_0^a \frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}\,dx\,dy$.

4185. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}\,dx\,dy$.

4186. Доказать, что если 1) функция $\varphi(x, y)$ непрерывна в ограниченной области $a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B$; 2) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $a \leqslant x \leqslant A$ и 3) $p < 1$, то интеграл

$$\int\limits_a^A dx \int\limits_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p}\, dy$$

сходится.

Вычислить следующие интегралы:

4187. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy.$

4188. $\displaystyle\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$ $(a>0)$.

4189. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \ln\sin(x-y)\, dx\, dy$, где область Ω ограничена прямыми $y = 0$, $y = x$, $x = \pi$.

4190. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Исследовать на сходимость следующие тройные интегралы:

4191. $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\, dx\, dy\, dz$, где $0 < m \leqslant \leqslant |\varphi(x, y, z)| \leqslant M < +\infty$.

4192. $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\, dx\, dy\, dz$, где $0 < m \leqslant \leqslant |\varphi(x, y, z)| \leqslant M < +\infty$.

4193. $\displaystyle\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx\, dy\, dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}$ $(p>0,\ q>0,\ r>0)$.

4194. $\displaystyle\int\limits_0^a\int\limits_0^a\int\limits_0^a \frac{f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\{[y-\varphi(x)]^2 + [z-\psi(x)]^2\}^p}$, где $0 < m \leqslant \leqslant |f(x, y, z)| \leqslant M < +\infty$, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные функции на сегменте $[0, a]$.

4195. $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,\\ |y|\leqslant 1,\\ |z|\leqslant 1}} \frac{dx\, dy\, dz}{|x+y-z|^p}$.

Вычислить интегралы:

4196. $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}$. **4197.** $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$.

4198. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$.

4199. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz$.

4200. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1,\,x_2,\,x_3)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

где $P(x_1,\ x_2,\ x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j\ (a_{ij}=a_{ji})$ — положительно определенная квадратичная форма.

§ 10. Многократные интегралы

1°. Непосредственное вычисление кратного интеграла. Если функция $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ непрерывна в ограниченной области Ω, определяемой неравенствами

$$\begin{cases} x_1'\leqslant x_1\leqslant x_1'', \\ x_2'(x_1)\leqslant x_2\leqslant x_2''(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n'(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_{n-1})\leqslant x_n\leqslant x_n''(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_{n-1}), \end{cases}$$

где x_1' и x_1'' — постоянные числа и $x_2'(x_1)$, $x_2''(x_1)$, ..., $x_n'(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})$, $x_n''(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})$ — непрерывные функции, то соответствующий многократный интеграл может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{\Omega}\ldots\int f(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n =$$
$$=\int\limits_{x_1'}^{x_1''}dx_1\int\limits_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)}dx_2\ldots\int\limits_{x_n'(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{x_n''(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\,dx_n.$$

2°. Замена переменных в кратном интеграле. Если 1) функция $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ равномерно непрерывна в ограниченной измеримой области Ω; 2) непрерывно дифференцируемые функции

$$x_i=\varphi_i(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

осуществляют взаимно однозначное отображение области Ω пространства $Ox_1x_2\ldots x_n$ на ограниченную область Ω' пространства $O'\xi_1\xi_2\ldots\xi_n$ и 3) якобиан

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}$$

сохраняет почти всюду постоянный знак (кроме множества меры нуль) в области Ω', то справедлива формула

$$\int\int\limits_{\Omega}\ldots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n =$$
$$= \int\int\limits_{\Omega'}\ldots\int f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\,|I|\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n.$$

В частности, при переходе к полярным координатам $(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_1,\\ x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\\ x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

имеем:

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}.$$

4201. Пусть $K(x, y)$ — непрерывная функция в области R $(a \leqslant x \leqslant b;\ a \leqslant y \leqslant b)$ и

$$K_n(x, y) =$$
$$= \int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b K(x, t_1)K(t_1, t_2)\ldots K(t_n, y)\,dt_1 dt_2\ldots dt_n.$$

Доказать, что

$$K_{n+m+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, t)\,K_m(t, y)\,dt.$$

4202. Пусть $f = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция в области $0 \leqslant x_i \leqslant x$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Доказать равенство

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x_1} dx_2\ldots\int_0^{x_{n-1}} f\,dx_n = \int_0^x dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\ldots\int_{x_2}^x f\,dx_1$$
$$(n \geqslant 2).$$

4203. Доказать, что

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\ldots\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\ldots f(t_n)\,dt_n = \frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}^n,$$

где f — непрерывная функция.

Вычислить следующие многократные интегралы:

4204. а) $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1 (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$;

б) $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1 (x_1+x_2+\ldots+x_n)^2\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$.

4205. $I_n = \underset{\substack{x_1>0,\ x_2>0,\ \ldots,\ x_n>0,\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant a}}{\int\int\ldots\int} dx_1\,dx_2\ldots dx_n$.

4206. $\int\limits_0^1 dx_1\int\limits_0^{x_1} dx_2\ldots\int\limits_0^{x_{n-1}} x_1x_2\ldots x_n\,dx_n$.

4207. $\underset{\substack{x_1>0,\ x_2>0,\ \ldots,\ x_n>0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n<1}}{\int\int\ldots\int} \sqrt{x_1+x_2+\ldots+x_n}\,dx_1\ldots dx_n$.

4208. Найти объем n-мерного параллелепипеда, ограниченного плоскостями

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=\pm h_i\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, если $\Delta=|a_{ij}|\neq 0$.

4209. Найти объем n-мерной пирамиды

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant 1,\quad x_i\geqslant 0\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

$$(a_i>0,\ i=1,2,\ \ldots,\ n).$$

4210. Найти объем n-мерного конуса, ограниченного поверхностями

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2},\quad x_n=a_n.$$

4211. Найти объем n-мерного шара

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqslant a^2.$$

4212. Найти $\underset{\Omega}{\int\int\ldots\int} x_n^2\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$, где область Ω определяется неравенствами

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2\leqslant a^2,\qquad -\frac{h}{2}\leqslant x_n\leqslant\frac{h}{2}.$$

4213. Вычислить

$$\underset{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<1}{\int\int\ldots\int}\frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2}}.$$

4214. Доказать равенство

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n = \int_0^x f(u)\,\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,du.$$

4215. Доказать равенство

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \ldots \int_0^{x_n} f(x_{n+1})\,dx_{n+1} = \frac{1}{2^n n!}\int_0^x (x^2-u^2)^n f(u)\,du.$$

4216. Доказать *формулу Дирихле*

$$\underset{\substack{x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n>0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant 1}}{\int\int\ldots\int} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n+1)} \qquad (p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n>0).$$

4217. Доказать *формулу Лиувилля*

$$\underset{\substack{x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n>0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant 1}}{\int\int\ldots\int} f(x_1+x_2+\ldots+x_n)\,x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots$$

$$\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)}\int_0^1 f(u)\,u^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1}\,du$$

$$(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n>0),$$

где $f(u)$ — непрерывная функция.

Указание. Применить метод математической индукции.

4218. Привести к однократному интегралу n-кратный интеграл $(n \geqslant 2)$

$$\underset{\Omega}{\int\int\ldots\int} f\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\right) dx_1dx_2\ldots dx_n,$$

распространенный по области $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqslant R^2$, где $f(u)$ — непрерывная функция.

4219. Вычислить *потенциал на себя* однородного шара радиуса R и плотности ρ_0, т. е. найти интеграл

$$u = \frac{\rho_0^2}{2}\underset{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}}{\int\int\int\int\int\int} \frac{dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2}{r_{1,\,2}},$$

где $r_{1,\,2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

4220. Вычислить n-кратный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_{i=1}^{n} b_ix_i+c\right\}}\,dx_1dx_2\ldots dx_n,$$

если $\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\,(a_{ij}=a_{ji})$ — положительно определенная квадратичная форма.

§ 11. Криволинейные интегралы

1°. Криволинейный интеграл 1-го рода. Если $f(x, y, z)$ — функция, определенная и непрерывная в точках гладкой кривой C

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t)\quad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1}$$

и ds — дифференциал дуги, то по определению полагают

$$\int\limits_C f(x, y, z)\,ds = \int\limits_{t_0}^{T} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

Особенность этого интеграла состоит в том, что он не зависит от направления кривой C.

2°. Механические приложения криволинейного интеграла 1-го рода. Если $\rho=\rho(x, y, z)$ — линейная плотность в текущей точке (x, y, z) кривой C, то *масса кривой* C равна:

$$M=\int\limits_C \rho(x, y, z)\,ds.$$

Координаты центра тяжести (x_0, y_0, z_0) этой кривой выражаются формулами

$$x_0=\frac{1}{M}\int\limits_C x\rho(x, y, z)\,ds,\quad y_0=\frac{1}{M}\int\limits_C y\rho(x, y, z)\,ds,$$

$$z_0=\frac{1}{M}\int\limits_C z\rho(x, y, z)\,ds.$$

3°. Криволинейный интеграл 2-го рода. Если функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ непрерывны в точках кривой (1), пробегаемой в направлении возрастания параметра t, то полагают

$$\int\limits_C P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{T}\{P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t)+Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t)+$$

$$+R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)\}\,dt. \tag{2}$$

При изменении направления обхода кривой C этот интеграл изменяет свой знак на обратный. Механически интеграл (2) представляет собой *работу переменной силы* $\{P, Q, R\}$, точка приложения которой описывает кривую C.

4°. Случай полного дифференциала. Если

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = du,$$

где $u = u(x, y, z)$ — однозначная функция в области V, то независимо от вида кривой C, целиком расположенной в области V, имеем:

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1),$$

где (x_1, y_1, z_1) — начальная и (x_2, y_2, z_2) — конечная точка пути. В простейшем случае, если область V односвязна и функции P, Q и R обладают непрерывными частными производными первого порядка, для этого необходимо и достаточно, чтобы в области V были тождественно выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Тогда в простейшем случае стандартной параллелопидальной области V, функцию u можно найти по формуле

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz + c,$$

где (x_0, y_0, z_0) — некоторая фиксированная точка области V и c — произвольная постоянная.

Механически этот случай соответствует работе силы, имеющей потенциал.

Вычислить следующие криволинейные интегралы 1-го рода:

4221. $\int\limits_C (x + y)\,ds$, где C — контур треугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$.

4222. $\int\limits_C y^2\,ds$, где C — арка циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4223. $\int\limits_C (x^2 + y^2)\,ds$, где C — кривая

$$x = a(\cos t + t\sin t), \; y = a(\sin t - t\cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4224. $\int\limits_C xy\,ds$, где C — дуга гиперболы

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \; y = a\,\mathrm{sh}\,t \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0).$$

4225. $\int\limits_C (x^{4/3} + y^{4/3})\,ds$, где C — дуга астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

4226. $\int\limits_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, где C — выпуклый контур, ограниченный кривыми $r=a$, $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ (r и φ — полярные координаты).

4227. $\int\limits_C |y|\,ds$, где C — дуга лемнискаты

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

4228. $\int\limits_C x\,ds$, где C — часть логарифмической спирали $r = ae^{k\varphi}$ ($k > 0$), находящаяся внутри круга $r \leqslant a$.

4229. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, где C — окружность $x^2+y^2=ax$.

4230. $\int\limits_C \frac{ds}{y^2}$, где C — цепная линия $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

Найти длины дуг пространственных кривых (параметры положительны):

4231. $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$, от $O\,(0, 0, 0)$ до $A\,(3, 3, 2)$.

4232. $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$, $z=e^{-t}$, при $0<t<+\infty$.

4233. $y=a\arcsin\frac{x}{a}$, $z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ от $O\,(0, 0, 0)$ до $A\,(x_0, y_0, z_0)$.

4234. $(x-y)^2=a(x+y)$, $x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$ от $O\,(0, 0, 0)$ до $A\,(x_0, y_0, z_0)$.

4235. $x^2+y^2=cz$, $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z}{c}$ от $O\,(0, 0, 0)$ до $A\,(x_0, y_0, z_0)$.

4236. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{ch}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=a$ от точки $A\,(a, 0, 0)$ до точки $B\,(x, y, z)$.

Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода, взятые вдоль пространственных кривых:

4237. $\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)\,ds$, где C — часть винтовой линии

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

4238. $\int\limits_C x^2\,ds$, где C — окружность

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0.$$

4239. $\int\limits_C z\,ds$, где C — коническая винтовая линия

$$x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t \ (0 \leqslant t \leqslant t_0).$$

4240. $\int\limits_C z\,ds$, где C — дуга кривой $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ от точки $O\,(0,\ 0,\ 0)$ до точки $A\,(a,\ a,\ a\sqrt{2})$.

4241. Найти массу кривой $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(a \geqslant b > 0;\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, если линейная плотность ее в точке $(x,\ y)$ равна $\rho = |y|$.

4241.1. Найти массу дуги параболы

$$y^2 = 2px \qquad (0 \leqslant x \leqslant p/2),$$

если линейная плотность параболы в текущей точке $M\,(x,\ y)$ равна $|y|$.

4242. Найти массу дуги кривой $x = at$, $y = \frac{a}{2}t^2$, $z = \frac{a}{3}t^3$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, плотность которой меняется по закону $\rho = \sqrt{2y/a}$.

4243. Вычислить координаты центра тяжести дуги однородной кривой $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ от точки $A\,(0,\ a)$ до точки $B\,(b,\ h)$.

4244. Определить центр тяжести дуги циклоиды

$$x = a\,(t - \sin t),\ y = a\,(1 - \cos t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

4244.1. Найти статические моменты

$$S_y = \int\limits_C x\,ds,\quad S_x = \int\limits_C y\,ds$$

дуги C астроиды

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \qquad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$$

относительно осей координат.

4244.2. Найти момент инерции окружности $x^2 + y^2 = a^2$ относительно ее диаметра.

4244.3. Найти полярные моменты инерции

$$I_0 = \int\limits_C (x^2 + y^2)\,ds$$

относительно точки $O(0, 0)$ следующих линий: а) контура C квадрата $\max\{|x|, |y|\} = a$; б) контура C правильного треугольника с вершинами в полярных координатах

$$P(a, 0),\ Q\left(a, \frac{2\pi}{3}\right),\ R\left(a, \frac{4\pi}{3}\right).$$

4244.4. Найти средний полярный радиус астроиды

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

т. е. число r_0 ($r_0 > 0$), определяемое формулой

$$I_0 = s \cdot r_0^2,$$

где I_0 — полярный момент инерции астроиды, относительно начала координат (см. **4244.3**) и s — длина дуги астроиды.

4245. Вычислить координаты центра тяжести контура сферического треугольника $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

4246. Найти координаты центра тяжести однородной дуги

$$x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t\ (-\infty < t \leqslant 0).$$

4247. Найти моменты инерции относительно координатных осей одного витка винтовой линии

$$x = a \cos t,\ y = a \sin t,\ z = \frac{h}{2\pi} t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4248. Вычислить криволинейный интеграл 2-го типа

$$\int\limits_{OA} x\,dy - y\,dx,$$

где O — начало координат и точка A имеет координаты $(1, 2)$, если: а) OA — отрезок прямой линии; б) OA — парабола, ось которой есть Oy; в) OA — ломаная линия, состоящая из отрезка OB оси Ox и отрезка BA, параллельного оси Oy.

4249. Вычислить

$$\int\limits_{OA} x\,dy + y\,dx$$

для путей а), б) и в), указанных в предыдущей задаче.

Вычислить следующие криволинейные интегралы 2-го рода, взятые вдоль указанных кривых, в направлении возрастания параметра:

4250. $\int\limits_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$, где C — парабола

$$y = x^2 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

4251. $\int\limits_C (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$, где C — кривая

$$y = 1 - |1 - x| \quad (0 \leqslant x \leqslant 2).$$

4252. $\oint\limits_C (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$, где C — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

4253. $\int\limits_C (2a - y)\,dx + x\,dy$, где C — арка циклоиды

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$$
$$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4254. $\oint\limits_C \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, где C — окружность $x^2 + y^2 = a^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

4255. $\oint\limits_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, где $ABCDA$ — контур квадрата с вершинами $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 1)$, $C(-1,\ 0)$, $D(0,\ -1)$.

4256. $\int\limits_{AB} dx \sin y + dy \sin x$, где AB — отрезок прямой между точками $A(0,\ \pi)$ и $B(\pi,\ 0)$.

4257. $\oint\limits_{OmAnO} dy \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - dx$, где OmA — отрезок параболы $y = x^2$ и OnA — отрезок прямой $y = x$.

Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить следующие криволинейные интегралы:

4258. $\int\limits_{(-1,\ 2)}^{(2,\ 3)} x\,dy + y\,dx.$ **4259.** $\int\limits_{(0,\ 1)}^{(3,\ -4)} x\,dx + y\,dy.$

4260. $\int\limits_{(0,\,1)}^{(2,\,3)} (x+y)\,dx+(x-y)\,dy.$

4261. $\int\limits_{(1,\,-1)}^{(1,\,1)} (x-y)\,(dx-dy).$

4262. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(a,\,b)} f(x+y)\,(dx+dy)$, где $f(u)$ непрерывна.

4263. $\int\limits_{(2,\,1)}^{(1,\,2)} \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}$ вдоль путей, не пересекающих оси Oy.

4264. $\int\limits_{(1,\,0)}^{(6,\,8)} \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ вдоль путей, не проходящих через начало координат.

4265. $\int\limits_{(x_1,\,y_1)}^{(x_2,\,y_2)} \varphi(x)\,dx+\psi(y)\,dy$, φ и ψ — непрерывные функции.

4266. $\int\limits_{(-2,\,-1)}^{(3,\,0)} (x^4+4xy^3)\,dx+(6x^2y^2-5y^4)\,dy.$

4267. $\int\limits_{(0,\,-1)}^{(1,\,0)} \frac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}$ вдоль путей, не пересекающих прямой $y=x$.

4268. $\int\limits_{(1,\,\pi)}^{(2,\,\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$

вдоль путей, не пересекающих оси Oy.

4269. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(a,\,b)} e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy).$

4270. Доказать, что если $f(u)$ — непрерывная функция и C — кусочно гладкий замкнутый контур, то

$$\oint\limits_C f(x^2+y^2)\,(x\,dx+y\,dy)=0.$$

Найти первообразную функцию z, если:

4271. $dz=(x^2+2xy-y^2)\,dx+(x^2-2xy-y^2)\,dy.$

4272. $dz=\dfrac{y\,dx-x\,dy}{3x^2-2xy+3y^2}$.

4273. $dz=\dfrac{(x^2+2xy+5y^2)\,dx+(x^2-2xy+y^2)\,dy}{(x+y)^3}$.

4274. $dz=e^x\,[e^y(x-y+2)+y]\,dx+$
$+e^x\,[e^y\,(x-y)+1]\,dy$.

4275. $dz=\dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}\,dx+\dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}\,dy$.

4276. $dz=\dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)dx-$
$-\dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)dy$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

4277. Доказать, что для криволинейного интеграла справедлива следующая оценка:

$$\left|\int\limits_C P\,dx+Q\,dy\right|\leqslant LM,$$

где L — длина пути интеграции и $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$ на дуге C.

4278. Оценить интеграл

$$I_R=\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\,dx-x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

Доказать, что $\lim\limits_{R\to\infty}I_R=0$.

Вычислить криволинейные интегралы, взятые вдоль пространственных кривых (координатная система предполагается правой):

4279. $\int\limits_C(y^2-z^2)\,dx+2yz\,dy-x^2dz$, где C — кривая $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, пробегаемая в направлении возрастания параметра.

4280. $\int\limits_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$, где C — виток винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, пробегаемый в направлении возрастания параметра.

4281. $\int\limits_C(y-z)\,dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, где C — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x\operatorname{tg}\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительных x.

4282. $\int\limits_C y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz$, где C — часть кривой Вивиани $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$ ($z \geqslant 0$, $a>0$), пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительной части ($x>a$) оси Ox.

4283. $\int\limits_C (y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dz$, где C — контур, ограничивающий часть сферы $x^2+y^2+z^2=1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, пробегаемый так, что внешняя сторона этой поверхности остается слева.

Найти следующие криволинейные интегралы от полных дифференциалов:

4284. $\int\limits_{(1,\,1,\,1)}^{(2,\,3,\,-4)} x\,dx+y^2dy-z^3\,dz$.

4285. $\int\limits_{(1,\,2,\,3)}^{(6,\,1,\,1)} yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$.

4286. $\int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} \dfrac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где точка (x_1, y_1, z_1) расположена на сфере $x^2+y^2+z^2=a^2$, а точка (x_2, y_2, z_2) — на сфере $x^2+y^2+z^2=b^2$ ($a>0$, $b>0$).

4287. $\int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} \varphi(x)\,dx+\psi(y)\,dy+\chi(z)\,dz$, где φ, ψ, χ — непрерывные функции.

4288. $\int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} f(x+y+z)\,(dx+dy+dz)$, где f — непрерывная функция.

4289. $\int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$, где f — непрерывная функция.

Найти первообразную функцию u, если:

4290. $du=(x^2-2yz)\,dx+(y^2-2xz)\,dy+(z^2-2xy)\,dz$.

4291. $du=\left(1-\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{z}\right)dx+\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{x}{y^2}\right)dy-\dfrac{xy}{z^2}\,dz$.

4292. $du=\dfrac{(x+y-z)\,dx+(x+y-z)\,dy+(x+y+z)\,dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$.

4293. Найти работу, производимую силой тяжести, когда точка массы m перемещается из положения (x_1, y_1, z_1) в положение (x_2, y_2, z_2) (ось Oz направлена вертикально вверх).

4294. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению материальной точки о начала координат, если эта точка описывает в направлении, противоположном ходу часовой стрелки, положительную четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

4295. Найти работу силы тяготения $F = k/r^2$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, действующей на единичную массу, когда последняя перемещается и точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

§ 12. Формула Грина

1°. Связь криволинейного интеграла с двойным. Если C — замкнутый простой кусочно гладкий контур, ограничивающий конечную односвязную область S, пробегаемый так, что область S остается слева, и функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка $P'_y(x, y)$ и $Q'_x(x, y)$ в области S и на ее границе, то имеет место *формула Грина*

$$\oint\limits_{C} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy. \qquad (1)$$

Формула (1) справедлива также и для конечной области S, ограниченной несколькими простыми контурами, если под границей C последней понимать сумму всех граничных контуров, направление обхода которых выбирается так, что область S остается слева.

2°. Площадь плоской области. Площадь S фигуры, ограниченной простым кусочно гладким контуром C, равна

$$S = \oint\limits_{C} x\,dy = -\oint\limits_{C} y\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_{C}(x\,dy - y\,dx).$$

В этом параграфе, если не оговорено противное, предполагается, что замкнутый контур интеграции простой (без точек самопересечения) и пробегается так, что ограниченная им область, не содержащая бесконечно удаленной точки, остается слева (положительное направление).

4296. С помощью формулы Грина преобразовать криволинейный интеграл

$$I=\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy,$$

где контур C ограничивает конечную область S.

4297. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$I=\oint_K (x+y)^2\,dx-(x^2+y^2)\,dy,$$

где K — пробегаемый в положительном направлении контур треугольника ABC с вершинами A (1, 1), B (3, 2), C (2, 5).

Проверить найденный результат, вычисляя интеграл непосредственно.

Применяя формулу Грина, вычислить следующие криволинейные интегралы:

4298. $\oint_C xy^2dy-x^2y\,dx$, где C — окружность

$$x^2+y^2=a^2.$$

4299. $\oint_C (x+y)\,dx-(x-y)\,dy$, где C — эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

4300. $\oint_C e^x\,[(1-\cos y)\,dx-(y-\sin y)\,dy]$, где C — пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $0<x<\pi$, $0<y<\sin x$.

4301. $\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy)$.

4302. На сколько отличаются друг от друга криволинейные интегралы

$$I_1=\int_{AmB}(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy$$

и

$$I_2=\int_{AnB}(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy,$$

где AmB — прямая, соединяющая точки A (1, 1) и B (2, 6), и AnB — парабола с вертикальной осью, проходящая через те же точки A и B и начало координат?

4303. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AmO}(e^x\sin y-my)\,dx+(e^x\cos y-m)\,dy,$$

где AmO — верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = ax$, пробегаемая от точки A $(a, 0)$ до точки O $(0, 0)$.

Указание. Дополнить путь AmO до замкнутого прямолинейным отрезком OA оси Ox.

4304. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AmB} [\varphi(y)e^x - my]\,dx + [\varphi'(y)e^x - m]\,dy,$$

где $\varphi(y)$ и $\varphi'(y)$ — непрерывные функции и AmB — произвольный путь, соединяющий точки A (x_1, y_1) и B (x_2, y_2), но ограничивающий вместе с отрезком AB площадь $AmBA$ данной величины S.

4305. Определить две дважды непрерывно дифференцируемые функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ так, чтобы криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_C P(x+a,\ y+\beta)\,dx + Q(x+\alpha,\ y+\beta)\,dy$$

для любого замкнутого контура C не зависел от постоянных α и β.

4306. Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $F(x, y)$, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AmB} F(x, y)(y\,dx + x\,dy)$$

не зависел от вида пути интегрирования?

4307. Вычислить

$$I = \oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

где C — простой замкнутый контур, не проходящий через начало координат, пробегаемый в положительном направлении.

Указание. Рассмотреть два случая: 1) начало координат находится вне контура; 2) контур C окружает начало координат.

С помощью криволинейных интегралов вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:

4308. Эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

4309. Астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

4310. Параболой $(x + y)^2 = ax$ $(a > 0)$ и осью Ox.

4311. Петлей декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$.

Указание. Положить $y = tx$.

4312. Лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Указание. Положить $y = x \operatorname{tg} \varphi$.

4313. Кривой $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ и осями координат.

4314. Вычислить площадь, ограниченную кривой

$$(x + y)^{n+m+1} = ax^n y^m \quad (a > 0,\ n > 0,\ m > 0).$$

4315. Вычислить площадь, ограниченную кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (a>0,\ b>0,\ n>0)$$

и осями координат.

Указание. Положить $\frac{x}{a} = \cos^{2/n}\varphi$, $\frac{y}{b} = \sin^{2/n}\varphi$.

4316. Вычислить площадь, ограниченную кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$$

$(a > 0,\ b > 0,\ n > 1)$ и осями координат.

4317. Вычислить площадь петли кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c\left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n$$
$$(a>0,\ b>0,\ c>0,\ n>0).$$

4318. *Эпициклоидой* называется кривая, описываемая точкой подвижной окружности радиуса r, катящейся без скольжения по неподвижной окружности радиуса R и остающейся вне нее.

Найти площадь, ограниченную эпициклоидой, предполагая, что отношение $\frac{R}{r} = n$ есть целое число $(n \geqslant 1)$.

Разобрать частный случай $r = R$ (кардиоида).

4319. *Гипоциклоидой* называется кривая, описываемая точкой подвижной окружности радиуса r, катящейся без скольжения по неподвижной окружности радиуса R и остающейся внутри нее. Найти площадь, ограниченную гипоциклоидой, предполагая, что отношение $R/r = n$ есть целое число $(n \geqslant 2)$.

Разобрать частный случай $r = R/4$ (астроида).

4320. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=ax$, вырезанной поверхностью $x^2+y^2+z^2=a^2$.

4320.1. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox простого замкнутого контура C, расположенного в верхней полуплоскости $y \geqslant 0$ равен

$$V=-\pi \oint_C y^2 dx.$$

4321. Вычислить

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{X\,dY-Y\,dX}{X^2+Y^2},$$

если $X=ax+by$, $Y=cx+dy$ и простой замкнутый контур C окружает начало координат $(ad-bc\neq 0)$.

4322. Вычислить интеграл I (см. предыдущую задачу), если $X=\varphi(x,y)$, $Y=\psi(x,y)$, и простой контур C окружает начало координат, причем кривые $\varphi(x,y)=0$ и $\psi(x,y)=0$ имеют несколько простых точек пересечения внутри контура C.

4323. Показать, что если C — замкнутый контур и l — произвольное направление, то

$$\oint_C \cos(l,\ \boldsymbol{n})\,ds=0,$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к контуру C.

4324. Найти значение интеграла

$$I=\oint_C [x\cos(\boldsymbol{n},\ x)+y\cos(\boldsymbol{n},\ y)]\,ds,$$

где C — простая замкнутая кривая, ограничивающая конечную область S, и $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к ней.

4325. Найти

$$\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{S}\oint_C (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\,ds,$$

где S — площадь, ограниченная контуром C, окружающим точку $(x_0,\ y_0)$, $d(S)$ — диаметр области S, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали контура C и $\boldsymbol{F}\{X,\ Y\}$ — вектор, непрерывно дифференцируемый в $S+C$.

§ 13. Физические приложения криволинейных интегралов

4326. С какой силой притягивает масса M, равномерно распределенная по верхней полуокружности $x^2+y^2=a^2$, $y\geqslant 0$, материальную точку массы m, занимающую положение $(0,\ 0)$?

4327. Вычислить *логарифмический интеграл простого слоя*

$$u(x, y) = \oint\limits_C \varkappa \ln \frac{1}{r}\, ds,$$

где $\varkappa = \text{const}$ — плотность, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ и контур C есть окружность $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

4328. Вычислить в полярных координатах ρ и φ логарифмические потенциалы простого слоя

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} \cos m\psi \ln \frac{1}{r}\, d\psi \quad \text{и} \quad I_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{1}{r}\, d\psi,$$

где r — расстояние между точкой (ρ, φ) и переменной точкой $(1, \psi)$ и m — натуральное число.

4329. Вычислить *интеграл Гаусса*

$$u(x, y) = \oint\limits_C \frac{\cos(r, n)}{r}\, ds,$$

где $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ — длина вектора $\boldsymbol{r}$, соединяющего точку $A(x, y)$ с переменной точкой $M(\xi, \eta)$ простого замкнутого гладкого контура C, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ — угол между вектором $\boldsymbol{r}$ и внешней нормалью $\boldsymbol{n}$ к кривой C в точке ее M.

4330. Вычислить в полярных координатах ρ и φ логарифмические потенциалы двойного слоя

$$K_1 = \int\limits_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}\, d\psi,$$

$$K_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}\, d\psi,$$

где r — расстояние между точкой $A(\rho, \varphi)$ и переменной точкой $M(1, \psi)$, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ — угол между направлением $AM = \boldsymbol{r}$ и радиусом $OM = \boldsymbol{n}$, проведенным из точки $O(0, 0)$, и m — натуральное число.

4331. Дважды дифференцируемая функция $u = u(x, y)$ называется *гармонической*, если $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Доказать, что u есть гармоническая функция тогда и только тогда, если

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0,$$

где C — произвольный замкнутый контур и $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к этому контуру.

4332. Доказать, что

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy =$$
$$= -\iint\limits_S u\,\Delta u\,dx\,dy + \oint_C u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds,$$

где гладкий контур C ограничивает конечную область S.

4333. Доказать, что функция, гармоническая внутри конечной области S и на ее границе C, однозначно определяется своими значениями на контуре C (см. задачу 4332).

4334. Доказать *вторую формулу Грина* на плоскости

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\,dy = \oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

где гладкий контур C ограничивает конечную область S и $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к C.

4335. Пользуясь второй формулой Грина, доказать, что если $u = u\,(x,\ y)$ — гармоническая функция в замкнутой конечной области S, то

$$u\,(x,\ y) = \frac{1}{2\pi}\oint_C \left(u\,\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds,$$

где C — граница области S, n — направление внешней нормали к контуру C, $(x,\ y)$ — внутренняя точка области S и $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ — расстояние между точкой $(x,\ y)$ и переменной точкой $(\xi,\ \eta)$ контура C.

Указание. Вырезать точку $(x,\ y)$ из области S вместе с бесконечно малой круговой окрестностью ее и применить вторую формулу Грина к оставшейся части области S.

4336. Доказать *теорему о среднем* для гармонической функции $u(M) = u(x, y)$:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_C u(\xi, \eta)\, ds,$$

где C — окружность радиуса R с центром в точке M.

4337. Доказать, что функция $u(x, y)$, гармоническая в ограниченной и замкнутой области и не являющаяся постоянной в этой области, не может достигать своих наибольшего и наименьшего значений во внутренней точке этой области (*принцип максимума*).

4338. Доказать *формулу Римана*

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy = \oint\limits_C P\, dx + Q\, dy,$$

где

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

$$M[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - a\frac{\partial v}{\partial x} - b\frac{\partial v}{\partial y} + cv$$

(a, b, c — постоянные), P и Q — некоторые определенные функции и контур C ограничивает конечную область S.

4339. Пусть $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ — компоненты скорости установившегося потока жидкости. Определить количество жидкости, вытекшее за единицу времени из ограниченной контуром C области S (т. е. разность между количествами вышедшей и вошедшей жидкости). Какому уравнению удовлетворяют функции u и v, если жидкость несжимаема и в области S отсутствуют источники и стоки?

4340. Согласно закону Био — Савара электрический ток i, протекающий по элементу проводника ds, создает в точке пространства $M(x, y, z)$ магнитное поле с напряжением

$$d\boldsymbol{H} = ki\,\frac{(\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{s})}{r^3},$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор, соединяющий элемент ds с точкой M, и k — коэффициент пропорциональности. Найти проекции H_x, H_y, H_z напряжения магнитного поля $\boldsymbol{H}$ в точке M для случая замкнутого проводника C.

§ 14. Поверхностные интегралы

1°. **Поверхностный интеграл 1-го рода.** Если S — кусочно гладкая двусторонняя поверхность

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \qquad ((u, v) \in \Omega) \quad (1)$$

и $f(x, y, z)$ — функция, определенная и непрерывная в точках поверхности S, то

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_\Omega f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv, \qquad (2)$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

В частном случае, если уравнение поверхности S имеет вид

$$z = z(x, y) \qquad ((x, y) \in \sigma),$$

где $z(x, y)$ — однозначная непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS =$$

$$= \iint\limits_\sigma f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Этот интеграл не зависит от выбора стороны поверхности S.

Если функцию $f(x, y, z)$ рассматривать как плотность поверхности S в точке (x, y, z), то интеграл (2) представляет собой массу этой поверхности.

2°. **Поверхностный интеграл 2-го рода.** Если S — гладкая двусторонняя поверхность, $S+$ — ее сторона, характеризуемая направлением нормали h $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — три функции, определенные и непрерывные на поверхности S, то

$$\iint\limits_{S+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS. \quad (3)$$

Если поверхность S задана в параметрическом виде (1), то направляющие косинусы нормали n определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где $A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$, $B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$, $C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, и знак перед радикалом выбирается надлежащим образом.

При переходе к другой стороне S^- поверхности S интеграл (3) меняет свой знак на обратный.

4341. На сколько отличаются друг от друга поверхностные интегралы

$$I_1 = \iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS \quad \text{и} \quad I_2 = \iint_P (x^2+y^2+z^2)\,dP,$$

где S — поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и P поверхность октаэдра $|x| + |y| + |z| = a$, вписанного в эту сферу?

4342. Вычислить $\iint_S z\,dS$, где S — часть поверхности $x^2 + z^2 = 2az$ $(a > 0)$, вырезанная поверхностью $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Вычислить следующие поверхностные интегралы 1-го рода:

4343. $\iint_S (x+y+z)\,dS$, где S — поверхность

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ z \geqslant 0.$$

4344. $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, где S — граница тела

$$\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1.$$

4345. $\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, где S — граница тетраэдра

$$x + y + z \leqslant 1, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ z \geqslant 0.$$

4346. $\iint_S |xyz|\,dS$, где S — часть поверхности $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 1$.

4347. $\iint_S \frac{dS}{h}$, где S — поверхность эллипсоида и h — расстояние центра эллипсоида до плоскости, касательной к элементу dS поверхности эллипсоида.

4348. $\iint_S z\,dS$, где S — часть поверхности геликоида

$$x = u\cos v, \ y = u\sin v, \ z = v \ (0 < u < a; \ 0 < v < 2\pi).$$

4349. $\iint_S z^2\,dS$, где S — часть поверхности конуса

$$x = r\cos\varphi\sin\alpha, \ y = r\sin\varphi\sin\alpha, \ z = r\cos\alpha$$

($0 \leqslant r \leqslant a$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$) и α — постоянная $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

4350. $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,dS$, где S — часть конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанная поверхностью

$$x^2+y^2=2ax.$$

4351. Доказать *формулу Пуассона*

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\,dS=2\pi\int\limits_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)du,$$

где S есть поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=1$.

4352. Найти массу параболической оболочки

$$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2) \quad (0 \leqslant z \leqslant 1),$$

плотность которой меняется по закону $\rho=z$.

4352.1. Найти массу полусферы

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (z \geqslant 0),$$

плотность которой в каждой ее точке $M(x, y, z)$ равна z/a.

4352.2. Найти статические моменты однородной треугольной пластинки $x+y+z=a$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$) относительно координатных плоскостей.

4353. Вычислить момент инерции относительно оси Oz однородной сферической оболочки $x^2+y^2+z^2=a^2$ ($z \geqslant 0$) плотности ρ_0.

4354. Вычислить момент инерции однородной конической оболочки $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$ ($0 \leqslant z \leqslant b$) плотности ρ_0 относительно прямой

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}.$$

4355. Найти координаты центра тяжести части однородной поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной поверхностью $x^2+y^2=ax$.

4356. Найти координаты центра тяжести однородной поверхности

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \quad (x \geqslant 0;\ \ y \geqslant 0;\ \ x+y \leqslant a).$$

4356.1. Найти полярные моменты инерции

$$I_0=\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$$

следующих поверхностей S:

а) поверхности куба $\max\{|x|, |y|, |z|\} = a$;

б) полной поверхности цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant R^2$; $0 \leqslant \leqslant z \leqslant H$.

