

# **NAZARIY FIZIKA**

# **KURSI**

*Pfof. A.A. Abdumalikov umumiy tahriri  
ostida*

4- JILD

**«Voriz nashriyot» MChJ**  
**Toshkent – 2006**

**A.A. ABDUMALIKOV, R. MAMATQULOV**

# **TERMODINAMIKA VA STATISTIK FIZIKA**

*Ozbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi  
tomonidan universitetlar va pedagogika institutlari uchun darslik  
sifatida tavsiya etilgan*

**«Voris nashriyot» MChJ  
Toshkent – 2006**

**Taqrizchilar:** prof. **A. Boydedaev**,  
prof. **M. Rasulova**.

Mazkur darslik statistik fizika, termodinamika va kinetika fanining asoslarini o'z ichiga olgan. Mavzularni tanlash va ularni bayon qilishda Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti nazariy fizika kafedrasida ishlab chiqilgan namunaviy o'quv dasturga amal qilindi. Darslikda asosiy e'tibor statistik fizika, termodinamika va kinetika asoslarini ko'rsatishga, ularning mohiyatini ochishga va muhim effektlarni yoritishga qaratilgan. Ushbu darslik oliy ta'lim muassasalari fizika, astronomiya va texnika yo'nalishida ta'lim olayotgan talabalarga mo'ljallangan.

**ISBN 978-9943-304-07-09**

© A.A.Abdumalikov, R.Mamatqulov.

© «Voriz nashriyot» MChJ, 2006- y.

---

---

## SO'ZBOSHI

Nazariy fizika bo'limlarini qamrab olgan va bir butun holda yozilgan o'zbek tilidagi darslikning mavjud emasligi 4 jildlik «Nazariy fizika kursi» darsligini yaratishni taqozo qiladi. O'quvchilarga taklif qilinayotgan ushbu kitob nazariy fizika kursi bo'yicha darsliklarning to'rtinchi jildi hisoblanadi. Termodinamika, statistik fizika va kinetika nazariy fizikaning asosiy bo'limlaridan bo'lib, bir-biri bilan uzviy bog'langandir. Nazariy fizikaning bu bo'limlari juda ko'p atom va molekulalardan tashkil topgan makroskopik sistemalar – gazlar, suyuqliklar va qattiq jismlarda o'tadigan issiqlik jarayonlarini o'rganadi.

Darslikning birinchi bobida statistik fizikaning asosiy tasavvurlari – fazalar fazosi, statistik fizikaning asosi bo'lgan Liuvill teoremasi, termodinamik kattalikni o'rtachalashda ergodik teoremaning o'rni va statistik taqsimot bayon qilingan.

Ikkinchi bob statistik mexanikaning umumiy metodlariga bag'ishlangan bo'lib, u yerda Gibbsning mikrokanonik va kichik kanonik taqsimotlarining xarakterli xususiyatlari tahlil qilingan. Gibbsning klassik va kvazi klassik taqsimotlari asosida umumiy fizika kursidan ma'lum bo'lgan Maksvell, Maksvell–Bolsman taqsimotlari nazariy yo'l bilan keltirib chiqarilgan va ularning tatbiq qilinish sohalari ko'rsatilgan.

Statistik va fenomenologik termodinamikaga kitobning uchinchi bobi bag'ishlangan. Termodinamikaning asosiy tushunchalariga ta'rif berilgan. Muvozanatdagi va muvozanatda bo'lmagan sistemalarda o'tadigan jarayonlar termodinamik metodlar asosida ko'rib chiqilgan. Termik va kalorik tenglamalar, termodinamikaning uchta qonuni batafsil o'rganilgan. Bundan tashqari, qaytmas va qaytuvchi jarayonlar ham ko'rib chiqilgan. Olingan natijalar gazlar, suyuqliklar va qattiq jismlar termodinamikasini o'rganishga tatbiq qilingan.

Kitobning to'rtinchi bobida zarralar soni o'zgaruvchi sistemalar termodinamikasi statistik fizika metodlari yordamida o'rganilgan. Bunday sistemalarni o'rganishda muhim bo'lgan Gibbsning katta kanonik taqsimoti keltirib chiqarilgan. Statistik yig'indi yordamida termodinamik kattaliklarni hisoblash

mumkinligi ko'rsatilgan. Olingan natijalar asosida nurlanish termodinamikasi, gomogen va geterogen sistemalardagi muvozanat va barqarorlik shartlari ko'rib chiqilgan. Bobning yakunida faza o'tishlarining Yang-Li va Landau nazariyasi bayon qilingan.

Ideal sistemalar statistikasiga beshinchi bob bag'ishlangan. Statistik nazariya asosida Maksvell, Maksvell-Bolsman, Boze-Eynshteyn va Fermi-Dirak taqsimotlari olingan. Bu taqsimotlarni yuqori va past temperaturalar sohasida tatbiq qilish bayon qilingan. Bir atomli kvant ideal gazlar uchun termodinamik kattaliklarni hisoblash yo'llari ko'rsatilgan. Bu yerda Boze-Eynshteyn kondensatsiyasining fizik ma'nosi kvant nazariyasi asosida ochilgan. Bu boradagi zamonaviy yutuqlarga alohida e'tibor berilgan. Qattiq jismlar issiqlik sig'imi nazariyasi va past temperaturalarda tajriba natijalari bilan mos tushuvchi Debay nazariyasi berilgan. Ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan ideal gazlar issiqlik sig'imi klassik va kvant nazariyalari asosida bayon qilingan. Manfiy absolut temperaturaning mavjudligi termodinamika, statistik fizika va kvant nazariyasi nuqtayi nazaridan ko'rsatilgan.

Kitobning oltinchi bobida noideal sistemalar statistik nazariyasi bayon qilingan. Bu yerda noideal bir atomli gaz holat tenglamasi o'rganilgan. Bunday sistemalarni o'rganishda korellatsion funksiyalar metodi muhimdir. Bu metod bir qator olimlar tomonidan ishlab chiqilgan. Bu darslikda N.N.Bogolyubov ishlab chiqqan zanjir tenglamalar sistemasi bayon qilingan va uni tuzish yo'llari ustada to'xtalib o'tilgan.

Fluktuatsiya hodisasi, fluktuatsiyaning termodinamik va statistik nazariyalariga ettinchi bob bag'ishlangan. O'lchov asboblarning sezgirligi fluktuatsiya bilan bevosita bog'liq ekanligi va Naykvist nazariyasi bayon qilingan. Osmonning rangi va Reley sochilishi tahlil qilingan.

Kitobda nomuvozanat jarayonlar termodinamikasi sakkizinchi bobda keltirilgan. Onzager prinsipi ko'rib chiqilgan va ayqash hodisalarni o'rganishga tatbiq qilingan. Nochiziqli nomuvozanat termodinamika to'g'risida tushunchalar berilgan.

Darslikda kinetikaga katta e'tibor berilgan. Kinetik muammoning kelib chiqish sabablari va uni bartaraf qilish yo'llari ko'rsatilgan. Broun harakatining Smoluxovskiy va Eynshteyn nazariyalari berilgan. Smoluxovskiy tenglamasi asosida Fokker-Plank va kinetik balans tenglamalarini chiqarish ko'rsatilgan.

Siyrak gazlar uchun Bolsman tenglamasining tahlili, H- teorema va entropiyaning o'sish qonunining isboti o'ninchi bobda keltirilgan. Bolsman tenglamasining statsionar yechimi, lokal taqsimot funksiyasi, Hidrodinamika tenglamasi olingan. Bogolyubovning kinetik zanjir tenglamasi metodik nuqtayi nazardan ishlab chiqilgan. Bu tenglamadan xususiy hollarda o'zi moslashgan va Vlasovning chiziqli tenglamalarining olinishi ko'rsatilgan.

Darslikda bayon qilingan nazariy mavzularni amaliy mustahkamlashga katta e'tibor qaratilgan. Shu maqsadda har bir bob oxirida mavzularga mos keluvchi masalalar va sinov savollari keltirilgan. Ba'zi masalalar yechimlari bilan berilgan.

Darslikda mavzularni tanlashda universitetlar uchun ishlab chiqilgan «Statistik fizika, termodinamika va kinetika kursi bo'yicha namunaviy dastur» asos qilib olingan. Kursni bayon qilish metodikasi O'zbekiston Milliy universiteti fizika fakulteti nazariy fizika kafedrasida orttirilgan ko'p yillik katta tajribaga asoslangan.

Darslik O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi qoshidagi «Fan va texnologiyalar markazi» 4 И-2-17 sonli innovatsion loyiha doirasida yozilgan.

Darslikni yaratilishida fikr-mulohazalarini bildirgan taqirizchilar prof. A.A. Boydedaev va prof. M. Rasulovaga mualliflar o'z minnatdorchiliklarini bildiradilar.

---

---

## KIRISH

Termodinamika va statistik fizika moddaning fizik xossalari o'rganishda muhim ahamiyat kasb etib, materiyaning issiqlik harakat formasini o'rganadi. Ularning asosiy mazmuni issiqlik muvozanat holatda bo'lgan ko'p sondagi zarralardan tashkil topgan makroskopik sistemada issiqlik harakat qonuniyatlari va unda o'tayotgan jarayonlarni, eng avvalo termodinamik metod, so'ng esa statistik metod yordamida o'rganishdan iborat.

Termodinamika fenomenologik xarakteriga ko'ra, issiqlik muvozanatda bo'lgan sistemada o'tadigan jarayonlarni o'rganishda oshkora ravishda biror fizik tasavvur yoki modeldan foydalanmaydi. Masalan, moddaning atom yoki molekulalardan tashkil topganligini nazarga olmasdan energiya, entropiya, erkin energiya kabi abstrakt kattaliklar orasidagi bog'lanishlarni aniqlaydi va fundamental qonuniyatlarni kashf qilishga olib keladi. Termodinamika fizik hodisalarni o'rganishda fenomenologik yondashish qanchalik muhim ekanligini namoyish qiladi. Ammo issiqlik harakat qonunlarini o'rganishda qanchalar muhim natijalarga kelsada, uning xususiyatlarini chuqur o'rganishni chegaralaydi va tekshiriladigan fizik hodisalarning ichki tabiatini ochishga imkon bermaydi.

Statistik fizika kvant mexanika bilan bir qatorda zamonaviy fizikaning asosini tashkil qiladi va mikroskopik nazariyaga tayangan holda fizik hodisalarni har tomonlama o'rganadi. Statistik fizika katta sondagi zarralardan (molekulalar, atomlar, protonlar, elektronlar, fotonlar, neytronlar va boshqa zarralardan) tashkil topgan makroskopik sistemalarning xususiyatlarini, unda o'tayotgan jarayonlarni, qonuniyatlarni mikroskopik nuqtayi nazaridan o'rganuvchi va tekshiruvchi bo'limi hisoblanadi.

Moddalarning tuzilish modellariga bog'liq holda statistik fizika – klassik va kvant statistikaga bo'linadi. Agar makroskopik sistemani tashkil qilgan atom va molekulalar klassik mexanika qonuniyatlari bo'yicha harakatlanadi deb hisoblasak,

bir qator hodisalar to'la holda tavsiflanadi. Bu holda moddaning klassik modeli tanlanadi. Ana shu model asosida tuzilgan statistik fizika qisqacha klassik statistika yoki statistik mexanika deb yuritiladi.

Agar makroskopik sistemani tashkil etgan zarralar kvant mexanika qonuniyatlariga bo'ysunsa, u holda moddaning kvant modeli tanlanadi va shu model asosida tuzilgan statistik fizika kvant statistik fizika deb yuritiladi.

Bundan tashqari, statistik fizika, mos ravishda, muvozanatli jarayonlar va nomuvozanatli jarayonlar nazariyasiga bo'linadi. Birinchi holda nazariya vaqtga bog'liq bo'lmagan ehtimollik va o'rtacha qiymat bilan ish ko'rsa, ikkinchi holda esa vaqtga bog'liq bo'lgan ehtimollik va o'rtacha qiymat bilan ish ko'radi. Shunday qilib, statistik fizikada to'rtta nazariy bo'lim mavjud (jadvalga qarang).

Jarayonlar tipi	Model	
	klassik	kvant
Muvozanatli jarayonlar	muvozanatli jarayonlar klassik statistikasi (statistik mexanika)	muvozanatli jarayonlar kvant statistikasi (kvant statistika)
Nomuvozanat jarayonlar	nomuvozanat jarayonlar klassik statistikasi (klassik kinetika)	nomuvozanat jarayonlar statistikasi (kvant kinetika)

Statistik fizika metodi fizikaning barcha sohalarida qo'llaniladi: gazlar fizikasida, suyuqlik va qattiq jismlar, atom yadrosiga, kosmik fazolarda yorug'likning tarqalishida, yulduzlar nazariyasida va hokazo.



# I bob

## STATISTIK FIZIKANING ASOSIY TASAVVURLARI

*Sistema holatini xarakterlaydigan fizik kattaliklarning ansambl va vaqt bo'yicha o'rtacha qiymatlari orasidagi bog'lanishni aniqlashda ergodik gipoteza katta o'rin tutadi.*

### 1.1. Statistik fizika vazifalari

Statistik fizika atom, molekula, ion kabi juda ko'p zarralardan tashkil topgan sistema – makroskopik sistemalarning xossalari, ularda kechadigan jarayonlarni va qonuniyatlarni o'rganadi. Bunday sistemalarning xossalari kam zarrali sistemalar xossalariidan tubdan farq qiladi. Makroskopik sistemaning zarralari klassik yoki kvant fizika qonunlariga bo'ysunishiga qarab klassik va kvant statistik fizika bo'linadi. Bu holatdan qat'iy nazar makroskopik sistemalarda statistik qonuniyatlar o'rinli bo'ladi.

Mikroskopik fizika nuqtayi nazaridan makroskopik sistemani tashkil qilgan hamma zarralarning o'rni va harakat qonuniyatlari ma'lum bo'lsa, uning holati aniqlangan deyiladi. Boshlang'ich vaqtda ayrim zarralarning o'rni va ularning harakati qonuniyatlarini bilgan holda, klassik mexanika yoki kvant mexanika qonunlari bo'yicha ularni keyingi ixtiyoriy vaqt momentidagi holatini aniqlash mumkin. Shunday qilib, berilgan vaqtda makroskopik sistema holatini aniqlab qolmasdan, balki vaqt davomida bu holatning o'zgarishini ham kuzatish mumkin. Ammo sistema mikroholatining vaqt bo'yicha o'zgarishi, zarralarning ko'pligi va ularning doimiy harakati tufayli, g'oyat murakkab va chigal xarakterga ega bo'ladi.

Makroskopik sistemaning xossalari klassik yoki kvant fizika qonunlari yordamida o'rganishga harakat qilish nimalarga olib kelishini ko'rib chiqaylik. Har bir zarra uni o'rab turgan zarralar hosil qilgan maydon va tashqi maydon ta'sirida harakat qiladi. Har ikkala tipdagi maydon ta'sirida harakat qilayotgan zarralar uchun harakat tenglamalarini yozish mumkin. Bunday

tenglamalar soni sistemaning erkinlik darajasiga teng bo'ladi. Sistema ta zarradan tashkil topgan bo'lsa, tenglamalar soni  $3N$  ta bo'ladi. Bunday tenglamalarni yechish amalda bajarib bo'lmaydigan vazifadir. Bu masala amalga oshirilgan taqdirda ham barcha zarralar uchun boshlang'ich shartlarni yozib bo'lmaydi, demak, bu shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni ham yozib bo'lmaydi. Shuning uchun uning dinamik harakatlarini amalda tadqiq qilish mumkin emas.

*Xulosa. Juda ko'p zarralardan tashkil topgan sistemaning xossalari klassik yoki kvant mexanika tenglamalari orqali o'rganib bo'lmaydi.*

Demak, makroskopik sistema holatini aniqlash uchun yangi tipdagi qonuniyat – statistik qonuniyatni yaratish masalasiga olib keladi. Bu masala ehtimollik nazariyasi bilan uzviy bog'langandir. Shunday qilib, statistik fizikaning asosiy vazifasi ehtimollik nazariyasiga asoslanib, taqsimot funksiyalarini topish, makroskopik sistemaning fundamental qonuniyatlarini kashf etish, tushuntirish, sistema holatini xarakterlovchi termodinamik kattaliklarni va ular orasidagi asosiy munosabatlarni topishdan iboratdir.

## 1.2. Fazalar fazosi

Makroskopik sistema holatini, umuman olganda, klassik yoki kvant mexanika yordamida tavsiflash mumkinligini yuqorida eslatib o'tdik. Qulaylik uchun avval klassik mexanika o'rinli deb qaraylik.

Makroskopik sistema sifatida  $N$  ta bir xil zarralardan tashkil topgan  $V$  hajmli ideal gazni olib qaraylik. Statistik fizikada sistema holatini qo'shma parametrlar majmuasi  $(q_i, p_i)$  bilan tavsiflash qabul qilingan. Bu yerda  $q_i$  – umumlashgan koordinatalar,  $p_i$  – umumlashgan impulslar ( $i = 1, 2 - 3N$ ). Zarralarning har birini uchta erkinlik darajasiga ega bo'lgan moddiy nuqta deb qaraylik.

Klassikada o'zaro ta'sirlashmaydigan  $N$  zarradan tashkil topgan mexanik sistemaning har bir erkinlik darajasiga to'g'ri kelgan umumlashgan koordinata va impuls vaqtga bog'lanishi birinchi tartibli  $6N$  Gamilton tenglamalar sistemasi

$$p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.1)$$

bilan aniqlanadi. Bu yerda  $p_i$  – umumlashgan impulslar quyi-  
dagi munosabat bilan aniqlanadi:

$$p_i = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}.$$

$H(q, p) = T(p) + U(q)$  – Gamilton funksiyasi.

Mikroskopik sistemani Gamilton tenglamalari sistemasining  
o‘rniga  $3N$  ta ikkinchi tartibli Lagranj tenglamalari sistemasi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 3N \quad (1.2)$$

bilan ham tavsiflash mumkin. Bu yerda  $L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - U(q)$  –  
sistemaning Lagranj funksiyasi,  $T(\dot{q})$ ,  $U(q)$  – mos ravishda  
sistemaning kinetik va potensial energiyasi.

Langranj va Gamilton formalizmlari ekvivalent bo‘lib,  
birday natijaga olib keladi. Bu tenglamalar sistemasining  
yechimi umumlashgan koordinata  $q_i$  larning vaqtga va  $6N$  ta  
boshlang‘ich shartga bog‘lanishini beradi.

Bizga ma‘lumki, bunday katta sondagi tenglamalar sistema-  
sini aniq yechish mumkin emas. Shuning uchun, katta sondagi  
zarralardan tashkil topgan makroskopik sistema holatini tavsif-  
lashda mexanik metoddan tubdan farq qiladigan yangi metodni  
izlab topish kerak. Ana shunday metod – statistik metoddir.  
Bu metodni o‘rganish bizning asosiy vazifamizdir.

Hozir esa mexanika masalalarini tahlil qilishda ko‘p qo‘lla-  
niladigan fazalar fazosi metodi bilan tanishib chiqamiz. Bu metod  
Gamilton prinsipi bilan bog‘langan. Koordinata o‘qlari umum-  
lashgan koordinatalar  $q_1, q_2, \dots, q_N$  va umumlashgan impulslar,  
 $p_1, p_2, \dots, p_N$  dan iborat bo‘lgan  $6N$  o‘lchovli faraziy ortogonal fazo  
kiritamiz. Bunday fazo – fazalar fazosi deyiladi. Bunday fazo-  
ning har bir nuqta sistemaning dinamik mikroholatini ifodalaydi.

Birorta metod yordamida kanonik tenglamalar sistemasi  
(1.1) ning yechimini topdik deb faraz qilaylik. Ya‘ni:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(c_1, c_2, \dots, c_{6N}, t), & p_1 &= p_1(c_1, c_2, \dots, c_{6N}, t), \\ q_2 &= q_2(c_1, c_2, \dots, c_{6N}, t), & p_2 &= p_2(c_1, c_2, \dots, c_{6N}, t), \\ &\dots\dots\dots & & \\ &\dots\dots\dots & & \\ q_{3N} &= q_{3N}(c_1, c_2, \dots, c_{6N}, t), & p_{3N} &= p_{3N}(c_1, c_2, \dots, c_{6N}, t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

funksiyalar ma'lum bo'lsin. Bu yerda  $c_1, c_2, \dots, c_{6N} - 6N$  ta boshlang'ich shartlarga mos keluvchi harakat integrallaridir. Fazalar fazosidagi har bir nuqta sistemaning aniq vaqt momenti-dagi mikro holatini aks ettiradi.

Fazoviy koordinata sistemasidagi nuqtadan farq qilish uchun fazalar fazosidagi nuqta tasviriy nuqta deb ataladi. Fazalar fazosidagi sistema holatining o'zgarishini aks ettiruvchi traektoriya tasviriy traektoriya yoki sistemaning faza portreti deyiladi. Sodda qilib gapirganda faza portreti (1.1) tenglamalardan kelib chiqadigan  $p = p(q, c)$  bog'lanishlar grafigidir. Demak, metodning afzalligi shundan iborat ekanki, (1.1) tenglamalarni yechmasdan sistemaning faza portretidan foydalanib fazalar fazosida sistema harakatining umumiy xususiyatlarini o'rganish mumkin. Shuni ta'kidlash lozimki, bu metod sistemaning erkinlik darajasi juda ko'p bo'lgan (makrosistema) hollarda avvalgiday murakkab matematik masalaga aylanadi. Shunga qaramasdan statistik fizika asoslarini yaratishda muhim rol o'ynaydi.