4356.2. Найти моменты инерции треугольной пластинки

$$x + y + z = 1 \quad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$$

относительно координатных плоскостей.

4357. С какой силой притягивает однородная усеченная коническая поверхность

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = r$$

$$(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < b \leqslant r \leqslant a)$$

плотности ρ_0 материальную точку массы m, помещенную в вершине этой поверхности?

4358. Найти потенциал однородной сферической поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (S) плотности ρ_0 на точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, т. е. вычислить интеграл $u = \iint\limits_S \frac{\rho_0\, dS}{r}$,

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$.

4359. Вычислить

$$F(t) = \iint\limits_{x+y+z=t} f(x, y, z)\, dS,$$

где

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & \text{если } x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1; \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 + z^2 > 1. \end{cases}$$

Построить график функции $u = F(t)$.

4360. Вычислить интеграл

$$F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z)\, dS,$$

где

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{если } z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}; \\ 0, & \text{если } z < \sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

4361. Вычислить интеграл

$$F(x, y, z, t) = \iint\limits_S f(\xi, \eta, \zeta)\, dS,$$

где S — переменная сфера

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2,$$

и

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi^2+\eta^2+\zeta^2 < a^2; \\ 0, & \text{если } \xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geqslant a^2, \end{cases}$$

предполагая, что

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} > a > 0.$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы 2-го рода:

4362. $\iint\limits_S (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$, где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

4363. $\iint\limits_S f(x)\,dy\,dz + g(y)\,dz\,dx + h(z)\,dx\,dy$, где $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ — непрерывные функции и S — внешняя сторона поверхности параллелепипеда $0 \leqslant x \leqslant a$; $0 \leqslant y \leqslant b$; $0 \leqslant z \leqslant c$.

4364. $\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$.

4365. $\iint\limits_S \left(\frac{dy\,dz}{x} + \frac{dz\,dx}{y} + \frac{dx\,dy}{z}\right)$, где S — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4366. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

§ 15. Формула Стокса

Если $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемые функции и C — простой замкнутый кусочно гладкий контур, ограничивающий конечную кусочно гладкую двустороннюю поверхность S, то имеет место *формула Стокса*:

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

где $\cos\alpha$ $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S, направленной в ту сторону, относительно которой обход контура C совершается против хода часовой стрелки (для правой координатной системы).

4367. Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$,* где C — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Проверить результат непосредственным вычислением.

4368. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{AmB} (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + (z^2 - xy)\,dz,$$

взятый по отрезку винтовой линии

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi}\varphi$$

от точки $A\,(a,\ 0,\ 0)$ до точки $B\,(a,\ 0,\ h)$.

Указание. Дополнить кривую AmB прямолинейным отрезком и применить формулу Стокса.

4369. Пусть C — замкнутый контур, расположенный в плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали плоскости) и ограничивающий площадку S.

Найти

$$\oint\limits_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

где контур C пробегается в положительном направлении.

Применяя формулу Стокса, вычислить интегралы:

4370. $\int\limits_C (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$, где C — эллипс $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos t$, $z = a\cos^2 t$ ($0 \leqslant t \leqslant \pi$), пробегаемый в направлении возрастания параметра t.

4371. $\int\limits_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, где C — эллипс $x^2 + y^2 = a^2 \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ ($a > 0$, $h > 0$), пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

4372. $\int\limits_C (y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$, где C — кривая $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$ ($0 < r < R$, $z > 0$), пробегаемая так, что ограниченная ею на внешней стороне сферы $x^2+y^2+z^2=2Rx$ наименьшая область остается слева.

4373. $\int\limits_C (y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dz$, где C — сечение поверхности куба $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ плоскостью $x+y+z=\frac{3}{2}a$, пробегаемое против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

4374. $\int\limits_C y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz$, где C — замкнутая кривая $x=a\cos t$, $y=a\cos 2t$, $z=a\cos 3t$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

4375. Доказать, что функция

$$W(x,\ y,\ z)=ki\iint\limits_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})}{r^2}\,dS \quad (k=\text{const}),$$

где S — площадка, ограниченная контуром C, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности S и $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, соединяющий точку пространства $M(x,\ y,\ z)$ с текущей точкой $A(\xi,\ \eta\zeta)$ контура C, является потенциалом магнитного поля H, создаваемого током i, протекающим по контуру C (см. задачу 4340).

§ 16. Формула Остроградского

Если S — кусочно гладкая поверхность, ограничивающая объем V, и $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ — функции, непрерывные вместе со своими частными производными 1-го порядка в области $V+S$, то справедлива *формула Остроградского*:

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=$$
$$=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Применяя формулу Остроградского, преобразовать следующие поверхностные интегралы, если гладкая поверхность S ограничивает конечный объем V и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S:

4376. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy$.

4377. $\iint\limits_S yz\,dy\,dz + zx\,dz\,dx + xy\,dx\,dy.$

4378. $\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS.$

4379. $\iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS.$

4380. $$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS.$$

4381. Доказать, что если S — замкнутая простая поверхность и $\boldsymbol{l}$ — любое постоянное направление, то

$$\iint\limits_S \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l})\,dS = 0,$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S.

4382. Доказать, что объем тела, ограниченного поверхностью S, равен

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

4383. Доказать, что объем конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью $F(x, y, z) = 0$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$, равен

$$V = \frac{1}{3}SH,$$

где S — площадь основания конуса, расположенного в данной плоскости, и H — его высота.

4384. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = \pm c$ и

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos u\cos v + b\sin u\sin v, \\ y &= a\cos u\sin v - b\sin u\cos v, \\ z &= c\sin u. \end{aligned}\right\}$$

4385. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = -u + a\cos v$$
$$(u \geqslant 0)$$

и плоскостями: $x = 0$ и $z = 0$ $(a > 0)$.

4385.1. Найти объем тела, ограниченного тором

$$\left.\begin{aligned} x &= (b + a\cos\psi)\cos\varphi, \\ y &= (b + a\cos\psi)\sin\varphi, \\ z &= a\sin\psi \end{aligned}\right\} \quad (0 < a \leqslant b).$$

4386. Доказать формулу

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} f(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\right\} =$$
$$= \iint\limits_{x^2+y^2+z^2 = t^2} f(x, y, z, t)\,dS + \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} \frac{\partial f}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$$
$$(t > 0).$$

С помощью формулы Остроградского вычислить следующие поверхностные интегралы:

4387. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона границы куба $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$.

4388. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4389. $\iint\limits_S (x - y + z)\,dy\,dz + (y - z + x)\,dz\,dx + (z - x + y)\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности

$$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1.$$

4390. Вычислить $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS$, где S — часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$ и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к этой поверхности.

Указание. Присоединить часть плоскости $z = h$, $x^2 + y^2 \leqslant h^2$.

4391. Доказать формулу

$$\iiint\limits_V \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r} = \frac{1}{2}\iint\limits_S \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\,dS,$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S в текущей точке ее (ξ, η, ζ), $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$

и $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, идущий от точки (x, y, z) к точке (ξ, η, ζ).

4392. Вычислить *интеграл Гаусса*

$$I(x, y, z) = \iint\limits_S \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2}\, dS,$$

где S — простая замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая объем V, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S в точке ее (ξ, η, ζ), $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, соединяющий точку (x, y, z) с точкой (ξ, η, ζ) и $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

Рассмотреть два случая:

а) когда поверхность S не окружает точку (x, y, z),

б) когда поверхность S окружает точку (x, y, z).

4393. Доказать, что если

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

и S — гладкая поверхность, ограничивающая конечное тело V, то справедливы следующие формулы:

а) $\displaystyle\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iiint\limits_V \Delta u\, dx\, dy\, dz;$

б) $$\iint\limits_S u\,\frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz + \iiint\limits_V u\, \Delta u\, dx\, dy\, dz,$$

где u — функция, непрерывная вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в области $V + S$, и $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к поверхности S.

4394. Доказать *вторую формулу Грина* в пространстве

$$\iiint\limits_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy\, dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

где объем V ограничен поверхностью S, $\boldsymbol{n}$ — направление внешней нормали к поверхности S и функции

$u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ дважды дифференцируемы в области $V + S$.

4395. Функция $u = u(x, y, z)$, обладающая непрерывными производными до второго порядка включительно в некоторой области, называется *гармонической* в этой области, если

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Доказать, что если u — гармоническая функция в конечной замкнутой области V, ограниченной гладкой поверхностью S, то справедливы формулы:

а) $\displaystyle\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0;$

б) $$\iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz = \iint\limits_S u \frac{\partial u}{\partial n}\, dS,$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S.

Пользуясь формулой б), доказать, что функция, гармоническая в области V, однозначно определяется своими значениями на ее границе S.

4396. Доказать, что если функция $u = u(x, y, z)$ — гармоническая в конечной замкнутой области V, ограниченной гладкой поверхностью S, то

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left[u \frac{\cos(r, n)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}\right] dS,$$

где r — радиус-вектор, идущий из внутренней точки (x, y, z) области V в переменную точку (ξ, η, ζ) поверхности S, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, n — вектор внешней нормали к поверхности S в точке (ξ, η, ζ).

4397. Доказать, что если $u = u(x, y, z)$ — функция, гармоническая внутри сферы S радиуса R с центром в (x_0, y_0, z_0), то $u(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{1}{4\pi R^2} \displaystyle\iint\limits_S u(x, y, z)\, dS$

(*теорема о среднем*).

4398. Доказать, что функция $u = u(x, y, z)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области V и гармоническая внутри нее, не может достигать своих наибольшего и наименьшего значений во внутренней точке области, если эта функция не является тождественной постоянной (*принцип максимума*).

4399. Тело V целиком погружено в жидкость. Исходя из закона Паскаля, доказать, что выталкивающая сила жидкости равна весу жидкости в объеме тела и направлена вертикально вверх (*закон Архимеда*).

4400. Пусть S_t — переменная сфера $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$ и функция $f(\xi, \eta, \zeta)$ — непрерывна. Доказать, что функция

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t}\, dS_t$$

удовлетворяет *волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

и начальным условиям: $u\Big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f(x, y, z).$

Указание. Производную $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ выразить тройным интегралом.

§ 17. Элементы теории поля

1°. Градиент. Если $u(\boldsymbol{r}) = u(x, y, z)$, где $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, есть непрерывно дифференцируемое скалярное поле, то *градиентом* его называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

или, короче, $\operatorname{grad} u = \nabla u$, где $\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$. Градиент поля u в данной точке (x, y, z) направлен по нормали к *поверхности уровня* $u(x, y, z) = C$, проходящей через эту точку. Этот вектор для каждой точки поля по величине

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

и направлению дает наибольшую скорость изменения функции u. Производная поля u в некотором направлении $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ равна:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2°. Дивергенция поля и ротация (вихрь) поля. Если

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = a_x(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + a_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$

есть непрерывно дифференцируемое *векторное поле*, то скаляр

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} \equiv \nabla \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

называется *дивергенцией* или *расходимостью* этого поля.

Вектор

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

носит название *ротации* или *вихря поля*.

3°. Поток вектора через поверхность. Если вектор $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ порождает векторное поле в области Ω, то *потоком вектора через данную поверхность* S, расположенную в Ω, в указанную сторону, характеризуемую единичным вектором нормали $\boldsymbol{n}(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, называется интеграл

$$\iint\limits_S a_n dS = \iint\limits_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\, dS,$$

где $a_n = \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}$ — нормальная проекция вектора. *Формула Остроградского* в векторной трактовке принимает вид $\oiint\limits_S a_n dS =$
$= \iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz$, где S есть поверхность, ограничивающая объем V, и $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S.

4°. Циркуляция вектора. *Линейным интегралом* от вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, взятым по некоторой кривой C (*работа поля*), называется число

$$\int\limits_C \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \int\limits_C a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Если контур C замкнут, то линейный интеграл называется *циркуляцией вектора* $\boldsymbol{a}$ вдоль контура C.

В векторной форме *формула Стокса* имеет вид $\oint\limits_C \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} =$
$= \iint\limits_S (\operatorname{rot} \boldsymbol{a})_n\, dS$, где C — замкнутый контур, ограничивающий поверхность S, причем направление нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности S должно быть выбрано так, чтобы для наблюдателя, стоящего на поверхности S, головой по направлению нормали, обход контура C совершался против хода часовой стрелки (для правой системы координат).

5°. Потенциальное поле. Векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, являющееся градиентом некоторого скаляра u:

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{a},$$

называется *потенциальным*, а величина u называется *потенциалом* поля.

Если потенциал u — однозначная функция, то

$$\int\limits_{AB} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = u(B) - u(A).$$

В частности, в этом случае циркуляция вектора $\mathbf{a}$ равна нулю.

Необходимым и достаточным условием потенциальности поля $\mathbf{a}$, заданного в поверхностно односвязной области, является выполнение условия $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$, т. е. такое поле должно быть безвихревым.

4401. Найти величину и направление градиента поля $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ в точках: а) $O(0, 0, 0)$; б) $A(1, 1, 1)$ и в) $B(2, 0, 1)$. В какой точке градиент поля равен нулю?

4401.1. Пусть $u = xy - z^2$. Найти величину и направление $\operatorname{grad} u$ в точке $M(-9, 12, 10)$.

Чему равна производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ в направлении биссектрисы координатного угла xOy?

4402. В каких точках пространства $Oxyz$ градиент поля

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

а) перпендикулярен к оси Oz; б) параллелен оси Oz; в) равен нулю?

4403. Дано скалярное поле

$$u = \ln \frac{1}{r},$$

где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. В каких точках пространства $Oxyz$ имеет место равенство $|\operatorname{grad} u| = 1$?

4404. Построить поверхности уровня скалярного поля

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}.$$

Найти поверхность уровня, проходящую через точку $M(9, 12, 28)$. Чему равен $\max u$ в области $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36$?

4405. Найти угол φ между градиентами поля

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

в точках $A(1, 2, 2)$ и $B(-3, 1, 0)$.

4406. Пусть дано скалярное поле $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Построить поверхности уровня и поверхности равного модуля градиента поля.

Найти $\inf u$, $\sup u$, $\inf|\operatorname{grad} u|$, $\sup|\operatorname{grad} u|$ в области $1 < z < 2$.

4407. С точностью до бесконечно малых высших порядков найти расстояние в точке $M_0(x_0, y, z_0)$ между двумя бесконечно близкими поверхностями уровня

$$u(x, y, z) = c \text{ и } u(x, y, z) = c + \Delta c,$$

где $u(x_0, y_0, z_0) = c$ ($\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0) \neq 0$).

4408. Доказать формулы:

а) $\operatorname{grad}(u + c) = \operatorname{grad} u$ (c — постоянно);
б) $\operatorname{grad} cu = c \operatorname{grad} u$ (c — постоянно);
в) $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$;
г) $\operatorname{grad} uv = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$;
д) $\operatorname{grad}(u^2) = 2u \operatorname{grad} u$;
е) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$.

4409. Вычислить: а) $\operatorname{grad} \boldsymbol{r}$; б) $\operatorname{grad} r^2$; в) $\operatorname{grad} \dfrac{1}{r}$,

где $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

4410. Найти $\operatorname{grad} f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4411. Найти $\operatorname{grad}(\boldsymbol{cr})$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор и $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор из начала координат.

4412. Найти $\operatorname{grad}\{|\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}|^2\}$ ($\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор).

4413. Доказать формулу $\operatorname{grad} f(u, v) = \dfrac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \dfrac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v$.

4414. Доказать формулу $\nabla^2(uv) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\nabla u \nabla v$, где

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\nabla^2 = \nabla\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^3}{\partial z^2}.$$

4415. Доказать, что если функция $u = u(x, y, z)$ дифференцируема в выпуклой области Ω и $|\operatorname{grad} u| \leqslant M$, где M — постоянная, то для любых точек A, B из Ω имеем:

$$|u(A) - u(B)| \leqslant M\rho(A, B),$$

где $\rho(A, B)$ — расстояние между точками A и B.

4415.1. Для функции $u = u(x, y, z)$ выразить $\operatorname{grad} u$: а) в цилиндрических координатах; б) в сферических координатах.

4416. Найти производную поля $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в данной точке $M(x, y, z)$ в направлении радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ этой точки.

В каком случае эта производная будет равна величине градиента?

4417. Найти производную поля $u = 1/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, в направлении $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

В каком случае эта производная равна нулю?

4418. Найти производную поля $u = u(x, y, z)$ в направлении градиента поля $v = v(x, y, z)$.

В каком случае эта производная будет равна нулю?

4419. Написать в ортах векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \times \operatorname{grad} u$, если

$$u = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

4420. Определить силовые линии векторного поля

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}.$$

4421. Доказать непосредственным вычислением, что дивергенция вектора $\boldsymbol{a}$ не зависит от выбора прямоугольной координатной системы.

4422. Доказать, что $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \lim\limits_{d(S)\to 0} \frac{1}{V} \iint\limits_S a_n\, dS$, где S — замкнутая поверхность, окружающая точку M и ограничивающая объем V, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S, $d(S)$ — диаметр поверхности S.

4422.1. Найти дивергенцию поля $\boldsymbol{a} = \frac{-\boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $M(3, 4, 5)$. Чему приближенно равен поток Π вектора $\boldsymbol{a}$ через бесконечно малую сферу $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = \varepsilon^2$?

4423. Найти

$$\operatorname{div} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

4424. Доказать, что а) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \operatorname{div} \boldsymbol{b}$; б) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \operatorname{grad} u$ ($\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор, u — скаляр); в) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = u \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \operatorname{grad} u$.

4425. Найти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

4426. Найти div [grad $f(r)$], где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. В каком случае div [grad $f(r)$] $=0$?

4427. Вычислить: а) div $\boldsymbol{r}$; б) div $\boldsymbol{r}/r$.

4428. Вычислить div $[f(r)\,\boldsymbol{c}]$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

4429. Найти div $[f(r)\,\boldsymbol{r}]$. В каком случае дивергенция этого вектора равна нулю?

4430. Найти: а) div (u grad u); б) div (u grad v).

4431. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси Oz против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω. Найти дивергенцию вектора скорости $\boldsymbol{v}$ и вектора ускорения w в точке $M(x, y, z)$ пространства в данный момент времени.

4432. Найти дивергенцию гравитационного силового поля, создаваемого конечной системой притягивающих центров.

4433. Найти выражение дивергенции плоского вектора $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(r, \varphi)$ в полярных координатах r и φ.

4434. Выразить div $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ в ортогональных криволинейных координатах u, v, w, если $x=f(u, v, w)$, $y=g(u, v, w)$, $z=h(u, v, w)$. Как частный случай получить выражение div $\boldsymbol{a}$ в цилиндрических и сферических координатах.

Указание. Рассмотреть поток вектора $\boldsymbol{a}$ через бесконечно малый параллелепипед, ограниченный поверхностями $u=\text{const}$, $v=\text{const}$, $w=\text{const}$.

4435. Доказать, что: а) rot $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$ rot $\boldsymbol{a}+$ rot $\boldsymbol{b}$; б) rot $(u\boldsymbol{a})=u$ rot $\boldsymbol{a}+$ grad $(u\times\boldsymbol{a})$.

4436. Найти: а) rot $\boldsymbol{r}$; б) rot $[f(r)\,\boldsymbol{r}]$.

4436.1. Найти величину и направление rot $\boldsymbol{a}$ в точке $M(1, 2, -2)$, если $\boldsymbol{a}=\frac{y}{z}\boldsymbol{i}+\frac{z}{x}\boldsymbol{j}+\frac{x}{y}\boldsymbol{k}$.

4437. Найти: а) rot $\boldsymbol{c}f(r)$; б) rot $[\boldsymbol{c}\times f(r)\,\boldsymbol{r}]$ ($\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор).

4438. Доказать, что div $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$ rot $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}$ rot $\boldsymbol{b}$.

4439. Найти: а) rot (grad u); б) div (rot $\boldsymbol{a}$).

4440. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси $\boldsymbol{l}\,\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ с постоянной угловой скоростью ω. Найти ротацию вектора линейной скорости $\boldsymbol{v}$ в точке пространства $M(x, y, z)$ в данный момент времени.

4440.1. Найти выражение ротации плоского вектора $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(r, \varphi)$ в полярных координатах r и φ.

4440.2. Выразить $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(x, y, z)$ а) в цилиндрических координатах; б) в сферических координатах.

4441. Найти поток вектора $\boldsymbol{r}$:

а) через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leqslant z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$;

б) через основание этого конуса.

4442. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}yz + \boldsymbol{j}xz + \boldsymbol{k}xy$: а) через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$; б) через полную поверхность этого цилиндра.

4443. Найти поток радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ через поверхность $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$.

4444. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через положительный октант сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

4445. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$ $(a > 0)$.

Проверить результат, применяя формулу Остроградского.

4445.1. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

4446. Доказать, что поток вектора $\boldsymbol{a}$ через поверхность S, заданную уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ $((u, v) \in \Omega)$, равен

$$\iint\limits_S a_n dS = \iint\limits_\Omega \left(\boldsymbol{a}\, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) du\, dv,$$

где $a_n = \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S.

4447. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{r}/r^3$ (m — постоянная) через замкнутую поверхность S, окружающую начало координат.

4448. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right)$, где e_i — постоянные и r_i — расстояния точек M_i (*источники*) от переменной точки $M(\boldsymbol{r})$, через замкнутую поверхность S, окружающую точки M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

4449. Доказать, что $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint\limits_V \nabla^2 u\, dx\, dy\, dz$,

где поверхность S ограничивает тело V.

4450. Количество тепла, протекающее в поле температуры u за единицу времени через элемент поверхности

dS, равно $dQ = -k\boldsymbol{n}\,\mathrm{grad}\ u\ dS$, где k — коэффициент внутренней теплопроводности и $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S. Определить количество тепла, накопленное телом V за единицу времени. Используя скорость повышения температуры, вывести уравнение, которому удовлетворяет температура тела (*уравнение теплопроводности*).

4451. Находящаяся в движении несжимаемая жидкость заполняет объем V. Предполагая, что в области V отсутствуют источники и стоки, вывести *уравнение неразрывности*.

$$\frac{d\rho}{dt} + \mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{v}) = 0,$$

где $\rho = \rho\,(x,\ y,\ z)$ — плотность жидкости, $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости, t — время

Указание. Рассмотреть поток жидкости через произвольный объем ω, содержащийся в V.

4452. Найти работу вектора $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$ вдоль отрезка винтовой линии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}a\sin t + \boldsymbol{k}bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

4452.1. Найти работу поля $\boldsymbol{a} = \frac{1}{y}\boldsymbol{i} + \frac{1}{z}\boldsymbol{j} + \frac{1}{x}\boldsymbol{k}$ вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки $M\,(1,\ 1,\ 1)$ и $N\,(2,\ 4,\ 8)$.

4452.2. Найти работу поля $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}e^{y-z} + \boldsymbol{j}e^{z-x} + \boldsymbol{k}e^{x-y}$ вдоль прямолинейного отрезка между точками $O\,(0,\ 0,\ 0)$ и $M\,(1,\ 3,\ 5)$.

4452.3. Найти работу поля $\boldsymbol{a} = (y+z)\,\boldsymbol{i} + (2+x)\,\boldsymbol{j} + (x+y)\,\boldsymbol{k}$ вдоль кратчайшей дуги большого круга сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, соединяющей точки $M\,(3,\ 4,\ 0)$ и $N\,(0,\ 0,\ 5)$.

4453. Найти работу вектора $\boldsymbol{a} = f\,(r)\,\boldsymbol{r}$, где f — непрерывная функция, вдоль дуги AB.

4454. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{a} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ (c — постоянная): а) вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; б) вдоль окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

4455. Найти циркуляцию Γ вектора $\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\right)$ вдоль контура C в двух случаях: а) C не окружает ось Oz; б) C окружает ось Oz.

4455.1. Дано векторное поле

$$\boldsymbol{a}=\frac{y}{\sqrt{z}}\,\boldsymbol{i}-\frac{x}{\sqrt{z}}\,\boldsymbol{j}+\sqrt{xy}\,\boldsymbol{k}.$$

Вычислив $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ в точке $M(1,\ 1,\ 1)$, приближенно найти циркуляцию Γ поля вдоль бесконечно малой окружности

$$\left.\begin{array}{l}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\varepsilon^2,\\ (x-1)\cos\alpha+(y-1)\cos\beta+(z-1)\cos\gamma=0,\end{array}\right\}$$

где $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

4456. Плоский установившийся поток жидкости характеризуется вектором скорости

$$\boldsymbol{w}=u(x,\ y)\,\boldsymbol{i}+v(x,\ y)\,\boldsymbol{j}.$$

Определить: 1) количество жидкости Q, протекающее через замкнутый контур C, ограничивающий область S (расход жидкости); 2) циркуляцию Γ вектора скорости вдоль контура C. Каким уравнениям удовлетворяют функции u и v, если жидкость несжимаема и поток безвихревой?

4457. Показать, что поле

$$\boldsymbol{a}=yz(2x+y+z)\,\boldsymbol{i}+xz(x+2y+z)\,\boldsymbol{j}+\\ +xy(x+y+2z)\,\boldsymbol{k}$$

— потенциальное и найти потенциал этого поля.

4457.1. Убедившись в потенциальности поля

$$\boldsymbol{a}=\frac{2}{(y+z)^{1/2}}\,\boldsymbol{i}-\frac{x}{(y+z)^{3/2}}\,\boldsymbol{j}-\frac{x}{(y+z)^{3/2}}\,\boldsymbol{k},$$

найти работу поля вдоль пути, соединяющего в положительном октанте точки $M(1,\ 1,\ 3)$ и $N(2,\ 4,\ 5)$.

4458. Найти потенциал гравитационного поля

$$\boldsymbol{a}=-\frac{m}{r^3}\,\boldsymbol{r},$$

создаваемого массой m, помещенной в начале координат.

4459. Найти потенциал гравитационного поля, создаваемого системой масс m_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, помещенных в точках M_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

4460. Доказать, что поле $\boldsymbol{a}=f(r)\,\boldsymbol{r}$, где $f(r)$ — однозначная непрерывная функция, является потенциальным. Найти потенциал этого поля.

ОТВЕТЫ

ЧАСТЬ I

ОТДЕЛ I

16. 0; 1. 17. $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. 22. $-1{,}01 < x < -0{,}99$. 23. $x \leqslant -8$; $x \geqslant 12$. 24. $x < -\frac{1}{2}$. 25. $0 < x < \frac{2}{3}$. 26. $|x| \leqslant 6$. 27. $x > -\frac{1}{2}$. 28. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. 29. $\frac{5-\sqrt{30}}{10} < x < \frac{5-\sqrt{20}}{10}$; $\frac{5+\sqrt{20}}{10} < x < \frac{5+\sqrt{30}}{10}$. 31. Второе. 32. Два знака. 33. Не превышает 0,41 %. 34. 9,9102 см^2 $\leqslant S \leqslant$ 10,0902 см^2; $\Delta \leqslant 0{,}0902$ см^2; $\delta \leqslant 0{,}91$ %. 35. 3,93 гс/см^3 $\pm$ 0,27 гс/см^3; $\delta \leqslant 7{,}3$ %. 36. $\delta \leqslant 3{,}05$ %. 37. 172,480 м^3 $\leqslant v \leqslant$ 213,642 м^3; $v =$ 192,660 м^3 $\pm$ 20,982 м^3; $\delta \approx 12$ %. 38. $\Delta \leqslant 0{,}17$ мм. 39. $\Delta < 0{,}0005$ м. 42. а) $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$; б) $N \geqslant \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$; в) $N \geqslant 1 + \frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$; г) $N \geqslant \frac{\lg \varepsilon}{\lg 0{,}999} \approx 2330 \lg\frac{1}{\varepsilon}$. 43. а) $N \geqslant E$; б) $N \geqslant \left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2$; в) $N \geqslant 10^{10}$. 46. 0. 47. 0. 48. 0. 49. $\frac{1}{3}$. 50. $\frac{1-b}{1-a}$. 51. $\frac{1}{2}$. 52. $\frac{1}{2}$. 53. $\frac{1}{3}$. 54. $\frac{4}{3}$. 55. 3. 56. 1. 57. 2. 67. а) второе; а) первое; в) второе. 72. $e = 2{,}71828\ldots$ 92. Равен 1, если $a \neq 0$ и принадлежит $[-1, 1]$, или не существует, если $a = 0$. 96. $x_3 = 1\frac{1}{8}$. 97. $x_{100} = \frac{1}{20}$. 98. $x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!} \approx 2{,}49 \cdot 10^{452}$. 99. $x_4 = x_5 = -120$. 100. $x_{10} = 20$. 101. 0; 1; 1; 1. 101.1. $-3\frac{1}{2}$; 5; -2; 2. 102. -1; $1\frac{1}{2}$; 0; 1. 103. 0; 2; 0; 2. 104. -4; 6; -4; 6.

105. $-\frac{1}{2}$; 1; $-\frac{1}{2}$; 1. 106. $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$. 107. $-\infty$; -1; $-\infty$; $-\infty$. 108. 0; $+\infty$; 0; $+\infty$. 109. $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$. 110. -5; 1,25; 0; 0. 111. $-\frac{1}{2}$; 1. 112. $-\left(e+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $e+1$. 113. 0; 1. 114. 1; 2. 115. 0; 1. 116. 0; 1. 117. 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; . . . ; 0. 118. Все вещественные числа, заключенные между 0 и 1, включая последние. 119. 1, 5. 120. a; b. 127. а) расходится, б) может как сходиться, так и расходиться. 128. а) нельзя; б) нельзя. 129. Нет. 130. Нет. 144. а) 0; б) 0. 147. $\ln 2$. 148. $\frac{1}{3}(a+2b)$. 151. $-\infty<x<+\infty$, $x\neq-1$. 152. $-\infty<x\leqslant-\sqrt{3}$ и $0\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$. 153. $-1\leqslant x<1$. 154. а) $|x|>2$; б) $x\geqslant 2$. 155. $4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. 156. $|x|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k-1)}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k+1)}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$. 157. $\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}$ и $-\frac{1}{2k+1}<x\leqslant-\frac{1}{2k+2}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. 158. $x>0$, $x\neq n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. 159. $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$. 160. $|x-k\pi|\leqslant\frac{\pi}{6}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$. 161. $10^{(2k-1/2)\pi}<x<10^{(2k+1/2)\pi}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$. 162. $x=-1,\ -2,\ -3,\ \ldots$ и $x\geqslant 0$. 163. $x\leqslant 0$, $x\neq-n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. 164. $1<x\leqslant 2$. 165. $x=\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \ldots$ 165.1. $x>4$. 165.2. $k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\ \pm1,\ \ldots)$. 165.3. $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$. 166. $-1\leqslant x\leqslant 2$; $0\leqslant y\leqslant 1\frac{1}{2}$. 167. $2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$; $-\infty<y\leqslant\lg 3$. 168. $-\infty<x<+\infty$; $0\leqslant y\leqslant\pi$. 169. $1\leqslant x\leqslant 100$; $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$. 170. $x=\frac{p}{2q+1}$,

где p и q — целые числа; $y = \pm 1$. **171.** $P = 2b + 2\left(1 - \frac{b}{h}\right) x$ $(0 < x < h)$; $S = bx\left(1 - \frac{x}{h}\right)$ $(0 < x < h)$. **172.** $a = \sqrt{100 - 96\cos x}$ $(0 < x < \pi)$, $S = 24\sin x$ $(0 < x < \pi)$. **173.** $S = \frac{h}{a-b}x^2$, если $0 \leqslant x \leqslant \frac{a-b}{2}$; $S = h\left(x - \frac{a-b}{4}\right)$, если $\frac{a-b}{2} < x < \frac{a+b}{2}$; $S = h\left[\frac{a+b}{2} - \frac{(a-x)^2}{a-b}\right]$, если $\frac{a+b}{2} \leqslant x \leqslant a$. **174**; $m(x) = 0$, если $-\infty < x \leqslant 0$; $m(x) = 2x$, если $0 < x \leqslant 1$; $m(x) = 2$, если $1 < x \leqslant 2$; $m(x) = 3$, если $2 < x \leqslant 3$; $m(x) = 4$, если $3 < x < +\infty$. **178.** $E_y = \{0 \leqslant y \leqslant 4\}$. **179.** $E_y = \{1 < y < 3\}$. **180.** $E_y = \{0 < y < 1\}$. **181.** $E_y = \{1 \leqslant |y| < +\infty\}$. **182.** $E_y = \{1 \leqslant y \leqslant 2\}$. **183.** $a < y < b$ при $a < b$ и $b < y < a$ при $a > b$. **184.** $1 < y < +\infty$. **185.** $0 > y > -\infty$ и $+\infty > y > 1$. **186.** $0 < y \leqslant \frac{1}{2}$. **187.** $+\infty > y > -\infty$. **188.** $0 < y < \frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2} \leqslant y < 2$. **189.** 0; 0; 0; 0; 24. **190.** 0; -6; 4. **191.** 1; 1; 1; 2. **192.** -1; 0; 1; 2; 4. **193.** 1, $\frac{1+x}{1-x}$, $\frac{-x}{2+x}$, $\frac{2}{1+x}$, $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{1+x}{1-x}$. **194.** а) $f(x) = 0$, если $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$; $f(x) > 0$, если $-\infty < x < -1$ и $0 < x < 1$; $f(x) < 0$, если $-1 < x < 0$ и $1 < x < +\infty$; б) $f(x) = 0$, если $x = \pm\frac{1}{k}$; $f(x) > 0$, если $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ и $-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; $f(x) < 0$, если $\frac{1}{2k+2} < x < \frac{1}{2k+1}$ и $-\frac{1}{2k} < x < -\frac{1}{2k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; в) $f(x) = 0$, если $x \leqslant 0$ и $x = 1$; $f(x) > 0$, если $0 < x < 1$; $f(x) < 0$, если $1 < x < +\infty$. **195.** а) a; б) $2x + h$; в) $a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$. **197.** $f(x) = \frac{7}{3}x - 2$; $f(1) = \frac{1}{3}$; $f(2) = 2\frac{2}{3}$. **198.** $f(x) = \frac{7}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1$; $f(-1) = -\frac{2}{3}$; $f(0,5) = 2\frac{17}{24}$. **199.** $f(x) = \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 -$

$-\frac{29}{6}x+2$. **200.** $f(x)=10+5\cdot 2^x$. **203.** а) $2k\pi \leqslant x \leqslant \pi+2k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. б) $1<x<e$; в) $x\geqslant 0$, $x\neq k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. **205.** а) $z=x+y$; б) $z=\frac{xy}{x+y}$; в) $z=\frac{x+y}{1-xy}$; г) $z=\frac{x+y}{1+xy}$. **206.** $\varphi(\varphi(x))=x^4$; $\psi(\psi(x))=2^{2^x}$; $\varphi(\psi(x))=2^{2x}$; $\psi(\varphi(x))=2^{x^2}$. **207.** $\varphi(\varphi(x))=\operatorname{sgn} x$; $\psi(\psi(x))=x\ (x\neq 0)$; $\varphi(\psi(x))=\psi(\varphi(x))=\operatorname{sgn} x\ (x\neq 0)$. **208.** $\varphi(\varphi(x))=\varphi(x)$; $\psi(\varphi(x))=\psi(x)$; $\psi(\psi(x))=\varphi(\psi(x))=0$. **209.** $-\frac{1-x}{x}$; $x\ (x\neq 0,\ x\neq 1)$. **210.** $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. **211.** x^2-5x+6. **212.** $x^2-2\left(|x|\geqslant 2\frac{1}{2}\right)$. **213.** $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. **213.1.** $f(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$. **221.** а) Возрастает при $a>0$ и убывает при $a<0$; б) при $a>0$ убывает в интервале $\left(-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right)$ и возрастает в интервале $\left(-\frac{b}{2a},\ +\infty\right)$; в) возрастает; г) при $ad-bc>0$ возрастает в интервалах $\left(-\infty,\ -\frac{d}{c}\right)$ и $\left(-\frac{d}{c},\ +\infty\right)$; д) возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$. **222.** Можно, если основание логарифмов больше 1. **224.** $\frac{y-3}{2}$ $(-\infty<y<+\infty)$. **225.** а) $-\sqrt{y}$ $(0\leqslant y<+\infty)$; б) $\sqrt{y}$ $(0\leqslant y<+\infty)$. **226.** $\frac{1-y}{1+y}$ $(y\neq -1)$. **227.** а) $-\sqrt{1-y^2}$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$; б) $\sqrt{1-y^2}$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$. **228.** $\operatorname{Arsh} y=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$ $(-\infty<y<+\infty)$. **229.** $\operatorname{Arth} y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$ $(-1<y<1)$. **230.** $x=y$, если $-\infty<y<1$; $x=\sqrt{y}$, если $1\leqslant y\leqslant 16$; $x=\log_2 y$, если $16<y<+\infty$. **231.** а) Нечетная; б) четная; в) четная; г) нечетная; д) нечетная. **233.** а) Периодическая, $T=2\pi/\lambda$; б) периодическая, $T=2\pi$, в) периодическая, $T=6\pi$; г) периодическая, $T=\pi$; д) непериодическая; е) периодическая, $T=\pi$; ж) непериодическая; з) непериодическая. **241.** $t=1\frac{2}{3}$ с, $x=-3\frac{1}{3}$ м. **243.** $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$. **244.** $y=x-\frac{x^2}{36\,000}$;

9 км; 36 км. 251. $x_0 = -\frac{d}{c}$; $y_0 = \frac{a}{c}$. 252. $p = \frac{12}{v}$ $(v > 0)$. 263. $k = \frac{a}{a_1}$, $m = \frac{a_1b - ab_1}{a_1^2}$, $n = \frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a_1^3}(a_1b - ab_1)$, $x_0 = -\frac{b_1}{a_1}$. 264. $y = \frac{10}{x^3}$. 287. $A = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\sin x_0 = -\frac{a}{A}$, $\cos x_0 = \frac{b}{A}$. 356. $y = 2\sin x$, если $|x - \pi k| \leqslant \frac{\pi}{6}$, и $y = (-1)^k$, если $\frac{\pi}{6} < |x - \pi k| < \frac{5\pi}{6}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. 357. а) $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$; б) и в) $y = x^2$, если $x \geqslant 0$; $y = 0$, если $x < 0$; г) $y = x$, если $x < 0$; $y = x^4$, если $x \geqslant 0$. 358. а) $y = 1$; б) $y = 1$, если $1 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{3}$; $y = 0$, если $|x| < 1$ или $|x| > \sqrt{3}$; в) $y = 1$, если $|x| \leqslant 1$; $y = 2$, если $|x| > 1$; г) $y = -2$, если $|x| > 2$; $y = 2 - (2 - x^2)^2$, если $|x| \leqslant 2$. 359. При $x < 0$ имеем: а) 1) $f(x) = 1 + x$, 2) $f(x) = -(1 + x)$; б) 1) $f(x) = -2x - x^2$, 2) $f(x) = 2x + x^2$; в) 1) $f(x) = \sqrt{-x}$, 2) $f(x) = -\sqrt{-x}$; г) 1) $f(x) = -\sin x$, 2) $f(x) = \sin x$; д) 1) $f(x) = e^{-x}$, 2) $f(x) = -e^{-x}$; е) 1) $f(x) = \ln(-x)$, 2) $f(x) = -\ln(-x)$. 360. а) $x = -\frac{b}{2a}$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x = \frac{b-a}{2}$; г) $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. 361. а) $(x_0, ax_0 + b)$, где x_0 — произвольно; б) $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$; в) (x_0, y_0), где $x_0 = -\frac{b}{3a}$ и $y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$; г) (2, 0); д) (2, 1). 372. Корни: $-1{,}88$; 0,35; 1,53. 373. 2,11; $-0{,}25$; $-1{,}86$. 374. 0,25; 1,49. 375. 0,64. 376. 1,37; 10. 377. $-0{,}54$. 378. 0; 4,49. 379. $x_1 = -0{,}57$, $y_1 = -1{,}26$; $x_2 = -0{,}42$, $y_2 = 1{,}19$; $x_3 = 0{,}45$, $y_3 = 0{,}74$; $x_4 = 0{,}54$, $y_4 = -0{,}68$. 380. $x_1 = -1{,}30$, $y_1 = 9{,}91$; $x_2 = 2{,}30$, $y_2 = 9{,}73$; $x_3 = -0{,}62$, $y_3 = -9{,}98$; $x_4 = 1{,}62$, $y_4 = -9{,}87$. 382. а) Вообще говоря, нет; б) да. 385. Ограничена сверху и неограничена снизу. 387. $f(a)$ и (b). 388. 0; 25. 389. 0; 1. 390. 0; 1. 391. 2; $+\infty$. 392. -1; 1. 393. $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. 394. $\frac{1}{2}$; 4. 395. а) 0, 1; б) 0; 2. 396. 0; 1. 397. а) 8; б) 0,8; в) 0,08; г) 0,008. 398. а) π; б) π; в) π; г) π. 411. а) 1; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{2}$. 412. 6. 413. 10. 414. $\frac{1}{2}nm(n - m)$. 415. 5^{-5} 416. $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$. 417. $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$.

418. $-\frac{1}{2}$. **419.** $\frac{1}{2}$. **420.** 1. **421.** $\frac{1}{4}$. **422.** $\frac{1}{3}$.
423. $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$. **424.** $\frac{n(n+1)}{2}$. **424.1.** $2\frac{1}{24}$. **425.** $\frac{m}{n}$.
426. $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$. **427.** $\frac{n(n+1)}{2}$. **428.** $\frac{m-n}{2}$. **429.** $x+\frac{a}{2}$. **430.** $x^2+ax+\frac{a^2}{3}$. **431.** 1. **432.** $\frac{1}{2}$. **433.** 3
434. $\frac{ab}{3}$. **435.** 1. **436.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **437.** $\frac{4}{3}$. **438.** -2. **439.** $\frac{1}{\sqrt{2a}}$.
440. $-\frac{1}{16}$. **441.** $\frac{1}{144}$. **442.** $\frac{1}{4}$. **443.** $\frac{12}{5}$. **444.** $\frac{1}{n}$.
445. -2. **446.** $\frac{1}{4}$. **447.** $\frac{2}{27}$. **448.** $\frac{3}{2}$. **449.** $4\frac{4}{27}$.
450. $\frac{7}{36}$. **451.** $-\frac{1}{2}$. **452.** $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$. **453.** $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$.
455. $\frac{n}{m}$. **455.1.** $\frac{1}{2}$. **456.** $\frac{1}{n!}$. **457.** $\frac{1}{2}(a+b)$. **458.** $\frac{1}{2}$.
459. $-\frac{1}{4}$. **460.** 1. **461.** $\frac{2}{3}$. **462.** 2. **463.** $\frac{4}{3}$. **464.** $-\frac{1}{4}$.
465. $\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$. **466.** 2^n. **467.** $2n$. **468.** $\lim\limits_{a\to 0} x_1 = \infty$, $\lim\limits_{a\to 0} x_2 = -\frac{c}{b}$. **469.** $a=1$, $b=-1$. **470.** $a_i=\pm 1$; $b_i = \mp\frac{1}{2}$ $(i=1,\ 2)$. **471.** 5. **472.** 0. **473.** $(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$.
474. $\frac{1}{2}$. **474.1.** 1. **474.2.** $\frac{1}{3}$. **475.** $\frac{1}{2}$. **476.** 2. **477.** 4
478. $\frac{1}{p}$. **479.** $\frac{1}{2}$. **480.** $\frac{2}{\pi}$. **482.** $\cos a$. **483.** $-\sin a$
484. $\sec^2 a$ $\left(a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k=0,\ \pm 1,\ \ldots\right)$. **485.** $-\frac{1}{\sin^2 a}$ ($a \neq k\pi$, где k — целое). **486.** $\frac{\sin a}{\cos^2 a}$ ($a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — целое). **487.** $-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$ ($a \neq k\pi$, где k — целое). **488.** $-\sin a$.
489. $-\cos a$. **490.** $\frac{2\sin a}{\cos^3 a}\left(a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\text{, где } k \text{ — целое}\right)$.
491. $\frac{2\cos a}{\sin^3 a}$ ($a \neq k\pi$, где k — целое). **492.** $\frac{3}{2}\sin 2a$. **493.** -8

494. 14. 495. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 496. -24. 497. $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}$ $\left(a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\right.$ где k — целое$\left.\right)$. 498. $\frac{3}{4}$. 499. $\frac{1}{4}$.
500. $\frac{4}{3}$. 501. $-\frac{1}{12}$. 502. $\sqrt{2}$. 503. 0. 504. 3. 505. 0.
506. а) $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) 1. 507. 0. 508. 0. 509. 0. 510. 0.
511. 1. 512. e^3. 513. 1. 514. e^{-2}. 515. e^{2a}. 516. 0, если $a_1 < a_2$; $+\infty$, если $a_1 > a_2$; $e^{b_1 - b_2/a_1}$, если $a_1 = a_2$. 517. e. 518. e^{-1}.
519. 1. 519.1. $\sqrt{e}$. 520. $e^{\operatorname{ctg} a}$ ($a \neq k\pi$ — целое). 521. $e^{3/2}$.
522. e^{-1}. 523. 1. 524. e^{-2}. 525. e. 526. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 527. e^{x+1}.
528. $e^{-x^2/2}$. 529. 1. 530. 1. 531. $\frac{1}{a}$. 532. 0. 533. $\frac{1}{5}$. 534. -2.
535. $\frac{3}{2}$. 536. $\frac{3}{2}$. 537. $-\frac{\log e}{x^2}$. 538. $\frac{2a}{b}$. 539. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$.
540. 0. 540.1. n. 541. $\ln a$. 542. $a^a \ln \frac{a}{e}$. 543. $a^a \ln ea$. 544. e^2.
545. $\frac{2}{3}$. 545.1. $e^{\beta^2-\alpha^2}$. 545.2. $\frac{\alpha}{\beta}$. 545.3. -2. 546. e^2.
547. 1. 548. $\frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta}$. 549. $a^b \ln a$. 550. $a^x \ln^2 a$. 551. $e^{-(a+b)}$.
552. $\ln x$. 553. $\ln x$. 554. $\sqrt[a]{b}$. 555. $\sqrt{ab}$. 556. $\sqrt[3]{abc}$.
557. $(a^a \times b^b c^c)^{1/(a+b+c)}$. 558. $\frac{1}{\sqrt{ab}}$. 559. $\left(\ln \frac{a}{b}\right)^{-1}$. 560. $a^{a^a} \ln a$.
561. а) 0; б) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$. 562. $\ln 8$. 563. $-\ln 2$. 566. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$.
567. 1. 568. 0. 569. $\ln a^2$. 570. $\frac{1}{8}$. 571. $\frac{1}{2}$. 572. -2. 573. e^x.
574. $e^{2/\pi}$. 575. $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$. 576. а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) 1. 576.1. $\frac{2}{9}$.
577. $2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}$. 577.1. а) $\operatorname{ch} a$; б) $\operatorname{sh} a$. 577.2. -1. 578. $\ln 2$.
579. 1. 580. e^{π^2}. 581. $-\frac{\pi}{2}$. 582. $\frac{\pi}{3}$. 583. $-\frac{\pi}{2}$.
584. $\frac{3\pi}{4}$. 585. $\frac{1}{1+x^2}$. 586. 2. 587. $\frac{e^x}{x^2+1}$. 588. $\frac{1}{2}$.

589. 1. 590. $e^{2/\pi}$. 591. 0. 592. 0. 593. а) $+\infty$; б) $\frac{1}{2}$.

594. а) -1; б) 1. 594.1. $\ln\frac{b^2}{a^2}$. 595. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{2}$.

596. а) 1; б) 0. 597. а) 0; б) 1. 600. 2; 1; 2. 601. 0; $(-1)^{n-1}$; $(-1)^n$. 602. 0. 603. 1. 604. 0. 605. 1. 606. 0. 613. б) $y=1$, если $|x|<1$; $y=0$, если $|x|=1$. 614. б) $y=0$, если $0\leqslant x<1$; $y=\frac{1}{2}$, если $x=1$; $y=1$, если $1<x<+\infty$. 615. $y=-1$, если $0<|x|<1$; $y=0$, если $|x|=1$; $y=1$, если $|x|>1$. 616. $y=|x|$. 617. $y=1$, если $0\leqslant x\leqslant 1$; $y=x$, если $x>1$. 618. $y=1$, если $0\leqslant x\leqslant 1$; $y=x$, если $1<x<2$; $y=\frac{x^2}{2}$, если $x\geqslant 2$. 619. $y=0$, если $0\leqslant x<2$; $y=2\sqrt{2}$, если $x=2$; $y=x^2$, если $x>2$. 620. б) $y=0$, если $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$; $y=1$, если $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2; \ldots$). 621. $y=\ln 2$, если $0\leqslant x\leqslant 2$; $y=\ln x$, если $x>2$. 622. $y=0$, если $-1<x\leqslant 1$; $y=\frac{\pi}{2}(x-1)$, если $x>1$. 623. $y=1$, если $x\leqslant -1$; $y=e^{x+1}$, если $x>-1$. 624. $y=x$ при $x<0$; $y=\frac{1}{2}$ при $x=0$; $y=1$ при $x>0$. 625. $\frac{1}{x}$. 625.1. $y=\sqrt{x}$ при $0\leqslant x<1$ и $4k-1<x<4k+1$; $y=x$ при $4k-3<x<4k-2$ и $4k-2<x<4k-1$; $y=\frac{1}{2}(\sqrt{x}+x)$ при $x=2k-1$ ($k=1, 2, 3, \ldots$). 625.2. $y=0$, если x — рационально; $y=x$, если x — иррационально. 625.3. Контур квадрата $\max\{|x|, |y|\}=1$. 627. а) $x=1$; $x=-2$, $y=x-1$; б) $y=x+\frac{1}{2}$ при $x\to+\infty$, $y=-x-\frac{1}{2}$ при $x\to-\infty$; в) $y=\frac{1}{3}-x$; г) $y=x$ при $x\to+\infty$, $y=0$ при $x\to-\infty$; д) $y=0$ при $x\to-\infty$, $y=x$ при $x\to+\infty$; е) $y=x+\frac{\pi}{2}$. 628. 0. 629. $\frac{1}{1-x}$. 630. $\frac{\sin x}{x}$. 632. $\frac{1}{6}$.

633. $\frac{a}{2}$. 634. $\frac{1}{2}\ln a$. 635. $\sqrt{e}$. 636. $e^{-a^2/6}$. 637. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$. 637.1. $\frac{2}{3}$. 637.2. $\frac{b}{1-\alpha}$. 637.3. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

638. $\sqrt{1+x}-1$. 639. $1-\sqrt{1-x}$. 641. а) 2; б) $+\infty$; в) 0; г) 1; д) 2; е) 1; ж) $2\,\mathrm{sh}\,1$. 643. а) $l=-1$, $L=2$; б) $l=-2$, $L=2$; в) $l=2$, $L=e$. 644. а) $l=-1$, $L=1$; б) $l=0$, $L=+\infty$; в) $l=\frac{1}{2}$, $L=2$; г) $l=0$, $L=+\infty$. 645. а) Первого порядка; б) второго; в) первого; г) третьего; д) третьего; е) третьего. 653. а) $2x$; б) x; в) $\frac{x^2}{2}$; г) $\frac{x^3}{2}$. 655. а) $3(x-1)^2$; б $\frac{(1-x)^{1/3}}{\sqrt[3]{2}}$; в) $x-1$; г) $e(x-1)$; д) $x-1$. 656. а) x^2; б) $2x^2$; в) $x^{2/3}$; г) $x^{1/8}$. 657. а) $\left(\frac{1}{x}\right)^3$; б) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{1/2}$; в) $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{3/2}$; г) $\left(\frac{1}{x}\right)^2$. 658. а) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)$; б) $\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{1-x}\right)^{1/2}$; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{1/3}$; $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1-x}$; д) $\frac{1}{x-1}$. 663. а) $9{,}95<x<10{,}05$; б) $9{,}995<x<10{,}005$; в) $9{,}9995<x<10{,}0005$; г) $\sqrt{100-\varepsilon}<x<\sqrt{100+\varepsilon}$. 664. $\Delta<\frac{\varepsilon}{27}$; а) $\Delta<3{,}7$ мм; б) $\Delta<0{,}37$ мм; в) $\Delta<0{,}037$ мм. 665. $100\,[1-10^{-(n+1)}]^2<x<100\,[1+10^{-(n+1)}]^2$; а) $81<x<121$; б) $98{,}01<x<102{,}01$; в) $99{,}8001<x<100{,}2001$; г) $99{,}980001<x<100{,}020001$. 666. $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{11},\ 1\right)$. 667. $\delta=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}\approx 0{,}001x_0^2$; а) $\delta\approx 10^{-5}$; б) $\delta\approx 10^{-7}$; в) $\delta\approx 10^{-9}$. Нельзя. 669. а) Нельзя; б) можно. 671. Нет; ограниченность в точке x_0. 672. Нет; если функция $f(x)$ определена в конечном промежутке (a, b), то эти неравенства выполнены всегда; если по меньшей мере a или b равно символу ∞, то $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=+\infty$. 673. Нет; однозначность и непрерывность обратной функции. 675. Непрерывна. 676. Непрерывна, если $A=4$, и разрывна при $x=2$, если $A\neq 4$. 677. Разрывна при $x=-1$. 678. а) Непрерывна; б) разрывна при $x=0$. 679. Разрывна при $x=0$. 680. Непрерывна. 681. Непрерывна. 682. Разрывна при $x=1$. 683. Непрерывна при $a=0$ и разрывна при $a\neq 0$. 684. Разрывна при $x=0$. 685. Разрывна при $x=k$ (k — целое). 686. Разрывна при $x=k^2$ ($k=1, 2, \ldots$). 687. $x=-1$ — точка бесконечного разрыва. 688. $x=$

$= -1$ — устранимая точка разрыва. **689.** $x = -2$ и $x = 1$ — точки бесконечного разрыва. **690.** $x = 0$ и $x = 1$ — устранимые точки разрыва; $x = -1$ — точка бесконечного разрыва. **691.** $x = 0$ — устранимая точка разрыва; $x = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки бесконечного разрыва. **692.** $x = \pm 2$ — устранимые точки разрыва. **693.** $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода. **694.** $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки разрыва 1-го рода; $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода. **695.** $x = 0$ и $x = \frac{2}{2k+1}$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$) — устранимые точки разрыва. **696.** $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода. **697.** $x = 0$ — устранимая точка разрыва. **698.** $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода. **699.** $x = 0$ — устранимая точка разрыва; $x = 1$ — точка бесконечного разрыва. **700.** $x = 0$ — точка бесконечного разрыва; $x = 1$ — точка разрыва 2-го рода. **701.** $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки разрыва 1-го рода. **702.** $x = k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки разрыва 1-го рода. **703.** $x = k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки разрыва 1-го рода. **704.** Функция непрерывна. **705.** $x = \pm\sqrt{n}$ ($n = 1, 2, \ldots$) — точки разрыва 1-го рода. **706.** $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки разрыва 1-го рода; $x = 0$ — точка бесконечного разрыва. **707.** $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки разрыва 1-го рода; $x = 0$ — устранимая точка разрыва. **708.** $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки разрыва 1-го рода; $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода. **709.** $x = \pm\frac{1}{k}$ и $x = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}$ ($k = 1, 2, \ldots$) — точки разрыва 1-го рода, $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода. **710.** $x = \frac{1}{k}$ ($= \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки бесконечного разрыва; $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода. **711.** $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки бесконечного разрыва; $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода. **712.** $x = \pm\sqrt{n}$ ($n = 1, 2, \ldots$) — точки разрыва 1-го рода. **713.** $x = 0$, $x = 1$ и $x = 2$ — точки разрыва 1-го рода. **714.** $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки бесконечного разрыва. **715.** $x = \pm\sqrt{k\pi}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) — точки бесконечного разрыва. **716.** $x = -1$ и $x = 3$ — точки бесконечного разрыва. 717. $x=0$ — точка разрыва 2-го рода. 718. $x=0$ — устранимая точка разрыва. 719. $x=\pm 1$ — точки разрыва 1-го рода. 720. $y=1$, если $0\leqslant x<1$; $y=\frac{1}{2}$, если $x=1$; $y=0$, если $x>1$; $x=1$ — точка разрыва 1-го рода. 721. $y=\operatorname{sgn} x$; $x=0$ — точка разрыва 1-го рода. 722. $y=1$, если $|x|\leqslant 1$; $y=x^2$, если $|x|>1$. Функция непрерывна. 723. $y=0$, если $x\neq k\pi$; $y=1$, если $x=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; $x=k\pi$ — точки разрыва 1-го рода. 724. $y=x$, если $|x-k\pi|<\frac{\pi}{6}$; $y=\frac{x}{2}$, если $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$; $y=0$, если $\frac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\frac{5\pi}{6}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ — точки разрыва 1-го рода. 725. $y=\frac{\pi}{2}x$, если $k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$; $y=-\frac{\pi}{2}x$, если $k\pi+\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi$; $y=0$, если $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; $x=\frac{k\pi}{2}$ — точки разрыва 1-го рода. 726. $y=x$ при $x\leqslant 0$; $y=x^2$ при $x>0$. Функция непрерывна. 727. $y=0$ при $x\leqslant 0$ и $y=x$ при $x>0$. Функция непрерывна. 728. $y=-(1+x)$ при $x<0$; $y=0$ при $x=0$ и $y=1+x$ при $x>0$; $x=0$ — точка разрыва 1-го рода. 729. Нет. 730. $a=1$. 731. а) Функция непрерывна; б) $x=-1$ — точка разрыва 1-го рода; в) $x=-1$ — точка разрыва 1-го рода; г) $x=k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — точки бесконечного разрыва; д) $x\neq k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — точки разрыва 2-го рода. 732. $d=-x$ при $-\infty<x<0$; $d=0$ при $0\leqslant x\leqslant 1$; $d=x-1$ при $1<x\leqslant\frac{3}{2}$; $d=2-x$ при $\frac{3}{2}<x<2$; $d=0$ при $2\leqslant x\leqslant 3$; $d=x-3$ при $3<x<+\infty$. Функция — непрерывна. 733. $S=3y-\frac{y^2}{2}$ при $0\leqslant y\leqslant 1$; $S=\frac{1}{2}+2y$ при $1<y\leqslant 2$; $S=\frac{5}{2}+y$ при $2<y\leqslant 3$; $S=\frac{11}{2}$ при $3<y<+\infty$; функция — непрерывна, $b=3-y$ при $0\leqslant y\leqslant 1$; $b=2$ при $1<y\leqslant 2$; $b=1$ при $2<y\leqslant 3$; $b=0$ при $3<y<+\infty$; $x=2$ и $x=3$ — точки разрыва 1-го рода. 735. Разрывна при $x\neq 0$ и непрерывна при $x=0$. 737. Разрывна при всех отрицательных значениях и положительных рациональных значениях аргумента. **738.** $f(0) = 0{,}5$. **740.** а) ,5; б) 2; в) 0; г) e; д) 0; е) 1; ж) 0. **841.** а) Да; б) нет. **742.** а) Нет; б) нет. **743.** Нет. Пример: $f(x) = 1$, если x — рационально, и $f(x) = -1$, если x — иррационально. **744.** а) $f(g(x))$ непрерывна, $g(f(x))$ разрывна при $x=0$; б) $f(g(x))$ разрывна при $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$, $g(f(x)) = 0$ непрерывна; в) $f(g(x))$ и $g(f(x))$ непрерывны. **745.** $f(\varphi(x)) \equiv x$. **759.** $x = \dfrac{-dy+b}{cy-a}$; $a+d=0$. **760.** $x = y-k$, если $2k \leqslant y < 2k+1$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. **764.** $f(f(x)) \equiv x$. **767.** $x = -\sqrt{y}$ $(0 \leqslant y < +\infty)$; $x = \sqrt{y}$ $(0 \leqslant y < +\infty)$. **768.** $x = 1-\sqrt{1-y}$ $(-\infty < y \leqslant 1)$; $x = 1+\sqrt{1-y}$ $(-\infty < y \leqslant 1)$. **769.** $x = \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$, $x = \dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ $(0 < |y| \leqslant 1)$. **770.** $x = (-1)^k \arcsin y + k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$. **771.** $x = 2k\pi \pm \arccos y$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$. **772.** $x = \operatorname{arctg} y + k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ $(-\infty < y < +\infty)$. **776.** $\varepsilon = 0$, если $xy < 1$; $\varepsilon = \operatorname{sgn} x$, если $xy > 1$. **779.** а) $y = -\dfrac{\pi}{2}$, если $-1 \leqslant x \leqslant 0$; $y = 2\arcsin x - \dfrac{\pi}{2}$, если $0 \leqslant x \leqslant 1$; б) $y = -(\pi + 4\arcsin x)$, если $-1 \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$, если $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $y = \pi - 4\arcsin x$, если $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 1$. **780.** $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$. **781.** $y = \sqrt{x^2-1}$ $(1 \leqslant x < +\infty)$; $y = -\sqrt{x^2-1}$ $(1 \leqslant x + \infty)$. **782.** Для всех t, для которых $\varphi(t) = x$, где x — произвольное значение функции $\varphi(t)$, функция $\psi(t)$ должна иметь одно и то же значение. **783.** Множество значений $\chi(\tau)$ при $\alpha < \tau < \beta$ должно быть интервалом (a, b). **784.** Для всех значений x, для которых $\varphi(x) = u$, где u — произвольное число из интервала (A, B), функция $\psi(x)$ должна принимать одно и то же значение. **785.** $|\delta| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{20}$ см. а) 0,5 мм; б) 0,005 мм; в) 0,00005 мм. **786.** а) $\delta < \dfrac{1}{4}$; б) $\delta < 2{,}5 \cdot 10^{-4}$; в) $\delta < \dfrac{5}{2} \cdot 10^{-7}$; г) $\delta < \dfrac{\varepsilon^3}{4}$ $(\varepsilon \leqslant 1)$. **793.** а) Да; б) нет. **794.** Равномерно непрерывна. **795.** Не является равномерно непрерывной. **796.** Равномерно непрерывна. **797.** Не является равномерно непрерывной. **798.** Равномерно непрерывна. **799.** Равномерно непрерывна. **800.** Не является равномерно непрерывной. **802.** а) $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$; б) $\delta = \dfrac{\varepsilon}{8}$; в) $\delta = 0{,}01\varepsilon$; г) $\delta = \varepsilon^2$ $(\varepsilon \leqslant 1)$; д) $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$;

е) $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}\right)$. 803. $n \geqslant 1\,800\,000$.
808. а) $\omega_f(\delta) \leqslant 3\delta$; б) $\omega_f(\delta) \leqslant \sqrt{\delta}$; $\omega_f(\delta) \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{2a}}$; в) $\omega_f(\delta) \leqslant \delta\sqrt{2}$. 818. $f(x) = \cos ax$ или $f(x) = \operatorname{ch} ax$. 819. $f(x) = \cos ax$; $g(x) = \pm \sin ax$ $(a = \text{const})$.

ОТДЕЛ II

821. $\Delta x = 999$; $\Delta y = 3$. 822. $\Delta x = -0{,}009$; $\Delta y = 990\,000$. 823. а) $\Delta y = a\Delta x$; б) $\Delta y = (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2$; в) $\Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1)$. 825. а) 5; б) 4,1; в) 4,01; г) $4 + \Delta x$; 4. 826. $3 + 3h + h^2$; а) 3,31; 3, б) 3,0301; в) 3,003001; 3. 827. а) $v_{\text{ср}} = 215$ м/с; б) $v_{\text{ср}} = 210{,}5$ м/с; в) $v_{\text{ср}} = 210{,}05$ м/с; 210 м/с. 828. а) $2x$; б) $3x^2$; в) $-\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$; г) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$; д) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x \neq 0)$; е) $\frac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2},\ k = 0, \pm 1, \ldots\right)$; ж) $-\frac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi,\ k = 0, \pm 1, \ldots)$; з) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$; и) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$; к) $\frac{1}{1+x^2}$. 829. -8; 0; 0. 830. 4. 831. $1 + \frac{\pi}{4}$. 832. $f'(a)$. 834. $y' = 1 - 2x$; 1, 0, -1, 21. 835. $y' = x^2 + x - 2$; а) -2; 1; б) -1; 0; в) -4; 3. 836. $10a^3x - 5x^4$. 837. $\frac{a}{a+b}$. 838. $2x - (a+b)$. 839. $2(x+2)(x+3)^2(3x^2 + 11x + 9)$. 840. $x\sin 2a + \cos 2a$. 841. $mn\,[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)\,x^{m+n-1}]$. 842. $-(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1 + 6x + 15x^2 + 14x^3)$.
842.1. $-20(17 + 12x)(5 + 2x)^9(3 - 4x)^{19}$. 843. $-\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right)$ $(x \neq 0)$. 845. $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ $(|x| \neq 1)$.
846. $\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$. 847. $\frac{1 - x + 4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$ $(|x| \neq 1)$.
848. $\frac{12 - 6x - 6x^2 + 2x^3 + 5x^4 - 3x^5}{(1-x)^3}$ $(x \neq 1)$.
849. $-\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q) + (p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$ $(x \neq -1)$.
850. $\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}[p - (q+1)x - (p+q-1)x^2]$ $(x \neq -1)$.

851. $1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x>0)$. 852. $-\frac{1}{x^2}-$ $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ $(x>0)$. 853. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+$ $+\frac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x>0)$. 854. $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

855. $\frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$ $\left(x\neq\sqrt[3]{-3}\right)$.

856. $\frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)\sqrt[n+m]{(1-x)^n(1+x)^m}}$. 857. $\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ $(|x|<|a|)$. 858. $\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ $(|x|\neq 1)$.

859. $-\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$. 860. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ $(x>0)$. 861. $\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}}\times$ $\times\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)}}$ $(x\neq 0,\quad x\neq -1,\quad x\neq -8)$.

862. $-2\cos x(1+2\sin x)$. 863. $x^2\sin x$. 864. $-\sin 2x\cdot\cos(\cos 2x)$. 865. $n\sin^{n-1}x\cdot\cos(n+1)x$. 866. $\cos x\cdot$ $\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)]$. 867. $\frac{2\sin x(\cos x\sin x^2-x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}$ $(x^2\neq k\pi;\quad k=1,\ 2,\ \ldots)$. 868. $-\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$ $(x\neq k\pi;$ $k=0,\quad \pm 1,\quad \pm 2\ldots)$. 869. $\frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\right.$ $\left.k - \text{целое}\right)$. 870. $\frac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$. 871. $\frac{2}{\sin^2 x}$; $(x\neq k\pi;\quad k=0,\quad \pm 1,\quad \pm 2,\ \ldots)$. 872. $1+\operatorname{tg}^4 x\ (x\neq$ $\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};\quad k=0,\quad \pm 1,\ \ldots)$. 873. $\frac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$ $(x\neq k\pi,\ k - \text{целое})$. 874. $\frac{-16\cos\frac{2x}{a}}{a\sin^3\frac{2x}{a}}$ $\left(x\neq\frac{k\pi a}{2},\right.$ $\left.k - \text{целое}\right)$. 875. $-3\operatorname{tg}^2 x\cdot\sec^2 x\cdot\sin(2\operatorname{tg}^3 x)\cdot\cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$

$\left(x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi,\ \ k — \text{целое}\right)$. **876.** $-2xe^{-x^2}$.

877. $-\frac{1}{x^2}\, 2^{\operatorname{tg} 1/x} \sec^2 \frac{1}{x} \ln 2$. **878.** x^2e^x. **879.** $x^2e^{-x}\sin x$.

880. $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$ $(x \neq 2k\pi,$ k — целое).

881. $-\frac{1+\ln^2 3}{3^x}\sin x$. **882.** $\sqrt{a^2+b^2}\, e^{ax}\sin bx$.

883. $e^x\left[1+e^{e^x}\left(1+e^{e^{e^x}}\right)\right]$. **884.** $y\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{x}\right)$ $(x>0)$.

885. $a^a\cdot x^{a^a-1} + ax^{a-1}a^{x^a}\ln a + a^x\cdot a^{a^x}\ln^2 a$.

886. $\frac{6}{x}\lg e \lg^2 x^2$ $(x \neq 0)$. **887.** $\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$ $(x>e)$.

888. $\frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}$ $(x>e)$. **889.** $\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}$ $(x>-1)$. **890.** $\frac{x}{x^4-1}$ $(|x|>1)$. **891.** $\frac{1}{x(1+x^4)^2}$ $(x\neq 0)$. **892.** $\frac{1}{3x^2-2}$ $\left(|x|>\sqrt{2/3}\right)$. **893.** $\frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)}$ $(|x|<1)$. **894.** $\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$ $(x>-1)$.

895. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. **896.** $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

897. $\ln^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. **898.** $\sqrt{x^2+a^2}$. **899.** $\frac{1}{a-bx^2}$ $\left(|x|<\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$. **900.** $-\frac{8}{x^5\sqrt{1-x^2}}$ $(0<x<1)$.

901. $\frac{1}{\sin x}$ $(0<x-2k\pi<\pi,\ k$ — целое). **902.** $\frac{1}{\cos x}$ $\left(|x-2k\pi|<\frac{\pi}{2},\ k — \text{целое}\right)$. **903.** $-\operatorname{ctg}^3 x$ $(0<x-2k\pi<\pi,\ k$ — целое). **904.** $-\frac{1}{\cos x}$ $\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\right.$ k — целое). **905.** $\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$ $(0<x-2k\pi<\pi,\ k$ — целое).

906. $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}$. **907.** $-\frac{\ln^3 x}{x^2}$ $(x>0)$.

908. $\frac{1}{x^5}\ln x$ $(x>0)$. **909.** $\frac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}$.

910. $-\dfrac{1+x+\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}}{\left(1+x\ln\dfrac{1}{x}\right)\left[1+x\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}\right)\right]}$.

911. $2\sin(\ln x)$ $(x>0)$. 912. $\sin x\cdot\ln\operatorname{tg}x$ $\left(0<x-2k\pi<\dfrac{\pi}{2},\ k\text{—целое}\right)$. 913. $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ $(|x|<2)$. 914. $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ $(|x-1|<\sqrt{2})$. 915. $\dfrac{2ax}{x^4+a^2}$ $(a\neq 0)$. 916. $\dfrac{1}{x^2+2}$ $(x\neq 0)$.

917. $\dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ $(x\geqslant 0)$. 918. $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x$ $(|x|<1)$.

919. $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$ $(x\geqslant 0)$. 920. $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$.

921. $\operatorname{sgn}(\cos x)\left(x\neq\dfrac{2k-1}{2}\pi,\ k\text{—целое}\right)$. 922. $\dfrac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, $x\neq k\pi$, k — целое). 923. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$ $\left(0<x-k\pi<\dfrac{\pi}{2},\ k\text{ — целое}\right)$. 924. $\dfrac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0<|x|<1)$. 925. $\dfrac{1}{1+x^2}$ $(x\neq 1)$.

926. $1\ \left(x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\text{—целое}\right)$. 927. $\dfrac{1}{a+b\cos x}$. 928. $-\dfrac{2\operatorname{sgn}x}{1+x^2}$ $(x\neq 0)$. 929. $\dfrac{4x}{\sqrt{1-x^4}\arccos^3(x^2)}$ $(|x|<1)$. 930. $\dfrac{1+x^4}{1+x^6}$.

931. $-2\cos x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)$. 932. $\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$ $(x>1)$.

933. $\dfrac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$ $(x>-a)$. 934. $\sqrt{a^2-x^2}$. 935. $\dfrac{1}{x^3+1}$ $(x\neq -1)$. 936. $\dfrac{1}{x^4+1}$ $(|x|\neq 1)$. 937. $(\arcsin x)^2$ $(|x|<1)$.

938. $-\dfrac{\arccos x}{x^2}$ $(0<|x|<1)$. 939. $\dfrac{x\ln x}{(x^2-1)^{3/2}}$ $(x>1)$.

940. $\dfrac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$ $(|x|<1)$. 941. $\dfrac{x^3}{x^6+1}$ $\left(|x|\neq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

942. $\dfrac{12x^5}{(1+x^{12})^2}$. **943.** $-\dfrac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}}$ $(x<1)$. **944.** $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$. **945.** $\dfrac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$ $(0<x<a)$. **946.** $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ $(|x+1|<\sqrt{2})$. **947.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. **948.** $\dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ $\left(x \neq \dfrac{2k-1}{2}\pi,\ k \text{ — целое}\right)$. **949.** $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\times$ $\times \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ $(|x|<1)$. **950.** $\dfrac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x$. **951.** $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

952. $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$. **953.** $\dfrac{\sin a \operatorname{sgn}(\cos x-\cos a)}{1-\cos a\cos x}$ $(\cos x \neq \cos a)$.

954. $\dfrac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}$ $(0<|x|<1)$. **955.** $\dfrac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$ $(|x|\neq$ $\neq 1)$. **956.** $\dfrac{4}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$. **957.** $\dfrac{2x(\cos x^2+\sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$ $\left(0<|x|<\sqrt{\left(+\dfrac{1}{2}\right)\pi},\quad k=0,\ 1,\ldots\right)$.

958. $2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2)+\operatorname{sgn}(\sin x^2)]\left(|x|\neq\dfrac{k\pi}{2},\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots\right)$.

959. $\dfrac{2m}{\sqrt{1-x^2}}\cdot e^{m(\arcsin x)}\cos m(\arcsin x)$ $(|x|<1)$.

960. $\dfrac{e^x-1}{e^{2x}+1}$.

960.1. $\dfrac{x^3}{6\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}\cdot\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{1+x^4}\right)^2}\cdot\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$.

960.2. $\dfrac{1}{x^3\cos\dfrac{1}{x^2}\left(\sin\dfrac{1}{x^2}+\cos\dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x^2}}}$.

960.3. $\dfrac{2^{1+\sqrt[3]{x}}\ln 2\cdot\sin\left(2^{\sqrt[3]{x}}\right)\cdot\ln\left(\sec 2^{\sqrt[3]{x}}\right)}{3\sqrt[3]{x^2}\cdot\cos^2\left(2^{\sqrt[3]{x}}\right)}$. **961.** $1+x^x\times$ $\times(1+\ln x)+x^x x^{x^x}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)(x>0)$. **962.** $x^{a-1}x^{x^a}\times$

$\times(1+a\ln x)+a^x x^{a^x}\left(\frac{1}{x}+\ln a\ln x\right)+x^x a^{x^x}\ln a\,(1+\ln x)\ (x>0)$.

963. $x^{1/x-2}(1-\ln x)\ (x>0)$. **964.** $(\sin x)^{1+\cos x}(\mathrm{ctg}^2 x-\ln\sin x)-$ $-(\cos x)^{1+\sin x}(\mathrm{tg}^2 x-\ln\cos x)\left(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2},\ k\text{ — целое}\right)$.