Bu tushunchalarni bir erkinlik darajasiga ega bo'lgan sistema uchun ko'rib chiqamiz. Soddalik uchun chiziqli garmolik ossillatorning fazaviy traektoriyasini o'rganaylik. Garmolik ossillator kvazielastik kuch  $F = -kx$  ta'siri ostida  $x = 0$  nuqta atrofida harakat qilsin. Harakat tenglamasi

$$x + \omega^2 x = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda  $\omega = \sqrt{k/m}$ ,  $k$  - elastiklik koef-fitsiyenti,  $m$  - ossillatorning massasi. Tenglama yechimini

$$x = A \sin(\omega t + \alpha)$$

ko'rinishda qidiramiz. U holda ossillator impulsi

$$p = A \omega m \cos(\omega t + \alpha).$$

Koordinata va impuls ifodalaridan vaqtni yo'qotamiz hamda natijada:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{p}{A \omega m}\right)^2 = 1 \quad (1.4)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu esa yarimo'qlari  $a = A$  va  $b = A \omega m$  bo'lgan ellips tenglamasidir. Demak, chiziqli garmonik ossillatorning fazalar fazosidagi tasviriy traektoriyasi yoki faza portreti ellipsdan iborat ekan.

## Ellipsning yuzasi

$$S = \oint p dx = \pi m \omega A^2,$$

ossillatorning energiyasi esa

$$H = \varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = \frac{\gamma A^2}{2}$$

teng bo'ladi. Siklik chastota  $\omega = 2\pi\nu$  ekanligini hisobga olsak, garmonik ossillyator energiyasi yoki davriy harakat bajarayotgan bitta zarradan tashkil topgan sistemaning energiyasi quyidagiga teng bo'ladi:

$$\varepsilon = \nu \oint p dq. \quad (1.5)$$

Bu yerda koordinata va impuls umumlashgan koordinata va impuls bilan almashtirildi.

Katta sondagi zarralardan tashkil topgan sistema uchun fazalar fazosi ham ko'p o'lchamli bo'ladi, bu holda (1.1)ni grafik holda tahlil qilish amalda mumkin emas. Shunday bo'lsada bu tushuncha statistik fizikada muhim ahamiyatga ega. Bunda fazalar fazosining elementar hajmini bilish muhimdir va uning elementar hajmi

$$d\Gamma = \prod_i dq_i dp_i, \quad (i = 1, 2, \dots, 3N)$$

ko'rinishda yoziladi.

Biz endi sistema kvant mexanika qonuniyatiga bo'ysunuvchi  $N$  ta zarralardan tashkil topgan deb qaraylik, u holda sistema mikroholatlarini aniqlash uchun  $N$  ta Shredinger tenglamasini yechish kerak. Bu masalani ham umumiy ko'rinishda yechish mumkin emas. Agar sistemani bir o'lchamli potensial o'rada harakat qilayotgan bitta kvant zarradan tashkil topgan deb qarajak, kvant mexanika umumiy qoidalarga asosan energiya va impuls uchun

$$p_n = \frac{\hbar n}{2a}, \quad \varepsilon_n = \frac{\hbar^2 n^2}{8ma^2} \quad (1.6)$$

ko'rinishdagi ifodalarni yozish mumkin. Bu yerda:  $p_n$  va  $\varepsilon_n$  - mos ravishda kvant zarra impulsi va energiyasi;  $n$  - kvant son,  $a$  - potensial o'ra o'lchami;  $\hbar = 6,62 \cdot 10^{-27}$  erg · s - Plank

doimiysi. Ikkinchi misol sifatida garmonik kvant ossillyatororini ko'ramiz. Uning energiyasi

$$\varepsilon_n = h\nu \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (1.7)$$

Kvaziklassik yaqinlashishda zarraning fazalar fazosida chizgan yuzasi, ya'ni holat yuzasi Bor-Geyzenberg qoidasiga ko'ra kvantlanadi:

$$\varepsilon_n = \nu \oint p_n dq = h\nu n.$$

$n$  holatga mos kelgan ellips yuzasi esa  $(n - 1)$  holatga to'g'ri kelgan yuzadan « $h$ » ga farq qiladi, ya'ni

$$\oint p_n dx - \oint p_{n-1} dx = h.$$

Demak, fazalar fazosida ossillyatorning har bir kvant holatiga yuzasi  $h$  ga teng bo'lgan «katakcha» to'g'ri kelar ekan. Uch o'lchamli potensial o'rada harakatlanuvchi kvant zarrani olib qarasaq, unga fazalar fazosida hajmi  $h^3$  ga teng bo'lgan kvant holati to'g'ri keladi. Ozodlik darajasi  $f$  bo'lgan sistemaga  $h^f$  hajmli kvant holat to'g'ri keladi. Uch o'lchamli potensial o'rada kvant zarra impulsi  $p_n = hn/2a$ , energiyasi  $\varepsilon_n = h^2 n^2 / 8ma^2$  bo'ladi; bu yerda  $n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) -  $x, y, z$  yo'nalishlar bo'yicha kvant sonlari.

Bir xil energiyali holatlar soni aynish karraligi yoki kvant holatlar soni, yoki statistik vazn deb ataladi. Kvant holatlar sonini bilish statistik fizikada muhim o'rin tutadi va odatda  $\Omega(\varepsilon)$  yoki  $g(\varepsilon)$  kabi belgilanadi,  $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$  energiya intervaliga to'g'ri kelgan kvant son  $d\Omega$  bilan belgilanadi.

Kvant holatlar sonini hisoblash uchun shu energiyaga to'g'ri kelgan fazalar fazosi hajmini bitta kvant holat hajmiga bo'lish kerak, ya'ni  $\Omega(\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon)/h^3$ . Sistemaning erkinlik darajasi  $f$  ta bo'lsa, kvant holatlar soni

$$\Omega(\varepsilon) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{h^f}, \quad d\Omega(\varepsilon) = \frac{d\Gamma(\varepsilon)}{h^f} = \frac{1}{h^f} \frac{\partial \Gamma(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} d\varepsilon,$$

bu yerda  $\Gamma$  - fazalar fazosining hajmi. Kvant holatlar soni multiplikativ qonuniga bo'ysunadi:

$$\Omega = \prod_i \Omega_i,$$

ya'ni, o'zaro bog'lanmagan murakkab sistemalarning kvant holatlar soni, barcha bo'laklar energiyasiga to'g'ri kelgan kvant holatlar sonining ko'paytmasiga teng bo'ladi.

### 1.3. Liuvill teoremasi

Fazalar fazosi  $q = \{q_1, q_2, \dots, q_{3N}\}$ ,  $p = \{p_1, p_2, \dots, p_{3N}\}$  da ixtiyoriy yopiq  $S_0$  sohani tanlab olamiz va undagi birorta  $A$  nuqtani ko'rib chiqamiz. Fazalar fazosida nuqtani tanlash barcha umumlashgan koordinata va impulslarning qiymatlarini oldindan belgilab beradi. Shuning uchun birorta  $t_0$  momentdagi boshlang'ich shartlar  $A$  nuqta orqali beriladi, deb faraz qilish mumkin. Ushbu fikrni  $S_0$  sohadagi barcha nuqtalarga qo'llaymiz, ya'ni  $S_0$  sohadagi barcha  $A_i$  nuqtalarni  $t_0$  vaqt momentida «boshlang'ich» deb qaraymiz.

Tanlangan sohadagi  $A_i$  nuqtalar vaqt o'tishi bilan fazalar fazosida tasviriy traektoriyalarni chizadi va  $t = t_0 + \tau$  vaqt momentida ular  $B_i$  nuqtalarga o'tadi. Bu nuqtalar yangi soha  $S_\tau$  tashkil qiladi.  $S_\tau$  sohaning shakli albatta  $S_0$  ning shaklidan farq qilishi mumkin. Tanlangan sohadagi tasviriy nuqtalar soni sistemaning harakati davomida o'zgaras qoladi, chunki ularning birortasi ham tanlangan sohadan hech qachon chiqib ketolmaydi. Nuqtalardan birortasi soha chegarasidan o'tib ketdi deb faraz qilaylik, bu holda u shu momentda chegaradagi boshqa nuqtaning joyini egallagan bo'ladi. Lekin tasviriy nuqtalarning harakati uning fazalar fazosi berilgan vaqt momentida egallagan holati bilan to'liq aniqlanadi. Demak, bitta nuqtaning chiqib ketishi ikkinchi nuqtaning kirib kelishiga olib keladi. Shunday qilib boshlang'ich vaqt momentida tanlangan sohada joylashgan birorta ham nuqta undan tashqariga chiqib ketolmaydi.<sup>1</sup>

Demak, boshlang'ich momentda berilgan  $\Gamma_0$  hajmli  $S_0$  soha yordamida  $t = t_0 + \tau$  momentda  $\Gamma_\tau$  hajmli  $S_\tau$  sohani tuzish mumkin ekan. Shu ma'noda  $\Gamma_\tau$  vaqtning funksiyasi bo'ladi. Tabiiy ravishda savol tug'iladi:  $\Gamma_\tau = \Gamma(t)$  funksiya qanday ko'rinishga ega va u sistemaning harakati davomida qanday o'zgaradi? Liuvill teoremasining asosiy mazmuni bilan tanishib chiqdik, endi uni ta'riflaymiz.

---

<sup>1</sup> Nochizikli sistemalarda dinamik kaos rejimiga o'tganda, tasviriy traektoriyalar bir-biri bilan kesishib ketadi. Bu holda boshlang'ich shartlar sistemaning holatini aniqlab bermaydi.

**Liuvill teoremasi.** Har bir tasviriy nuqtaning fazaviy traektoriyasi bo'ylab harakati tufayli vaqt o'tishi bilan fazalar fazosida tanlangan sohaning shakli o'zgaradi, ammo uning hajmi o'zgarmas qoladi.

Fazalar fazosida tanlangan sohaning hajmi  $\Gamma$  va undagi tasviriy nuqtalar soni  $N$  o'zgarmas bo'lganligi uchun nuqtalar zichligi

$$\rho(p_i, q_i, t) = \frac{dN}{d\Gamma}$$

ham o'zgarmas bo'lishi kerak. Bu fikrni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d\rho(p_i, q_i, t)}{dt} = 0. \quad (1.8)$$

Vaqt bo'yicha to'liq hosilani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \{\rho, H\}, \quad (1.9)$$

bu yerda  $[H, \rho]$  – Puasson qavslari

$$\{\rho, H\} = \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial\rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial\rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right).$$

Shunday qilib, Liuvill teoremasidan kelib chiqadigan xulosa:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\{\rho, H\}. \quad (1.10)$$

Liuvill teoremasi statistik fizikaning asosini tashkil qiluvchi markaziy teoremadir. Bu teorema birinchi marta odatda nazariy fizikaning mexanika qismida ta'riflanadi va isbot qilinadi.

#### 1.4. Statistik taqsimot

Yuqorida, ko'p zarralardan tashkil topgan makroskopik sistema dinamik holatini aniqlash amaliy jihatdan mumkin emasligini, ammo yangi qonuniyat ehtimollik nazariyasi bilan bog'langan statistik qonuniyat o'rinni ekanligini eslatib o'tgan edik.

Katta sondagi zarralardan tashkil topgan makroskopik sistema holatini aniqlash uchun termodinamik kattaliklarning o'rtacha qiymatini aniqlash zarurdir.



Statistik fizikaning asosiy vazifalaridan biri dinamik kattaliklar xossalaridan foydalanib makroskopik kattaliklarni, masalan, termodinamik funksiyalarni hisoblashdir. Shuning uchun birinchi navbatda tajribada o'laniladigan kattaliklarning statistik ta'rifi bilan tanishib chiqamiz.

Ixtiyoriy fizik kattalik  $L$  ni tajribada oniy o'lchab bo'lmaydi, o'lchash uchun qandaydir vaqt kerak. Tajribada dinamik kattalikning vaqt bo'yicha o'rtacha qiymati

$$\bar{L}_t = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} L(q, p) dt \quad (1.11)$$

o'lchaniladi deb hisoblash mumkin. Bu yerda  $t_0$  va  $t_0 + \tau$  mos ravishda o'lchash jarayonining boshlang'ich va oxirgi vaqt momentlari;  $\tau$  - o'lchash vaqti. Muvozanatdagi sistema uchun  $\bar{L}_t$  boshlang'ich vaqtga bog'liq bo'lmaydi va o'rtachalash cheksiz vaqt intervali bo'yicha hisoblanadi.

Amalda yuqorida gapirilgan tenglamalarni yechishdagi qiyinchiliklar sababli vaqt bo'yicha o'rtalarni hisoblab bo'lmaydi. Qiyinchiliklarni *ergodik*<sup>2</sup> gipotezaga (nazariya) tayanib chetlab o'tish mumkin. Bunga asosan vaqt bo'yicha o'rtachalarni *ansambl* bo'yicha o'rtachalar bilan almashtirish mumkin. Ansambl - bir sharoitda tayyorlangan bir xil sistemalar to'plami. Keyinroq bu ta'rifga yana qaytamiz.

Ehtimollik nazariyasiga ko'ra termodinamik kattalik ning o'rtacha qiymati quyidagicha aniqlanadi:

$$\bar{L}_t = \bar{L} = \int L d\omega, \quad (1.12)$$

bu yerda:  $\bar{L}_t$  - vaqt bo'yicha olingan o'rtacha qiymat;  $\bar{L}$  - tasodifiy qiymatlar to'plami yoki ansambl bo'yicha olingan o'rtacha qiymat;  $d\omega$  -  $L$ ,  $L + dL$  intervalda bo'lish ehtimolligi.

Juda ko'p zarralardan tashkil topgan berk makroskopik sistemani ko'p sonli faraziy sistemachalarga (bo'laklarga) bo'lib chiqamiz. Sistemachalar yana ko'p zarralardan tashkil topgan

---

<sup>2</sup> Ergodik so'zi Bolsman tomonidan kiritilgan bo'lib, grek so'zlari *εργον* - ish (bu so'zdan energiya so'zi paydo bo'lgan) va *οδοζ* - yo'ldan kelib chiqqan. Bolsman «ergoda» atamasini hozirgi ma'nolada ishlatmagan, u energiya sirtida yo'lni belgilash uchun ishlatgan. Ammo, Bolsman aslini olganda hozir «kvazi-ergodik» gipoteza deb nomlanuvchi konsepsiyadan foydalangan.

bo'lib, asosiy sistemadan kichik bo'lishi kerak. Bunday sistemachalar holatlarining to'plami makrosistema holatini aniqlaydi. Sistemachalar makrosistemadan farqli ravishda berk bo'la olmaydi, chunki ularning har biri o'zini o'rab olgan qolgan bo'laklar bilan ta'sirlashadi. Ta'sirlashish kuchsiz bo'lib uzoq vaqt davom etishi mumkin yoki kuchli bo'lib qisqa vaqt davom etishi mumkin. Ikkinchi holda ikkita ketma-ket ta'sirlashish oralig'ida sistema erkin bo'ladi (ideal gazlar). Har ikkala holda ta'sirlashish natijasi nisbatan kichik effektlarga olib keladi.

Bu sistemachalarning makrosistemaga nisbatan kichik bo'lganligi sababli uncha katta bo'lmagan vaqt oralig'ida ularni taxminan berk sistema deb qarash mumkin. Bu holatni batafsilroq ko'rib chiqamiz. Sistemachalarning o'zini o'rab olgan makro sistema bilan ta'sirlashuvi asosan uning sirtidagi zarralar orqali amalga oshadi. Sirtidagi zarralar soni uning hajmidagi zarralar soniga nisbatan kichik bo'ladi. Bu holda ta'sirlashish energiyasi  $\epsilon_{\text{sirt}}$  (sirt energiyasi) ichki energiya  $\epsilon_{\text{ich}}$  dan kichik bo'ladi, chunki energiyalar taxminan zarralar soniga proporsionaldir. Sistemachaning o'lchamlari oshishi bilan energiyalar nisbati tez kamaya boradi va o'lchami yetarli darajada katta bo'lganda makrosistema bilan o'zaro ta'sir energiyasi ichki energiyasidan juda kichik bo'lib qoladi. Xususan, sistemachani sfera ko'rinishida deb olsak, energiyalar nisbatini quyidagicha baholash mumkin:

$$\frac{\epsilon_{\text{sirt}}}{\epsilon_{\text{ich}}} \sim \frac{4\pi R^2}{\frac{4\pi R^3}{3}} \sim \frac{1}{R} \sim N^{-1/3} \ll 1,$$

bu yerda  $R$  – sfera radiusi va  $N$  – zarralar soni. Yuqoridagi shart bajarilganda birinchi yaqinlashishda sistemani kvaziberk o'zaro bog'lanmagan sistemachalardan tashkil topgan deb qarash mumkin. Demak, katta sondagi zarrarlardan tashkil topgan sistema holatini aniqlash faqat ehtimolligini topish bilan bog'langandir.

Bu ehtimollikni aniqlash uchun katta sondagi zarralardan tashkil topgan berk makroskopik sistemani juda ko'p sondagi sistemachalarga bo'lamiz. Bu yerda sistemachalar ham katta sondagi zarralardan tashkil topgan deb olinadi. Ko'pincha sistemachalar to'plami statistik *ansambl* deb ham yuritiladi. Agar sistemachalarning o'zaro ta'sir energiyasi shu sistemacha ichki energiyasidan juda kichik bo'lsa, bunday sistemachalar o'zaro bog'lanmagan yoki mustaqil sistemachalar deb yuritiladi.

Sistemachalar tamomila berk bo'la olmaydi. Aksincha, ular boshqa sistemachalar bilan doimo uzluksiz ta'sirlashadi. Sistemachaning kvaziberkligi uncha katta bo'lmagan vaqt orlig'ida o'rinli bo'ladi, chunki ta'sirlashish kuchsiz bo'lishiga qaramasdan yetarlicha uzoq vaqt davomida u katta effektlarga olib kelishi mumkin. Shuni tak'kidlash lozimki, sistemachada kuchsiz ta'sirlar natijasida statistik muvozanat holat yuzaga keladi.

O'zaro ta'sir tufayli sistemacha holati vaqt davomida o'ta murakkab va chigal holda o'zgaradi. Agar uni yetarlicha katta vaqt oralig'ida kuzatsak, sistemacha o'zining bo'lishi mumkin bo'lgan holatlarida ko'p marta bo'la oladi. Bu holni aniqroq ko'rsataylik.

Faraz qilaylik,  $\Delta p \Delta q$  – fazalar fazosida sistemaning qandaydir kichik bo'lagining hajmi bo'lsin. U holda katta  $T$  vaqt davomida sistemacha fazalar fazosining ana shu kichik bo'lagi  $\Delta p \Delta q$  dan ko'p marta o'tadi. Agar  $\Delta t$  to'la vaqt  $T$  ning kichik bo'lagi bo'lib, shu vaqt ichida sistemacha fazalar fazosining berilgan  $\Delta p \Delta q$  bo'lagida bo'lsa, u vaqtda to'la vaqt  $T$  ni yetarli darajada oshirganda  $\Delta t/T$  nisbat qandaydir limitga intiladi:

$$dW = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta t}{T}.$$

Bu esa sistemani ixtiyoriy vaqt momentida fazalar fazosining  $\Delta p \Delta q$  bo'lagida topish ehtimolligini beradi.

Fazalar fazosining cheksiz kichik bo'lgan  $dp_i dq_i$  ga o'tishi esa  $p_i$  impuls va koordinata  $q_i$  ni  $p_i + dp_i$  va  $q_i + dq_i$  intervalda bo'lish ehtimolligini beradi:

$$dW = W(q, p) dp_i dq_i,$$

bu yerda  $W(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N)$  – fazalar fazosida ehtimollik taqsimotining zichligi yoki berilgan sistemaning mikroholatlari bo'yicha statistik taqsimot funksiyasi deb yuritiladi. Taqsimot funksiyasi normirovka shartini qanoatlantiradi:

$$\int W(q, p) dp dq = 1. \quad (1.13)$$

Bu ifoda shu narsani anglatadiki, hamma mumkin bo'lgan mikroholatlar ehtimolliklarining yig'indisi birga teng bo'lishi kerak.

Agar statistik taqsimot ma'lum bo'lsa, u holda sistemacha holatini aniqlovchi termodinamik kattaliklarning o'rtacha qiymatlarini hisoblay olamiz:

$$\bar{L} = \int L(q, p) W(q, p) dq dp. \quad (1.14)$$

Sistemaning fazaviy hajm elementida topish ehtimolligi shu hajmga proporsionaldir. Bu hajm shakli vaqt o'tishi bilan o'zgarib turadi, lekin uning kattaligi o'zgarmaydi.

### 1.5. I bobga oid masala va savollar

1. Bitta to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanuvchi ikkita zarraning elastik to'qnashishi uchun Liuvill teoremasi o'rinli ekanligi ko'rsatilsin.

*Yechish.* Sistema uchun energiya va impulsning saqlanish qonunlarini yozamiz:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}, \quad p_1 + p_2 = p_1' + p_2'.$$

Zarralarning to'qnashuvigacha va to'qnashuvdan keyingi fazalar fazosining differensial hajmlari quyidagicha bog'langan:

$$d\Gamma = Dd\Gamma \quad \text{yoki} \quad dp_1 p_2 = D dp_1' dp_2',$$

bu yerda  $D$  - o'tishi yakobiani:

$$D = \frac{\left| \frac{\partial(q_1, q_2, p_1, p_2)}{\partial(q_1, q_2, p_1, p_2)} \right|}{\left| \frac{\partial(p_1, p_2)}{\partial(p_1, p_2)} \right|}$$

Energiya va impulsning saqlanish qonunlaridan quyidagilarni topamiz:

$$p_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_2, \quad p_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} p_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} p_1.$$

Ushbu ifodalardan foydalanib o'tish yakobianini hisoblash natijasida  $D = 1$  ekanligini, ya'ni  $dp_1' dp_2' = dp_1 p_2$  ni hosil qilamiz. Demak, ikki zarraning elastik to'qnashishida fazalar fazosi hajmi saqlanar ekan.

2. So'nuvchi kichik tebranishlar bajarayotgan ossilyatorning fazaviy traektoriyasi aniqlansin va chizilsin. Vaqt o'tishi bilan fazaviy hajmning o'zgarishi topilsin.