965. $\frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}[x-2\ln^2 x+x\ln x\cdot\ln(\ln x)]\ (x>1)$. **965.1.** $y'=$ $=2y\left\{\frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}\ln\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}+\mathrm{arctg}^2 x\left[\frac{\sin x\cdot\mathrm{sgn}(\cos x)}{\arcsin(\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x}}-\right.\right.$ $\left.\left.-\frac{\cos x\cdot\mathrm{sgn}(\sin x)}{\arccos(\cos^2 x)\sqrt{1+\cos^2 x}}\right]\right\}\left(x\neq\frac{k\pi}{2},\ k=0,\ \pm1,\ldots\right)$.

966. $-\frac{1}{x}(\log_x e)^2\ (x>0,\ x\neq 1)$. **967.** $\mathrm{th}^3 x$. **968.** $-\frac{2}{\mathrm{sh}^3 x}\ (x>0)$.

969. $\frac{1}{\mathrm{ch}\,2x}$. **970.** $\frac{\mathrm{sgn}(\mathrm{sh}\,x)}{\mathrm{ch}\,x}\ (x\neq 0)$. **971.** $\frac{a+b\,\mathrm{ch}\,x}{b+a\,\mathrm{ch}\,x}$.

972. $-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$. **973.** $-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\cdot\ln(\arccos x)$ $(|x|<1)$. **974.** $-\frac{x^{-1}}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$. **975.** $-\frac{2xe^{-x^2}\arcsin\left(e^{-x^2}\right)}{(1-e^{-2x^2})^{3/2}}$ $(x\neq 0)$. **976.** $\frac{4a^{2x}\ln a}{(1+a^{2x})^2}\mathrm{arcctg}\,a^{-x}\ (a>0)$. **977.** а) $\mathrm{sgn}\,x\ (x\neq 0)$; б) $2|x|$; в) $\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$. **978.** а) $(x-1)(x+1)^2(5x-1)\,\mathrm{sgn}(x+1)$; б) $\frac{3}{2}\sin 2x\cdot|\sin x|$; в) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\ (|x|>1)$; г) $\pi[x]\sin 2\pi x$.

979. $y'=-1$ при $-\infty<x<1$; $y'=2x-3$ при $1\leqslant x\leqslant 2$; $y'=1$ при $2<x<+\infty$. **980.** $y'=2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$ при $x\in[a,\ b]$; $y'=0$ при $x\in[a,\ b]$. **981.** $y'=1$ при $x<0$; $y'=\frac{1}{1+x}$ при $0\leqslant x<+\infty$. **982.** $y'=\frac{1}{1+x^2}$ при $-1<$ $<x\leqslant 1$; $y'=1/2$ при $|x|>1$. **983.** $y'=2xe^{-x^2}(1-x^2)$ при $|x|\leqslant 1$; $y'=0$ при $|x|>1$. **984.** а) $\frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$; б) $\frac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$ $(x\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq\pm 3)$; в) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}$; г) $\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$.

985. а) $\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}\ (\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0)$;

б) $\dfrac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$ $(\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0)$; в) $\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\times$ $\times\left\{\dfrac{1}{\varphi(x)}\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)\right\}$; г) $\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\cdot\dfrac{1}{\ln\varphi(x)}-$ $-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\cdot\dfrac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$. **986.** а) $2xf'(x^2)$; б) $\sin 2x\,[f'(\sin^2 x)-$ $-f'(\cos^2 x)]$; в) $e^{f(x)}[e^x f'(e^x)+f'(x)f(e^x)]$; г) $f'(x)\cdot f'[f(x)]\times$ $\times f'\{f[f(x)]\}$. **986.1.** 1 000! **988.** $3x^2+15$. **989.** $6x^2$. **992.** а) $n>$ >0; б) $n>1$; в) $n>2$. **993.** а) $n\geqslant m+1$; б) $1<n<m+1$. **994.** $\varphi(a)$. **995.** $f'_-(a)=-\varphi(a)$, $f'_+(a)=\varphi\ (a)$.

999. а) Недифференцируема при $x=1$; б) недифференцируема при $x=\dfrac{2k-1}{2}\pi$, k—целое; в) дифференцируема всюду; г) недифференцируема при $x=k\pi$, k — целое; д) недифференцируема при $x=-1$. **1000.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\operatorname{sgn} x$ при $x\neq 0$ и $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$. **1001.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\pi[x]\cos\pi x$ при $x\neq$ целому числу; $f'_-(k)=\pi(k-1)(-1)^k$, $f'_+(k)=\pi k\times$ $\times(-1)^k$ при k целом. **1002.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\left(\cos\dfrac{\pi}{x}+\dfrac{\pi}{x}\times\right.$ $\left.\times\sin\dfrac{\pi}{x}\right)\cdot\operatorname{sgn}\left(\cos\dfrac{\pi}{x}\right)$ при $x\neq\dfrac{2}{2k+1}$ (k—целое); $f'_-\left(\dfrac{1}{2k+1}\right)=$ $=-(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $f'_+\left(\dfrac{2}{2k+1}\right)=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$. **1003.** $f'_-(x)=$ $=f'_+(x)=\dfrac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$ при $\sqrt{2k\pi}<|x|<\sqrt{(2k+1)\pi}$ $(k=0, 1,$ $2, \ldots)$; $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$; $f'_\mp\left(\sqrt{(2k+1)\pi}\right)=\mp\infty$, $f'_\pm\left(\sqrt{2k\pi}\right)=\pm\infty$ $(k=1, 2, \ldots)$. **1004.** $f'_-(x)=f'_+(x)=$ $=\dfrac{1+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{1/x}}{\left(1+e^{1/x}\right)^2}$ при $x\neq 0$; $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=(0)$. **1005.** $f'_-(x)=$ $=f'_+(x)=\dfrac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$ при $x\neq 0$; $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$.

1006. $f'_-(x)=f'_+(x)=\dfrac{\varepsilon}{x}$, где $\varepsilon=-1$ при $0<|x|<1$ и $\varepsilon=$ $=1$ при $1<|x|<+\infty$ $f'_-(\mp 1)=-1$, $f'_+(\mp 1)=1$. **1007.** $f'_-(x)=$ $=f'_+(x)=\dfrac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}$ при $x\neq\mp 1$; $f'_-(\pm 1)=\mp 1$, $f'_+(\pm 1)=$

$=\mp 1$. **1008.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{(x-2)^2+1}$ при $x\neq 2$; $f'_{\mp}(2)=\mp\pi/2$. **1009.1.** а) $f'_-(0)=-1/2$, $f'_+(0)=1/2$; б) $f'_-(1)=f'_+(1)=1/2$; в) $f'_-(0)=f'_+(0)=0$. **1010.** $a=2x_0$; $b=-x_0^2$. **1011.** $a=f'_-(x_0)$; $b=f(x_0)-x_0f'_-(x_0)$. **1012.** $A=\frac{k_1+k_2}{(b-a)^2}$, $c=\frac{ak_2+bk_1}{k_1+k_2}$. **1013.** $a=\frac{3m^2}{2c}$, $b=-\frac{m^2}{2c^3}$.
1014. а) Можно; б) нельзя. **1015.** а) Нельзя, б) нельзя. **1016.** а), б), в) Функция $F(x)$ может как иметь производную $F'(x)$, так и не иметь ее. **1017.** $x=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **1018.** а) Не может; б) может. **1019.** 1) Не обязательно; 2) обязательно. **1020.** Не обязательно. **1021.** Не следует. **1022.** Не следует. **1023.** Вообще говоря, нельзя. **1024.** $P_n=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$;

$$Q_n=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

1025. $$S_n=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2x}}{\sin\frac{x}{2}};$$

$$T_n=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

1025.1. $$S_n=\frac{n\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{sh}^2\frac{nx}{2}}{2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}.$$ **1026.** $S_n=$ $=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x$. **1029.** 40π см²/с. **1030.** 25 м²/с; 0,4 м/с. **1031.** 50 км/ч. **1032.** $S(x)=\frac{x^2}{2}$, если $0\leqslant x\leqslant 2$; $S(x)=x^2-2x+2$, если $x>2$; $S'(x)=x$, если $0\leqslant x\leqslant 2$; $S'(x)=2x-2$, если $x>2$. **1033.** $S(x)=\frac{|x|}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{|x|}{a}$; $S'(x)=\sqrt{a^2-x^2}\operatorname{sgn}x$ $(0<|x|\leqslant a)$. **1034.** $y'_x=\frac{1}{3(y^2+1)}$.
1035. $y'_x=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$. **1036.** а) $-\infty<y<+\infty$; $x'_y=\frac{x}{x+1}$; б) $-\infty<y<+\infty$, $x'_y=\frac{1}{1-x+y}$; в) $-\infty<y<+\infty$,

$x'_y = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$; г) $-1<y<1$; $x'_y = \dfrac{1}{1-y^2}$. 1037. а) $x_1 = -\sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ $(-\infty<y\leqslant 1)$; $x_2 = -\sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$; $x_3 = \sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$; $x_4 = \sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ $(-\infty<y\leqslant 1)$; $x'_i = \dfrac{1}{4x(1-x^2)}$ $(i=1, 2, 3, 4)$. б) $x_1 = -\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$ $(0\leqslant y<1)$; $x_2 = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$ $(0\leqslant y<1)$; $x'_i = \dfrac{x^3}{2y^2}$ $(i=1, 2)$; в) $x_1 = -\ln(1+\sqrt{1-y})$ $(-\infty<y\leqslant 1)$; $x_2 = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-y}}{y}$ $(0<y\leqslant 1)$; $x'_i = -\dfrac{1}{2(e^{-x}-e^{-2x})}$ $(i=1, 2)$.

1038. $y'_x = -\dfrac{3}{2}(1+t)$; -3; $-\dfrac{3}{2}$ и $-\dfrac{9}{2}$; $(-4;\ 4)$.

1039. $\sqrt[6]{\dfrac{(1-\sqrt{t})^4}{t\left(1-\sqrt[3]{t}\right)^3}}$ $(t>0,\ t\neq 1)$. 1040. $y'_x = -1$ $(0<x<1)$. 1041. $y'_x = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$ $(0<|t|<\pi)$. 1042. $y'_x = \dfrac{b}{a}\times$ $\times \operatorname{cth} t$ $(|t|>0)$. 1043. $y'_x = -\operatorname{tg} t\left(t\neq\dfrac{2k+1}{2}\pi,\ k - \text{целое}\right)$.

1044. $y'_x = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$ $(t\neq 2k\pi,\ k - \text{целое})$. 1045. $y'_x = \operatorname{tg} t\ \times$ $\times \operatorname{g}\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(t\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ t\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$. 1046. $y'_x = \operatorname{sgn} t$ $(0<|t|<+\infty)$. 1048. $y' = \dfrac{1-x-y}{x-y}$; $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$. 1049. $\dfrac{p}{y}$.

1050. $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$. 1051. $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. 1052. $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$.

1053. $\dfrac{x+y}{x-y}$. 1054. а) $\operatorname{tg}(\varphi+\operatorname{arctg}\varphi)$; б) $-\operatorname{ctg}\dfrac{3\varphi}{2}\left(\varphi\neq 0,\ \varphi\neq\pm\dfrac{2\pi}{3}\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\varphi+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{m}\right)$. 1055. а) $y=\sqrt[3]{4}\,(x+1)$; $y=-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1)$; б) $y=3$, $x=2$; в) $x=3$, $y=0$.

1056. а) $\left(\dfrac{1}{2},\ 2\dfrac{1}{4}\right)$; б) $(0,\ 2)$. 1058. $|x|<\dfrac{\pi}{3}$ и $\dfrac{2\pi}{3}<$

$x \geqslant 0$ **2171.** x, если $|x| \leqslant 1$; $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\operatorname{sgn} x$, если $|x|>1$.

2172. $\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\left((x)-\frac{1}{2}\right)\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}$, где $(x)=x-[x]$.

2173. $\frac{[x]}{\pi}\left\{[x]-(-1)^{[x]}\cos \pi x\right\}$. **2174.** $x-\frac{x^3}{3}$ при $|x| \leqslant 1$; $x-\frac{x}{2}|x|+\frac{1}{6}\operatorname{sgn} x$ при $|x|>1$. **2175.** x, если $-\infty<x\leqslant 0$; $\frac{x^2}{2}+x$, если $0\leqslant x\leqslant 1$; $x^2+\frac{1}{2}$, если $x>1$. **2176.** $xf'(x)-f(x)$. **2177.** $\frac{1}{2}f(2x)$. **2178.** $f(x)=2\sqrt{x}$. **2179.** $x-\frac{x^2}{2}$.
2180. $f(x)=x$ при $-\infty<x\leqslant 0$; $f(x)=e^x-1$ при $0<x<+\infty$.

ОТДЕЛ IV

2181. $12\frac{1}{2}$. **2182.** а) $\underline{S_n}=16\frac{1}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$, $\overline{S_n}=16\frac{1}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$; б) $\underline{S_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}}$, $\overline{S_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$; в) $\underline{S_n}=\frac{10\,230}{n\left(2^{10/n}-1\right)}$, $\overline{S_n}=\frac{10\,230\cdot 2^{10/n}}{n\left(2^{10/n}-1\right)}$. **2183.** $\underline{S_n}=31\cdot\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{32}-1}$; $\frac{31}{5}$.

2184. $v_0T+\frac{1}{2}gT^2$. **2185.** 3. **2186.** $\frac{a-1}{\ln a}$. **2187.** 1.

2188. $\sin x$. **2189.** $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. **2190.** $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$. **2191.** $\ln\frac{b}{a}$.

2192. а) 0, если $|\alpha| \leqslant 1$; б) $\pi\ln\alpha^2$, если $|\alpha|>1$.

2193.4. $\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$. **2201.** Вообще говоря нет.

2203. Не обязательно. **2206.** $11\frac{1}{4}$. **2207.** 2. **2208.** $\frac{\pi}{6}$.

2209. $\frac{\pi}{3}$. **2210.** 1. **2211.** 1. **2212.** $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$.

2213. $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. **2214.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$. **2215.** $\frac{\pi}{2|ab|}$.

2216. а) Подынтегральная функция $\frac{1}{x}$ и ее первообразная $\ln|x|$ разрывны в промежутке интеграции $[-1, 1]$; б) функция $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$, играющая роль первообразной, разрывна при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; в) функция $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ разрывна при $x = 0$.

2217. $\frac{2}{3}$. **2218.** $200\sqrt{2}$. **2219.** $\frac{1}{2}$. **2220.** $\ln 2$. **2221.** $\frac{\pi}{4}$.

2222. $\frac{2}{\pi}$. **2223.** $\frac{1}{p+1}$. **2224.** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **2225.** $\frac{1}{e}$.

2226. $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$. **2227.** $\frac{5}{6}\pi$. **2228.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **2229.** $x+\frac{1}{2}$. **2230.** $\frac{1}{\ln 2}$. **2231.** 0; $-\sin a^2$; $\sin b^2$. **2232.** а) $2x\sqrt{1+x^4}$;

б) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$; в) $(\sin x-\cos x)\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$.

2233. а) 1; б) $\frac{\pi^2}{4}$; в) 0. **2233.1.** A. **2235.** 1. **2237.** а) $\frac{5}{6}$;

б) $\frac{t}{2}$. **2238.** а) $\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}$, если $\alpha<0$; $\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^3}{3}$, если $0\leqslant\alpha\leqslant 1$; $\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}$, если $\alpha>1$; б) $\frac{\pi}{2}$, если $|\alpha|\leqslant 1$; $\frac{\pi}{2\alpha^2}$, если $|\alpha|>1$; в) 2, если $|\alpha|\leqslant 1$; $\frac{2}{|\alpha|}$, если $|\alpha|>1$.

2239. $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$. **2240.** π. **2241.** 4π. **2242.** $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

2243. 1. **2244.** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2245.** $\frac{1}{6}$. **2246.** $\frac{\pi a^4}{16}$.

2247. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. **2248.** $2-\frac{\pi}{2}$. **2249.** $\frac{\pi^2}{4}$.

2250. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **2251.** а) Обратная функция $x=\pm t^{3/2}$ двузначна; б) функция $x = 1/t$ разрывна при $t = 0$; в) не существует однозначной непрерывной ветви функции $x = \operatorname{Arctg} t$, определенной на конечном сегменте и пробегающей значения от 0 до π.

2252. Нет. **2253.** Можно. **2256.** $f(x+b)-f(x+a)$.

2260. $\frac{3}{2}e^{5/2}$. 2261. $\int\limits_0^1 [f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)]\,dt + \int\limits_{-1}^0 [f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)]\,dt$. 2262. $4n$. 2263. $\frac{\pi^2}{4}$.
2264. $\operatorname{arctg}\frac{32}{27} - 2\pi$. 2268. $315\frac{1}{26}$. 2269. $\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. 2270. $\frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$. 2271. $-66\frac{6}{7}$. 2272. $-\frac{\pi}{3}$.
2273. $\frac{29}{270}$. 2274. $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$. 2275. $2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.
2276. $2\pi\sqrt{2}$ 2277. $\frac{1}{6}$. 2278. $\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}$. 2279. $\frac{3}{5}(e^{\pi} - 1)$.
2280. $\frac{3}{8}\ln 2 - \frac{225}{1024}$. 2281. $I_n = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$, если $n = 2k$; $I_n = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$, если $n = 2k+1$. 2282. См. 2281.
2283. $(-1)^n\left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right]$.
2284. $2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. 2285. См. 2281. 2286. $I_n = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$.
2287. $I_n = (-1)^n\left\{-\ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]\right\}$.
2290. $\frac{\pi(2m)!\,(2n)!}{2^{2m+2n+1}m!\,n!\,(m+n)!}$. 2291. 0, если n четное; π, если n нечетное. 2292. $(-1)^n\pi$. 2293. $\frac{\pi}{2^n}$. 2294. $\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}$.
2295. 0. 2296. 0. 2297. $\frac{1}{2^{2n}a}\left(1 - e^{-2a\pi}\right)\left[C_{2n}^n + 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \times \frac{a^2}{a^2 + (2n-2k)^2}\right]$. 2298. $\frac{\pi}{4\pi}(-1)^{n-1}$. 2299. $\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$.

2302. В точках разрыва функции $f(x)$ производная $F'(x)$ может как существовать, так и не существовать. 2303. $|x| + C$.
2304. $\arccos(\cos x) + C$. 2305. $x[x] - \frac{[x]([x]+1)}{2} + C$.
2306. $\frac{x^2[x]}{2} - \frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12} + C$. 2307. $C + \frac{1}{\pi}\times$

$\times$ arccos (cos πx). **2308.** $\frac{1}{2}(|l+x|-|l-x|)+C$. **2309.** -1. **2310.** $14-\ln 7!$ **2311.** $\frac{30}{\pi}$. **2312.** $-\frac{\pi^2}{4}$. **2313.** $\ln n!$. **2314.** $-\operatorname{th}\frac{\pi}{2}$. **2315.** $\frac{8}{3}$. **2316.** а) $-$; б) $+$; в) $+$; г) $-$. **2317.** а) Второй; б) второй; в) первый. **2318.** а) $\frac{1}{3}$; б) $6\frac{2}{3}$; в) 10; г) $\frac{1}{2}\cos\varphi$. **2319.** $\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=b$ — малая полуось эллипса. **2320.** $v_{\text{ср}}=\frac{1}{2}(v_0+v_1)$, где v_1 — конечная скорость тела. **2321.** $\frac{1}{2}i_0^2$. **2321.1.** A. **2322.** а) $\theta=\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$; б) $\theta=\frac{1}{e}$; в) $\theta=\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta=1$. **2323.** $\frac{8\pi}{3}\pm$ $\pm\frac{4\pi}{3}\theta\ (|\theta|<1)$. **2324.** Заключается между $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{10}$. **2325.** $0{,}01-0{,}005\theta\ (0<\theta<1)$. **2326.1.** а) 1; б) $f(0)\ln\frac{b}{a}$. **2328.** $\frac{\theta}{50\pi}\ (0<\theta<1)$. **2329.** $\frac{2}{a}\theta\ (|\theta|<1)$. **2330.** $\frac{\theta}{a}\ (|\theta|<1)$. **2334.** $\frac{1}{a}$. **2335.** -1. **2336.** π. **2337.** π. **2338.** $\frac{2}{3}\ln 2$. **2339.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. **2340.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **2341.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **2342.** $\frac{\pi}{2}$. **2343.** $\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. **2344.** 0. **2345.** $\frac{\pi}{2}-1$. **2346.** $\frac{a}{a^2+b^2}$. **2347.** $\frac{b}{a^2+b^2}$. **2348.** $I_n=n!$ **2349.** $I_n=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\times$ $\times\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn} a}{\left(ac-b^2\right)^{n+1/2}}$. **2350.** $I_n=n!\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\ln(k+1)$, где C_n^k — число сочетаний из n элементов по k. **2351.** $I_n=$ $=\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$, если n — четное, и $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}$, если n — нечетное. **2352.** $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\pi$, если n — четное; $I_n=$

$=\frac{(n-1)!!}{n!!}$, если n — нечетное. 2353. а) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$; б) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. 2354. $\frac{2\sqrt[4]{8}\,e^{-\pi/8}}{1-e^{-\pi}}$. 2356. а) 1; б) $\frac{\pi}{2}$; в) 0. 2357. а) 1; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; г) $\frac{1}{\alpha}f(0)$. 2358. Сходится. 2359. Сходится. 2360. Расходится. 2361. Сходится при $p>0$. 2362. Сходится, если $p>-1$ и $q>-1$. 2363. Сходится, если $m>-1$, $n-m>1$. 2364. Сходится при $1<n<2$. 2365. Сходится при $1<n<2$. 2366. Сходится, если $m>-2$, $n-m>1$. 2367. Сходится при $n>0$ ($a\neq 0$). 2368. Расходится. 2369. Сходится, если $p<1$, $q<1$. 2370. Сходится при $n>-1$. 2370.1. Сходится. 2371. Сходится, если $\min(p,q)<1$, $\max(p,q)>1$. 2372. Сходится. 2373. Сходится. 2374. Сходится, если $p>1$, $q<1$. 2375. Сходится при $p>1$, q произвольном, $r<1$ и при $p=1$, $q>1$, $r<1$. 2376. Сходится, если $p_i<1$ ($i=1, 2, \ldots, n$), $\sum_{i=1}^{n} p_i>1$. 2376.1. Сходится при $\alpha>-1$, $\beta>-1$, $\alpha+\beta<-1$. 2377. Сходится, если $P_n(x)$ не имеет корней в промежутке $[0, +\infty]$ и $n>m+1$. 2378. Сходится не абсолютно. 2379. Сходится не абсолютно. 2380. Сходится абсолютно, если $-1<\frac{p+1}{p}<0$; сходится условно, если $0\leqslant\frac{p+1}{q}<1$. 2380.1. Сходится. 2380.2. Сходится. 2381. Сходится абсолютно, если $p>-2$, $q>p+1$; сходится условно, если $p>-2$, $p<q\leqslant p+1$. 2382. Сходится условно при $0<n<2$. 2383. Сходится абсолютно при $n>m+1$; сходится условно при $m<n\leqslant m+1$. 2385. Нет. 2392. $\ln\frac{1}{2}$. 2393. 0. 2394. π. 2395. 0. 2397. $\frac{a^2}{3}$. 2398. $4\frac{1}{2}$. 2399. $4\frac{1}{2}$. 2400. $9{,}9-8{,}1\lg e\approx 6{,}38$. 2400.1. $2-\frac{1}{\ln 2}\approx 0{,}56$. 2400.2. $\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}\approx 0{,}97$. 2401. $\frac{\pi}{2}$. 2402. πa^2. 2403. πab. 2404. $\frac{4}{3}a^3$. 2405. $\frac{88}{15}\sqrt{2}\,p^2$. 2406. $\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. 2407. $3\pi a^2$. 2408. $\frac{\pi a^2}{2}$. 2409. $\frac{2\pi}{n+2}$. 2410. $\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}\approx 0{,}546$.

2411. $(3\pi+2):(9\pi-2)$. 2412. $x=\operatorname{ch} S$, $y=\operatorname{sh} S$. 2413. $3\pi a^2$. 2414. $\frac{8}{15}$. 2415. $\frac{a^2}{3}(4\pi^2+3\pi)$. 2416. $6\pi a^2$. 2417. $\frac{3\pi}{8}\times\frac{c^4}{ab}$. 2417.1. $\pi a^2\left(\frac{16}{\sqrt{3}}-9\right)$. 2418. a^2. 2419. $\frac{3\pi a^2}{2}$. 2420. $\frac{\pi a^2}{4}$. 2421. $\frac{p^2}{6}(3+4\sqrt{2})$. 2422. $\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$. 2422.1. 11π. 2422.2. $\frac{1}{\pi}$. 2423. $(\pi-1)\frac{a^2}{4}$. 2424. $\frac{1}{2}\times\left(1-\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$. 2424.1. $\frac{2}{3}$. 2424.2. $\frac{1}{\pi}$. 2424.3. $4\frac{4}{15}$. 2424.4. $\pi\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right)$. 2425. $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)a^2$. 2426. $\frac{3}{2}a^2$. 2427. $\pi a^2\sqrt{2}$. 2428. a^2. 2429. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 2430. $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$. 2431. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. 2432. $2\sqrt{x_0\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}+p\ln\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}$. 2433. $\sqrt{h^2-a^2}$. 2434. $x_0-\sqrt{2}+\sqrt{1+e^{2x_0}}-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}$. 2435. $\frac{e^2+1}{4}$. 2436. $a\ln\frac{a+b}{a-b}-b$. 2437. $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$. 2438. $a\ln\frac{a}{b}$. 2439. $4a\left(1+\sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$. 2440. $6a$ 2441. $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$. 2442. $1+\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$. 2443. $8a$. 2444. $2\pi^2 a$. 2445. $2\left(\operatorname{ch}\frac{T}{2}\sqrt{\operatorname{ch} T}-1\right)-\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2}+\sqrt{\operatorname{ch} T}}{1+\sqrt{2}}$. 2445.1. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}^{3/2}2T-1)$. 2446. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. 2447. $\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}a$. 2448. $8a$. 2449. $p[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

2450. $\frac{3\pi a}{2}$. 2451. $a(2\pi - \operatorname{th}\pi)$. 2452. $2+\frac{1}{2}\ln 3$.

2452.1. $6\frac{1}{3}$. 2452.2. $\operatorname{sh} R$. 2452.3. T. 2455. $\frac{2\pi}{5\sqrt{3}} \approx 0{,}73$.

2456. $\frac{bh}{6}(2a+c)$. 2457. $\frac{h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$.

2458. $\frac{\pi h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$. 2459. $\frac{1}{2}SH$. 2462. $\frac{2}{3}\times abc$. 2463. $\frac{4}{3}\pi abc$. 2464. $\frac{8\pi abc}{3}$. 2465. $\frac{16}{3}a^3$. 2466. $\frac{2}{3}\times a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. 2467. $\frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}$. 2468. $\frac{\pi a^3}{2}$. 2469. $\frac{4}{15}$.

2470. $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}a^3$. 2472. $\frac{3}{7}\pi ab^2$. 2473. а) $\frac{16\pi}{15}$; б) $\frac{8\pi}{3}$.

2474. а) $\frac{\pi^2}{2}$; б) $2\pi^2$. 2475. а) $\frac{4}{15}\pi ab^2$; б) $\frac{\pi a^2 b}{6}$.

2476. а) $\frac{\pi}{2}$; б) 2π. 2477. $2\pi^2a^2b$. 2478. $\frac{8\pi a^3}{3}$.

2479. $\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}$. 2480. а) $5\pi^2a^3$; б) $6\pi^3a^3$; в) $7\pi^2a^3$.

2481. а) $\frac{32}{105}\pi ab^2$; б) $\frac{32}{105}\pi a^2b$. 2481.1. $V_x=\frac{64}{35}\pi$, $V_y=\frac{64}{105}\pi$. 2483. а) $\frac{8}{3}\pi a^3$; б) $\frac{13}{4}\pi^2a^3$. 2484. а) $\frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\times\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right]$; б) $\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}$; в) $\frac{\pi^2a^3}{4}$. 2484.1. $\frac{2}{3}\times(\pi^4-6\pi^2)a^3$. 2484.2. $\frac{2}{3}\pi$. 2485. $\frac{\pi^2a^3}{2\sqrt{2}}$. 2486. $\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$. 2487. $2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}+\frac{8b^2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi a}{2b}+\frac{\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}}{2b}\right)$. 2488. $\pi\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right]$.

2489. а) $\frac{2\pi}{3}[(2x_0+p)\sqrt{2px_0+p^2}-p^2]$; б) $\frac{\pi}{4}\left[(p+4x_0)\times\sqrt{2x_0(p+2x_0)}-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\right]$. 2490. а) $2\pi b^2+2\pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$; б) $2\pi a^2+\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\left[\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right]$, где $\varepsilon =$

$=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса. **2491.** $4\pi^2ab$. **2492.** $\frac{12}{5}\times\pi a^2$. **2493.** а) $\pi a\left(2b+a\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right)$; б) $2\pi a\left(a+b\operatorname{sh}\frac{b}{a}-a\operatorname{ch}\frac{b}{a}\right)$. **2494.** $4\pi a^2$. **2495.** а) $\frac{64}{3}\pi a^2$; б) $16\pi^2a^2$; в) $\frac{32}{3}\times\pi a^2$. **2496.** $\frac{3\pi}{5}a^2(4\sqrt{2}-1)$. **2497.** $\frac{32}{5}\pi a^2$. **2498.** а) $2\pi a^2\times(2-\sqrt{2})$; б) $2\pi a^2\sqrt{2}$; в) $4\pi a^2$. **2499.** $\frac{5}{128\sqrt[3]{10}}[14\sqrt{5}+17\ln(2+\sqrt{5})]\approx 1{,}013$. **2500.** $V=\frac{4\pi}{3}p^2$; $P=2\pi p^2[(2+\sqrt{2})+\ln(1+\sqrt{2})]$. **2501.** $M_1=2a^2$; $M_2=\frac{\pi a^3}{2}$. **2501.1.** $\frac{p^2}{8}[\sqrt{2}+5\ln(1+\sqrt{2})]$. **2502.** $M_1=\frac{bh^2}{6}$; $M_2=\frac{bh^3}{12}$. **2502.1.** $I_x=\frac{8}{35}a^4$, $I_y=\frac{8}{5}a^4$, $r_x=a\sqrt{6/35}$, $r_y=a\sqrt{6/5}$. **2503.** $M_2^{(x)}=\frac{\pi ab^3}{4}$; $M_2^{(y)}=\frac{\pi a^3b}{4}$. **2504.** $M_1=\frac{\pi r^2h^2}{12}$, $M_2=\frac{\pi}{30}r^2h^3$. **2504.1.** $I=\frac{2}{5}MR^2$. **2507.** $x_0=a\times\frac{\sin\alpha}{\alpha}$; $y_0=0$. **2508.** $\left(\frac{9}{20}a,\ \frac{9}{20}a\right)$. **2509.** $\left(\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4b}{3\pi}\right)$. **2510.** $\left(0,\ 0,\ \frac{3}{8}a\right)$. **2511.** $\varphi_0=\varphi-\alpha$, где $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2m}$; $r_0=\frac{mr}{\sqrt{1+4m^2}}$. Логарифмическую спираль $r_0=\frac{am}{\sqrt{1+4m^2}}e^{m(\varphi_0+\alpha)}$. **2512.** $\varphi_0=0$, $r_0=\frac{5}{6}a$. **2513.** $x_0=\pi a$, $y_0=\frac{5}{6}a$. **2514.** $x_0=\frac{2}{3}a$, $y_0=0$. **2515.** $\left(0,\ 0,\ \frac{a}{2}\right)$. **2516.** 75 кгс. **2517.** $A_h=mg\frac{Rh}{R+h}$, где R — радиус Земли; $A_\infty=mgR$. **2518.** 0,5 кгс·м. **2519.** 1740 кгс·м. **2520.** $\frac{2}{3}a^3$. **2521.** $708\frac{1}{3}T$. **2522.** $v_0T+\frac{a}{2}T^2$. **2523.** $\frac{4}{15}\pi\delta\omega^2R^5$. **2524.** Проекции силы притяжения на координатные оси: $X=0$,

$Y = -2km\mu_0/a$, где k — постоянная тяготения. **2525.** $2\pi km\delta_0 \times \times\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, где k — постоянная тяготения. **2526.** Примерно 3 часа. **2527.** Сосуд должен быть ограничен поверхностью образованной вращением кривой $y = Cx^4$ вокруг вертикальной оси Oy. **2528.** $Q = Q_0 \cdot 2^{-t/1600}$ **2529.** 99,92 %. **2530.** $\frac{\gamma H^2}{6E}$.

В ответах на приближенное вычисление определенных интегралов даны табличные значения. **2531.** —6,2832. **2532.** 0,69315. **2533.** 0,83566. **2534.** 1,4675. **2535.** 17,333. **2536.** 5,4024. **2537.** 1,37039. **2538.** 0,2288. **2539.** 0,915966. **2540.** 3,14159. **2541.** 1,463. **2542.** 0,3179. **2543.** 0,8862. **2544.** 51, 04.

2545.

x	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	$\pi/3$	2π
y	0	0,99	1,65	1,85	1,72	1,52	1,42

ОТДЕЛ V

2546. $\frac{2}{3}$. **2547.** $\frac{3}{2}$. **2548.** 3. **2549.** 1. **2550.** $\frac{1}{3}$. **2551.** а) $\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$; б) $\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}$. **2552.** $1-\sqrt{2}$. **2553.** Сходится лишь при $x = k\pi$ (k — целое). **2556.** Расходится. **2557.** Расходится. **2558.** Сходится. **2559.** Расходится. **2560.** Расходится. **2561.** Расходится. **2562.** Сходится. **2563.** Сходится. **2564.** Расходится. **2566.** Может как сходиться, так и расходиться. **2567.** а) Может как сходиться, так и расходиться; б) расходиться. **2578.** Сходится. **2579.** Сходится. **2580.** Сходится. **2581.** а) Сходится; б) расходится. **2582.** Сходится. **2583.** Сходится. **2584.** Сходится. **2585.** Сходится. **2585.1.** Сходится. **2585.2.** Сходится при любых α и x. **2586.** Сходится. **2587.** Расходится. **2588.** Расходится. **2589.** Сходится. **2589.1.** Сходится. **2589.2** Сходится. **2590.** Сходится. **2591.2.** $n \geqslant 13$. **2595.** Сходится. **2596.** Сходится. **2597** Сходится. **2597.1.** Сходится. **2598.** Сходится при $p > 2$. **2599**. Сходится при $\frac{b-a}{d} > 1$. **2600.** Сходится при $p > \frac{3}{2}$. **2601.** Сходится. **2602.** Сходится при $p+q > 1$. **2603.** Сходится при $q > p$. **2604.** Сходится при $\frac{p}{2}+q > 1$.