*Yechish.* Bizga mexanikadan ma'lumki, so'nuvchi kichik tebranishlar bajarayotgan ossilyatorning harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

bu yerda  $\omega_0$  - erkin tebranishlar chastotasi,  $\gamma$  - so'nish koefitsiyenti.  $\gamma \ll \omega$  bo'lganda sistema so'nuvchi kichik tebranishlar bajaradi. Bu holda koordinata va impulsni quyidagicha yozish mumkin:

$$x = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left( x_0 \cos \omega_0 t + \frac{p_0}{m\omega_0} \sin \omega_0 t \right),$$

$$p = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (p_0 \cos \omega_0 t - m x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t).$$

Bu yerda  $x_0$  va  $p_0$  mos ravishda ossilatorning boshlang'ich vaqtdagi koordinatasi va impuls. Tenglama yechimlari yordamida fazaviy hajmni hisoblash quyidagi natijani beradi:

$$\Gamma(t) = \iint dx dp = e^{-\gamma t} \Gamma(0).$$

Shunday qilib, fazaviy hajm vaqt o'tishi bilan eksponensial kamayar ekan. Fazaviy traektoriya spiraldan iborat bo'dadi.

3. Ideal qaytaruvchi quti devorlariga perpendikular yo'nalishda, doimiy tezlik bilan harakatlanuvchi zarrachaning fazaviy traektoriyasini  $(p, q)$  tekislikda chizing. Harakat yo'nalishida quti o'lchami 2a.

4. Boshlang'ich  $z_0$  nuqtadan vertikal yuqoriga yo'nalgan  $v_0$  tezlik bilan gravitatsiya maydonida harakatlanuvchi  $m$  massali jismning fazaviy traektoriyasini aniqlang.

5. Kulon kuchi ta'sirida qo'zg'almas  $+e$  zaryadga tomon harakatlanuvchi  $m$  massali  $-e$  zaryadga ega zarra uchun fazaviy traektoriyani aniqlang va chizing. Boshlang'ich momentda zarraning impuls  $p_0 = 0$  va qo'zg'almas zaryaddan  $r_0$  masofada joylashgan.

6. Boshlang'ich holati  $A(p_0, z_0)$ ,  $B(p_0, z_0 + a)$ ,  $C(p_0 + b, z_0)$  fazaviy nuqtalar bilan aniqlangan, doimiy og'irlik maydonida harakatlanayotgan uchta zarra uchun Liuvill teoremasini tekshiring.

7. Ikkita sharning absolut noelastik to'qnashishi uchun Liuvill teoremasini tekshiring.

8. Gamilton formalizmidan foydalanib  $\int f(\omega(\Gamma, t)) d\Gamma = \text{const}$  ekanligini isbotlang. Bu yerda  $f(\omega)$  - cheksizda nolga intiluvchi;

normirovka shartini va  $\frac{\partial w}{\partial t} = \{H, w\}$  tenglamani qanoatlantiruvchi ehtimollik zichligi;  $f(w) - w = 0$  da nolga aylanuvchi ixtiyoriy funksiya;  $H$  - Gamilton funksiyasi.

*Yechish.*  $F = \int f(w(\Gamma, t)) d\Gamma = \text{const}$  dan vaqt bo'yicha hosilani Puasson qavslaridan foydalanib o'zgartiramiz, ya'ni

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \int \frac{df}{dw} \frac{\partial w}{\partial t} d\Gamma = \int \frac{df}{dw} \{H, w\} d\Gamma = \\ &= \int \frac{df}{dw} \sum_{i=1}^{3N} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} \right) - \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) \right] d\Gamma = \\ &= \sum_{i=1}^{3N} \int \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) - \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) \right] d\Gamma. \end{aligned}$$

Kinetik energiya faqat impulsarga va potensial energiya faqat koordinatalarga bog'liqligini, ya'ni  $H(q, p) = T(p) + U(q)$  ekanligini hisobga olsak, masala shartiga binoan

$$\int \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i - f \Big|_{\dots}, \int \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i - f \Big|_{\dots} = 0.$$

Shunday qilib, haqiqatan ham berilgan integralning vaqt bo'yicha o'zgarishi nolga teng bo'ladi.

9. Ishqalanish kuchi tezlikka proporsional bo'lgan muhitda harakatlanayotgan zarra uchun  $(p, q)$  tekislikda fazaviy traektoriyani toping va  $dpdq$  fazaviy hajmning vaqt bo'yicha o'zgarishini hisoblang.

10. Energiya gipersirti bilan chegaralangan  $\epsilon$  energiyali chiziqli garmonik ossillyator uchun fazaviy hajm  $\Gamma$  ni hisoblang.

Energiya spektri formulasi  $\epsilon_n = h\nu \left( n + \frac{1}{2} \right)$  dan foydalanib, elementar fazaviy hajmni baholang. ( $n = 0, 1, 2, \dots$  - kvant soni.)

11.  $V$  hajmda harakatlanuvchi  $\epsilon$  energiyali va tinch holatida massasi  $m_0$  bo'lgan relativistik zarra uchun fazaviy hajmni hisoblang.

12. Potensial qutida harakatlanuvchi  $\epsilon$  energiyali zarra uchun  $\epsilon, \epsilon + d\epsilon$  energiya intervalida kvant holatlar sonini hisoblang.

13. Zarralar energiyasi impuls bilan  $\varepsilon = cp$  munosabat orqali bog'langan va erkinlik darajasi  $s$  bo'lgan sistema uchun  $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$  energiya intervalida kvant holatlar sonini toping.

14. Gibbs mikrokanonik taqsimotiga bo'ysunuvchi bir atomli ideal gazning  $N$  ta zarrasi  $V$  hajmda joylashgan. Shu sistema uchun kvant holatlar sonini toping. Sistema energiyasi  $\varepsilon$  ga teng.  
*Yechish.*

$$\Omega(\varepsilon) = \frac{\Gamma(\varepsilon, V)}{h^{3N}}, \quad \Gamma(\varepsilon, V) = \prod \int dq_i dp_i = V^N \prod \int dp_i.$$

Impulslar fazosida integrallash sohasi ideal gaz uchun

$$H(p) = \sum \frac{p_i^2}{2m}$$

shart bilan aniqlanadi va  $p = \sqrt{2m\varepsilon}$  radiusli  $3N$  o'lchovli fazo deb qaraladi. Bu hol uchun hisoblash natijasi  $\Gamma(\varepsilon, V) = A_N V^N \varepsilon^{3N/2}$  ni beradi. Bundan

$$\Omega(\varepsilon) = A_N V^N \left( \frac{\varepsilon}{h^2} \right)^{3N/2}$$

kelib chiqadi. Bu yerda  $A_N = \frac{(2\pi m)^{3N/2}}{\Gamma(3N/2+1)}$  - energiya va hajmga

bog'liq bo'lmagan doimiy,  $\Gamma(3N/2 + 1)$  - gamma funksiya.

15.  $N$  ta bog'lanmagan garmonik ossillyatorlar to'plami uchun kvant holatlar soni  $\Omega(\varepsilon)$  ni hisoblang.

16. Quyidagi sistemalar uchun ehtimollik zichligi  $p(\varepsilon)$  ni aniqlang: a)  $V$  hajmdagi  $N$  ta bir atomli ideal gaz; b)  $N$  ta bog'lanmagan chiziqli garmonik ossillatorlar to'plami.

17. Statistik fizikaning asosiy vazifalari.

18. Fazalar fazosi deb qanday fazo tushuniladi?

19. Tasviriy nuqta qanday nuqta?

20. Fazoviy chiziq deb qanday chiziqqa aytiladi?

21. Bor-Geyzenberg kvantlanish qoidasini tushuntiring.

22. Kvant holatlar soni deb nimaga aytiladi?

23. Kvant holatlar soni qanday qonuniyatga bo'ysunadi?

24. Statistik taqsimot funksiyasi qanday ta'riflanadi?

25. Normirovka sharti nimani anglatadi?

26. Fazalar fazosining birlik hajmidagi tasviriy nuqtalar soni

$\rho = \text{const}$  yoki  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  ekanligini tushuntiring.

27. Puasson qavsi nima?

## II bob

# STATISTIK MEXANIKANING UMUMIY METODLARI

### 2.1. Gibbsning mikro va kichik kanonik taqsimotlari

Zamonaviy statistik fizikada tashqi sistemalar bilan issiqlik kontaktida bo'lgan sistemaning mikroholatlaridagi energiya qiymatlari Gibbsning kanonik taqsimoti bilan tavsiflanadi. Muvozanat holatning taqsimot funksiyasini aniqlash uchun Gibbs (1901- yil) termodinamik muvozanatdagi berk sistema mikroholatlari teng ehtimollarga ega degan farazni aytadi.

Tabiiyki, sistemaning tashqi muhit bilan bog'lanish xarakteriga qarab aniqlanishi lozim bo'lgan taqsimot funksiyalari ham har xil (mikrokanonik, kichik kanonik va katta kanonik taqsimotlar) bo'ladi.

Yuqorida statistik ansambl yoki mustaqil sistemachalar ustida fikr yuritilgan edi. Biz ta zarradan tashkil topgan hajmli muvozanatdagi termodinamik (statistik) sistemani olib qaraylik. Sistemadagi zarralar kvant mexanika qonuniyatiga bo'ysunuvchi zarralar bo'lsin. Sistemani juda ko'p kvazi-bog'lanmagan mustaqil sistemachalarga ajratamiz. Bu sistemachalar orasidagi o'zaro ta'sir energiyasining, sistema to'la energiyasiga hissassi juda kam bo'lsada, ammo sistema va sistemachaning turli xil energiyali kvant holatlarga o'tishiga ta'sir ko'rsatadi. Vazifa: sistema holatini aniqlash. Buning uchun ixtiyoriy tanlab olingan sistemachaning qandaydir  $\varepsilon_i$  energiyali holatga tushish ehtimolligi  $W(\varepsilon_i)$  ni topaylik. Sistemachalar ham katta sondagi zarralardan tashkil topgan, biz bundan keyin sistemachani sistema deb qabul qilamiz. Berk sistemani  $\varepsilon_i, \varepsilon_i + \delta\varepsilon_i$  energiya intervalida topish ehtimolligi  $W(\varepsilon_i) = W_i \varepsilon_i$  energiyali kvant holatlar soniga proporsional bo'ladi, chunki  $\varepsilon_i$  energiyali kvant holatlar soni qancha ko'p bo'lsa, sistemaning ana shunday energiyali holatda topish ehtimolligi ham shuncha katta bo'ladi. Demak,



berk sistemaning berilgan energiyali holatlardan birida bo'lish ehtimolligi kvant holatlar soni  $\Omega(\epsilon_i)$  ga proporsional bo'ladi, ya'ni

$$W_i \sim \Omega(\epsilon_i). \quad (2.1)$$

Bu ifoda Gibbsning mikrokanonik taqsimoti deyiladi. Bu yakkaolgan berk sistema holati uchun, ya'ni tashqi muhit bilan o'zaro ta'sirda bo'lmagan, energiyasi va zarralar soni doimiy bo'lgan berk sistema holati uchun mikrokanonik taqsimot deb yuritiladi.

(2.1) formulani oshkora ko'rinishda yozish uchun ikkita turli xil holatda bo'la oladigan  $N$  ta o'zaro ta'sirlashmaydigan zarralardan tashkil topgan sistemani ko'rib chiqamiz. Spinlari  $\pm \frac{1}{2}$  ga teng bo'lgan zarralardan tashkil topgan sistema bunga misol bo'la oladi. Tashqi magnit maydon bo'lmagan holda sistema energiyasi zarralar spinining orientatsiyasiga, hamda sistemaning to'liq spini  $S = \sum s$  ga bog'liq bo'lmaydi. Bundan berilgan energiyali holatga spini yuqoriga yo'nalgan zarralarning o'rnini o'zaro almashtirish va, shunga o'xshash, spini pastga yo'nalgan zarralarning ham o'rnini almashtirish yo'li bilan juda ko'p teng ehtimollikka ega bo'lgan holatlar mavjud ekanligi kelib chiqadi.

Faraz qilamiz, spini  $s_{\uparrow} = +\frac{1}{2}$  ga teng bo'lgan zarralar soni

$N_1$  va  $s_{\downarrow} = -\frac{1}{2}$  bo'lgan zarralar soni  $N_2$  bo'lsin. Qulaylik uchun  $n = N_1 - N_2$  va  $N = N_1 + N_2$  ko'rinishda aniqlangan kattaliklar kiritamiz. Bu belgilashlarda sistema to'liq spini  $S = s(N_1 - N_2)$ , spinlari ( $\uparrow$ ) yuqoriga yo'nalgan zarralar soni  $N_1 = \frac{1}{2}(N + n)$  va spinlari ( $\downarrow$ ) pastga yo'nalgan zarralar soni  $N_2 = \frac{1}{2}(N - n)$  bo'ladi.

Mikrokanonik taqsimotni, ya'ni sistemaning to'liq spini  $S = sn$  ga teng bo'lish ehtimolligini topamiz. Buning uchun spin orientatsiyalari ikki xil bo'lgan  $N_1 = \frac{1}{2}(N + n)$  va  $N_2 = \frac{1}{2}(N - n)$  ta zarralardan o'zaro bog'lanmagan joylashishlar soni  $\Omega(n)$  ni topish kerak. Chunki topishimiz kerak bo'lgan to'liq spinlari

bo'yicha holatlar ehtimolligi  $W(n) \sim \Omega(n)$  bo'ladi.  $N$  ta zarrani  $N!$  marta o'zaro bog'lanmagan yo'l bilan joylashtirish mumkin. Spinlari yuqoriga yo'nalgan zarralarni bir-biri bilan o'rin almashtirganda va xuddi shunday spinlari pastga yo'nalgan zarralarning o'rnini almashtirish natijasida sistemaning to'liq spinini o'zgarmaydi. Bunday o'rin almashtirishlar soni mos ravishda  $\left(\frac{N+n}{2}\right)!$  va  $\left(\frac{N-n}{2}\right)!$  ga teng bo'ladi. U holda

$$W \sim \Omega(n) = \frac{N!}{\left(\frac{N+n}{2}\right)\left(\frac{N-n}{2}\right)}. \quad (2.2)$$

Zarralar soni  $N$  juda katta bo'lganligi uchun faktoriallarni hisoblashda Stirling formulasi,  $N! \approx N^N e^{-N} (2\pi N)^{1/2}$  dan va  $n \ll N$  shartidan foydalanamiz. Bir qator soddalashtirishlarni bajarib,  $\ln W$  uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$\ln W \approx N \ln 2 - \frac{n^2}{2N}. \quad (2.3)$$

Bu ifodadan

$$W \sim e^{-\frac{n^2}{2N}} \quad (2.4)$$

taqsimot funksiyani olamiz. Bu esa  $n$  bo'yicha Gauss taqsimotidir. Proporsionallik koeffitsiyenti normirovka shartidan topiladi. Bu ifodadan eng katta ehtimolikka  $n = 0$  holat to'g'ri kelishini topamiz, ya'ni qarama-qarshi spinli zarralar soni teng bo'lgan holat bo'lar ekan ( $S = 0$ ).

Real hollarda sistema tashqi muhit bilan har doim o'zaro ta'sirda bo'ladi. Chunki uni tashqi sistemadan mutlaqo yakka-lash mumkin emas. Shuning uchun ko'pincha termostatga tushirilgan sistema qaraladi. Biz qaraydigan hol uchun sistema deb ixtiyoriy tanlangan sistemachani, termostat deb esa o'sha qolgan sistemachalar to'plami olinadi. Termostat va sistemacha energiyasi:

$$E = E_k^{(0)} + \varepsilon_i + \varepsilon_{int} \simeq E_k^{(0)} + \varepsilon_i = \text{const}, \quad (2.5)$$

bu yerda  $E_k^{(0)}$  -  $k$  holatda yotgan termostat energiyasi,  $\varepsilon_i - i$  holatda yotgan sistema energiyasi,  $\varepsilon_{int}$  - sistemaning termostat bilan o'zaro ta'sir energiyasi. Sistemani  $\varepsilon_i, \varepsilon_i + \delta\varepsilon_i$  energiyali intervalda bo'lish ehtimolligi

$$W_i \sim \Omega(E) = \Omega(E_k^{(0)} + \varepsilon_i) = \Omega_0(E_k^{(0)})\Omega(\varepsilon_i). \quad (2.6)$$

(2.5) ga asosan (2.6) ni quyidagicha yozamiz:

$$W_i \sim \Omega_0(E - \varepsilon_i)\Omega(\varepsilon_i). \quad (2.7)$$

Bizga ma'lumki kvant holatlar soni multiplikativ qonuniyatga, sistema energiyasi esa additivlik qonuniyatga ega. Bir xil qonuniyatga o'tkazish uchun kvant holatlar soni

$$\Omega_0(E - \varepsilon_i) = \exp(S) = \exp[S(E - \varepsilon_i)]$$

bilan almashtiramiz. Bu yerda  $S = S(E - \varepsilon_i)$  o'lchamsiz kattalik,  $\varepsilon_i \ll E$  bo'lganligi uchun  $S(E - \varepsilon_i)$  ni  $\varepsilon_i$  ning darajalari bo'yicha qatorga yoyib, birinchi darajali had bilan chegaralanamiz. Natijada (2.7) quyidagi ko'rinish oladi:

$$W_i = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right)\Omega(\varepsilon_i), \quad (2.8)$$

bu yerda const normirovka sharti (1.13) dan topiladi:

$$\text{const} = \frac{1}{\sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right)\Omega(\varepsilon_i)}.$$

Bu ifodani (2.8) ifodaga qo'yamiz:

$$W_i = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right)\Omega(\varepsilon_i)}{\sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right)\Omega(\varepsilon_i)}. \quad (2.9)$$

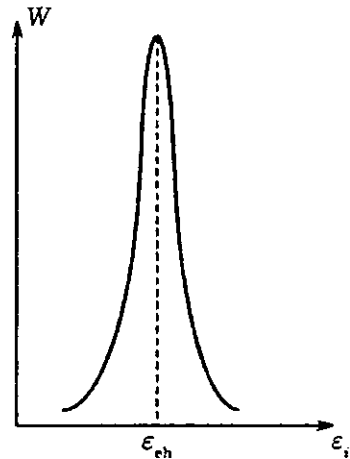
(2.9) ifoda zarralar soni doimiy bo'lgan muvozanatli sistema holatini aniqlovchi kanonik taqsimot bo'lib, Gibbsning kichik kanonik taqsimoti deb yuritiladi. Bu sistema faqat tashqi sistema (termostat) bilan energiya almashinishi mumkin bo'lgan hol

uchun o'rinlidir.  $\theta = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{\varepsilon_i=0}$  - statistik temperatura deb yuritiladi.

$$Z = \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i) \quad (2.10)$$

holat funksiyasi (yoki holat summasi, integrali) deyiladi.  $\Omega(\varepsilon_i)$  –  $\varepsilon_i$  energiyali yoki bir xil energiyali holatlar soni. Ko'pincha kvant holatlar soni yoki statistik vazn deb yuritiladi.

Gibbs taqsimotining muhim xususiyatlaridan biri bu sistemaning eng katta ehtimollik bilan yagona bitta « $\varepsilon_{eh}$ » energiyali holatda bo'la olishidir (2.1- rasm). Bu esa sistema



2.1- rasm.

holatini aniqlovchi termodinamik kattaliklarning o'rtacha qiymatini oddiygina topish imkonini beradi, ya'ni

$$\bar{L} = \sum L(\varepsilon_i) W(\varepsilon_i) = L(\varepsilon_{eh}).$$

Keyingi vazifa: ana shu  $\varepsilon_{eh}$  energiyani hisoblashdir.

## 2.2. Gibbs kvaziklassik va klassik taqsimotlari

Agar muvozanatdagi berk sistema katta sondagi zarralardan tashkil topgan bo'lsa, sistema energiyasi uzluksiz bo'ladi. Chunki har bir kvant zarra diskret energiya spektriga ega. Shu sababli sistema energiyasi uzluksiz ko'rinishni oladi, sistemani aniq bir energiyali holatda topish mumkin bo'lmay qoladi. Bunday hollarda sistemaning aniq energiyali holatda emas, balki  $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$  energiyali intervalda bo'lish ehtimolligi qaraladi. Bu holatda ehtimollik taqsimoti ham uzluksiz funksiya deb qaraladi va oldingi mavzudagi (2.9) ifoda asosida yoziladi. Buning uchun uzlukli funksiya  $\exp(-\varepsilon_i/\theta)$  bilan, uzluksiz funksiya  $\exp(-\varepsilon/\theta)$  bilan, kvant holatlar soni  $\Omega(\varepsilon_i)$  energiya  $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$  intervaldagi kvant holatlar soni  $d\Omega(\varepsilon)$  bilan statistik yig'indi statistik integrali bilan, demak, sistemani  $\varepsilon_i$  energiyali holatda topish ehtimolligi  $W_i$  sistemani energiya intervalida topish ehtimolligi  $dW$  bilan almashtiriladi va natijada quyidagi ko'rinishdagi ifodani olamiz:

$$dW = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Omega}{\int \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Omega}. \quad (2.11)$$

Bu ifoda Gibbsning kvaziklassik taqsimoti deyiladi. Bu yerda

$$d\Omega = \frac{d\Gamma}{h^{3N}} = \frac{1}{h^{3N}} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon, \quad \Gamma = \prod_i \int dp dq,$$

$\Gamma$  – fazalar fazosining hajmi. Natijada (2.11) ifodanini quyidagicha yozish mumkin:

$$dW = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Gamma}{\int \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Gamma}. \quad (2.12)$$

(2.12) ifoda Gibbsning klassik taqsimoti deyiladi. (2.12) ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$dW = \rho(p, q) d\Gamma, \quad (2.13)$$

bu yerda  $\rho(p, q)$  – ehtimollikning normirovkalangan zichligi:

$$\rho(p, q) = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right)}{\int \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Gamma}.$$

Kvaziklassik taqsimot (2.11) dan foydalanib, statistik temperatura  $\theta$  ni hisoblashni ko'raylik. Faraz qilaylik, muvozanatli berk sistema  $N = 1$  zarradan tashkil topgan bo'lsin. Bu holda fazaviy hajm

$$\Gamma = \int dp_x dp_y dp_z dx dy dz = 4\pi V \int_0^{\sqrt{2m\varepsilon}} p^2 dp$$

ga teng bo'ladi. Bu yerdagi integralni hisoblab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\Gamma = \frac{4\pi V}{3} (2m\varepsilon)^{3/2}$$

yoki

$$d\Omega = \frac{d\Gamma}{h^3} = \frac{1}{h^3} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = 2\pi V \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon.$$

Natijada bitta zarra uchun holat funksiyasi

$$Z = \int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) d\Omega = \left( \frac{2\pi m\theta}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} V$$

ifodaga tengligini olamiz. Olingan kattaliklarni (2.11) ifodaga qo'yish natijasida bitta zarradan tashkil topgan sistema taqsimot funksiyasi

$$dW = \frac{2}{\sqrt{\pi(\theta)^3}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \quad (2.14)$$

ko'rinishni oladi. Energiyasi  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon + d\varepsilon$  intervalda bo'lgan ideal gazlar uchun Maksvell taqsimot funksiyasi

$$dW = \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \quad (2.15)$$

ga tengligi umumiy kursdan ma'lum. (2.14) va (2.15) larni solishtirishdan  $\theta = kT$  ekanligini olamiz.