2605. (н). Сходится при $\alpha(q-p)>1$. **2607.** Сходится при $q>p+1$. **2608.** Сходится при $p>0$. **2609.** Сходится при $p>0$. **2610.** Сходится при $p>\frac{1}{2}$. **2611.** Сходится при $b\neq 1$. **2612.** Сходится при $p>1$. **2613.** Расходится. **2614.** Расходится. **2614.2.** Сходится при $p+x>1$. **2616.** Сходится при $x<\frac{1}{e}$. **2617.** Сходится. **2618.** Расходится. **2619.** Сходится при $p>1$. **2620.** Сходится при $p>1$ q произвольном и при $p=1$, $q>1$. **2620.1.** Расходится. **2620.2.** Сходится. **2620.3.** Сходится. **2621.** Расходится. **2623.** 1,20. **2626.** Сходится при $\alpha>\frac{1}{2}$. **2627.** Сходится, если $a=\frac{1}{2}$. **2628.** Расходится. **2629.** Сходится. **2630.** Сходится при $a>2$. **2631.** Сходится. **2632.** Сходится. **2633.** Сходится. **2634.** Сходится, если $c=0$, $\frac{a}{d}<-1$. **2635.** Расходится. **2636.** Сходится, если $\alpha\neq 0$. **2637.** Сходится. **2638.** Расходится. **2639.** Сходится. **2640.** Сходится, если $a=\sqrt{bc}$. **2641.** Сходится, если $\alpha<-1$. **2642.** Сходится, если $\alpha>\frac{1}{2}$. **2643.** Сходится при $a^b>e$, $c=0$ и при $a^c>1$. **2644.** Сходится при $a+b>1$. **2645.** Сходится. **2646.** Сходится. **2647.** Сходится. **2648.** Расходится. **2649.** Сходится. **2650.** Сходится. **2651.** Сходится. **2652.** Сходится при $\alpha>2$. **2653.** Сходится. **2654.** Сходится. **2655.** а) $N>100\,000$; б) $N\geqslant 12$; в) $N>4$. **2659.** $\frac{2}{9}$. **2660.** $1\frac{3}{7}$. **2661.** $\ln 2$. **2662.** а) $\frac{3}{2}\ln 2$; б) $\frac{1}{2}\ln 2$. **2664.** Сходится. **2665.** Сходится. **2666.** Сходится. **2666.1.** Не следует. **2667.** Сходится. **2668.** Сходится. **2669.** Сходится. **2670.** Расходится. **2671.** Сходится. **2672.** Сходится. **2673.** Расходится. **2673.1.** Сходится. **2675.** Абсолютно сходится при $p>1$; условно сходится при $0<p\leqslant 1$. **2676.** Абсолютно сходится при $p>1$; условно сходится при $0<p\leqslant 1$. **2677.** Абсолютно сходится при $p>1$; условно сходится при $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$. **2678.** Абсолютно сходится при $|x-\pi k|<\frac{\pi}{4}$ (k — целое); условно сходится при $x=\pi k\pm\frac{\pi}{4}$. **2679.** Сходится условно при любом x, не равном целому отрицательному числу. 2680. Абсолютно сходится при $p > 1$; условно сходится при $0 < p \leqslant 1$. 2681. Абсолютно сходится при $p > 2$; условно сходится при $1 < p \leqslant 2$. 2682. Абсолютно сходится при $p > 1$; условно сходится при $1/2 < p \leqslant 1$. 2683. Условно сходится. 2584. Абсолютно сходится. 2685. Расходится. 2686. Условно сходится. 2687. Абсолютно сходится при $p > 1$; условно сходится при $1/2 < p \leqslant 1$. 2688. Расходится. 2689. Абсолютно сходится при $p > 2$; условно сходится при $0 < p \leqslant 2$. 2690. Сходится. 2691. Расходится. 2692. Абсолютно сходится при $q > p+1$; условно сходится при $p < q \leqslant p+1$. 2693. Абсолютно сходится при $p > 1$, $q > 1$; условно сходится при $0 < p = q \leqslant 1$. 2694. Абсолютно сходится при $p > 1$; условно сходится при $p = 1$. 2695. Абсолютно сходится при $p > 1$; условно сходится при $p = 1$. 2696. Абсолютно сходится при $p > 1$, $q > 1$; условно сходится при $0 < p = q \leqslant 1$. 2698. а) $p > 1$; б) $0 < p \leqslant 1$. 2698.1. а) Сходится; б) сходится; в) сходится. 2699. а) $q > p+1$; б) $p < q \leqslant p+1$. 2700. Сходится абсолютно при $m \geqslant 0$; сходится условно при $-1 < m < 0$. 2703.1. а) $n \geqslant 1\,000\,000$; б) $n \geqslant 1{,}32 \cdot 10^{16}$. 2706. а) Расходится; б) может как сходиться, так и расходиться. 2707. $\frac{2}{3}$. 2708. $\frac{3}{4}$. 2709. $-\frac{2}{7}$. 2710. $\frac{1+y}{1-xy}$. 2716. Сходится абсолютно при $|x| > 1$. 2717. Сходится абсолютно при $x > 0$; сходится условно при $x = 0$. 2718. Сходится абсолютно при $x > -\frac{1}{3}$ и при $x < -1$. 2719. Сходится абсолютно при $|x| \neq 1$ и сходится условно при $x = -1$. 2720. Сходится абсолютно при $-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{1}{3}$ и при $\frac{2}{3} < x < \frac{\sqrt{17}+3}{6}$. 2721. Сходится абсолютно при $|x - \pi k| \leqslant \frac{\pi}{6}$ $(k = 0, \pm 1\ \pm 2, \ldots)$. 2722. Сходится абсолютно при $p > 1$ и $x \neq k$ $(k = -1, -2, \ldots)$ и сходится условно при $0 < p \leqslant 1$, $x \neq k$. 2723. Сходится абсолютно при $q > p+1$ и сходится условно при $p < q \leqslant p+1$. 2724. Сходится абсолютно при $|x| < 1$. 2725. Сходится абсолютно при $|x| < 1$. 2726. Сходится абсолютно при $|x| \neq 1$. 2727. Сходится абсолютно при $x \neq -1$. 2728. Сходится абсолютно при $x > 0$. 2729. Сходится абсолютно при $0 < |x| < +\infty$, если $|a| > 1$; расходится, если $|a| \leqslant 1$ или если $x = 0$.

2730. Сходится абсолютно при $x = 2$ и при $x > e$. **2731.** Сходится абсолютно при $x > 1$. **2732.** Сходится, если $0 < \min(x, y) < 1$. **2733.** Сходится абсолютно при $|x| < 1, 0 \leqslant y < +\infty$ и при $|x| > 1$, $y > |x|$; сходится условно при $x = -1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. **2734.** Сходится абсолютно при $\max(|x|, |y|) < 1$. **2735.** Сходится абсолютно при: 1) $0 \leqslant x < 1$, $-\infty < y < +\infty$; 2) $x = 1$, $y > 1$ и 3) $x > 1$, $y > 2$. **2736.** Сходится абсолютно при $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$, где k — целое число. **2738.** $\frac{1}{2} < |x| < 2$; $\frac{6x(x^2-1)}{(2-x)^2(2x-1)^2}$. **2739.** а) Сходится абсолютно при $x \geqslant 0$, сходится условно при $-1 < x < 0$; б) сходится абсолютно при $p + x > 1$ и при $x = 0, 1, 2, \ldots$, сходится условно при $0 < p + x \leqslant 1$; в) сходится абсолютно при: 1) $|x| < 1$, y — произвольно; 2) $x = \pm 1$, $y > \frac{1}{2}$; 3) x — произвольно, $y = 0, 1, 2, \ldots$; сходится условно при $x = 1$, $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$.
2743. При $\varepsilon = 0{,}001$ и $x = \sqrt[m]{0{,}1}$, $N \geqslant 3m$. Нет. **2744.** $n > \frac{1}{\varepsilon}$. **2745.** $n \geqslant 26$. **2746.** а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. **2747.** Сходится равномерно. **2748.** Сходится неравномерно. **2749.** Сходится равномерно. **2750.** Сходится равномерно. **2751.** а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно; в) сходится равномерно. **2752.** а) Сходится неравномерно; б) сходится равномерно. **2753.** Сходится равномерно. **2754.** Сходится неравномерно. **2755.** а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. **2756.** а) Сходится неравномерно; б) сходится равномерно. **2757.** Сходится неравномерно. **2758.** а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. **2759.** Сходится равномерно. **2760.** а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. **2761.** Сходится равномерно. **2762.** Сходится равномерно. **2763.** Сходится неравномерно. **2767.** а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. **2768.** Сходится равномерно. **2768.1.** Сходится неравномерно. **2769.** Сходится неравномерно. **2770.** Сходится равномерно. **2771.** Сходится неравномерно. **2772.** Сходится равномерно. **2773.** а) Сходится неравномерно; б) сходится равномерно. **2775.** а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. **2776.** Сходится неравномерно. **2777.** Сходится равномерно. **2778.** Сходится равномерно. **2779.** Сходится равномерно. **2780.** Сходится равномерно. **2781.** Сходится равномерно. **2782.** Сходится равномерно. **2783.** Может. **2785.** Не обяза-

тельно. **2795.** а) Существует и непрерывна при $x < 1$. б) существует и непрерывна при $|x| < +\infty$; в) существует при $|x| < +\infty$, разрывна при $x = 0$. **2799.** а) Существует и дифференцируема при $x \neq -k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$; б) существует при $|x| < +\infty$, дифференцируема всюду, за исключением $x = 0$. **2802.** а) α произвольно; б) $\alpha < 1$; в) $\alpha < 2$. **2805.** Нет. **2806.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **2807.** 1. **2808.** 1. **2808.1.** $\frac{\pi^2}{6}$. **2809.** Законно. **2810.** Да. **2812.** $R = 1$; $(-1, 1)$. При $x = -1$ сходится абсолютно, если $p > 1$, и условно, если $0 < p \leqslant 1$; при $x = 1$ сходится абсолютно, если $p > 1$, и расходится, если $p \leqslant 1$. **2813.** $R = \frac{1}{3}$; $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. При $x = -\frac{4}{3}$ сходится условно; при $x = -\frac{2}{3}$ расходится. **2814.** $R=4$; $(-4, 4)$. При $x = \pm 4$ расходится. **2815.** $R = +\infty$; $(-\infty, +\infty)$. **2816.** $R = \frac{1}{e}$; $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. При $x = \pm\frac{1}{e}$ расходится. **2817.** $R = +\infty$; $(-\infty, +\infty)$. **2818.** $R = 2$; $(-1, 3)$. При $x = -1$ сходится абсолютно, если $p > 2$, и условно, если $0 < p \leqslant 2$; при $x = 3$ сходится абсолютно, если $p > 2$, и расходится, если $p \leqslant 2$. **2819.** $R = 2^p$; $(-2^p, 2^p)$. При $x = -2^p$ сходится абсолютно, если $p > 2$ и расходится, если $p \leqslant 2$; при $x = 2^p$ сходится абсолютно, если $p > 2$, и сходится условно, если $0 < p \leqslant 2$. **2820.** $R = 1$; $(-1; 1)$. При $x = -1$ сходится абсолютно, если $m \geqslant 0$, и расходится, если $m < 0$; при $x = 1$ сходится абсолютно, если $m \geqslant 0$, и сходится условно, если $-1 < m < 0$. **2821.** $R = \min\left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}\right)$; $(-R, R)$. При $x = -R$ сходится условно, если $a \geqslant b$, и абсолютно, если $a < b$; при $x = R$ расходится, если $a \geqslant b$, и сходится абсолютно, если $a < b$. **2822.** $R = \max(a, b)$; $(-R, R)$. При $x = \pm R$ расходится. **2823.** $R = 1$; $(-1, 1)$. При $x = \mp 1$ сходится абсолютно, если $a > 1$, и расходится, если $a \leqslant 1$. **2824.** $R = 1$; $(-1, 1)$. При $x = \pm 1$ сходится абсолютно. **2825.** $R = 1$; $(-1, 1)$. При $x = -1$ сходится условно; при $x = 1$ расходится. **2826.** $R = 1$; $(-1, 1)$. При $x = -1$ расходится; при $x = 1$ сходится условно. **2827.** $R = 1$; $(-1, 1)$. При $x = \pm 1$ расходится. **2828.** $R = \frac{1}{4}$; $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. При $x = \pm\frac{1}{4}$ расходится. **2829.** $R = \frac{1}{3}$; $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. При $x = \pm\frac{1}{3}$ расходится. **2830.** $R = 1$; $(-1, 1)$. При $x = \pm 1$ сходится абсолютно. **2831.** $R = 1$; $(-1, 1)$. При $x = \pm 1$ сходится условно. **2831.1.** При $0 < x < 2$ сходится абсолютно; при $x = 2$ сходится условно. **2831.2.** Сходится лишь при $x = 0$. **2832.** $R =$

$= 1$; $(-1,\ 1)$. При $x = -1$ сходится абсолютно, если $\gamma - \alpha - \beta > 0$, и сходится условно, если $-1 < \gamma - \alpha - \beta \leqslant 0$; при $x = 1$ сходится абсолютно, если $\gamma - \alpha - \beta > 0$, и расходится, если $\gamma - \alpha - \beta \leqslant 0$. **2833.** $x > 0$. **2834.** $|x| > \frac{1}{2}$. **2835.** $0 < |x| < +\infty$. **2836.** $x > -1$. **2837.** $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$, где k — целое число. **2838.** $-1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3$. **2839.** а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$ $(|x| < |a|)$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$ $(|x-b| < |a-b|)$; в) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}}$ $(|x| > |a|)$.

2840. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$ $(0 < x \leqslant 2)$; $\ln 2$.

2841. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(|x| < +\infty)$. **2842.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(|x| < +\infty)$. **2843.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ $(|x| < +\infty)$.

2844. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n$ $(|x| < +\infty)$. **2845.** $\mu x + \frac{\mu(1^2 - \mu^2)}{3!} x^3 + \frac{\mu(1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2)}{5!} x^5 + \ldots$ $(|x| < 1)$.

2846. $1 - \frac{\mu^2}{2!} x^2 - \frac{\mu^2(2^2 - \mu^2)}{4!} x^4 - \ldots$ $(|x| < 1)$.

2847. $1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} + \ldots$ $(0 < x < 2)$.

2848. $e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24} x^2 - \frac{7}{16} x^3 + \ldots\right)$ $(|x| < 1)$.

2849. $\sin(x+h) = \sin x + h\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \ldots$ $(|h| < +\infty)$; $\cos(x+h) = \cos x - h\sin x - \frac{h^2}{2!}\cos x + \frac{h^3}{3!}\sin x + \ldots$ $(|h| < +\infty)$. **2850.** а) $(-2,\ 2)$;

б) (3, 7). 2850.1 Нет. 2851. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ $(|x|<+\infty)$.

2852. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ $(|x|<+\infty)$. 2853. $\frac{3}{4}\times$
$\times\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ $(|x|<+\infty)$. 2854. $\sum_{n=10}^{\infty}x^n$
$(|x|<1)$. 2855. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ $(|x|<1)$. 2856. $x+$
$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}$ $\left(-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}\right)$.

2857. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$. 2858. $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n$
$\left(|x|<\frac{1}{2}\right)$. 2859. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right]x^n$ $(|x|<1)$.

2860. $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n$ $(|x|<1)$. 2861. $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,
где $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}+(-1)^n\times\right.$
$\left.\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right]$ (числа Фибоначчи). 2862. $\frac{2}{\sqrt{3}}\times$
$\times\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin\frac{2\pi(n+1)}{3}$ $(|x|<1)$. 2862.1. $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, где $c_n=$
$=1$, если $n=4k$; $c_n=-1$, если $n=2k+1$; $c_n=0$, если $n=2k+2$ или $n=2k+3$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$,
$f^{(1000)}(0)=1000!$. 2863. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha$ $(|x|<1)$.

2864. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin n\alpha$ $(|x|<1)$. 2865. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,\mathrm{sh}\,n\alpha$ $(|x|<e^{-|\alpha|})$.

2866. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \; (|x| < 1)$.

2867. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + [1 + (-1)^n](-1)^{n/2+1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leqslant 1)$

2868. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!} x^n \; (|x| < +\infty)$. **2869.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times$

$\times \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \; (|x| \leqslant 1)$; $\frac{\pi}{4}$. **2870.** $x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times$

$\times \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \; (|x| \leqslant 1)$. **2871.** $x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times \right.$

$\left. \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right\} \; (|x| \leqslant 1)$. **2872.** $-2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} x^n \quad (|x| \leqslant 1)$.

2873. а) $x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \; (-1 \leqslant x \leqslant 1)$;

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad (-1 < x < 1)$;

в) $\operatorname{arctg} 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \left(-\frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2} \right)$;

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^{[n/2]} \frac{x^{2n+1}}{2^n (2n+1)} \right\} \quad (|x| < \sqrt{2})$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} \quad (|x| \leqslant 1)$; е) $2|x| \left\{ 1 + \right.$

$\left. + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n+1} \right\}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $-1 \leqslant$

$\leqslant x \leqslant 0$; ж) $1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}\right\}(|x|\leqslant 1)$;

з) $-1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$ $(|x|\leqslant 1)$.

2874. а) $e^{x^2}\left[(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+\right.$ $\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\ldots\right]$; б) $\frac{(-1)^n}{x^{2n}}\times$ $\times e^{a/x}\left[a^n+\frac{n(n-1)}{1!}a^{n-1}x+\frac{n(n-1)(n-2)}{2!}\times\right.$ $\left.\times a^{n-2}x^2+\ldots\right]$; в) $\frac{(-1)^{n-1}n!}{(1+x^2)^n}\left[x^{n-1}-\frac{(n-1)(n-2)}{3!}\times\right.$ $\left.\times x^{n-3}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}x^{n-5}-\ldots\right]$.

2875. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x+1)^{2n}$ $(-2\leqslant x\leqslant 0)$.

2876. $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$ $(|x|>1)$. **2877.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$ $(x>0)$. **2878.** $\frac{x}{1+x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}$ $\left(x>-\frac{1}{2}\right)$. **2881.** $1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{24}x^3-\ldots$ $(|x|<1)$. **2882.** $1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}x^n$ $(|x|<+\infty)$. **2883.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)!}-\frac{2}{(2n-2)!}+\right.$ $\left.+\frac{1}{(2n-4)!}\right]x^n$ $(|x|<+\infty)$, где $0!=1$, $(-1)!=\infty$, $(-2)!=\infty$ и т. д. **2884.** $2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\times$

$\times \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1 \leqslant x < 1)$. **2885.** $x + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\, x^{2n+1}$

$(|x| \leqslant 1)$. **2886.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{n/2} \cos \dfrac{n\pi}{4}}{n!}\, x^n$ $(|x| < +\infty)$.

2887. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n/2} \sin \dfrac{n\pi}{4}}{n!}\, x^n$ $(|x| < +\infty)$.

2888. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\{(-1)^{n-1}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right) x^n\right\} (-1 < x < 1)$.

2889. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1}\right) \dfrac{x^{2n}}{n}$

$(|x| \leqslant 1)$. **2890.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}\, x^{2n}$ $(|x| \leqslant 1)$. **2891.** $x + \dfrac{1}{3}x^3 +$

$+ \dfrac{2}{15}x^5 + \ldots \left(|x| < \dfrac{\pi}{2}\right)$. **2892.** $x - \dfrac{1}{3}x^3 +$

$+ \dfrac{2}{15}x^5 + \ldots \left(|x| < \dfrac{\pi}{2}\right)$. **2893.** $-\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{45}x^3 -$

$- \dfrac{2}{945}x^5 - \ldots$ $(|x| < \pi)$. **2894.** $E_0 = 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \left\{(-1)^k \times \right.$

$\left. \times \dfrac{E_{n-k}}{(2k)!\,(2n-2k)!}\right\} = 0$. **2895.** $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(t)\, x^n$

$(|x| < 1)$, где $P_0(x) = 1$; $P_n(t) = \dfrac{(2n-1)!!}{n!}\left[t^n -\right.$

$\left. - \dfrac{n(n-1)}{2(2n-1)}\, t^{n-2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)}\, t^{n-4} - \ldots\right]$

$(n \geqslant 1)$ (многочлены Лежандра). **2896.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n x^n$, где

$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. **2897.** а) $R \geqslant \min(R_1, R_2)$; б) $R \geqslant R_1 R_2$

2901. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}\ (|x|<+\infty)$. **2902.** $x+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\ (|x|\leqslant 1)$. **2903.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\ (|x|<+\infty)$. **2904.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}\ (|x|\leqslant 1)$. **2905.** $x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{36}+\frac{x^4}{96}-\ldots$ $(|x|<1)$. **2906.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (|x|<1)$. **2907.** $\operatorname{arctg} x$ $(|x|\leqslant 1)$. **2908.** $\operatorname{ch} x\ (|x|<+\infty)$. **2909.** $1+$ $+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)\ (|x|\leqslant 1)$. **2910.** $\frac{1}{\sqrt{1-x}}\ (-1\leqslant$ $\leqslant x<1)$. **2911.** $\frac{x}{(1-x)^2}\ (|x|<1)$. **2912.** $\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$ $(|x|<1)$. **2913.** $\frac{2x}{(1-x)^3}\ (|x|<1)$. **2916.** $R=2$; $(x-1)^2+(y-1)^2<4$. **2917.** $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x^2+y^2<\frac{1}{2}$. **2918.** $R=1$; $x^2+y^2<1$. **2919.** $R=1$; $x^2+y^2<1$. **2920.** $R=\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|$; $(x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2<$ $<4\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **2921.** 2,080. **2922.** а) 0,87606 = = arc 50°11′40″; б) 1,99527; в) 0,60653; г) 0,22314. **2923.** 0,30902. **2924.** 0,999848. **2925.** 0,158. **2926.** 2,718282. **2927.** 0,1823. **2928.** 3,1416. **2929.** 3,142. **2930.** 3,141592654. **2931.** $\ln 2=0,69315$; $\ln 3=1,09861$. **2932.** а) 0,747; б) 2,835; в) 1,605; г) 0,905; д) 1,057; е) 0,119; ж) 0,337; з) 0,927; и) 8,041; к) 0,488; л) 0,507; м) 0,783. **2933.** 3,82. **2934.** 4,84. **2935.** 20,02 м. **2936.** $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x$. **2937.** Ряд Фурье совпадает с многочленом $P_n(x)$. **2938.** $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$; $\frac{\pi}{4}$. **2939.** $\frac{A}{2}-$

$-\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{l}$. **2940.** $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\times$ $\times\frac{\sin nx}{n}$. **2941.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. **2942.** $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\times$ $\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **2943.** $\frac{(a-b)\pi}{4}-\frac{2(a-b)}{\pi}\times$ $\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$.

2944. $\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$. **2945.** $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\right.$ $\left.+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a\cos nx}{n^2-a^2}\right]$. **2946.** $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-a^2}$.

2947. $\frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2+a^2}$. **2948.** $2\,\mathrm{sh}\,ah\left[\frac{1}{2ah}+\right.$ $\left.+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{ah\cos\frac{n\pi x}{h}-\pi n\sin\frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2+(\pi n)^2}\right]$. **2949.** $a+l+$ $+\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ $(a<x<a+2l)$. **2950.** $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$.

2951. $\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$. **2952.** $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k\times\right.$ $\left.\times\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}\right\}$. **2953.** $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x$.

2954. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. 2955. $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}$ ($x \neq$ целому числу). 2956. $\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

2957. $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$. 2958. $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\times$ $\times\cos 2kx$. 2959. $\frac{\alpha}{1-\alpha^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\cos nx$. 2960. $\frac{4}{\pi}\times$

$$\times\ln(1+\sqrt{2})+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k\left[2+\frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{m}\sin\frac{m\pi}{2}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\cos(8k+4)x\right\}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(-1)^k\left[\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{16}{\pi}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{2m-1}\sin(2m-1)\frac{\pi}{4}\right]\cos 8kx\right\}.$$ 2961. а) $\frac{\pi^2}{3}+4\times$

$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$; б) $2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx-$

$-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}$ $(0\leqslant x<\pi)$; в) $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-$

$-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ $(0<x<2\pi)$; $\frac{\pi^2}{6}$, $\frac{\pi^2}{12}$, $\frac{\pi^2}{8}$. 2962. $x^2=$

$=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; $x^3=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+$

$+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3}$; $x^4=\frac{1}{\pi}\pi^4+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+$

$+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\cos nx$. 2963. $\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$; $\frac{\pi^2-3\pi\alpha+3\alpha^2}{6}$.

2964. $\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2\pi nx}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 3)$. **2965.** $\frac{1}{2^m}C_{2m}^m+\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{k=1}^{m}C_{2m}^{m-k}\cos 2kx$.

2966. $\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx\ (|q|<1)$. **2967.** $1+2\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos nx\quad(|q|<1)$.

2968. $\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos nx$. **2969.** $-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx$. **2970.** $-\ln 2-$ $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$. **2971.** $-\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n}$.

2972. $-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}$. **2973.** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.

2974. $x(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}+\frac{4a}{\pi^2}\times$ $\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$; $y(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\times$ $\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$.

2975. $f(-x)=f(x)$; $f(\pi-x)=-f(x)$. **2976.** $f(-x)=-f(x)$; $f(\pi-x)=f(x)$. **2977.** а) $-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{(2k+1)^2}-\frac{8}{\pi}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\right]\times\right.$ $\left.\times\cos(2k+1)x\right\}$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$; б) $\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{8}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^3}\right]\sin(2k+1)x\right\}$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

2978. $a_{2n}=b_{2n}=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$. **2979.** $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$ $(n=1,2,3,\ldots)$. **2980.** а) $a_n=0$, $b_{2k-1}=0$; б) $a_n=0$, $b_{2k}=$

$=0$. 2981. $\alpha_n = a_n$, $\beta_n = -b_n$. 2982. $\alpha_n = -a_n$, $\beta_n = b_n$. 2983. $\bar{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh$, $\bar{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh$. 2984. $A_0 = a_0$, $A_n = a_n \dfrac{\sin nh}{nh}$, $B_n = b_n \dfrac{\sin nh}{nh}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. 2985. $A_0 = a_0^2$, $A_n = a_n^2 + b_n^2$; $B_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. 2986. $\dfrac{1}{2}$. 2987. $\dfrac{1}{4}$. 2988. $2\ln 2 - 1$. 2989. $\dfrac{1}{4}$. 2990. $\dfrac{1}{m}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{m}\right)$. 2991. $\ln 2 - \dfrac{1}{2}$. 2992. $\dfrac{3}{4}$. 2993. 1. 2994. $2(1 - \ln 2)$. 2995. $2e$. 2996. $3e^2$. 2997. $\dfrac{\pi^2}{3} - 3$. 2998. $\dfrac{\pi^2}{4} - \dfrac{39}{16}$. 2999. $\dfrac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1)$. 3000. $\dfrac{1}{6}(4\ln 2 - 1)$. 3001. $e^x(\alpha_m x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \alpha_0)$, где коэффициенты α_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ определяются из равенства $P(n) = \alpha_m n(n-1)\ldots(n-m+1) + \alpha_{m-1}n(n-1)\ldots(n-m+2) + \ldots + \alpha_1 n + \alpha_0$. 3002. $e^{x/2}\left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + 1\right)$. 3003. $\left(x^2 + 1 + \dfrac{1}{x}\right) \times e^{-x} - \dfrac{1}{x}$. 3004. $\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)\cos x - \dfrac{x}{2}\sin x$. 3005. $\dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x} - \operatorname{ch}\sqrt{x}\right)$, если $x \geqslant 0$; $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{|x|}} \times \sin\sqrt{|x|} - \cos\sqrt{|x|}\right)$, если $x < 0$. 3006. $\ln\dfrac{1}{1-x}$. 3007. $2x \times \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$ $(|x| \leqslant 1)$. 3008. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{4} \times \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ $(|x| < 1)$. 3009. $(1-x)^{-a/d} - 1$ $(|x| < 1)$. 3010. $\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^{-1/3} - 1$. 3011. $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ $(|x| < 1)$. 3012. $\dfrac{x(3-x)}{(1-x)^3}$ $(|x| < 1)$. 3013. $(1 + 2x^2)e^{x^2}$. 3014. $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3}\ln 2$. 3015. $\dfrac{\pi}{4}$. 3016. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 3017. $\dfrac{\pi}{2}$. 3018. $\dfrac{\pi - x}{2}$ $(0 < x < 2\pi)$. 3019. $-\ln\left|2\sin\dfrac{x}{2}\right|$ $(0 < x < 2\pi)$. 3020. $\dfrac{1}{2} \times$

$\times \ln\left|\dfrac{\sin\dfrac{x+\alpha}{2}}{\sin\dfrac{x-\alpha}{2}}\right|$. **3021.** $\dfrac{\pi}{4}$, если $0<x<2\alpha$; 0, если $\alpha<x<2\pi-2\alpha$; $-\dfrac{\pi}{4}$, если $2\pi-2\alpha<x<2\pi$. **3022.** $\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x$ $(|x|<\pi)$.

3023. $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\cos x}{2}\right)-\dfrac{x}{2}\sin x$ $(|x|<\pi)$. **3024.** $\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi}{4}|x|$ $(|x|\leqslant\pi)$. **3025.** $\dfrac{x}{2}(1+\cos x)-\sin x\ln\left(2\cos\dfrac{x}{2}\right)$ $(|x|<\pi)$. **3026.** $e^{\cos x}\cos(\sin x)$ $(|x|<+\infty)$. **3027.** $x=i\pi$, $y=j\pi$ $(i, j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **3028.** $2(\arcsin x)^2$ $(|x|\leqslant 1)$.

3029. $\dfrac{4}{4-x}+\dfrac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}$, если $x\geqslant 0$; $\dfrac{4}{4-x}-\dfrac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{3/2}}\ln\dfrac{\sqrt{|x|}+\sqrt{4-x}}{2}$, если $x<0$. **3030.** $\dfrac{1}{x-1}$.

3031. $\dfrac{a_1}{x}$. **3032.** а) $\dfrac{x}{1-x}$; б) $\dfrac{1}{1-x}$. **3033.** а) $\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$; б) $\dfrac{x}{(x-1)^2}$. **3034.** 1. **3035.** $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

3036. $\dfrac{\pi^2}{12}$. **3037.** $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(p+nq)}$. **3038.** $2-\dfrac{\pi^2}{6}$.

3039. $\dfrac{1}{24}$. **3040.** $\dfrac{\pi^2}{12}$. **3041.** $F(k)=\dfrac{\pi}{2}\left\{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\times k^{2n}\right\}$. **3042.** $E(k)=\dfrac{\pi}{2}\left\{1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\dfrac{k^{2n}}{2n-1}\right\}$.

3043. $2\pi a\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\dfrac{\varepsilon^4}{4}-\ldots\right]$, где ε — эксцентриситет эллипса. **3047.** $\dfrac{2\pi a^n}{n!}$. **3048.** $\ln(1+\alpha)$ при $|\alpha|\leqslant 1$ и $\dfrac{1}{\alpha^2}\ln\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)$ при $|\alpha|>1$. **3049.** 0 при

$|\alpha| \leqslant 1$ и $\pi \ln \alpha^2$ при $|\alpha| > 1$. **3050.** $2 \cdot 10^{-6}$. **3061.** $\frac{1}{4}$.

3062. 2. **3063.** $\frac{3}{7}$. **3064.** $a^{-\ln^2}$. **3065.** а) Нет; б) да; в) да; г) да. **3066.** Расходится к нулю. **3067.** Сходится. **3068.** Сходится при $p > 1$. **3069** Расходится к нулю. **3070.** Сходится при любом p. **3071.** Сходится, если $a_1 = a$. **3072.** Сходится, если $\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{i=1}^{p} b_i$. **3073.** Расходится к нулю. **3074.** Сходится.

3075. Сходится. **3076.** Сходится. **3077.** Сходится при любом x. **3078.** Сходится при любом x. **3079.** Сходится при $|x| < 1$. **3080.** Сходится при $|x| < 2$. **3081.** Сходится при $|x| > e$. **3082.** Сходится при любом x. **3083.** Сходится при $|x| < 1$, p, произвольных и при $x = \pm 1$, $p > 1$, $q > \frac{1}{2}$. **3084.** Сходится при любых x и p. **3085.** Расходится.

3088. Сходится условно. **3089.** Расходится. **3090.** Сходится абсолютно, если $p > 1$; сходится условно, если $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$.

3091. Расходится. **3092.** Расходится. **3093.** Расходится. **3094.** Сходится условно. **3095.** Сходится условно. **3096.** Расходится. **3097.** Сходится абсолютно при $\alpha > 1$; сходится условно при $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$. **3109.** $F'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}$; $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty$, $|f_n'(x)| < c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$. **3111.** $157{,}970 + \theta \cdot 0{,}0004$ $(0 < \theta < 1)$. **3112.** $10^{2866} \cdot 7{,}7 \times \left(1 + \frac{\theta}{12000}\right)$ $(|\theta| < 1)$. **3113.** $0{,}0798 \cdot \left(1 + \frac{\theta}{300}\right)$ $(|\theta| < 1)$.

3114. $10^{28} \cdot 1{,}378 \cdot \left(1 + \frac{\theta}{288}\right)$ $(|\theta| \leqslant 1)$. **3115.** $10^{42} \cdot 4{,}792 \cdot \left(1 + \frac{\theta}{120}\right)$ $(|\theta| \leqslant 1)$. **3116.** $0{,}124 \cdot \left(1 + \frac{\theta}{300}\right)$ $(|\theta| < 1)$.

3117. $0{,}355 \cdot \left(1 + \frac{\theta}{600}\right)$ $(|\theta| < 1)$. **3118.** $(2n-1)!! = \sqrt{2}\,(2n)^n \times e^{-n+\theta_n/12n}$ $(|\theta_n| < 1)$. **3119.** $\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} e^{\theta_n/6n}$ $(|\theta_n| < 1)$.

3120. а) 1; б) e; в) $\frac{e}{2}$; г) 1. 3121. $P_3(x) = 1 - \frac{55}{21}x - \frac{1}{14}x^2 + \frac{5}{42}x^3$; $P_3(-1) \approx 3{,}43$; $P_3(1) = -1{,}57$; $P_3(6) \approx 8{,}43$. 3122. $y = y_0 + \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}(x - x_0) + \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{2h^2}(x - x_0)^2$. 3123. $y = 0{,}808 + 0{,}193x - 0{,}00101x^2$. 3124. $\sin x^\circ \approx \frac{5x}{288}\left[1 - \left(\frac{x}{150}\right)^2\right]$; $\sin 20^\circ \approx 0{,}341$; $\sin 40^\circ \approx 0{,}645$; $\sin 80^\circ \approx 0{,}994$. 3125. $P(x) = \frac{1}{3}(7x^2 - 4x^4)$. 3126. $7\frac{1}{3}$. 3127. $B_n(x) = x$; $B_n(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$; $B_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)x^3 + \frac{3}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n^2}x$. 3128. $B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(a + \frac{i}{n}l\right) C_n^i \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{l^n}$, где $l = b - a$. 3129. $B_n(x) = \frac{1}{8}(1-x)(1+x)^3 + \frac{1}{16}(1+x)^4$. 3130. $B_{2n}(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n \sum_{i=1}^{n} iC_{2n}^{n-i}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^i + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^i\right]$. 3131. $B_n(x) = e^{ka}\left[1 + (e^{kl/n} - 1)\frac{x-a}{l}\right]^n$, где $l = b - a$. 3132. $B_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2n} + i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n + \left(\cos\frac{\pi}{2n} - i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n\right]$, где $i^2 = -1$. 3135. $\sigma_{2n-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

ЧАСТЬ II

ОТДЕЛ VI

3136. Полуплоскость $x \geqslant 0$. 3137. $|x| \leqslant 1$; $|y| \geqslant 1$. 3138. Круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$. 3139. Внешность круга $x^2 + y^2 > 1$. 3140. Кольцо $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$. 3141. Луночка $x \leqslant x^2 + y^2 < 2x$. 3142. $-1 \leqslant x^2 + y \leqslant 1$. 3143. Полуплоскость $x + y <$

< 0. 3144. Пара вертикальных углов $|y| \leqslant |x|$ $(x \neq 0)$. 3145. Пара вертикальных тупых углов, ограниченных прямыми $y = 0$ и $y = -2x$, включая границу без общей вершины O (0, 0). 3146. Криволинейный треугольник, ограниченный параболами $y^2 = x$, $y^2 = -x$ и прямой $y = 2$, исключая вершину O (0, 0). 3147. Семейство концентрических колец $2\pi k \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \pi \times (2k+1)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. 3148. Внешность конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, включая границу за вычетом вершины. 3149. Совокупность четырех октантов пространства. 3150. Внутренность двуполостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. 3151. Параллельные прямые. 3152. Концентрические окружности. 3153. Семейство равносторонних гипербол с общими асимптотами $y = \pm x$. 3154. Параллельные прямые. 3155. Пучок прямых с вершиной в начале координат, за вычетом вершины. 3156. Семейство подобных эллипсов. 3157. Совокупность равносторонних гипербол, асимптотически приближающихся к осям координат и расположенных в I и III квадрантах. 3158. Семейство двузвенных ломаных линий, вершины которых расположены на оси Oy. 3159. I и III квадранты при $z = 0$; семейство двузвенных ломаных линий, звенья которых параллельны осям координат, а вершины расположены на прямой $x + y = 0$ при $z > 0$. 3159.1. Линии уровня — стороны углов, параллельные положительным направлениям координатных осей Ox и Oy с вершинами на прямой $y = x$. 3159.2. Семейство контуров квадратов с общим центром O (0, 0), стороны которых параллельны осям координат Ox и Oy при $z > 0$; точка O (0,0) при $z = 0$. 3159.3. Прямые, параллельные оси Ox, если $z < 0$; стороны углов, параллельные координатной оси Ox и положительной полуоси Oy, с вершинами на параболе $y = x^2$, если $z > 0$; положительная полуось Oy, если $z = 0$. 3160. Пучок окружностей, проходящих через начало координат (не включая этого начала!) и ортогональных к оси Ox. 3161. Кривые $y = \dfrac{C}{\ln x}$. 3162. Кривые $y = \dfrac{C+x}{\ln x}$. 3163. Семейство окружностей с центрами на оси Ox, ортогональных к окружности $x^2 + y^2 = a^2$. 3164. Семейство окружностей, ортогональных к оси Oy и проходящих через точки $(-a, 0)$, $(a, 0)$, за вычетом последних. 3165. Прямые $x = m\pi$ и $y = n\pi$ $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, при $z = 0$; система квадратов $m\pi < x < (m+1)\pi$, $n\pi < y < (n+1)\pi$, где $(-1)^{m+n} = z$, при $z = -1$ или $z = 1$. 3166. Семейство параллельных плоскостей. 3167. Семейство концентрических сфер с центром в начале координат. 3168. Семейство двуполостных гиперболоидов при $u<0$; семейство однополостных гиперболоидов при $u>0$; конус при $u=0$. **3169.** Семейство эллиптических цилиндров, общей осью которых является прямая $x+y=0$, $z=0$. **3170.** Семейство концентрических сфер $x^2+y^2+z^2=\pi n$ ($n=0, 1, 2, \ldots$), при $u=0$; семейство сферических слоев $\pi n<x^2+y^2+z^2<\pi(n+1)$, где $(-1)^n=u$, при $u=-1$ или $u=1$. **3171.** Цилиндрическая поверхность с направляющей $z=f(y)$, $x=0$, образующие которой параллельны прямой $y=ax$, $z=0$. **3172.** Поверхность вращения кривой $z=f(x)$, $y=0$ вокруг оси Oz. **3173.** Коническая поверхность с вершиной в начале координат и направляющей: $x=1$, $z=f(y)$. **3174.** Коноид с направляющей: $x=1$, $z=f(y)$, образующие которого параллельны плоскости Oxy. **3176.** $f\left(1, \frac{y}{x}\right)=f(x, y)$. **3177.** $\sqrt{1+x^2}$. **3178.** $f(t)=2t+t^2$; $z=x-1+\sqrt{y}$ $(x>0)$. **3179.** $f(x)=x^2-x$; $z=2y+(x-y)^2$. **3180.** $f(x, y)=x^2\frac{1-y}{1+y}$. **3183.1.** Нет. **3183.2.** 0; нет. **3184.** а) 0, 1; б) $\frac{1}{2}$, 1; в) 0, 1; г) 0, 1; д) 1, ∞. **3185.** 0. **3186.** 0. **3187.** a. **3188.** 0. **3189.** 0. **3190.** 1. **3191.** e. **3192.** $\ln 2$. **3193.** а) $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$. **3194.** Точка разрыва: $x=0$, $y=0$. **3195.** Все точки прямой $x+y=0$. **3196.** $O(0, 0)$ — точка бесконечного разрыва; точки прямой $x+y=0$ $(x\neq 0)$ — устранимые точки разрыва. **3197.** Точки, расположенные на осях координат. **3198.** Совокупность точек прямых $x=m\pi$ и $y=n\pi$ ($m, n=0, \pm1, \pm2, \ldots$). **3199.** Точки окружности $x^2+y^2=1$. **3200.** Точки координатных плоскостей: $x=0$, $y=0$ и $z=0$. **3201.** (a, b, c). **3203.1.** Равномерно непрерывна. **3203.2.** Равномерно непрерывна. **3203.3.** Неравномерно непрерывна. **3203.4.** Функция непрерывна на E, но неравномерно. **3212.** $f'_x(x, 1)=1$. **3212.1.** $f'_x(0, 0)=0$, $f'_y(0, 0)=0$; функция недифференцируема в точке $O(0, 0)$. **3212.2.** Функция недифференцируема в точке $O(0, 0)$. **3212.3.** Функция дифференцируема в точке $O(0, 0)$. **3213.** $\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3-8xy^2$, $\frac{\partial u}{\partial y}=4y^3-8x^2y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-16xy$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$. **3214.** $\frac{\partial u}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$;

$\frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1-\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}$.