Agar  $N$  ta zarradan tashkil topgan berk sistemani  $V$  hajmga ega bo'lgan ideal gaz deb qarasaq, u holda taqsimot funksiya (2.11) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dW = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right) \sqrt{\theta^{3N}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \varepsilon^{\frac{3N}{2}-1} d\varepsilon, \quad (2.16)$$

bu yerda  $\Gamma(3N/2)$  - gamma funksiya. Katta sondagi zarralardan tashkil topgan sistemaning taqsimot funksiyasi (2.16) keskin maksimumga ega bo'ladi. Taqsimot funksiyasi

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} = \left( \frac{3N}{2} - 1 \right) \theta$$

nuqtada maksimumga erishadi. Sistemada energiyaga ega bo'lgan zarralarni topish ehtimolligi eng katta bo'ladi. Demak,

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{\text{eh}} \approx \frac{3N}{2} \theta.$$

Bu yerda  $N \gg 1$  ekanligini hisobga oldik. Energiyaning o'rtacha qiymatini (2.16) taqsimot funksiyasidan foydalanib hisoblash quyidagi natijani beradi:

$$\bar{\varepsilon} = \int \varepsilon dW = \frac{3N}{2} \theta.$$

Demak,

$$\varepsilon_{\text{eh}} = \bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} N \theta = \frac{3}{2} N k T.$$

Bu esa  $N$  ta zarradan tashkil topgan ideal gaz ichki energiyasidir. Bundan muhim xulosa kelib chiqadi:  *$N$  ta zarradan tashkil topgan har qanday makroskopik sistemaning ichki energiyasi statistik metod asosida hisoblangan sistemaning o'rtacha energiyasiga teng ekan.*

### 2.3. Maksvell va Maksvell–Bolsman taqsimotlari

Gibbsning kichik kanonik taqsimoti zarralar soni doimiy bo'lgan muvozanatdagi sistemalar uchun umumiy taqsimot bo'lib hisoblanadi. Masalan, xususiy holda Maksvell, Bolsman va Maksvell–Bolsman taqsimotlarini oddiygina keltirib chiqarish mumkin. Buning uchun ta zarradan tashkil topgan ideal gazni olaylik. Shu sistemadan ixtiyoriy bitta molekulani sistema deb qarasaq, qolgan  $(N - 1)$  ta molekula termostatni tashkil qiladi.

Amalda ko'pincha bir jinsli tashqi kuch maydonida bo'lgan gaz bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Masalan, og'irlik kuchi maydonida bo'lgan gaz. Ana shunday maydonda har bir molekulaning to'la energiyasi

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{ig}} + U(x, y, z) \quad (2.17)$$

bo'ladi. Bu yerda  $\varepsilon_{\text{ig}}$  – zarraning kinetik energiyasi;  $U(x, y, z)$  – zarraning potensial energiyasi.

(2.17) ifodani Gibbsning klassik taqsimoti (2.11) ga qo'yish natijasida u ikkita ko'paytuvchiga ajraganini ko'ramiz, ya'ni

$$dW_{\Gamma} = dW_M \cdot dW_B. \quad (2.18)$$

(2.18) ifoda *Maksvell-Bolsman taqsimoti* deyiladi. Bu yerda

$$dW_M = \left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}\right) dp_x dp_y dp_z, \quad (2.19)$$

$$dW_B = \frac{\exp\left(-\frac{U(x,y,z)}{kT}\right) dV}{\int \exp\left(-\frac{U(x,y,z)}{kT}\right) dV}. \quad (2.20)$$

(2.19) ifoda molekulani impuls fazosida  $d\mathbf{p}$  hajmda topish ehtimolligini beradi va unga *Maksvell taqsimoti* deyiladi. (2.20) ga esa molekulani koordinatalar fazosida  $dV$  hajmda topish ehtimolligini beradi va Bolsman taqsimoti deb yuritiladi. Bu ikkala taqsimot birgalikda molekulani bir vaqtda impuls fazosining  $d\mathbf{p}$  va koordinatalar fazosining  $dV$  elementar hajmlarida topish ehtimolligini beradi va Maksvell-Bolsman taqsimoti deyiladi. Ehtimolliklarni ko'paytirish qoidasiga asosan (2.18) shuni anglatadiki, zarraning impuls komponentlari intervalida bo'lish ehtimolligi va zarrani berilgan nuqtada topish ehtimolligi o'zaro bog'lanmagan voqealar ekan. Bu esa zarrani bir vaqtning o'zida ham impuls, ham koordinatalar fazosida topish mumkin ekanligini ko'rsatadi.

## 2.4. Maksvell taqsimoti

Maksvell taqsimotini mukammal qarab chiqaylik. Avvalo ifoda (2.19) ning ko'rinishini o'zgartiraylik. Buning uchun eng avvalo (2.19) da sferik koordinatalar sistemasiga o'tamiz, ya'ni  $d\mathbf{p} = p^2 dp \sin\theta d\theta d\varphi$  va  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$  ekanligini hisobga olamiz va burchaklar bo'yicha integrallab zarrachani impuls intervali  $p, p + dp$  topish ehtimolligini aniqlovchi Maksvell taqsimotini olamiz:

$$dW(p) = 4\pi \left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) p^2 dp. \quad (2.21)$$



Agar (2.16) da  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  ekanligini hisobga olsak, u holda zarra tezliklarining  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$  tezlik intervalida bo'lish ehtimolligini olamiz:

$$dW(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3 \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z. \quad (2.22)$$

Bu yerda yana sferik koordinatalar sistemasiga o'tsak, tezlik moduli bo'yicha Maksvell taqsimotini olamiz:

$$dW(\mathbf{v}) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv. \quad (2.23)$$

Energiya va  $p = \sqrt{2m\varepsilon}$  impuls ifoda bilan bog'langanligini inobatga olsak, (2.21) zarra energiyasining  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon + d\varepsilon$  energiya intervalida bo'lish ehtimolligi uchun Maksvell taqsimotiga o'tadi:

$$dW(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon. \quad (2.24)$$

Agar (2.21), (2.23) va (2.24) ifodalarning hajm birligidagi zarralar sonini « $n$ » ga ko'paytirsak, u holda berilgan impuls, tezlik va energiya intervalidagi zarralar soni uchun taqsimot funksiyalarini hosil qilamiz.

Maksvell taqsimoti amaliyotda keng qo'llaniladi. Fizik jarayonlarning kechishiga qarab, Maksvell taqsimoti (2.21), (2.23) yoki (2.24) ko'rinishlarda ishlatiladi. Bu taqsimot sistema holatini xarakterlovchi kattaliklarni hisoblash imkonini beradi. Misol tariqasida termoelektron emissiya tokining zichligini hisoblaymiz.

Metall ichidagi elektronning potensial energiyasi tashqaridagi elektronnikidan chiqish ishi  $w = e\varphi$  ga farq qiladi. Tok zichligining ta'rifiga asosan termoelektron tokining zichligi  $\mathbf{j} = en\mathbf{v}$  ko'rinishda yoziladi. Bu yerda  $e$  - elektron zaryadi,  $n$  - elektron gazning zichligi,  $\mathbf{v}$  - elektron tezligi. Xususan Ox o'qi yo'nalishida tok zichligi

$$j_x = en\bar{v}_x. \quad (2.25)$$

Metall ichidagi elektron gazni ideal deb qaraymiz. Bu fikr nazariy va tajribalarda isbotlangan.

Metall ichidagi elektron gazga tezliklar bo'yicha Maksvell taqsimoti (2.22)ni tadbiiq qilamiz. U holda (2.25) ni quyidagi ko'inishda yozish mumkin:

$$j_x = en \int v_x dW(v) = en \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{v_{ox}}^{\infty} v_x dv_x, \quad (2.26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right) dv_y dv_z,$$

bu yerda  $v_{ox}$  elektronning metalldan chiqish ishi uning kinetik energiyasiga tenglidan, ya'ni  $e\varphi = \frac{mv_{ox}^2}{2}$  tenglikdan aniqlanadi. (2.26) ifodadagi integrallarni hisoblab tok zichligi uchun quyidagi natijani hosil qilamiz:

$$j_x = \frac{en\bar{v}}{4} \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right), \quad (2.27)$$

bu yerda  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$  - o'rtacha tezlik. (2.27) ifoda Richardsonning klassik formulasi deyiladi.

Maksvell taqsimotini ikkita zarraning nisbiy va massa markazi tezliklarining o'rtacha qiymatini aniqlashga tatbiiq qilamiz. Gibss taqsimotiga asosan birinchi zarra  $v_1$  ikkinchi zarra  $v_2$  tezlikka bir vaqtda ega bo'lish ehtimolligini quyidagicha yozish mumkin:

$$dW(v_1, v_2) = C \cdot \exp\left(-\frac{m_1 v_1^2 + m_1 v_2^2}{2kT}\right) dv_1 dv_2. \quad (2.28)$$

Normirovka sharti

$$\int dW(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1 \quad (2.29)$$

o'zgarmas kattalik  $C$  uchun quyidagi natijani beradi:

$$C = \left( \frac{m_1 m_2}{4\pi^2 k^2 T^2} \right)^{3/2}.$$

Taqsimot funksiyasi (2.28) ni tezliklarning modullari bo'yicha yozamiz:

$$dW(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 16\pi^2 \left( \frac{m_1 m_2}{4\pi^2 k^2 T^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2kT}\right) v_1^2 v_2^2 dv_1 dv_2. \quad (2.30)$$

Endi taqsimot funksiyasini nisbiy  $\mathbf{v}'$  va massa markazi  $\mathbf{v}_0$  tezliklarining modullari orqali yozamiz:

$$dW(\mathbf{v}', \mathbf{v}_0) = dW(\mathbf{v}') dW(\mathbf{v}_0). \quad (2.31)$$

Bu yerda

$$dW(\mathbf{v}') = 4\pi \left( \frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu v'^2}{2kT}\right) v'^2 dv', \quad (2.32)$$

$$dW(\mathbf{v}_0) = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{M v_0^2}{2kT}\right) v_0^2 dv_0, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_0 = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2.$$

Gaz bir atomli bo'lsa,  $m_1 = m_2$  bo'ladi. U holda (2.32)–(2.33) dan nisbiy va massa markazi tezliklarining o'rtacha qiymatlari uchun quyidagilarni olamiz:

$$\bar{v}' = \int_0^{\infty} v' dW(\mathbf{v}') = \sqrt{2} \bar{v}, \quad \bar{v}_0 = \int_0^{\infty} v_0 dW(\mathbf{v}_0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{v}.$$

## 2.5. Bolsman taqsimoti

Bolsman taqsimotining xususiy hollar uchun tadbig'ini Yer atmosferasi uchun ko'rib chiqamiz. Ma'lumki havoga Yerning gravitatsion maydoni ta'sir qiladi. Agar  $z$  o'qini vertikal holda yuqoriga yo'naltirsak, gaz molekulasining potensial energiyasi  $U = mgz$  bo'ladi va natijada (2.20) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dW_B = \frac{\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz}{\int \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz}. \quad (2.34)$$

Agar hajm birligidagi zarralar sonini kiritsak, u vaqtda  $z, z + dz$  intervaldagi zarralar soni

$$dn(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz \quad (2.35)$$

yoki  $z$  balandlikdagi zarralar zichligi quyidagiga teng bo'ladi:

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right), \quad (2.36)$$

bu yerda  $n_0$  koordinata  $z = 0$  shartli hisoblash sathida hajm birligidagi zarralar soni. Bosimni zarralar soniga proporsional ekanligini hisobga olsak, barometrik formulani olamiz:

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right). \quad (2.37)$$

$z_0 = \delta = kT/mg$  xarakteristik balandlik deb yuritiladi. Xarakteristik balandlikda gaz molekulalar soni  $n(\delta) = n_0/e$ , ya'ni  $z = 0$  sathdagiga nisbatan  $e$  marta kamayar ekan.