3215. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2x}{y^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2}{y^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{6x}{y^4}$.

3216. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{x(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$.

3217. $\frac{\partial u}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos(x+y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\cos(x+y)-x\sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x\sin(x+y)$.

3218. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2x\sin x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos x^2}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{2x\sin x^2}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2\cos x^2}{y^3}$.

3219. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y}\,\mathrm{ec}^2\,\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{8x^2}{y^2}\sin\frac{x^2}{y}\times$ $\times\sec^3\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}-\frac{4x^3}{y^3}\sin\frac{x^2}{y}\times$ $\times\sec^3\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x^2}{y^3}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{2x^4}{y^4}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$.

3220. $\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=x^y\ln x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^{y-1}(1+y\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x\ (x>0)$.

3221. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$.

3222. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

3223. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}$.

$(xy \neq 1)$. **3224.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x \operatorname{sgn} y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{(x^2-y)^2 \operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$ $(y \neq 0)$. **3225.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$.

3226. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln^2\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = -\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1 + z\ln\frac{x}{y}\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = -\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1 + z\ln\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y} > 0\right)$. **3227.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yu}{xz}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u \ln x}{z}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{yu}{z^2}\ln x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y(y-z)u}{x^2z^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u\ln^2 x}{z^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{yu\ln x}{z^4}(2z + y\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{(z + y\ln x)u}{xz^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = -\frac{yu(z+y\ln x)}{xz^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = -\frac{u\ln x\,(z+y\ln x)}{z^3}$ $(xz \neq 0)$. **3228.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^z}{x}u$, $\frac{\partial u}{\partial y} = zy^{z-1}u\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = y^z u \ln x \ln y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^z(y^z-1)}{x^2}u$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = zy^{z-2}u\,(z-1+zy^z\ln x)\ln x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = y^z u\,(1+y^z\ln x) \times \ln x \ln^2 y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{zy^{z-1}u}{x}(1+y^z\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = \frac{y^z u \ln y}{x} \times (1+y^z\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = y^{z-1}u\ln x\,[1 + z\ln y\,(1+y^z\ln x)]$ $(x > 0,\ y > 0)$. **3230.1.** $f''_{xy}(0, 0)$ не существует. **3235.** $du = x^{m-1} \times y^{n-1}(my\,dx + nx\,dy)$, $d^2u = x^{m-2}y^{n-2}[m(m-1)y^2\,dx^2 + 2mn \times xy\,dx\,dy + n(n-1)x^2\,dy^2]$. **3236.** $du = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$, $d^2u = -\frac{2}{y^3}dy\,(y\,dx - x\,dy)$. **3237.** $du = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $d^2u =$

$= \frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. **3238.** $du = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$, $d^2u = \frac{(y^2-x^2)(dx^2-dy^2) - 4xydxdy}{(x^2+y^2)^2}$. **3239.** $du = e^{xy}(y\,dx + xdy)$; $d^2u = e^{xy}[y^2dx^2 + 2(1+xy)dxdy + x^2dy^2]$.
3240. $du = (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)\,dz$, $d^2u = 2(dxdy + dydz + dzdx)$. **3241.** $du = \frac{(x^2+y^2)dz - 2z(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2}$,

$$d^2u = \frac{\begin{array}{c}2z[(3x^2-y^2)dx^2 + 8xydxdy + (3y^2-x^2)dy^2] - \\ -4(x^2+y^2)(xdx+ydy)dz\end{array}}{(x^2+y^2)^3}.$$

3242. $dx - dy$, $-2(dx-dy)(dy+dz)$. **4244.** а) $1+mx+ny$; б) xy; в) $x+y$. **3245.** а) 108,972; б) 1,055; в) 2,95; г) 0,502; д) 0,97. **3246.** Диагональ уменьшится приблизительно на 3 мм; площадь уменьшится приблизительно на 140 см^2. **3247.** Уменьшить на 1,7 мм. **3249.** $\Delta \approx 10{,}2$ м^3; $\delta \approx 13\%$. **3250.** $\Delta \approx 7{,}6$ м. **3251.** $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ не ограничены в окрестности точки (0, 0).

3256. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y} = 0$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} = -16$.

3257. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} = 0$. **3258.** $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\partial y^3} = -6(\cos x + \cos y)$.

3259. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = 0$. **3260.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$. **3261.** $\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta} = -\frac{6}{r^4} + \frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$,

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$. **3262.** $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p \partial x^q} = p!q!$.

3263. $\frac{2(-1)^m(m+n-1)!(nx+my)}{(x+y)^{m+n+1}}$. **3264.** $e^{x+y} \times [x^2+y^2+2(mx+ny)+m(m-1)+n(n-1)]$. **3265.** $(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}$. **3266.** $\sin\frac{n\pi}{2}$. **3267.** $F(t) = f'(t) + 3tf''(t) + t^2f'''(t)$. **3268.** $d^4u = 24(dx^4 - 2dx^3dy - 2dxdy^3 + dy^4)$; $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y} = -12$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3} = -12$, $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 24$. **3269.** $d^3u = 6(dx^3 - 3dx^2dy + 3dxdy^2 + dy^3)$. **3270.** $d^3u = -8(xdx + ydy)^3\cos(x^2+y^2) - 12(xdx+ydy)(dx^2+dy^2)\sin(x^2+y^2)$.

3271. $d^{10}u = -\frac{9!(dx+dy)^{10}}{(x+y)^{10}}$. **3272.** $d^6u = -(dx^6 -$

$- 15dx^4dy^2 + 15dx^2dy^4 - dy^6)\cos x \operatorname{ch} y - 2dxdy\,(3dx^4 - 10dx^2dy^2 + 3dy^4)\sin x \operatorname{sh} y$. **3273.** $d^3u = 6dxdydz$. **3274.** $d^4u = 2\left(\dfrac{dx^4}{x^3} + \dfrac{dy^4}{y^3} + \dfrac{dz^4}{z^3}\right)$. **3275.** $d^nu = e^{ax+by} \times (adx + bdy)^n$. **3276.** $d^nu = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k X^{(n-k)}(x)\, Y^{(k)}(y)\, dx^{n-k}dy^k$.

3277. $d^nu = f^{(n)}(x + y + z)(dx + dy + dz)^n$. **3278.** $d^nu = e^{ax+by+cz}(adx + bdy + cdz)^n$. **3280.** а) $Au = -u$, $A^2u = u$; б) $Au = 1$, $A^2u = 0$. **3281.** а) $\Delta u = 0$; б) $\Delta u = 0$. **3282.** а) $\Delta_1 u = 9\left[(x^2 - yz)^2 + (y^2 - xz)^2 + (z^2 - xy)^2\right]$, $\Delta_2 u = 6(x + y + z)$; б) $\Delta_1 u = \dfrac{1}{r^4}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Delta_2 u = 0$. **3283.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(x^2 + y^2 + z^2)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4x^2f''(x^2 + y^2 + z^2)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 4xyf''(x^2 + y^2 + z^2)$. **3284.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f_1'\left(x, \dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{1}{y} f_2'\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} f_2'\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11}''\left(x, \dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{2}{y} f_{12}''\left(x, \dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{1}{y^2} f_{22}''\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} \times f_{12}''\left(x, \dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x}{y^3} f_{22}''\left(x, \dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{1}{y^2} f_2'\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{x^2}{y^4} f_{22}''\left(x, \dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{2x}{y^3} f_2'\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$. **3285.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f_1' + yf_2' + yzf_3'$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xf_2' + xzf_3'$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = xyf_3'$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11}'' + y^2f_{22}'' + y^2z^2f_{33}'' + 2yf_{12}'' + 2yzf_{13}'' + 2y^2zf_{23}''$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2f_{22}'' + 2x^2zf_{23}'' + x^2z^2f_{33}''$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2y^2f_{33}''$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = xyf_{22}'' + xyz^2f_{33}'' + xf_{12}'' + xzf_{13}'' + 2xyzf_{23}'' + f_2' + zf_3'$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = xyf_{13}'' + xy^2f_{23}'' + xy^2zf_{33}'' + yf_3'$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = x^2yf_{23}'' + x^2yzf_{33}'' + xf_3'$. **3286.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_{11}'' + (x+y)f_{12}'' + xyf_{22}'' + f_2'$. **3287.** $\Delta u = 3f_{11}'' + 4(x + y + z)f_{12}'' + 4\left(x^2 + y^2 + z^2\right)f_{22}'' + 6f_2'$. **3288.** $du =$

$= f'(t)(dx + dy)$; $d^2u = f''(t)(dx + dy)^2$. **3289.** $du = f'(t)\dfrac{xdy - ydx}{x^2}$; $d^2u = f''(t)\dfrac{(xdy - ydx)^2}{x^4} - 2f'(t) \times \dfrac{dx(xdy - ydx)}{x^3}$. **3290.** $du = f' \cdot \dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $d^2u = f'' \cdot \dfrac{(xdx + ydy)^2}{x^2 + y^2} + f' \cdot \dfrac{(ydx - xdy)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$. **3291.** $du = f'(t)\,dt$, $d^2u = f''(t)\,dt^2 + f'(t)\,d^2t$, где $dt = yzdx + zxdy + xydz$ и $d^2t = 2(zdxdy + ydxdz + xdydz)$. **3292.** $du = 2f' \times (xdx + ydy + zdz)$; $d^2u = 4f'' \cdot (xdx + ydy + zdz)^2 + 2f' \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2)$. **3293.** $du = af_1'dx + bf_2'dy$; $d^2u = a^2f_{11}''dx^2 + 2abf_{12}''dxdy + b^2f_{22}''dy^2$. **3294.** $du = f_1' \cdot (dx + dy) + f_2' \times (dx - dy)$; $d^2u = f_{11}'' \cdot (dx + dy)^2 + 2f_{12}'' \cdot (dx^2 - dy^2) + f_{22}'' \times (dx - dy)^2$. **3295.** $du = f_1' \cdot (ydx + xdy) + f_2' \cdot \dfrac{ydx - xdy}{y^2}$;

$$d^2u = f_{11}'' \cdot (ydx + xdy)^2 + 2f_{12}'' \cdot \frac{y^2dx^2 - x^2dy^2}{y^2} + f_{22}'' \times \frac{(ydx - xdy)^2}{y^4} + 2f_1' \cdot dxdy - 2f_2' \cdot \frac{(ydx - xdy)\,dy}{y^3}.$$

3296. $du = f_1' \cdot (dx + dy) + f_2' \cdot dz$; $d^2u = f_{11}'' \cdot (dx + dy)^2 + 2f_{12}'' \cdot (dx + dy)\,dz + f_{22}'' \cdot dz^2$. **3297.** $du = f_1' \cdot (dx + dy + dz) + 2f_2' \cdot (xdx + ydy + zdz)$; $d^2u = f_{11}'' \cdot (dx + dy + dz)^2 + 4f_{12}'' \times (dx + dy + dz)(xdx + ydy + zdz) + 4f_{22}''(xdx + ydy + zdz)^2 + 2f_2' \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2)$. **3298.** $du = f_1' \cdot \dfrac{ydx - xdy}{y^2} + f_2' \dfrac{zdy - ydz}{z^2}$; $d^2u = f_{11}'' \cdot \dfrac{(ydx - xdy)^2}{y^4} + 2f_{12}''\dfrac{(ydx - xdy)(zdy - ydz)}{y^2z^2} + f_{22}'' \cdot \dfrac{(zdy - ydz)^2}{z^4} - 2f_1' \dfrac{(ydx - xdy)\,dy}{y^3} - 2f_2' \cdot \dfrac{(zdy - ydz)\,dz}{z^3}$. **3299.** $du = \left(f_1' + 2tf_2' + 3t^2f_3'\right)dt$; $d^2u = \left(f_{11}'' + 4tf_{12}'' + 4t^2f_{22}'' + 6t^2f_{13}'' + 12t^3f_{23}'' + 9t^4f_{33}'' + 2f_2' + 6tf_3'\right)dt^2$. **3300.** $du = af_1'dx + bf_2'dy + cf_3'dz$; $d^2u = a^2f_{11}''dx^2 + b^2f_{22}''dy^2 + c^2f_{33}''dz^2 + 2abf_{12}''dxdy + 2acf_{13}''dxdz + 2bcf_{23}''dydz$. **3301.** $du = 2f_1' \cdot (xdx + ydy) + 2f_2'(xdx - ydy) + 2f_3' \cdot (ydx + xdy)$; $d^2u = 4f_{11}'' \cdot (xdx + ydy)^2 +$

$+4f''_{22}\cdot(x\,dx-y\,dy)^2+4f''_{33}\cdot(y\,dx+x\,dy)^2+8f''_{12}\cdot\left(x^2dx^2-y^2dy^2\right)+$
$+8f''_{13}\cdot(x\,dx+y\,dy)\ (y\,dx+x\,dy)+8f''_{23}\cdot(x\,dx-y\,dy)(y\,dx+x\,dy)+$
$+2f'_1\cdot\left(dx^2+dy^2\right)+2f'_2\cdot\left(dx^2-dy^2\right)+4f'_3\cdot dx\,dy$. **3302.** $d^nu=$
$=f^{(n)}(ax+by+cz)(a\,dx+b\,dy+c\,dz)^n$. **3303.** $d^nu=$
$=\left(a\,dx\frac{\partial}{\partial\xi}+bdy\frac{\partial}{\partial\eta}+c\,dz\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n f(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, где $\xi=ax$,
$\eta=by$, $\zeta=cz$. **3304.** $d^nu=\left[dx\left(a_1\frac{\partial}{\partial\xi}+a_2\frac{\partial}{\partial\eta}+\right.\right.$
$\left.\left.+a_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)+dy\left(b_1\frac{\partial}{\partial\xi}+b_2\frac{\partial}{\partial\eta}+b_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)+dz\left(c_1\frac{\partial}{\partial\xi}+\right.\right.$
$\left.\left.+c_2\frac{\partial}{\partial\eta}+c_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]^n f(\xi,\ \eta,\ \zeta)$. **3305.** $F(r)=f''(r)+\frac{2}{r}\times$
$\times f'(r)$. **3316.** 1. **3319.** xyz. **3331.** $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x$.
3332. $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z$. **3333.** $y\frac{\partial z}{\partial y}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.
3334. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$. **3335.** $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+$
$+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$. **3336.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$. **3337.** $z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\times$
$\times\frac{\partial z}{\partial y}$. **3338.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **3339.** $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.
3340. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$. **3341.** $1-$
$-\sqrt{3}$. **3342.** $\frac{\partial z}{\partial l}=\cos\alpha+\sin\alpha$, а) $\alpha=\frac{\pi}{4}$;
б) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$; в) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ и $\alpha=\frac{7\pi}{4}$. **3343.**
$\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$. **3344.** $\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}$. **3345.** $\frac{\partial u}{\partial l}=$
$=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$; $|\operatorname{grad}u|=\sqrt{3}$. **3346.** $|\operatorname{grad}u|=$
$=\frac{1}{r_0^2}$; $\cos\left(\widehat{\operatorname{grad}u,\ x}\right)=-\frac{x_0}{r_0}$, $\cos\left(\widehat{\operatorname{grad}u,\ y}\right)=$
$=-\frac{y_0}{r_0}$, $\cos\left(\widehat{\operatorname{grad}u,\ z}\right)=-\frac{z_0}{r_0}$, где $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.
3347. $\frac{\pi}{2}$. **3348.** ≈ 3142. **3350.** $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha+$

$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\cos\beta+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\times$
$\times\cos\alpha\cos\gamma+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\cos\beta\cos\gamma.$ **3352.** $\frac{\partial u}{\partial y}=-0{,}5.$
3353. $u''_{xx}(x,\ 2x)=u''_{yy}(x,\ 2x)=-4/3x,\ u''_{xy}(x,\ 2x)=5/3x.$
3354. $z=x\varphi(y)+\psi(y)$. **3355.** $z=\varphi(x)+\psi(y)$. **3356.** $z=\varphi_0(x)+y\varphi_1(x)+\ldots+y^{n-1}\varphi_{n-1}(x)$. **3357.** $u=\varphi(x,\ y)+\psi(x,\ z)+\chi(y,\ z)$. **3358.** $u=1+x^2y+y^2-2x^4$. **3359.** $z=1+xy+y^2$. **3360.** $z=x+y^2+0{,}5xy(x+y)$. **3362.** Нули функции $f(x)$ не могут целиком заполнять никакой интервал $(\alpha,\ \beta)\subset(a,\ b)$. **3363.** Множество нулей функции $f(x)$ должно быть нигде не плотным на интервале $(a,\ b)$, причем каждый нуль ξ функции $f(x)$ одновременно есть нуль функции $g(x)$ и сверх того существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\xi}[g(x)/f(x)]$. **3364.** 1) Бесчисленное множество; 2) две; 3) а) одна; б) две. **3365.** 1) Бесчисленное множество; 2) четыре: $y=x$; $y=-x$, $y=|x|$ и $y=-|x|$; 3) две; 4) а) две; б) четыре; 5) одна. **3366.** 1) Нигде; 2) $0<|x|<1$, $|x|=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$; 3) $x=0$, $|x|=1$; 4) $1<|x|\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$; однозначные ветви: $y=$

$$=\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}\ \left(|x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right);$$

$$y=\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}\left(1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right),$$

где $\varepsilon=-1,\ 1$. **3367.** Точки ветвления: $(-1,\ 0)$, $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$; $y=\varepsilon(x)\sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1}-(2x^2+1)}{2}}$ $(|x|\leqslant 1)$, где $\varepsilon(x)=-1,\ 1,\ \operatorname{sgn}x$ и $-\operatorname{sgn}x$. **3368.** Множество значений функции $\varphi(y)$ должно иметь общие точки с множеством значений функции $f(x)$. **3371.** $y'=-\frac{x+y}{x-y}$; $y''=\frac{2a^2}{(x-y)^3}$. **3372.** $y'=\frac{x+y}{x-y}$; $y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

3373. $y'=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$; $y''=\frac{-\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}$.

3374. $y'=\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$; $y''=\frac{y^2[y(1-\ln x)^2-2(x-y)\times}{x^4(1-\ln y)^3}\to$
$\to\frac{\times(1-\ln x)(1-\ln y)-x(1-\ln y)^2]}{x^4(1-\ln y)^3}$. **3375.** $y'=\frac{y}{x}$;

$y'' = 0$. **3378.** $y_1'(0) = -1$; $y_2'(0) = 1$. **3379.** $y_1'(0) = 0$; $y_2(0) = -\sqrt{33}$; $y_3(0) = \sqrt{3}$. **3380.** $y' = -\dfrac{2x+y}{x+2y}$;

$$y'' = -\frac{18}{(x+2y)^3};\quad y''' = -\frac{162x}{(x+2y)^5}.$$

3381. $y' = 0$; $y'' = -\dfrac{2}{3}$; $y''' = -\dfrac{2}{3}$. **3383.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y}{z}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2+z^2}{z^3};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{xy}{z^3};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2+z^2}{z^3}.$$

3384. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz}{z^2-xy}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz}{z^2-xy}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}.$$

3385.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y+z-1};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}.$$

3386. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{xz}{x^2-y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{yz}{x^2-y^{22}}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{xyz}{(x^2-y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}.$$

3387.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = -1;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3388. а) -2; б) -1. **3389.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{2}{5}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{394}{125}$. **3390.**

$$dz = -\frac{c^2}{z}\left(\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2}\right);\quad d^2z = -\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2b^2}\,dx\,dy + \left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right].$$

3391.

$$dz = -\frac{(1-yz)\,dx+(1-xz)\,dy}{1-xy};$$

$$d^2z = -\frac{2\{y(1-yz)\,dx^2+[x+y-z(1+xy)]\,dx\,dy+x(1-xz)\,dy^2\}}{(1-xy)^2}.$$

3392.

$$dz = \frac{z(y\,dx+z\,dy)}{y(x+z)};\quad d^2z = -\frac{z^2(y\,dx-x\,dy)^2}{y^2(x+z)^3}.$$

3393.

$$dz = dx - \frac{(x-z)\,dy}{(x-z)^2+y(y+1)};\quad d^2z = \frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2+y^2]}{[(x-z)^2+y(y+1)]^3}\,dy^2.$$

3394. $du =$

$$= -\frac{u^2(dx+dy)-z^2dz}{u[2(x+y)-u]}.$$ **3395.** $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{4(x-z)(y-z)}{(F_1'+2zF_2')^3}\times$$
$$\times\left[F_2'^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_1'^2F_{22}''\right]-\frac{2(F_1'+2xF_2')(F_1'+2yF_2)F_2'}{(F_1'+2zF_2')^3}.$$

3396. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}$. **3397.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$
$=-\left(1+\dfrac{F_1'+F_2'}{F_3'}\right)$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\left(1+\dfrac{F_2'}{F_3'}\right)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$
$=-F_3'^{-3}\left[F_3'^2\left(F_{11}''+2F_{12}''+F_{22}''\right)-2\left(F_1'+F_2'\right)F_3'\left(F_{13}''+F_{23}''\right)+\right.$
$\left.+\left(F_1'+F_2'\right)^2F_{33}''\right]$. **3398.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\left(xF_1'+yF_2'\right)^{-3}\cdot\left[y^2z^2\times\right.$
$\left.\times\left(F_2'^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_1'^2F_{22}''\right)-2z\left(xF_1'+yF_2'\right)F_1'^2\right]$.

3399. а) $$d^2z=-\frac{F_2'^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_1'^2F_{22}''}{\left(F_1'+F_2'\right)^3}(dx-dy)^2;$$

б) $$d^2z=\frac{F_2'^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_1'^2F_{22}'}{\left(xF_1'+yF_2'\right)^3}(y\,dx-x\,dy)^2.$$

3399.1 $dz=\dfrac{1}{9}(2dx-dy)$; $d^2z=-\dfrac{2}{243}(2dx^2-5dx\,dy+$
$+2dy^2)$. **3401.** $\dfrac{dx}{dz}=\dfrac{y-z}{x-y}$; $\dfrac{dy}{dz}=\dfrac{z-x}{x-y}$.

3402. $\dfrac{dx}{dz}=0$, $\dfrac{dy}{dz}=-1$, $\dfrac{d^2x}{dz^2}=-\dfrac{d^2y}{dz^2}=-\dfrac{1}{4}$.

3403. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{yu-xv}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{xv-yu}{x^2+y^2}$;
$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2>0)$. **3403.1.** $du=-\dfrac{1}{3}dy$; $dv=$
$=-dx+\dfrac{1}{3}dy$. **3404.** $du=\dfrac{(\sin v+x\cos v)\,dx-(\sin u-x\cos v)\,dy}{x\cos v+y\cos u}$;

$$dv=\frac{-(\sin v-y\cos u)\,dx}{x\cos v+y\cos u}+\frac{(\sin u+y\cos u)\,dy}{x\cos v+y\cos u};\quad d^2u=-d^2v=$$
$$=\frac{(2dx\cos v-x\,dv\sin v)\,dv}{x\cos v+y\cos u}-\frac{(2dy\cos u-y\,du\sin u)\,du}{x\cos v+y\cos u}.$$

3405. $du=\dfrac{1}{2}(dx+dy)$; $dv=\dfrac{\pi}{4}dy-\dfrac{1}{2}(dx-dy)$; $d^2u=dx^2$;

$d^2v=\frac{1}{2}(dx-dy)^2$. **3406.** $\frac{dy}{dx}=2\left(t+\frac{1}{t}\right)$; $\frac{dz}{dx}=3\left(t^2+\frac{1}{t^2}+1\right)$; $\frac{d^2y}{dx^2}=2$; $\frac{d^2z}{dx^2}=6\left(t+\frac{1}{t}\right)$. **3407.** $y\geqslant\frac{x^2}{2}$; $\frac{\partial z}{\partial x}=-3uv$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}(u+v)\ (u\neq v)$. **3407.1.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}$. **3407.2.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{26}{121}$. **3408.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}$. **3409.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\sin 2v}{u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\cos 2v}{u^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\sin 2v}{u^2}$. **3410.** $dz=0$; $d^2z=\frac{1}{2}(dx^2-dy^2)$. **3411.** $\frac{dz}{dx}=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y}$; $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{4x-2y}{x-2y}+\frac{6x}{(x-2y)^3}$. **3412.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y+z}+\frac{(x+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}e^{x-z}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x+z}{(y+z)^2}+\frac{(y+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}e^{y-z}$. **3413.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{I}\times\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)$, где $I=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$. **3414.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\times\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\times\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2\right\}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\times\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\times\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right\}$, где $I=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}$. **3415.** а) $\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\frac{v}{u}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\frac{v}{u}$; $\frac{\partial v}{\partial x}=-\left(\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}\right)$;

$\frac{\partial v}{\partial y}=\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}$; б) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$; $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-(e^u-\cos v)}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$; $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{e^u+\sin v}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$. **3416.** $\frac{du}{dx}=\frac{I}{I_1}$; $\frac{d^2u}{dx^2}=$ $=\frac{1}{I_1^3}\left\{\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f+\frac{\partial(h,f)}{\partial(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+\right.\right.$ $+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\Big)^2 g+\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}\Big(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+$ $\left.\left.+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right\}$, где $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}$, $I_2=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,x)}$, $I_3=$ $=\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}$ и $I=\frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}$. **3417.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=$ $=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{I_2\partial g}{I_1\partial y}$, где $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$ и $I_2=\frac{\partial(h,f)}{\partial(z,t)}$. **3418.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{I_1}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{I_2}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{I_3}{I}$, где $I_1=$ $=\frac{\partial(g,h)}{\partial(v,w)}$, $I_2=\frac{\partial(h,f)}{\partial(v,w)}$, $I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}$ и $I=\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}$. **3419.** $dz=-\frac{I_1dx+I_2dy}{I_3}$, где $I_1=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}$, $I_2=\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}$, $I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}$. **3431.** $x'''+xx'^5=0$. **3432.** $x^{IV}=0$. **3433.** $\frac{d^2x}{dt^2}-$ $-t\left(\frac{dx}{dt}\right)^3=0$. **3434.** $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$. **3435.** $\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+$ $+2\frac{dy}{dt}-6y=0$. **3436.** $\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0$. **3437.** $\frac{d^2y}{dt^2}+m^2y=0$. **3438.** $u''+\left[q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)\right]u=0$. **3439.** $\frac{d^2u}{dt^2}+$ $+(u+3)\frac{du}{dt}+2u=0$. **3440.** $\frac{d^2u}{dt^2}=0$. **3441.** $\frac{d^2u}{dt^2}=0$. **3442.** $\frac{d^2u}{dt^2}+8u\left(\frac{du}{dt}\right)^3=0$. **3443.** $t^5\frac{d^3u}{dt^3}+(3t^4+1)\frac{d^2u}{dt^2}+$ $+\frac{du}{dt}=0$. **3444.** $u''-u'=\frac{A}{(a-b)^2}u$. **3446.** $\Phi(1,u,u'+u^2)=0$. **3447.** $F(xu'+u^2-u,u,1)=0$. **3450.** $\frac{dr}{d\varphi}=r$. **3451.** $r'^2=$ $=\frac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}r^2$. **3452.** $r(r^2+2r'^2-rr'')=r'^3$. **3453.** $\frac{r'}{r}$.

3454. $K=\dfrac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}$. **3455.** $\dfrac{dr}{dt}=kr^3$; $\dfrac{d\varphi}{dt}=-1$.

3456. $w=\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\varphi}{dt}\right)$. **3457.** $Y'=x$; $Y''=\dfrac{1}{y''}$; $Y'''=-\dfrac{y'''}{y''^3}$. **3458.** $z=\varphi(x+y)$, где φ — произвольная дифференцируемая функция. **3459.** $z=\varphi(x^2+y^2)$. **3460.** $z=\dfrac{x}{a}+\varphi(y-bz)$. **3461.** $z=x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. **3462.** $\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=e^u\operatorname{sh}v$.

3463. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial v}$. **3464.** $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{1}{2}$. **3465.** $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{z}{v}\times\dfrac{z^2+u}{z^2-u}$. **3466.** $(2u+v-z)\dfrac{\partial z}{\partial u}+(u+2v-z)\dfrac{\partial z}{\partial v}=u+v-z$.

3467. $\dfrac{e^{x+y}-z^2}{1-e^{-x}\dfrac{\partial z}{\partial\xi}-e^{-y}\dfrac{\partial z}{\partial\eta}}$. **3468.** $\dfrac{\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{u^2+v^2}$.

3469. $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=0$. **3470.** $\dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{x-z}{y}$. **3471.** $\dfrac{\partial x}{\partial y}+\dfrac{\partial x}{\partial v}=\dfrac{u}{v}$.

3472. $A=\dfrac{x^2-2xu+u^2\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{x^4\left(u\dfrac{\partial x}{\partial u}+v\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$. **3473.** $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\partial u}{\partial\eta}+\dfrac{\partial u}{\partial\zeta}+3u+(e^\xi+e^\eta+e^\zeta)=0$. **3474.** $\dfrac{\partial w}{\partial v}=0$.

3475. $\dfrac{\partial w}{\partial u}=0$. **3476.** $\dfrac{\partial w}{\partial v}=0$. **3477.** $u^2\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\right)^2+v^2\left(\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)^2=w^2\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial w}{\partial v}$. **3478.** $\dfrac{e^{2u}\left(1-\dfrac{\partial w}{\partial v}\cos^2 v\right)}{\dfrac{\partial w}{\partial u}}$. **3479.** $A=\dfrac{\partial w}{\partial u}:\dfrac{\partial w}{\partial v}$. **3480.** $\dfrac{\partial w}{\partial\zeta}=\dfrac{\xi\eta}{\zeta}$. **3481.** $w=\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}$.

3482. $w=r\dfrac{\partial u}{\partial r}$. **3483.** $w=\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$.

3484. $w=\dfrac{\partial^2u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}$. **3485.** $w=r^2\dfrac{\partial^2u}{\partial r^2}$.

3486. $w=\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$. 3487. $I=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial v}{\partial r}\right)$.
3488. $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$, где φ и ψ — произвольные функции. 3489. $3\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}=0$. 3490. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$.
3491. $a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\right)+2b\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0$.
3492. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$. 3493. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+m^2e^{2u}z=0$.
3494. $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0$. 3495. $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$. 3496. $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=$ $=\frac{2}{u(4-uv)}\frac{\partial z}{\partial v}$. 3497. $(u^2-v^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=v\frac{\partial z}{\partial u}$.
3498. $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{2u}{u^2+v^2}\frac{\partial z}{\partial u}$. 3499. $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{u^2-v^2}\left(v\frac{\partial z}{\partial u}-\right.$ $\left.-u\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0$. 3500. $\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=1$.
3501. $u=\varphi(x+\lambda_1 y)+\psi(x+\lambda_2 y)$, где λ_1 и λ_2 — корни уравнения $A+2B\lambda+C\lambda^2=0$. 3503. а) $\Delta u=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}$;
б) $\Delta(\Delta u)=\frac{d^4u}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{du}{dr}$. 3504. $u\times$ $\times\frac{d^2w}{du^2}+\frac{dw}{du}+cw=0$. 3505. $A=X\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}-Y\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}+$ $+\frac{\partial u}{\partial X}$. 3508. $\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\times$ $\times\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)=2\left(\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\xi\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\zeta}+\eta\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right)$.
3509. $\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2}=0$. 3510. $\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}=0$. 3511. $\Delta_1 u=$ $=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$; $\Delta_2 u=\frac{1}{r^2}\times$ $\times\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]$.
3512. $w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$. 3513. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=$ $=0$. 3514. $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$. 3515. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$. 3516. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+$ $+\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=2w$. 3517. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$. 3518. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+$

$+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0$. **3519.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=\frac{w}{4\sin^2(u-v)}$.
3520. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$. **3523.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=0$. **3524** $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+$
$+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}=\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}+(e^w-1)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2+\right.$
$\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2\right]$. **3526.** $x=y\varphi(z)+\psi(z)$. **3527.** $A(X,Y)\times$
$\times\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}-2B(X,Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}+C(X,Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}=0$. **3528.** $\frac{x-x_0}{-\cos\alpha\sin t_0}=$
$=\frac{y-y_0}{-\sin\alpha\sin t_0}=\frac{z-z_0}{\cos t_0}$; $z-z_0=(x-x_0)\cos\alpha\operatorname{tg} t_0+(y-$
$-y_0)\sin\alpha\operatorname{tg} t_0$, где $x_0=a\cos\alpha\cos t_0$, $y_0=a\sin\alpha\cos t_0$, $z_0=$
$=a\sin t_0$. **3529.** $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$, $y=\frac{b}{2}$; $ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2)$.
3530. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$; $x+y+2z=4$. **3531.** $\frac{x-1}{3}=$
$=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}$; $3x+3y-z=3$. **3532.** $x+z=2$; $y+2=0$; $x-z=$
$=0$. **3533.** $M_1(-1,1,-1)$; $M_2\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9}-\frac{1}{2}\right)$. **3537.** $\operatorname{tg}\varphi=$
$=f'_x(x_0,\ y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,\ y_0)\sin\alpha$. **3538.** $\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{16}{243}$.
3539. $2x+4y-z-5=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$.
3540. $3x+4y+12z=169$; $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{12}$. **3541.** $z=\frac{\pi}{4}-$
$-\frac{1}{2}(x-y)$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$. **3542.** ax_0x+
$+by_0y+cz_0z=1$; $\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}$. **3543.** $x+y-$
$-2z=0$; $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$. **3544.** $x+y-4z=0$;
$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$. **3545.** $\frac{x}{a}\cos\psi_0\cos\varphi_0+\frac{y}{b}\times$
$\times\cos\psi_0\sin\varphi_0+\frac{z}{c}\sin\psi_0=1$; $\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0-a}{bc}=$
$=\frac{y\sec\psi_0\operatorname{cosec}\varphi_0-b}{ac}=\frac{z\operatorname{cosec}\psi_0-c}{ab}$. **3546.** $x\cos\varphi_0+$

$+y\sin\varphi_0 - z\operatorname{tg}\alpha = 0$; $\dfrac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \dfrac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0} = \dfrac{z-r_0\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}$. **3547.** $ax\sin v_0 - ay\cos v_0 + u_0 z = au_0 v_0$; $\dfrac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0} = \dfrac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0} = \dfrac{z-av_0}{u_0}$. **3548.** $\dfrac{3x}{u_0} - \dfrac{3y}{u_0^2} + \dfrac{z}{u_0^3} = 2$. **3549.** $A(0,\ \pm 2\sqrt{2},\ \mp 2\sqrt{2})$; $B(\pm 2,\ \mp 4,\ \pm 2)$; $C(\pm 4,\ \mp 2,\ 0.)$ **3550.** $x = \pm\dfrac{a^2}{d}$, $y = \pm\dfrac{b^2}{d}$, $z = \pm\dfrac{c^2}{d}$, где $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **3551.** $x+4y+6z = \pm 21$. **3556.** $x^2 + y^2 - xy = 1$, $z = 0$; $3y^2 + 4z^2 = 4$, $x = 0$; $3x^2 + 4z^2 = 4$, $y = 0$. **3557.** $\delta < 0{,}003$. **3559.** $\cos\varphi = \dfrac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}$. **3563.** $\dfrac{\partial u}{\partial n} = x_0 + y_0 + z_0$; а) $x_0 = y_0 = z_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; б) $x_0 = y_0 = z_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; в) на окружности $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2 = 1$. **3564.** $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4} + \dfrac{z_0^2}{c^4}}}$. **3566.** $x^2+y^2 = p^2$. **3567.** $y = \pm x$. **3568.** $y^2 = 4ax$. **3569.** Огибающей нет. **3570.** $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$. **3571.** $|xy| = \dfrac{S}{2\pi}$. **3572.** $y = \dfrac{v_0^2}{2g} - \dfrac{gx^2}{2v_0^2}$. **3574.** а) $y=0$ — огибающая (геометрическое место точек перегиба); б) $y = 0$ — огибающая; в) $y = 0$ — геометрическое место особых точек (точек возврата); г) $x = 0$ — геометрическое место двойных точек, $x = a$ — огибающая. **3575.** Тор $(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$. **3576.** $x^2\sin^2\alpha + y^2\sin^2\beta + z^2\sin^2\gamma - 2xy\times\times\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma = 1$. **3577.** $|xyz| = \dfrac{V}{4\pi\sqrt{3}}$. **3578.** $|z \pm \sqrt{x^2+y^2}| = \rho\sqrt{2}$. **3579.** $\begin{vmatrix} x & y \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y_0 & z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ z_0 & x_0 \end{vmatrix}^2 \leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$. **3580.** $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (z-z_0)^2$. **3581.** $f(x,\ y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$. **3582.** $f(x,\ y,\ z) = 3[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)] + (x-1)^3 +$

$+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1)$. **3583.** $\Delta f(1,-1)\approx h-3k+(-h^2-2hk+k^2)+(h^2k+hk^2)$. **3584.** $f(x+h,\ y+k,\ z+l)=f(x,y,z)+2[h(Ax+Dy+E)+k(Dx+By+F)+l\times\times(Ex+Fy+Cz)]+f(h,k,l)$. **3585.** $x^y=1+(x-1)+(x-1)\times\times(y-1)+R_2(1+\theta(x-1),\ 1+\theta(y-1))$ $(0<\theta<1)$, где $R_2(x,y)=\frac{1}{6}x^y\left[\left(\frac{y}{x}dx+\ln x\cdot dy\right)^3+3\left(\frac{y}{x}dx+\ln x\cdot dy\right)\times\times\left(-\frac{y}{x^2}dx^2+\frac{2}{x}dx\,dy\right)+\left(\frac{2y}{x^3}dx^3-\frac{3}{x^2}dx^2dy\right)\right]$ и $dx=$ $=x-1$, $dy=y-1$. **3586.** $1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2$.

3587. а) $1-\frac{1}{2}(x^2-y^2)$; б) $\frac{\pi}{4}+x-xy$. **3588.** $-(xy+xz+$ $+yz)$. **3589.** $F(x,y)=\frac{h^2}{4}(f''_{xx}+f''_{yy})+\frac{h^4}{48}(f^{IV}_{xxxx}+f^{IV}_{yyyy})+\dots$

3590. $F(\rho)=f(x,y)+\frac{\rho^2}{4}[(f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y)]$.

3591. $\Delta_{xy}f(x,y)=hk\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^{m-1}k^{n-m-1}}{m!\,(n-m)!}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\right]$.

3592. $F(\rho)=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}\Delta^n f(x,y)$, где $\Delta=$ $=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. **3593.** $1+mx+ny+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+mnxy+$ $+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\dots$ $(|x|<1,\ |y|<1)$.

3594. $\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!}{m!\,n!}x^my^n$ $(|x|+|y|<1)$.

3595. $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^my^{2n+1}}{m!\,(2n+1)!}$ $(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty)$.

3596. $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^my^{2n}}{m!\,(2n)!}$ $(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty)$.

3597. $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}y^{2n+1}}{(2m+1)!\,(2n+1)!}$ $(|x|<+\infty,\ |y|<$

$<+\infty$). **3598.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{2m}y^{2n}}{(2m)!\,(2n)!}$ $(|x|<+\infty,\ |y|<$ $<+\infty)$. **3599.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(x^2+y^2<+\infty)$. **3600.** $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{x^m y^n}{mn}$ $(|x|<1,\ |y|<1)$. **3601.** $f(x,\ y)=$ $=1+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)y$. **3602.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m\,(y+1)^n}{m!\,n!}$ $(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty)$. **3603.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,[1+(x-1)]\,(y-1)^n$ $(-\infty<x<+\infty,\quad 0<y<2)$. **3604.** $z=1+[2(x-1)-$ $-(y-1)]-[8(x-1)^2-10(x-1)(y-1)+3(y-1)^2]+$ $+\ldots$ **3605.** (0, 0) — изолированная точка, если $a<0$; точка возврата, если $a=0$; двойная, если $a>0$. **3606.** (0, 0) — двойная точка. **3607.** (0, 0) — изолированная точка. **3608.** (0, 0) — изолированная точка. **3609.** (0, 0) — двойная точка. **3610.** (0, 0) — точка возврата (второго рода). **3611.** (0, 0) — двойная точка. **3612.** Если $a<b<c$, то кривая состоит из овала и бесконечной ветви; если $a=b<c$, то $A\ (a,\ 0)$ — изолированная точка; если $a<b=c$, то $B\ (b,\ 0)$ — двойная точка; если $a=b=c$, то $A\ (a,\ 0)$ —точка возврата. **3613.** (0,0) — двойная точка. **3614.** (0, 0) — точка возврата. **3615.** (0, 0) — точка прекращения. **3616.** (0, 0) —угловая точка. **3617.** $x=$ $=k\pi(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$ — точки разрыва 1-го рода. **3618.** $x=$ $=0$ — точка разрыва 2-го рода. **3619.** $x=0$ — двойная точка. **3620.** $x=k\pi(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$—точка возврата. **3621.** $z_{\min}=$ $=0$ при $x=0$ и $y=1$. **3622.** Точек экстремума нет. **3623.** Нестрогий минимум $z=0$ в точках прямой $x-y+1=0$. **3624.** $z_{\min}=$ $=-1$ при $x=1$ и $y=0$. **3625.** $z_{\max}=108$ при $x=2$, $y=3$; нестрогий минимум $z=0$ при $x=0$, $0<y<6$; нестрогий максимум $z=0$ при $x=0$, $-\infty<y<0$ и $6<y<+\infty$. **3626.** $z_{\min}=-1$ при $x=1$ и $y=1$. **3627.** $z_{\min}=-2$ при $x_1=-1$, $y_1=-1$ и $x_2=1$, $y_2=1$; экстремума нет при $x=0$, $y=0$. **3627.1.** Максимум $z=0$ при $x=0$, $y=0$; минимум $z=-1\frac{1}{8}$ при $x=$ $=\pm\frac{1}{2}$, $y=\pm1$; седло $z=-1$ при $x=0$, $y=\pm1$, и седл. $z=-\frac{1}{8}$ при $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=0$. **3628.** Минимум $z=30$ при $x=5$ и $y=2$. **3629.** $z_{\min}=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ при $\frac{x}{a}=-\frac{y}{b}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; $z_{\max}=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ при $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3630.** $z_{\max}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ при $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$, если $c>0$; $z_{\min}=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ при $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$, если $c<0$; экстремума нет, если $c=0$, $a^2+b^2\neq 0$. **3631.** $z_{\max}=1$ при $x=0$ и $y=0$. **3632.** Минимум $z=0$ при $x=0$, $y=0$; седло $z=\frac{1}{2}e^{-2}$ при $x=-\frac{1}{4}$, $y=-\frac{1}{2}$. **3633.** Седло $z=e^3$ при $x=1$, $y=-2$ **3634.** Максимум $z=e^{-13}\approx 2{,}26\cdot 10^{-6}$ при $x=1$, $y=3$; минимум $z=-26\cdot e^{-1/52}\approx -25{,}51$ при $x=-\frac{1}{26}$, $y=-\frac{3}{26}$. **3635.** Минимум $z=7-10\ln 2\approx 0{,}0685$ при $x=1$, $y=2$. **3636.** $z_{\max}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ при $x=\frac{\pi}{3}$ и $y=\frac{\pi}{6}$. **3637.** $z_{\min}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ при $x=y=\frac{2\pi}{3}$; $z_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ при $x=y=\frac{\pi}{3}$. **3638.** Седло $z=-1+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{4}\pi\approx 1{,}70$ при $x=1$, $y=1$. **3639.** Минимум $z=-\frac{1}{2e}\approx -0{,}184$ при $x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\approx\pm 0{,}43$; максимум $z=\frac{1}{2e}$ при $x=-y=\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$; экстремума нет в стационарных точках $x=0$, $y=\pm 1$ и $x=\pm 1$, $y=0$. **3640.** Стационарные точки $x=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m+n)\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m-n)\frac{\pi}{2}$ $(m,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. Экстремум $z=m\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)(-1)^{m+1}+2(-1)^n$, если m и n различной четности (максимум при m нечетном и n четном, минимум при m четном и n нечетном); экстремума нет, если m и n одинаковой четности. **3641.** $z_{\min}=0$ при $x=0$ и $y=0$; нестрогий максимум $z=e^{-1}$ при $x^2+y^2=1$.

3642. $u_{\min} = -14$ при $x = -1$, $y = -2$, $z = 3$. **3643.** Минимум $u = -6913$ при $x = 24$, $y = -144$, $z = -1$. **3644.** Минимум $u = 4$ при $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = 1$. **3645.** $u_{\max} = \frac{a^7}{7^7}$ при $x = y = z = \frac{a}{7}$; нестрогий экстремум $u = 0$ при $y = 0$, $x \neq 0$, $z \neq 0$, $x + 2y + 3z \neq a$. **3646.** Минимум $u = \frac{15a}{4}\sqrt[15]{\frac{a}{16b}}$ при $x = \frac{1}{2}\sqrt[15]{16a^{14}b}$, $y = \frac{1}{4}\sqrt[5]{16a^4b}$, $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^8b^7}{4}}$.
3647. Максимум $u = 4$ при $x = y = z = \frac{\pi}{2}$; краевой минимум $u = 0$ при $x = y = z = 0$ и $x = y = z = \pi$. **3648.** $u_{\max} = \left(\frac{2}{n^2 + n + 2}\right)^{n^2+n+2/2}$ при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{2}{n^2 + n + 2}$.
3649. Минимум $u = (n + 1)\,2^{1/n+1}$ при $x_1 = 2^{1/n+1}$, $x_2 = x_1^2$, $\ldots$, $x_n = x_1^n$. **3650.** Числа a, x_1, x_2, $\ldots$, x_n, b составляют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$. **3651.** Минимум $z_1 = -2$ и максимум $z_2 = 6$ при $x = 1$, $y = -1$.
3652. $z_{\min} = -(4 + 2\sqrt{6})$ при $x = y = -(3 + \sqrt{6})$; $z_{\max} = 2\sqrt{6} - 4$ при $x = y = -(3 - \sqrt{6})$. **3653.** Нестрогий минимум $z = -\frac{a}{2\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = \frac{3a^2}{8}$, $z < 0$; нестрогий максимум $z = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = \frac{3a^2}{8}$, $z > 0$. **3654.** $z_{\max} = \frac{1}{4}$ при $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. **3655.** $z_{\min} = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|ab|}$ при $x = -\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $y = -\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $z_{\max} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|ab|}$ при $x = \frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $y = \frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, где $\varepsilon = \operatorname{sgn} ab \neq 0$.
3656. $z_{\max} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$ при $x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$, $y = \frac{a^2b}{a^2 + b^2}$.
3657. $z_{\min} = \lambda_1$, $z_{\max} = \lambda_2$, где λ_1 и λ_2 — корни уравнения $(A - \lambda)(C - \lambda) - B^2 = 0$ и $\lambda_1 < \lambda_2$. **3657.1.** Максимум $z = 106\frac{1}{4}$ при $x = \pm 1\frac{1}{2}$, $y = \pm 4$; минимум $z = -50$ при $x = \pm 2$,

$y=\mp 3$. **3658.** Экстремум $z=1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$ при $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $y=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (максимум, если k — четное, и минимум, если k — нечетное). **3659.** $u_{\min}=-3$ при $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}$; $u_{\max}=3$ при $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$, $z=\frac{2}{3}$. **3660.** $u_{\max}=\frac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$ при $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{a}{m+n+p}$. **3661.** $u_{\min}=c^2$ при $x=0$, $y=0$, $z=\pm c$; $u_{\max}=a^2$ при $x=\pm a$, $y=0$, $z=0$. **3662.** $u_{\max}=\left(\frac{a}{6}\right)^6$ при $x=y=z=\frac{a}{6}$. **3663.** $u_{\min}=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$ при $x=y=\frac{1}{\sqrt{6}}$ и $z=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, $x=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$ и $y=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, $y=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$ и $x=-\frac{2}{\sqrt{6}}$; $u_{\max}=\frac{1}{3\sqrt{6}}$ при $x=y=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ и $z=\frac{2}{\sqrt{6}}$, $x=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ и $y=\frac{2}{\sqrt{6}}$, $y=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ и $x=\frac{2}{\sqrt{6}}$.

3663.1. Условный максимум $u=2$ при $x=1$, $y=1$, $z=1$. **3664.** $u_{\max}=\frac{1}{8}$ при $x=y=z=\frac{\pi}{6}$. **3665.** $u_{\min}=\lambda_1$ и $u_{\max}=\lambda_2$, где λ_1 и λ_2 — корни уравнения $\lambda^2-\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)\lambda+\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2c^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)=0$ $(\lambda_1<\lambda_2)$.

3666. $u_{\min}=\frac{R^2(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}$; $u_{\max}=R^2$.

3667. $u_{\min}=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ при $x_i=\frac{1}{a_i}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. **3668.** $u_{\min}=\frac{a^p}{n^{p-1}}$ при $x_i=\frac{a}{n}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. **3669.** $u_{\min}=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^2$ при $x_i=$

$= \sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}} \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^{-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. 3670. $u_{\max} = \left(\frac{a}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} \alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2} \ldots \alpha_n^{\alpha_n}$ при $\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{x_n}{\alpha_n} = \frac{a}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$. 3671. Экстремумы $u = \lambda$ определяются из уравнения $|a_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$, где $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ii} = 1$. 3675. $\inf z = -5$, $\sup z = -2$. 3676. $\inf z = -75$; $\sup z = 125$. 3677. $\inf z = 0$; $\sup z = 1$. 3678. $\inf u = 0$; $\sup u = 300$. 3679. $\inf u = -\frac{1}{2}$; $\sup u = 1 + \sqrt{2}$. 3680. $\inf u = 0$; $\sup u = e^{-1} \approx 0{,}37$. 3682. Нет. 3683. Минимум равен $\frac{n}{\sqrt[n]{a}}$. 3684. Слагаемые равны. 3685. Множители равны $x_i = \frac{\left(a\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}}\ldots\alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\right)^{\frac{1/\alpha_i}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}}}}{(\alpha_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — соответствующие показатели степеней; наименьшее значение суммы $\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}\right)\left(a\alpha_1^{1/\alpha_1}\alpha_2^{1/\alpha_2}\ldots\alpha_n^{1/\alpha_n}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}}}$

3686. $x = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$, $y = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$, где $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$. 3687. Измерения ванны $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. 3688. $H = 2R = 2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$, где R — радиус цилиндрической поверхности и H — ее образующая. 3689. $x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i$, $z = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} z_i$, где $N = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2}$.

Минимальная сумма квадратов расстояний равна $n-2N+$ $+\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+y_i^2+z_i^2\right)$. **3690.** Угол наклона образующих конуса к его основанию равен $\arcsin\frac{2}{3}$. **3691.** Угол наклона боковых граней пирамид к их основаниям равен $\arcsin\frac{2}{3}$. **3692.** Стороны прямоугольника $\frac{2p}{3}$ и $\frac{p}{3}$. **3693.** Стороны треугольника $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$ и $\frac{3p}{4}$. **3694.** Измерения параллелепипеда $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ и $\frac{R}{\sqrt{3}}$. **3695.** Высота параллелепипеда равна $\frac{1}{3}$ высоты конуса. **3696.** Измерения параллелепипеда $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ и $\frac{2c}{\sqrt{3}}$. **3697.** Высота параллелепипеда $h=l\sin\alpha\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}$, если $\alpha\geqslant\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, и $h=0$, если $0<\alpha<\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **3698.** Измерения параллелепипеда a, b и $\frac{c}{2}$. **3699.** $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. **3700.** $d=\frac{1}{\pm\Delta}\times$

$$\times\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix},\ \text{где } \Delta=\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 n_1\\ m_2 n_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 p_1\\ n_2 p_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p_1 m_1\\ p_2 m_2\end{vmatrix}^2}.$$

3701. $\frac{7}{4\sqrt{2}}$. **3702.** Квадраты полуосей $a^2=\lambda_1$ и $b^2=\lambda_2$ являются корнями уравнения $(1-\lambda A)(1-\lambda C)-\lambda^2B^2=0$. **3703.** Квадраты полуосей $a^2=\lambda_1$ $b^2=\lambda_2$ и $c^2=\lambda_3$ являются корнями уравнения $\begin{vmatrix} A\lambda-1 & D\lambda & F\lambda\\ D\lambda & B\lambda-1 & E\lambda\\ F\lambda & E\lambda & C\lambda-1\end{vmatrix}=0$. **3704.** $\frac{\pi ab}{|C|}\times$ $\times\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. **3705.** $\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}}$.

3707. Угол падения равен $\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)$; отклонение луча равно $2\arcsin\left(n\sin\frac{a}{2}\right)-\alpha$. 3708. Искомые коэффициенты a и b определяются из системы уравнений $a[xx]+b[xl]=[xy]$, $a[xl]+bn=[yl]$, где $[xy]=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ и т. п. Задача имеет определенное решение, если $\sum_{i\neq j}(x_i-x_j)^2\neq 0$. 3709. $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2(\bar{x}\cdot\bar{y}-\overline{xy})}{[\overline{x^2}-(\bar{x})^2]-[\overline{y^2}-(\bar{y})^2]}$, $p=\bar{x}\cos\alpha+\bar{y}\sin\alpha$, где $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ $\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ и т. п. суть средние значения. 3710. $4x-7/2$; $\Delta_{\min}=1/2$.

ОТДЕЛ VII

3711. $F(y)=1$, если $-\infty<y<0$; $F(y)=1-2y$, если $0\leqslant y\leqslant 1$; $F(y)=-1$, если $1<y<+\infty$. 3712. $F(y)$ разрывна при $y=0$. 3713. а) $\frac{\pi}{4}$; б) 1; в) $\frac{8}{3}$; г) $\ln\frac{2e}{1+e}$. 3713.1. 0. 3715. Нельзя. 3716. Нельзя. 3717. $F'(x)=2xe^{-x^5}-e^{-x^3}-\int_{x}^{x^2}y^2e^{-xy^2}dy$. 3718. а) $-(e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha+e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha)+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$; б) $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b+\alpha}\right)\sin\alpha(b+\alpha)-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a+\alpha}\right)\sin\alpha(a+\alpha)$; в) $\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$; г) $f(\alpha,-\alpha)+2\int_0^{\alpha}f'_u(u,v)\,dx$, где $u=x+\alpha$ и $v=x-\alpha$; д) $2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(y^2+\alpha^4-\alpha^2)\,dy+2\int_0^{\alpha^2}\sin 2x^2\cdot\cos 2\alpha x\,dx-2\alpha\int_0^{\alpha^2}dx\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy$. 3719. $F''(x)=3f(x)+2xf'(x)$. 3720. $F''(x)=2f(x)$, если $x\in(a,b)$, и $F''(x)=0$, если $x\overline{\in}(a,b)$. 3721. $F''(x)=\frac{\Delta^2f(x)}{h^2}$, где $\Delta^2f(x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$. 3722. $F^{(n)}(x)=(n-1)!\,f(x)$. 3723. $4x-\frac{11}{3}$. 3724. $0{,}934+0{,}428x$ (приблизительно!). 3725. $\frac{dE}{dk}=\frac{E-F}{k}$; $\frac{dF}{dk}=\frac{E}{k(1-k^2)}-\frac{F}{k}$. 3729. $F''_{xy}(x, y)=x(2-3y^2)f(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)+x^2y(1-y^2)f'(xy)$. 3732. $\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$. 3733. 0, если $|a|\leqslant 1$; $\pi\ln a^2$, если $|a|>1$. 3734. $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a\ln(1+|a|)$. 3735. $\pi\arcsin a$. 3736. $\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. 3737. $\ln\frac{b+1}{a+1}$. 3738. а) $\operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$; б) $\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$. 3741. $a\geqslant 0$. 3742. $\operatorname{Max}(p, q)>1$. 3743. $\left|\frac{p-1}{q}\right|<1$. 3744. $p<1$. 3745. $n<0$ и $n>\frac{1}{2}$. 3746. $p>\frac{1}{2}$. 3747. Сходится при $a>0$ и при $a=-\frac{2n-1}{2}\pi$ $(n=1, 2, \ldots)$. 3748. Сходится при $n>4$. 3749. Сходится при $p>1$. 3750. Сходится при $-1<n<2$. 3755.1. а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. 3755.2. Сходится неравномерно. 3756. Сходится равномерно. 3757. Сходится равномерно. 3758. Сходится равномерно. 3759. Сходится неравномерно. 3760. Сходится равномерно. 3760.1. Сходится равномерно. 3761. Сходится равномерно. 3762. Сходится неравномерно. 3763. а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. 3764. Сходится неравномерно. 3765. Сходится равномерно. 3765.1. $b\geqslant 10^{70}$. 3766. а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. 3767. Сходится равномерно. 3768. Сходится неравномерно. 3769. Сходится равномерно. 3770. Сходится равномерно. 3772. Нет. 3776. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 3776.2. 1. 3778. $a=\pm 1$. 3779. Непрерывна. 3780. Непрерывна. 3781. Непрерывна. 3782. Непрерывна. 3783. Разрывна при $\alpha=0$. 3784. $\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$. 3785. $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$. 3788. $\ln\frac{b}{a}$. 3790. $\ln\frac{b}{a}$. 3791. 0. 3792. $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$. 3793. $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$. 3794. $\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}}$. 3795. $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m}-$

$-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$ $(m\neq 0)$. 3796. $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$. 3797. $-\pi(1-$ $-\sqrt{1-\alpha^2})$. 3798. $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$. 3799. $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot(1+$ $+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2})$. 3800. $\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|)$ $(\beta\neq 0)$. 3801. $\frac{\pi}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\beta^\beta}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$. 3802. $\frac{2\pi}{3}[\alpha\beta(\alpha+\beta)+$ $+\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta-(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)]$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

3803. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 3804. $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$.

3805. $\frac{(a+2b^2)a_1-4abb_1+2a^2c_1}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$.

3806. $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{b^2/4a}$. 3807. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$. 3808. $\sqrt{\pi}\,(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$.

3809. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-b^2/4a}$. 3810. $\frac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}e^{-b^2/4a}$. 3811. $(-1)^n\times$ $\times\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\cdot\frac{d^{2n}}{db^{2n}}(e^{-b^2})$. 3812. $(\pi/2)\operatorname{sgn}\beta$. 3812.1. Функция нечетная. При $x>0$ минимумы в точках $2k\pi$ и максимумы в точках $(2k-1)\pi$, где $k=1, 2, 3, \ldots$ Асимптоты $y=\frac{\pi}{2}$ при $x\to+\infty$ и $y=-\frac{\pi}{2}$ при $x\to-\infty$. 3813. $\pi\frac{|\beta|}{2}-$ $-\sqrt{\pi\alpha}$. 3814. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$. 3815. 0, если $|\alpha|<|\beta|$; $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$, если $|\alpha|=|\beta|$; $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$, если $|\alpha|>|\beta|$. 3816. $\frac{\pi}{4}\times$ $\times\operatorname{sgn}\alpha$. 3817. $\frac{\pi}{2}|\alpha|$. 3818. $\frac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|$. 3819. $\frac{\pi}{4}$. 3820. $\frac{3}{8}\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$. 3821. $\frac{\pi}{4}$. 3822. $\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{k}-$ $-\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{k}+\frac{k}{4}\ln\frac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2}$. 3823. $D(x)=1$ при $|x|<1$; $D(x)=\frac{1}{2}$ при $x=\pm 1$; $D(x)=0$ при $|x|>1$.

3824. а) $\pi\operatorname{sgn}a\cos ab$; б) $\pi\operatorname{sgn}a\sin ab$. 3825. $\frac{\pi}{2}\times$

$\times e^{-|\alpha|}$. **3826.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha e^{-|\alpha|}$. **3827.** $\frac{\pi}{4}(1-e^{-2})$.
3828. $\frac{\pi(1+|\alpha|)}{4}e^{-|\alpha|}$. **3829.** $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\frac{b\alpha}{a}e^{-|\alpha|/a\sqrt{ac-b^2}}$.
3830. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. **3831.** $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}+\right.$
$\left.+\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}a\right)$. **3832.** $\sqrt{\pi}\cos\left(a^2+\frac{\pi}{4}\right)$. **3833.** $\sqrt{\pi}\sin\left(a^2+\right.$
$\left.+\frac{\pi}{4}\right)$. **3835.** а) $\frac{n!}{p^{n+1}}$; б) $\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$; в) $\frac{1}{p-\alpha}$ при $p>\alpha$;
г) $\frac{1}{(p+a)^2}$; д) $\frac{p}{p^2+1}$; е) $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$; ж) $\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}\times$
$\times e^{-\alpha^2/4p}$. **3837.** а) 1; б) $x^2+\frac{1}{2}$; в) e^{2ax+a^2}; г) $\frac{1}{2}e^{-a^2/4}\times$
$\times\cos ax$. **3839.** $\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}$, где $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.
3843. $\frac{\pi}{8}$. **3844.** $\frac{\pi a^4}{16}$. **3845.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **3846.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.
3847. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **3848.** $\frac{3\pi}{512}$. **3849.** $\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$. **3850.** $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\times$
$\times\sqrt{\pi}$. **3851.** $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$ $(0<m<n)$. **3852.** $\mathrm{B}(n-m,\ m)$
$(0<m<n)$. **3853.** $\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{m+1/n}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{n},\ p-\frac{m+1}{n}\right)$
$\left(0<\frac{m+1}{n}<p\right)$. **3854.** $\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}\mathrm{B}(m+1,\ n+1)$
$(m>-1,\ n>-1)$. **3855.** $\frac{1}{m}\mathrm{B}\left(\frac{1}{m},\ 1-\frac{1}{n}\right)$ $(n<0$
или $n>1)$. **3856.** $\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\ \frac{n+1}{2}\right)$ $(m>-1,\ n>$
$>-1)$. **3857.** $\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}$ $(|n|<1)$. **3858.** $\frac{2^{n-1}}{(1-k)^{2^{n/2}}}\times$
$\times\mathrm{B}\left(\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}\right)$ $(n>0)$. **3859.** $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n>0)$. **3860.** $\frac{1}{|n|}\times$
$\times\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\left(\frac{m+1}{n}>0\right)$. **3831.** $\Gamma(p+1)$ $(p>-1)$.

3862. $\frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right]$ $(p>-1)$. 3863. $-\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$ $(0<p<1)$. 3864. $\pi^3\cdot\frac{1+\cos^2 p\pi}{\sin^3 p\pi}$ $(0<p<1)$. 3864.1. $\frac{2}{27}\pi^2$.

3864.2. $\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$. 3865. $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{p\pi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{q\pi}{2}}\right|$ $(0<p<1,\ 0<q<1)$;

$0\ (p=q)$. 3866. $\pi\operatorname{ctg}\pi p$. 3867. $\frac{\pi}{2\beta}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2\beta}$. 3868. $\ln\sqrt{2\pi}$.

3869. $\ln\sqrt{2\pi}+a(\ln a-1)$. 3870. $\frac{1}{\pi}\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right)$. 3871. $\frac{1}{4n}$.

3876. $\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}}$ $(a>0)$. 3877. $\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}$ $(a>0)$.

3879. $aB\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2n}\right)$. 3880. $\frac{2a^2}{n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$. 3881. $f(x)=$

$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$. 3882. $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\times$

$\times\sin\lambda x\,d\lambda$. 3883. $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda(x-a)-\sin\lambda(x-b)}{\lambda}d\lambda$.

3884. $f(x)=\frac{2h}{\pi a}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos a\lambda}{\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda$. 3885. $\frac{1}{a^2+x^2}=$

$=\frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$. 3886. $\frac{x}{a^2+x^2}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda$.

3887. $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}\sin\lambda x\,d\lambda$. 3888. $f(x)=$

$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda\pi/2}{1-\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda$. 3889. $f(t)=\frac{2A\omega}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin 2\pi n\lambda/\omega}{\lambda^2-\omega^2}\times$

$\times\sin\lambda t\,d\lambda$. 3890. $f(x)=\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+\alpha^2}d\lambda$. 3891. $f(x)=$

$=\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(\lambda-\beta)^2+\alpha^2}+\frac{1}{(\lambda+\beta)^2+\alpha^2}\right]\cos\lambda x\,d\lambda$. 3892. $f(x)=$ $=\frac{4\alpha\beta}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{[(\lambda-\beta)^2+\alpha^2][(\lambda+\beta)^2+\alpha^2]}d\lambda$. 3893. $e^{-x^2}=$ $=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda^2/4}\cos\lambda x\,d\lambda$. 3894. $xe^{-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda^2/4}\sin\lambda x\,d\lambda$.

3895 а) $e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda$ $(0\leqslant x<+\infty)$; б) $e^{-x}=$ $=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda$ $(0<x<+\infty)$. 3896. $F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times$ $\times\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$. 3897. $F(x)=-i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{\alpha x}{(x^2+\alpha^2)^2}$. 3898. $F(x)=$ $=e^{-x^2/2}$. 3899. $F(x)=e^{-(x^2+\alpha^2)/2}\operatorname{ch}\alpha x$. 3900. а) $\varphi(y)=$ $=e^{-y}$ $(y>0)$; б) $\psi(y)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{y}{1+y^2}$ $(y\geqslant 0)$.

ОТДЕЛ VIII

3901. $\frac{1}{4}$. 3902. $\underline{S}=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$; $\overline{S}=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+$ $+\frac{5}{3n^2}$; $13\frac{1}{3}$. 3903. 9,88. Точное значение $2\pi(7-\sqrt{24})\approx 13{,}20$. 3904. 0,402. Точное значение 0,4. 3905. $\delta<0{,}00022$. 3906. 1. 3907. $\frac{1}{40}$. 3908. $\frac{\pi a^3}{3}$. 3910. $I=F(A,B)-F(A,b)-$ $-F(a,B)+F(a,b)$. 3912. а) Отрицательный; б) отрицательный; в) положительный. 3913. $\frac{1}{4}$. 3914. $1{,}96<I<2$. 3915. $a^2+b^2+\frac{R^2}{2}$. 3916. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f(x,y)\,dx$. 3917. $\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{|x|/2}^{1}f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-2y}^{2y}f(x,y)\,dx$. 3918. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x+1}f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{y-1}^{1}f(x,y)\,dx$.

3919. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,\ y)\,dx$.

3920. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} dx \int\limits_{1/2-\sqrt{1/4-x^2}}^{1/2+\sqrt{1/4-x^2}} f(x,\ y)\,dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,\ y)\,dx$.

3921. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} f(x,\ y)\,dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,\ y)\,dx$.

3922. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,\ y)\,dy + \int\limits_{-1}^{1} dx \left\{ \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy + \right.$ $\left. + \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,\ y)\,dy \right\} + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,\ y)\,dy$. 3924. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx +$ $+ \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x,\ y)\,dx$. 3925. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,\ y)\,dx +$ $+ \int\limits_{0}^{8} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,\ y)\,dx$. 3926. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,\ y)\,dx$.

3927. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,\ y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,\ y)\,dx$.

3928. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,\ y)\,dx$. 3929. $\int\limits_{0}^{a} dy \left\{ \int\limits_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,\ y)\,dx + \right.$ $\left. + \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,\ y)\,dx \right\} + \int\limits_{a}^{2a} dy \int\limits_{y^2/2a}^{2a} f(x,\ y)\,dx$. 3930. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx$.

3931. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,\ y)\,dx - \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,\ y)\,dx$.

3932. $\frac{p^5}{21}$. 3933. $\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a\sqrt{a}$. 3934. $\frac{a^4}{2}$. 3935. $14a^4$.

3936. $\frac{35\pi a^4}{12}$. 3937. $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{a} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr$. 3938. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr$. 3939. $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{|a|}^{|b|} rf(r\cos\varphi,$ $r\sin\varphi)\,dr$. 3940. $\int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}\ \operatorname{cosec}(\varphi+\pi/4)} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr$.

3941. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sin\varphi/\cos^2\varphi} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr + \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a/\sin\varphi} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr + \int\limits_{3\pi/4}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{a\sin\varphi/\cos^2\varphi} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr.$ **3942.** В том случае, если область интеграции ограничена двумя концентрическими окружностями с центром в начале координат и двумя лучами, исходящими из начала координат. **3943.**

$$\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{1/\cos\varphi} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{1/\sin\varphi} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr = \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_0^{\pi/2} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi + \int\limits_1^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{\arccos 1/r}^{\arcsin 1/r} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

3944. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{1/\sqrt{2}\operatorname{cosec}(\varphi+\pi/4)}^{1} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr =$

$$= \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} r\,dr \int\limits_{\pi/4-\arccos 1/r\sqrt{2}}^{\pi/4+\arccos 1/r\sqrt{2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

3945. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{2/\cos\varphi} rf(r)\,dr =$

$$= \frac{\pi}{12}\int\limits_0^{2\sqrt{2}} rf(r)\,dr + \int\limits_{2\sqrt{2}}^{4}\left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{2}{r}\right) rf(r)\,dr.$$

3946. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi/\cos^2\varphi}^{1/\cos\varphi} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr =$

$$= \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi +$$

$$+ \int\limits_1^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{\arccos 1/r}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

3947. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr =$

$$= \int\limits_0^a r\,dr \int\limits_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

3948. $\int\limits_0^a dr \int\limits_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi, r)\,d\varphi$. 3949. $\int\limits_0^a dr \int\limits_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}} \times$

$\times f(\varphi, r)\,d\varphi$. 3950. $\int\limits_0^a dr \int\limits_r^a f(\varphi, r)\,d\varphi$. 3951. $2\pi \int\limits_0^1 rf(r)\,dr$.

3952. $\pi \int\limits_0^1 rf(r)\,dr + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \left(\pi - 4\arccos\frac{1}{r}\right) rf(r)\,dr$.

3953. $\frac{1}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\operatorname{tg}\varphi)\cos^2\varphi\,d\varphi$. 3954. $\frac{2\pi a^3}{3}$. 3955. $-6\pi^2$.

3956. $\frac{6}{5}\cdot\frac{b^2+b(b+h)+(b+h)^2+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}\,(\sqrt{a}+\sqrt{a+h})\,(\sqrt{b}+\sqrt{b+h})}$; $\frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{3/2}$.

3957. $\int\limits_a^b u\,du \int\limits_\alpha^\beta f(u, uv)\,du$. 3958. $\frac{1}{2}\int\limits_1^2 du \int\limits_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv$.

3959. $4 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 v \cos^3 v\,dv \int\limits_0^a uf(u\cos^4 v, u\sin^4 v)\,du$. 3961. $u=xy$, $v=x-y$.

3962. $\int\limits_{-1}^{1} f(u)\,du$. 3963. $2\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\, f\left(u\sqrt{a^2+b^2}+c\right) du$.

3964. $\ln 2 \int\limits_1^2 f(u)\,du$. 3965. $\frac{\pi}{2}$. 3966. $\frac{4}{3}$. 3967. $\frac{2}{3}\pi ab$.

3968. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 3969. $543\frac{11}{15}$. 3970. $1\frac{37}{128} - \ln 2$.

3971. 2π. 3972. $\frac{9}{16}\pi$. 3973. $\frac{5}{3}+\frac{\pi}{4}$.

3974. $\frac{4}{3}\pi + 8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. 3975. 6. 3976. $\frac{4}{3}(4 -$

$- 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3})$. 3978. $f(0, 0)$. 3979. $\frac{2}{t}F(t)$, если

$t>0$. 3980. $2 \iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2<1} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$. 3981. $F'(t) =$

$= \int\limits_0^{2\pi} tf(t\cos\varphi, t\sin\varphi)\,d\varphi$. 3984. $\left(\frac{15}{8} - 2\ln 2\right)a^3$.

3985. $\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}$. 3986. πa^2. 3987. $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2$.

3988. $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2})$. 3989. $\frac{\pi a^2}{4}$. 3990. $a^2 \times$
$\times\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right)$. 3991. $\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$.

3992. $\frac{ab}{3}\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)+\frac{a^2b^2}{h^2k^2}\right]$. 3993. $\frac{ab}{6}\times$
$\times\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. 3994. $\frac{a^4bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}$.

3994.1. $\frac{1}{1260}\frac{(ab)^5}{c^8}$. 3995. $\frac{ab}{70}$. 3996. $\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}$.

3997. $\frac{a^2}{2}\ln 2$. 3998. $\frac{4}{3}(q-p)(s-r)$. 3998.1. $\frac{1}{15}\times$
$\times(b^5-a^5)(c^{-3}-d^{-3})$. 3998.2. $\frac{q-p}{(p+1)(q+1)}\times$
$\times\left(b^{q+1/q-p}-a^{q+1/q-p}\right)\left(c^{-p+1/q-1}-d^{-p+1/q-1}\right)$.

3999. $\frac{65}{108}ab$. 3999.1. $\frac{189}{16}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{12}{25}\right)ab$.

4000. $\frac{c^2}{6}(\sqrt{10}-2)\arcsin\frac{1}{3}$. 4001. $\frac{\pi}{|\delta|}$.

4002. $\frac{c^2}{4}[(v_2-v_1)(\operatorname{sh}2u_2-\operatorname{sh}2u_1)-(u_2-u_1)(\sin 2v_2-\sin 2v_1)]$.

4003. $\frac{2}{3}\pi a^2$. 4004. $\frac{6\pi}{7\sqrt{7}}$. 4007. $\frac{5}{6}$.

4008. $\frac{\pi R^2 a}{4}-\frac{2}{3}R^3$. 4009. $\frac{88}{105}$. 4010. π. 4011. π.

4012. $\frac{17}{12}-2\ln 2$. 4013. $\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)a^3$. 4014. $\frac{\pi}{8}$.

4015. $\frac{45}{32}\pi$. 4016. $\frac{16}{9}a^3$. 4017. $\frac{\pi a^3}{8}$. 4018. $\pi(1-$
$-e^{-R^2})$. 4019. $2a^2c\cdot\frac{(\beta-\alpha)(\pi-2)}{\pi^2}$. 4020. $\frac{\pi}{8}$.

4021. $\frac{1}{3}\pi abc(2-\sqrt{2})$. 4022. $\frac{4}{3}\pi abc(2\sqrt{2}-1)$.

4023. $\frac{3\pi abc}{8}$. 4024. $\frac{2}{3}\pi abc$. 4025. $\frac{abc}{3}$.

4026. $\frac{2}{9}abc(3\pi+20-16\sqrt{2})$. 4027. $\frac{\pi(b^3-a^3)}{12}$.

4028. $\frac{9}{2}a^4$. 4029. $\frac{3}{4}$. 4030. $\frac{a^2c}{\alpha}\ln\frac{\beta}{\alpha}$. 4031. $\frac{8}{35}$.

4032. $\frac{75}{256}\pi abc$. 4033. $\frac{\pi^4 a^2 c}{128}$. 4033.1. $(n-m)\times$
$\times(e^{-1}-e^{-2})a^2$. 4034. $\frac{abc}{3n^2}\cdot\Gamma^2(1/n)/\Gamma(3/n)$. 4035. $\frac{abc}{2m+n}\times$
$\times\Gamma(1/m)/\Gamma(2/n)\,/\Gamma(1/m+2/n)$. 4036. $\frac{2}{3}\pi a^3(2\sqrt{2}-1)$.

4037. $16a^2$. 4038. $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$. 4039. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

4040. $8a^2$. 4041. $\pi\sqrt{2}$. 4042. $\frac{\pi a^2}{2}$. 4043. $-\frac{2\pi}{3}+$
$+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{7}{4}\ln 3\right)+\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. 4044. $\frac{a^2}{9}\times$
$\times(20-3\pi)$. 4045. $2a^2$. 4045.1. $\frac{\pi}{6}[3\sqrt{10}+\ln(3+\sqrt{10})]$.

4045.2. $\frac{1}{3}abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-1}\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{3/2}-\frac{1}{c^3}\right]$.

4045.3. $\frac{4}{3}ab(2\sqrt{2}-1)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}$.

4045.4 $\frac{\pi}{2}\ln(e+e^{-1})$. 4046. $S=4\pi(3+2\sqrt{3})a^2$; $V=$
$=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}a^3$. 4047. $(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)R^2$, где
φ_1, φ_2 — долготы меридианов, ψ_1, ψ_2 — широты параллелей, R —
— радиус сферы. 4048. $\pi\left\{a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{|h|}\right\}$.

4049. $S=a(\varphi_2-\varphi_1)[b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)]$; $4\pi^2ab$.

4050. $\omega=\arcsin\frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$; $\omega\approx\frac{bc}{a^2}$.

4051. $\frac{\rho_0 a^3}{3}[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})]$. 4052. $x_0=-\frac{a}{2}$;
$y_0=\frac{8}{5}a$. 4053. $x_0=y_0=\frac{a}{5}$. 4054. $x_0=y_0=\frac{256}{315\pi}a$.

4055. $x_0=\frac{a^2b}{14c^2}$; $y_0=\frac{ab^2}{14c^2}$; 4056. $x_0=y_0=\frac{\pi a}{8}$.

4057. $x_0=\frac{5}{6}a$; $y_0=\frac{16}{9\pi}a$. 4058. $x_0=\pi a$; $y_0=\frac{5}{6}a$.

4059. $x_0 = -\frac{a}{5}$; $y_0 = 0$. **4060.** Парабола $y_0 = \frac{1}{8}\sqrt{30px_0}$. **4061.** $I_x = \frac{bh^3}{12}$; $I_y = \frac{h\left|b_1^3 - b_2^3\right|}{12}$ $(b = |b_1 - b_2|)$. **4062.** $I_x = I_y = \frac{a^4}{16}(16 - 5\pi)$. **4063.** $I_x = \frac{21\pi a^4}{32}$; $I_y = \frac{49\pi a^4}{32}$. **4064.** $I_x = I_y = \frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$. **4065.** $I_x = I_y = \frac{9}{8}a^4$. **4066.** $I_0 = \frac{\pi a^4}{8}$. **4066.1.** $\frac{a^4}{12}$. **4069.** $I_\alpha = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}$. **4070.** $X = ah^2$; $Y = 0$, где X, Y — проекции силы давления на оси координат Ox и Oy. **4071.** $P_1 = \pi a^2\delta\left(h - \frac{2}{3}a\right)$; $P_2 = \pi a^2\delta\left(h + \frac{2}{3}a\right)$. **4072.** Проекции силы давления на оси Ox и Oz, расположенные в вертикальной плоскости, проходящей через ось цилиндра, из которых ось Ox — горизонтальная, а ось Oz — вертикальная, соответственно равны: $X_1 = -\pi a^2\delta\left(h - \frac{b}{2}\cos\alpha\right) \times \sin\alpha$, $Z_1 = -\pi a^2\delta\left(h - \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha$; $X_2 = \pi a^2\delta \times \left(h + \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha$, $Z_2 = \pi a^2\delta\left(h + \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha$. **4073.** Проекции силы притяжения на оси Ox, Oy, Oz, соответственно, равны: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -\frac{2kmM}{a^2h}\{|b| - |b - h| + \sqrt{a^2 + (b - h)^2} - \sqrt{a^2 + b^2}\}$, где k — постоянная тяготения. **4074.** $p_{\text{ср}} = \frac{1}{2}p_0$. **4075.** $A = \frac{kp}{12}\left\{2ab\sqrt{a^2 + b^2} + a^3\ln\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} + b^3\ln\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b}\right\}$. **4076.** $\frac{1}{364}$. **4077.** $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$. **4078.** $\frac{1}{48}$. **4079.** $\frac{4}{5}\pi abc$. **4080.** $\frac{\pi}{6}$. **4081.** $\int_0^1 dx\left\{\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x, y, z)\,dy + \int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x} f(x, y, z)\,dy\right\} = \int_0^1 dz\left\{\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z)\,dx + \right.$

$+\int\limits_x^1 dy \int\limits_0^{1-y} f(x,\ y,\ z)\,dx\Big\}$. **4082.** $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{|x|}^{1} dz \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z)\,dy =$
$= \int\limits_0^1 dz \int\limits_{-z}^{z} dy \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z)\,dx$. **4083.** $\int\limits_0^1 dx \left\{\int\limits_0^{x^2} dz \int\limits_0^1 f(x, y, z)dy + \int\limits_{x^2}^{x^2+1} dz \int\limits_{\sqrt{z-x^2}}^{1} f(x,\ y,\ z)\,dy\right\} = \int\limits_0^1 dz \left\{\int\limits_0^{\sqrt{z}} dy \int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^{1} f(x, y, z)\,dx + \int\limits_{\sqrt{z}}^{1} dy \int\limits_0^1 f(x, y, z)\,dx\right\} + \int\limits_1^2 dz \int\limits_{\sqrt{z-1}}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^{1} f(x, y, z)\,dx.$

4084. $\frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-\zeta^2)\,f(\zeta)\,d\zeta$. **4085.** $\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (2-z^2)\,f(z)\,dz + \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (2-z^2)\,f(z)\,dz$. **4086.** $F(A,\ B,\ C)-F(A,\ B,\ c)-F(A,\ b,\ C)-F(a,\ B,\ C)+F(A,\ b,\ c)+F(a,\ B,\ c)+F(a,\ b,\ C)-F(a,\ b,\ c)$. **4087.** $\frac{\pi}{10}$. **4088.** $\frac{\pi}{15}\,(2\sqrt{2}-1)$.

4089. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\cos\varphi}} \cos\psi\,d\psi \int\limits_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\,\cos\psi}} r^2 f(r)\,dr.$

4090. $\frac{\pi^2 abc}{4}$. **4091.** $\frac{16\pi}{3}$. **4092.** $\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)h^4\sqrt{h}$. **4093.** $\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^3}-\frac{1}{n^3}\right)\times(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right]$. **4094.** $\frac{6}{5}$.

4095. $3(e-2)$. **4096.** $u=\frac{4\pi}{3}\,\frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R}$, где $|\theta|<1$. **4098.** а) $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$; б) $F'(t) = \frac{3}{t}\left[F(t)+\iiint\limits_V xyzf'(xyz)\,dx\,dy\,dz\right]$, где $t>0$ и $V=\{0\leqslant x\leqslant t,\ 0\leqslant y\leqslant t,\ 0\leqslant z\leqslant t\}$. **4099.** 0, если одно из чисел m, n и p нечетно; $\frac{4\pi}{m+n+p+3}\,\frac{(m-1)!!\,(n-1)!!\,(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$, если числа m, n и p четные. **4100.** $\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(r+1)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}$.

4101. $\frac{3}{35}$. **4102.** $\frac{7}{24}$. **4103.** $\frac{2}{3}\,a^3(3\pi-4)$. **4104.** $\frac{\pi a^3}{6}$.

4105. $\dfrac{a^3}{24}(3\pi-4)$. 4106. $\dfrac{32}{3}\pi$. 4107. πa^3.
4108. $\dfrac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$. 4109. $\dfrac{1}{2}$. 4110. $\dfrac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})\times$
$\times(b^3-a^3)$. 4111. $\dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{a^2bc}{h}$. 4112. $\dfrac{\pi^2}{4}abc$.
4112.1. $\dfrac{\pi^2 abc}{4\sqrt{2}}$. 4113. $\dfrac{5\pi abc}{12}(3-\sqrt{5})$.
4114. $\dfrac{8\pi}{5}abc$. 4115. $\dfrac{abc}{3}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\Gamma^2\left(\dfrac{1}{4}\right)$.
4116. $\dfrac{abc}{60}\left(\dfrac{a}{h}+\dfrac{b}{k}\right)\cdot\left(\dfrac{a^2}{h^2}+\dfrac{b^2}{k^2}\right)$. 4116.1. $\dfrac{abc}{60}\times$
$\times\dfrac{\left(\dfrac{a}{h}\right)^4}{\dfrac{a}{h}+\dfrac{b}{k}}$. 4117. $\dfrac{abc}{554\,400}$. 4118. $\dfrac{abc}{3}$. 4118.1. $\dfrac{abc}{90}$.
4118.2. $\dfrac{abc}{1680}$. 4118.3. $\dfrac{4\pi}{35}abc$. 4119. $\dfrac{9}{4}a^3$.
4120. $\dfrac{1}{3}(b^3-a^3)\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\Gamma^2\left(\dfrac{3}{4}\right)$. 4121. $\dfrac{4\pi}{3}a^3$.
4122. $\dfrac{\pi abc^2}{3h}(1-e^{-1})$. 4123. $\dfrac{3}{2}abc$. 4124. $5abc\left(\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{3}\right)$.
4125. $37\cdot 27$. 4126. $V=\dfrac{5\pi a^3}{6}$; $S=\dfrac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1)$.
4127. $\dfrac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}$. 4128. $\dfrac{4\pi h^3}{3|\Delta|}$. 4129. $\dfrac{\pi^2}{3n\sin(\pi/n)}\cdot\dfrac{abc^2}{h}$.

4130. $$\frac{abc}{mn+mp+np}\cdot\frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{m}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p}\right)}.$$

4131. $\dfrac{3}{2}$. 4132. $4\pi\rho_0\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{k^2}+\dfrac{2}{k^3}\right)e^{-k}$.
4133. $\left(0,\ 0,\ \dfrac{3}{4}c\right)$. 4134. $x_0=y_0=\dfrac{2}{5}a$; $z_0=\dfrac{7}{30}a^2$.
4135. $x_0=\dfrac{7}{18}p$; $y_0=0$; $z_0=\dfrac{7}{176}p$. 4136. $x_0=\dfrac{3}{8}a$; $y_0=\dfrac{3}{8}b$; $z_0=$
$=\dfrac{3}{8}c$. 4137. $x_0=y_0=0$; $z_0=\dfrac{3a}{8}$. 4138. $x_0=y_0=1$;
$z_0=\dfrac{5}{3}$. 4139. $x_0=\dfrac{9\pi}{448}a$; $y_0=\dfrac{9\pi}{448}b$; $z_0=\dfrac{9\pi}{448}c$.

4140. $x_0 = y_0 = 0$; $z_0 = \frac{7}{20}$. 4141. $\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$. 4142. $x_0 = \alpha$; $y_0 = \beta$; $z_0 = \gamma$. 4143. $I_{xy} = \frac{abc^3}{60}$; $I_{yz} = \frac{a^3bc}{60}$; $I_{zx} = \frac{ab^3c}{60}$.

4144. $I_{xy} = \frac{4}{15}\pi abc^3$; $I_{yz} = \frac{4}{15}\pi a^3bc$; $I_{zx} = \frac{4}{15}\pi ab^3c$.

4145. $I_{xy} = \frac{\pi abc^3}{5}$; $I_{yz} = \frac{\pi a^3bc}{20}$; $I_{xz} = \frac{\pi ab^3c}{20}$.

4146. $I_{xy} = \frac{2abc^3}{225}(15\pi - 16)$; $I_{xz} = \frac{2ab^3c}{1575}(105\pi - 272)$; $I_{yz} = \frac{2a^3bc}{1575}(105\pi - 92)$. 4147. $I_{xy} = \frac{7}{2}\pi abc^3$; $I_{xz} = \frac{4}{3}\pi ab^3c$; $I_{yz} = \frac{4}{3}\pi a^3bc$. 4147.1. $I_{yz} = \frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}} \times a^3bc$; $I_{zx} = \frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}} ab^3c$; $I_{xy} = \frac{\pi^2}{128\sqrt{2}} abc^3$.

4147.2. $I_{yz} = \frac{1}{5n^2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)} \cdot a^3bc$; $I_{zx} = \frac{1}{5n^2} \times \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)} \cdot ab^3c$; $I_{xy} = \frac{1}{5n^2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)} \cdot abc^3$.

4148. $I_z = \frac{14}{15}$. 4149. $I_z = \frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2} - 5)$. 4149.1. $\frac{\pi}{5}a^5$.

4150. $\frac{4}{9}MR^2$. 4153. $I = \frac{M}{3}\left(a^2 + \frac{2}{3}h^2\right)$, где $M = 2\pi\rho_0 a^2 h$ — масса цилиндра. 4154. $I_0 = \frac{\pi^2 a^5 \rho_0}{8}$.

4155. $u = 2\pi\rho_0\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)$, если $r \leqslant R$; $u = \frac{4\pi R^3\rho_0}{3r}$, если $r > R$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 4156. $u = 4\pi \times$

$\times \int\limits_{R_1}^{R_2} f(\rho) \min\left(\frac{\rho^2}{r}, \quad \rho\right) d\rho$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4157. $u = \pi\rho_0 \left\{(h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2} + z\sqrt{a^2+z^2} - [(h-z)\times\right.$ $\left.\times |h-z| + z|z|] + a^2 \ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{\sqrt{a^2+z^2}-z}\right|\right\}$.

4158. $X=0$; $Y=0$; $Z = -\frac{kMm}{a|a|}$, если $|a| \geqslant R$, $Z = -\frac{kMm}{R^3}a$, если $|a| < R$. **4159.** $X=0$; $Y=0$; $Z = -2\pi\rho_0 k\left\{\sqrt{a^2+z^2} - \sqrt{a^2+(h-z)^2} - (|z| - |h-z|)\right\}$.
4160. $X=0$; $Y=0$; $Z = -\pi k\rho_0 R\sin^2\alpha$. **4161.** Сходится при $p>1$. **4162.** Сходится при $p>1$ и $q>1$.
4163. Сходится при $p>\frac{1}{2}$. **4164.** Сходится при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$. **4165.** Расходится. **4169.** $\frac{1}{(p-q)(q-1)}$ $(p>q>1)$. **4170.** $\frac{1}{p-1}$ $(p>1)$. **4171.** 2π.
4172. $\frac{\pi}{p-1}$ $(p>1)$. **4173.** $\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$. **4174.** $\frac{1}{2}$.
4175. π. **4176.** $\frac{\pi}{2}$. **4177.** $\frac{\pi}{2}$. **4178.** $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}e^{\Delta/\delta}$, где $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ и $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$. **4179.** $\frac{\pi}{e}ab$.
4180. $-\frac{\pi\varepsilon a^2 b^2}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$. **4181.** Сходится. **4182.** Сходится при $p<1$. **4183.** Сходится при $\frac{1}{p}+$ $+\frac{1}{q}>1$. **4184.** Сходится при $p<1$. **4185.** Сходится при $p<1$. **4187.** $\frac{\pi}{2}$. **4188.** πa. **4189.** $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$.
4190. 2. **4191.** Сходится при $p>\frac{3}{2}$. **4192.** Сходится при $p<\frac{3}{2}$. **4193.** Сходится при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$.
4194. Сходится при $p<1$. **4195.** Сходится при $p<1$.
4196. $(1-p)^{-1}(1-q)^{-1}(1-r)^{-1}$ $(p<1,\ q<1,\ r<1)$.
4197. $\frac{4\pi}{3}$. **4198.** $2\pi\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\ 1-p\right)$ $(p<1)$. **4199.** $\pi^{3/2}$.

4200. $\sqrt{\dfrac{\pi^3}{\Delta}}$, где $\Delta = |a_{ij}|$. 4204. а) $\dfrac{n}{3}$; б) $\dfrac{n(3n+1)}{12}$. 4205. $\dfrac{a^n}{n!}$. 4206. $\dfrac{1}{2^n n!}$. 4207. $\dfrac{2}{(n-1)!\,(2n+1)}$. 4208. $\dfrac{2^n h_1 h_2 \ldots h_n}{|\Delta|}$. 4209. $\dfrac{a_1 a_2 \ldots a_n}{n!}$. 4210. $\dfrac{\pi^{(n-1)/2}}{n\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)} \times$

$\times\, a_1 a_2 \ldots a_n$. 4211. $\dfrac{\pi^{n/2} a^n}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}$.

4212. $\dfrac{\pi^{(n-1)/2} a^{n-1} h^3}{12\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}$. 4213. $\dfrac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}$.

4218. $R^n \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \displaystyle\int_0^1 f(\sqrt{u})\, u^{n/2-1} du$. 4219. $u = \dfrac{16}{15}\pi^2 \rho_0^2 R^5$.

4220. $\sqrt{\dfrac{\pi^n}{\delta}}\, e^{-\Delta/\delta}$, где $\delta = |a_{ij}|$ и $\Delta = \left|\begin{array}{c|c} a_{ij} & b_i \\ \hline b_j & c \end{array}\right|$ — окаймленный определитель. 4221. $1+\sqrt{2}$. 4222. $\dfrac{256}{15}a^3$.

4223. $2\pi^2 a^3(1+2\pi^2)$. 4224. $\dfrac{a^3}{6}(\mathrm{ch}^{3/2} 2t_0 - 1)$. 4225. $4a^{7/3}$.

4226. $2(e^a-1)+\dfrac{\pi}{4}ae^a$. 4227. $2a^2(-2\sqrt{2})$. 4228. $\dfrac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$.

4229. $2a^2$. 4230. $\dfrac{\pi}{a}$. 4231. 5. 4232. $\sqrt{3}$. 4233. $|x_0|+|z_0|$, где $|x_0|<a$. 4234. $\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\dfrac{3z_0^4}{a}}+2\sqrt[3]{\dfrac{az_0^2}{3}}\right)$.

4235. $\left(1+\dfrac{2z_0}{3c}\right)\sqrt{cz_0}$. 4236. $a\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\dfrac{|z|}{\sqrt{a^2-z^2}}$.

4237. $\dfrac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}$. 4238. $\dfrac{2}{3}\pi a^3$. 4239. $\dfrac{1}{3}\times$

$\times\left[(2+t_0^2)^{3/2}-2^{3/2}\right]$. 4240. $\dfrac{a^2}{256\sqrt{2}}\Big[100\sqrt{38}-72-17\times$

$\times \ln \dfrac{25+4\sqrt{38}}{17}\Big]$. **4241.** $2b\left(b+a\,\dfrac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right)$, где $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса. **4241.1.** $\dfrac{2}{3}p^2 \times (2\sqrt{2}-1)$. **4242.** $\dfrac{a}{8}\left[(3\sqrt{3}-1)+\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$.

4243. $x_0 = b - a\sqrt{\dfrac{h-a}{h+a}}$; $y_0 = \dfrac{h}{2}+\dfrac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}$.

4244. $x_0 = y_0 = \dfrac{4}{3}a$. **4244.1.** $S_x = S_y = \dfrac{3}{5}a^2$. **4244.2.** πa^3.

4244.3. а) $\dfrac{32}{3}a^3$; б) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^3$. **4244.4.** $r_0 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

4245. $x_0 = y_0 = z_0 = \dfrac{4a}{3\pi}$. **4246.** $x_0 = \dfrac{2}{5}$; $y_0 = -\dfrac{1}{5}$; $z_0 = \dfrac{1}{2}$. **4247.** $I_x = I_y = \left(\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$; $I_z = a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$. **4248.** а) 0; б) $\dfrac{2}{3}$; в) 2. **4249.** а) 2; б) 2; в) 2. **4250.** $-\dfrac{14}{15}$. **4251.** $\dfrac{4}{3}$. **4252.** 0. **4253.** $-2\pi a^2$.

4254. -2π. **4255.** 0. **4256.** 0. **4257.** $\dfrac{\pi}{4}-1$. **4258.** 8.

4259. 12. **4260.** 4. **4261.** -2. **4262.** $\displaystyle\int_0^{a+b} f(u)\,du$.

4263. $-\dfrac{3}{2}$. **4264.** 9. **4265.** $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\int_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,dy$. **4266.** 62.

4267. 1. **4268.** $\pi+1$. **4269.** $e^a\cos b-1$. **4271.** $z = \dfrac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \dfrac{y^3}{3} + C$. **4272.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-y}{2y\sqrt{2}}+C$.

4273. $z = -\dfrac{2y^2}{(x+y)^2} + \ln|x+y| + C$. **4274.** $z = e^{x+y}(x-y+1) + ye^x + C$. **4275.** $z = \dfrac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m} + C$. **4276.** $z = \dfrac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\partial y^m}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\right)+C$. **4278.** $|I_R| \leqslant \dfrac{8\pi}{R^2}$. **4279.** $\dfrac{1}{35}$.

4280. $-\pi a^2$. **4281.** $2\pi\sqrt{2}\,a^2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$. **4282.** $-\dfrac{\pi a^3}{4}$.

4283. -4. 4284. $-53\frac{7}{12}$. 4285. 0. 4286. $b-a$.

4287. $\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\int\limits_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,dy+\int\limits_{z_1}^{z_2}\chi(z)\,dz$. 4288. $\int\limits_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u)\,du$.

4289. $\int\limits_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u)\,du$. 4290. $u=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C$.

4291. $u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C$. 4292. $u=\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+$ $+\operatorname{arctg}\frac{z}{x+y}+C$. 4293. $A=-mg(z_2-z_1)$. 4294. $A=$ $=-\frac{k}{2}(a^2-b^2)$. 4295. $A=k\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$, где $r_i=$ $=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}$ $(i=1,\ 2)$. 4296. $I=\iint\limits_S y^2\,dx\,dy$.

4297. $-46\frac{2}{3}$. 4298. $\frac{\pi a^4}{2}$. 4299. $-2\pi ab$. 4300. $-\frac{1}{5}\times$ $\times(e^\pi-1)$. 4301. 0. 4302. $I_1-I_2=2$. 4303. $\frac{\pi m a^8}{8}$.

4304. $mS+e^{x_2}\varphi(y_2)-e^{x_1}\varphi(y_1)-m(y_2-y_1)-\frac{m}{2}(x_2-x_1)\times$ $\times(y_2+y_1)$. 4305. $P=\frac{\partial u}{\partial x}$, $Q=kx+\frac{\partial u}{\partial y}$, где u — дважды дифференцируемая функция и k — постоянная величина. 4306. $\frac{\partial}{\partial x}[xF(x,\ y)]=\frac{\partial}{\partial y}[yF(x,\ y)]$. 4307. 1) $I=0$; 2) $I=2\pi$.

4308. πab. 4309. $\frac{3}{8}\pi ab$ 4310. $\frac{a^2}{6}$. 4311. $\frac{3}{2}a^2$. 4312. a^2.

4313. $\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$. 4314. $\frac{a^2}{2}\mathrm{B}(2m+1,\ 2n+1)$. 4315. $\frac{ab}{2n}\times$ $\times\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$. 4316. $\frac{ab}{n}\left[1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right]$.

4317. $\frac{abc^2}{2(2n+1)}$. 4318. $\pi(n+1)(n+2)r^2$; $6\pi r^2$. 4319. $\pi\times$ $\times(n-1)(n-2)r^2$; $6\pi r^2$. 4320. $4a^2$. 4321. $\operatorname{sgn}(ad-bc)$.

4322. $I = \sum \operatorname{sgn} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}$, где сумма распространена на все точки пересечения кривых: $\varphi(x, y) = 0$ и $\psi(x, y) = 0$, лежащие внутри контура C. 4324. $I = 2S$, где S — площадь, ограниченная контуром C. 4325. $X'_x(x_0, y_0) + Y'_y(x_0, y_0)$. 4326. Проекции силы на оси координат равны: $X = 0$; $Y = 2kmM/\pi a^2$, где k — постоянная тяготения. 4327. $u = 2\pi\varkappa R \times \ln\frac{1}{R}$, если $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant R$; $u = 2\pi\varkappa R \ln\frac{1}{\rho}$, если $\rho > R$. 4328. $I_1 = \frac{\pi}{m}\rho^m \cos m\varphi$, $I_2 = \frac{\pi}{m}\rho^m \sin m\varphi$, если $0 \leqslant \rho \leqslant 1$; $I_1 = \frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi$, $I_2 = \frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi$, если $\rho > 1$. 4329. $u = 2\pi$, если точка $A(x, y)$ лежит внутри контура C; $u = \pi$, если точка $A(x, y)$ лежит на контуре C; $u = 0$, если точка $A(x, y)$ лежит вне контура C. 4330. $K_1 = \pi\rho^m \cos m\varphi$, $K_2 = \pi\rho^m \sin m\varphi$, если $0 \leqslant \rho < 1$; $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, если $\rho = 1$; $K_1 = -\frac{\pi}{\rho^m}\cos m\varphi$, $K_2 = -\frac{\pi}{\rho^m}\sin m\varphi$, если $\rho > 1$. 4339. $Q = \iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$; $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

4340. $H_x = kI \oint\limits_C \frac{1}{r^3}[(\eta - y)\,dz - (\zeta - z)\,dy]$; $H_y = kI \oint\limits_C \frac{1}{r^3} \times [(\zeta - z)\,dx - (\xi - x)\,dz]$; $H_z = kI \oint\limits_C \frac{1}{r^3}[(\xi - x)\,dy - (\eta - y)\,dx]$.

4341. $I_1 - I_2 = (4\pi - 2\sqrt{3})\,a^4$. 4342. $\frac{7}{2}\pi\sqrt{2}\,a^3$. 4343. πa^3.

4344. $\frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2})$. 4345. $\frac{3 - \sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3} - 1)\ln 2$.

4346. $\frac{125\sqrt{5} - 1}{420}$. 4347. $\frac{4\pi}{3}abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$.

4348. $\pi^2\left[a\sqrt{1+a^2} + \ln\left(a + \sqrt{1+a^2}\right)\right]$. 4349. $\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha \times \cos^2\alpha \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. 4350. $\frac{64}{15}\sqrt{2}\,a^4$. 4352. $\frac{2\pi\left(1 + 6\sqrt{3}\right)}{15}$.

4352.1. πa^2. 4352.2. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. 4353. $\frac{4}{3}\pi\rho_0 a^4$.

4354. $\dfrac{\pi\rho_0 a(3a^2+2b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{12}$. 4355. $x_0=\dfrac{a}{2}$; $y_0=0$; $z_0=\dfrac{16}{9\pi}a$. 4356. $x_0=y_0=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$; $z_0=\dfrac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1)$.

4356.1. а) $40a^4$; б) $\pi R\left[R(R+H^2)+\dfrac{2}{3}H^3\right]$. 4356.2. $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

4357. Проекции силы притяжения на оси координат $X=0$; $Y=0$; $Z=\pi km\rho_0\ln\dfrac{a}{b}$. 4358. $u=4\pi\rho_0\min\left(a, \dfrac{a^2}{r_0}\right)$, где $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. 4359. $F(t)=\dfrac{\pi}{18}(3-t^2)^2$, если $|t|\leqslant\sqrt{3}$; $F(t)=0$, если $|t|>\sqrt{3}$. 4360. $F(t)=\dfrac{\pi(8-5\sqrt{2})}{6}t^4$.

4361. $F=0$, если $t\leqslant r-a$; $F=\dfrac{\pi t}{r}[a^2-(r-t)^2]$, если $r-a<t<r+a$; $F=0$, если $t>r+a$ $(t\geqslant 0)$. 4362. $4\pi a^3$.

4363. $\left[\dfrac{f(a)-f(0)}{a}+\dfrac{g(b)-g(0)}{b}+\dfrac{h(c)-h(0)}{c}\right]abc$.

4364. 0. 4365. $\dfrac{4\pi}{abc}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$. 4366. $\dfrac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$.

4367. $-\pi a^3\sqrt{3}$. 4368. $\dfrac{h^3}{6}$. 4369. 2 пл. S. 4370 0.

4371. $-2\pi a(a+h)$. 4372. $2\pi Rr^2$. 4373. $-\dfrac{9}{2}a^3$. 4374. 0.

4376. $3\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$. 4377. 0.

1378. $2\iiint\limits_V\dfrac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 4379. $\iiint\limits_V\Delta u\,dx\,dy\,dz$, где $\Delta u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}$. 4380. 0. 4384. $\dfrac{4\pi}{3}\left(a^2+\dfrac{b^2}{2}\right)|c|$.

4385. $\dfrac{2}{9}a^3$. 4385.1. $2\pi^2a^2b$. 4387. $3a^4$. 4388. $\dfrac{12}{5}\pi a^5$.

4389. 1. 4390. $-\dfrac{\pi h^4}{2}$. 4392. а) $I=0$; б) $I=4\pi$.

4401. а) $\operatorname{grad}u(0)=3i-2j-6k$, $|\operatorname{grad}u(0)|=7$, $\cos\alpha=3/7$, $\cos\beta=-\dfrac{2}{7}$, $\cos\gamma=-\dfrac{6}{7}$; б) $\operatorname{grad}u(A)=6i+3j$, $|\operatorname{grad}u(A)|=$

$=3\sqrt{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\gamma=0$; в) $\operatorname{grad} u(B)=$ $=7i$, $|\operatorname{grad} u(B)|=7$ $\cos\alpha=1$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=0$; $\operatorname{grad} u=0$ в точке $M(-2, 1, 1)$. **4401.1.** $\operatorname{grad} u(M)=$ $=12i-9j-20k$, $|\operatorname{grad} u(M)|=25$, $\cos\alpha=$ $=\dfrac{12}{25}$, $\cos\beta=-\dfrac{9}{25}$, $\cos\gamma=-\dfrac{4}{5}$; $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

4402. а) $xy=z^2$; б) $x=y=0$ и $x=y=z$; в) $x=y=z$.

4403. $r=1$. **4404.** $\dfrac{4(x^2+y^2)}{u^2-256}+\dfrac{4z^2}{u^2}=1$ $(u\geqslant 16)$; $\dfrac{x^2+y^2}{960}+\dfrac{z^2}{1024}=1$; $\max u=20$. **4405.** $\cos\varphi=-\dfrac{8}{9}$.

4406. Поверхности уровня — полости конусов; поверхности равного модуля градиента — торы; $\inf u=0$, $\sup u=1$; $\inf|\operatorname{grad} u|=0$, $\sup|\operatorname{grad} u|=\dfrac{1}{2}$. **4407.** $\dfrac{|\Delta c|}{|\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0)|}$.

4409. а) $\dfrac{r}{r}$; б) $2r$; в) $-\dfrac{r}{r^3}$. **4410.** $f'(r)\dfrac{r}{r}$. **4411.** c.

4412. $2r(c\cdot c)-2c(c\cdot r)$. **4415.1.** а) $\operatorname{grad} u=\dfrac{\partial u}{\partial r}e_r+\dfrac{1}{r}\times$ $\times\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}e_\varphi+\dfrac{\partial u}{\partial z}e_z$, где $e_r=i\cos\varphi+j\sin\varphi$, $e_\varphi=-i\sin\varphi+$ $+j\cos\varphi$, $e_z=k$ — орты, касательные к соответствующим координатным линиям; б) $\operatorname{grad} u=\dfrac{\partial u}{\partial r}e_r+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}e_\theta+\dfrac{1}{r\sin\theta}\times$ $\times\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}e_\varphi$, где $e_r=i\cos\varphi\sin\theta+j\sin\varphi\sin\theta+k\cos\theta$, $e_\theta=$ $=i\cos\varphi\cos\theta+j\sin\varphi\cos\theta-k\sin\theta$, $e_\varphi=-i\sin\varphi+j\cos\varphi$ — орты, касательные к соответствующим координатным линиям.

4416. $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{2u}{r}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial r}=|\operatorname{grad} u|$, если $a=b=c$. **4417.** $\dfrac{\partial u}{\partial l}=-\dfrac{\cos(l, r)}{r^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial l}=0$, если $l\perp r$. **4418.** $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}$; $\dfrac{\partial u}{\partial l}=0$, если $\operatorname{grad} u\perp\operatorname{grad} v$.

4419. $a=\dfrac{i\left(\sqrt{x^2+y^2}+yz\right)-j\left(\sqrt{x^2+y^2}+xz\right)+k(x-y)z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$.

4420. $y=c_1x$, $z=c_2x^2$. **4422.1.** $\operatorname{div} a(M)=18/125$; $\Pi=$ $=\dfrac{24}{125}\pi\varepsilon^3$. **4423.** 0. **4425.** $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)=\Delta u$, где $\Delta u=$

$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. **4426.** $f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$; $f(r) = c + \frac{c_1}{r}$, где c и c_1 — постоянные. **4427.** а) 3; б) $\frac{2}{r}$. **4428.** $\frac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$. **4429.** $3f(r) + rf'(r)$; $f(r) = \frac{c}{r^3}$, где c — постоянная. **4430.** а) $u\Delta u + (\operatorname{grad} u)^2$; б) $u\Delta v + \operatorname{grad} u \times \times \operatorname{grad} v$, где Δu — оператор Лапласа. **4431.** $\operatorname{div} v = 0$; $\operatorname{div} w = -2\omega^2$. **4432.** 0, вне притягивающих центров. **4433.** $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right]$, где a_r, a_φ — проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на координатные линии $\varphi = \text{const}$ и $r = \text{const}$. **4434.** $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w)\right]$, где a_u, a_v, a_w — проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на соответствующие координатные линии и $L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2}$, $M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}$, $N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}$. Если r, φ, z — цилиндрические координаты, то $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right]$; если r, θ, φ—сферические координаты, то $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r \sin\theta) + r\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta \sin\theta) + r\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right]$. **4436.** а) 0; б) 0. **4436.1.** $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M) = -\frac{5}{4}\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \frac{5}{2}\boldsymbol{k}$, $|\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M)| = \frac{1}{4}\sqrt{141}$, $\cos\alpha = \frac{-5}{\sqrt{141}}$, $\cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{141}}$, $\cos\gamma = \frac{10}{\sqrt{141}}$. **4437.** а) $\frac{f'(r)}{r}[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}]$; б) $2f(r)\boldsymbol{c} + \frac{f'(r)}{r}[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})]$. **4439.** а) 0; б) 0. **4440.** $\operatorname{rot} v = 2\omega\boldsymbol{l}$. **4440.1.** $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{k}$, где a_φ и a_r — проекции вектора $\boldsymbol{a}$, соответственно на координатные линии $r = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$. **4440.2.** а) $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{e}_z$, где

$a_r = a_x \cos\varphi + a_y \sin\varphi$, $a_\varphi = -a_x \sin\varphi + a_y \cos\varphi$, $a_z = a_z$; б) $\operatorname{rot} a = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right] e_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)\right] e_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right] e_\varphi$, где $a_r = a_x \cos\varphi \sin\theta + a_y \sin\varphi \sin\theta + a_z \cos\theta$, $a_\theta = a_x \cos\varphi \cos\theta + a_y \sin\varphi \cos\theta - a_z \sin\theta$, $a_\varphi = -a_x \sin\varphi + a_y \cos\varphi$. **4441.** а) 0; б) πh^3. **4442.** а) 0; б) 0. **4443.** π. **4444.** $\frac{3\pi}{8}$. **4445.** 0. **4445.1.** $\frac{\pi}{5}$. **4447.** $4\pi m$. **4448.** $\sum_{i=1}^{n} e_i$. **4450.** $c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$, где c — удельная теплоемкость и ρ — плотность тела. **4452.** $2\pi^2 b^2$. **4452.1.** $8\frac{20}{21}\cdot\ln 2$. **4452.2.** $\frac{3}{4}(3 + e^4 - 12e^{-2})$. **4453.** $\int_{r_A}^{r_B} f(r)\, r\, dr$. **4454.** а) 2π; б) 2π. **4455.** а) $\Gamma = 0$; б) $\Gamma = 2\pi n$, где n — число оборотов контура C вокруг оси Oz. **4455.1.** $\operatorname{rot} a(M) = -j - 2k$, $\Gamma = -\pi(\cos\beta + 2\cos\gamma)\varepsilon^2$. **4456.** $Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy$, $\Gamma = \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy$; $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. **4457.** $u = xyz(x + y + z) + C$. **4457.1.** $\frac{1}{3}$. **4458.** $u = \frac{m}{r}$. **4459.** $u(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i}$, где r_i — расстояние переменной точки $M(x, y, z)$ от точки M_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). **4460.** $u(x, y, z) = \int_{r_0}^{r} t f(t)\, dt$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.