Tajriba kuzatuvlari shuni ko'rsatadiki, atmosferaning birjinsli emasligi, turli balandliklarda temperaturaning farqlanishi va natijada atmosfera muvozanat holda bo'lmasligi tufayli, atmosferaning juda yuqori qatlamlarida (2.36) formula bilan aniqlanuvchi zarralar sonining taqsimotidan chetlashish kuzatiladi. Planetalarning katta-kichikligiga qarab atmosferasining kosmik fazoga sochilib ketish hodisasi ro'y beradi. Zarralarning, xususan atmosferani tashkil etuvchi gaz molekulalarining tezligi planeta uchun xos bo'lgan ikkinchi kosmik tezlikdan katta bo'lsa, ular planetani tark etadilar. Planetaning o'lchami qancha kichik va temperaturasi qancha yuqori bo'lsa, tark etish jarayoni shuncha tez bo'ladi. Masalan Merkuriy va Oyda atmosfera yo'qligi shu hodisa bilan tushuntiriladi. Yer uchun bu jarayon juda sekin sodir bo'ladi. Bolsman taqsimotidan farqli ravishda Maksvell taqsimoti atmosferaning yuqori qatlamlarida ham o'rinli bo'ladi.

Gaz zichligining balandlik bo'yicha taqsimlanishidan kelib chiqadigan ba'zi bir xulosalarni ko'rib chiqaylik:

1. Balandligi  $h$  bo'lgan idish ichidagi gazning og'irligini hisoblaylik. Gaz og'irligini ikki yo'l bilan hisoblash mumkin. Birinchi yo'l, gaz og'irligi undagi hamma molekulalarning og'irligidan iborat deb hisoblash mumkin, ikkinchi yo'l esa,  $h$  balandlikdagi gaz og'irligi idish tagiga ( $z = 0$ ) va idish qopqog'iga ( $z = h$ ) bergan bosimlar farqi orqali. Har ikkala yo'l bir xil natija beradi:

$$p = SkT(n_0 - n_h),$$

bu yerda  $S$  - yuza,  $n_0$  va  $n_h$  mos ravishda  $z = 0$  va  $z = h$  balandliklardagi hajm birligidagi zarralar soni.

2. Cheksiz balandlikdagi gaz ustunining issiqlik sig'imini (2.34) ifoda asosida hisoblaylik. Buning uchun eng avval bitta zarraning o'rtacha potensial energiyasini hisoblash kerak, ya'ni

$$\bar{u} = mg\bar{z} = mg \int z dW_B(z).$$

Bu ifodani gaz ustunidagi ( $N$ ) zarralar soniga ko'paytirsak, idishdagi gazning potensial energiyasini topamiz. Hisoblashda ikki holni qaraymiz.

**Birinchi hol**, gaz ustunining balandligi xarakteristik balandlikdan kichik bo'lsin ( $z = h \ll \delta$ ), bu holda  $\bar{u} = mgh/2$  va  $u = \bar{u}N = mghN/2$  bo'ladi. Issiqlik sig'imi  $C_V^{\text{pot}} = 0$ . Demak, bu holda potensial energiya issiqlik sig'imiga hissa qo'shmas ekan.

**Ikkinchi hol**,  $z = h \gg \delta$ , shu sababli integralda yuqori chegarani  $h \rightarrow \infty$  bilan almashtirish mumkin. Hisoblash natijasida bitta zarraning o'rtacha energiyasi  $\bar{u} = kT$  va gaz ustunining potensial energiyasi  $u = NkT$  ga tengligi kelib chiqadi. Bu holda  $C_V^{\text{pot}} = Nk$  bo'ladi. Cheksiz balandlikda gaz ustunining to'liq energiyasi

$$E = E_{\text{ilg}} + U = \frac{3}{2}NkT + NkT = \frac{5}{2}NkT,$$

demak, cheksiz balandlikdagi gaz ustunining issiqlik sig'imi

$$C_{\text{gaz}} = \frac{5}{2}Nk = C_p \text{ bo'ladi.}$$

3. Bolsman taqsimoti (2.36) dan foydalanib, Avagadro sonini topish mumkin. Gaz massalari  $m_1$  va  $m_2$  bo'lgan molekulalardan tashkil topgan bo'lsin. Ularning zichliklari  $z = 0$  balandlikda bir xil bo'lsa,  $h$  balandlikdagi zichliklar  $n_1(h)$  va  $n_2(h)$  nisbatidan Avagadro sonini aniqlash uchun quyidagi ifodani topamiz:

$$N_A = \frac{RT}{(m_2 - m_1)gh} \ln \left( \frac{n_1(h)}{n_2(h)} \right).$$

Jan Perren (1908-1911) Avagadro sonini tajribada birinchi bo'lib aniqlagan va  $N_A = 6,84 \cdot 10^{23}$  l/mol qiymatni

topgan. Tajribalarni takomillashtirib  $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$  l/mol ga teng ekanligini aniqladi. Avagadro sonining bu qiymati hozirgi kunda eng aniq hisoblanadi.

## 2.6. II bobga oid masala va savollar

1.  $N$  ta bir atomli molekuladan tashkil topgan ideal gaz holat integralini hisoblang va bitta molekula holat integrali orqali ifodalang.

2. Energiya intervali  $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$  da Gibbs taqsimotini a) bitta molekuladan tashkil topgan; b)  $N$  ta molekuladan tashkil topgan bir atomli ideal gaz uchun aniqlang.

3. Chiziqli garmonik ossilyator uchun klassik yaqinlashishda energiya bo'yicha Gibbs taqsimotini yozing va ossilyator energiyasining o'rtacha qiymatini hisoblang.

4.  $N$  ta zarradan tashkil topgan bir atomli ideal gaz uchun  $H^n$  ning ( $n > 0$ ) o'rtacha qiymatini hisoblang.

*Yechish.*

$$\overline{H^n} = \int H^n dW, \quad dW = \frac{\exp\left(-\frac{H}{\theta}\right) d\Omega}{\int \exp\left(-\frac{H}{\theta}\right) d\Omega} = \frac{\exp\left(-\frac{H}{\theta}\right) d\Gamma}{\int \exp\left(-\frac{H}{\theta}\right) d\Gamma}.$$

Gamilton funksiyasi vaqtga oshkora bog'liq bo'lmaganligi uchun  $H = \varepsilon$  bo'ladi. Bu holda  $\overline{H^n} = \overline{\varepsilon^n}$ ,

$$\overline{H^n} = \frac{\int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \varepsilon^{3N/2+n-1} d\varepsilon}{\int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \varepsilon^{3N/2-1} d\varepsilon} = \theta^n \frac{\Gamma(3N/2+n)}{\Gamma(3N/2)}.$$

5. Katta sondagi zarralardan tashkil topgan sistemaning issiqlik sig'imi  $C_v = \alpha T^n$  ( $\alpha > 0, n > 1$ ). Sistemaning kvant holatlar sonini aniqlang.

*Yechish.*

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_v = k \left(\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_v = \alpha T^n = \alpha \left(\frac{\theta}{k}\right)^n.$$

$\Omega(E) = e^{\delta(E)}$ ,  $\ln\Omega(E) = \delta(E)$ ,  $\theta$  - statistik temperatura. Bu ifodadan

$$dS = \frac{dE}{\theta}, \quad d \ln \Omega(E) = dS(E) = \frac{1}{\theta} dE \quad \ln \Omega(E) = \frac{E}{\theta}.$$

Bu ifodadan

$$\Omega(E) = \exp\left(\frac{E}{\theta}\right).$$

Issiqlik sig'imi ta'rifi va masala shartiga asosan  $dE = \alpha \frac{\theta^n d\theta}{k^{n+1}}$  ni olamiz. Bu ifodani integrallab,  $\theta = \frac{k}{\alpha^{1/(n+1)}} [(n+1)E]^{1/(n+1)}$  ifodani olamiz. Bu natijani  $\Omega(E)$  ifodasiga qo'yib, holatlar soni quyidagiga teng ekanligini olamiz:

$$\Omega(E) \sim \exp\left(\frac{\alpha^{1/(n+1)}}{k(n+1)^{1/(n+1)}} E^{n/(n+1)}\right).$$

6. Qandaydir sistema uchun  $x$ ,  $y$  va  $z$  kattaliklarning qiymatlari  $x$ ,  $x + dx$ ;  $y$ ,  $y + dy$  va  $z$ ,  $z + dz$  intervallarda yotish ehtimolligi  $dW(x, y, z) = C e^{-\alpha(x^2 + y^2 + z^2)} dx dy dz$  ifoda ko'rinishida berilgan.

$x$ ,  $y$ ,  $z$  o'zgaruvchilarning o'zgarish sohalari  $(-\infty, \infty)$  deb hisoblab, normalashtirish doimiysini toping.

7. Oldingi masaladagi  $x$  ning qiymatlari  $x$ ,  $x + dx$  intervalda bo'lish ehtimolligini toping.

8. Maksvell tezliklar bo'yicha taqsimotidan foydalanib, quyidagi kattaliklarni toping: a)  $\overline{v^n}$ ,  $n > -2$ ; b)  $\overline{v}$  va  $\overline{v^2}$ ; d) eng katta ehtimolikka mos kelgan tezlik  $v_e$  ning qiymati. 22

*Yechish.*

$$a) \overline{v^n} = \int_0^{\infty} v^n d\rho(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int v^{n+2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv.$$

Bu yerdagi integralni hisoblab, quyidagini topamiz:

$$\overline{v^n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right).$$

Ushbu natijadan foydalanib, masala shartidagi qolgan savollarga javoblarni topamiz:

b)  $n = 1$  da  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ ,  $n = 2$  da  $\bar{v}^2 = \frac{3kT}{m}$ ;

d) eng katta ehtimollikka mos kelgan tezlik  $v_e$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[ v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \right] = 0$$

shartdan  $v_e = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$  ekanligini topamiz.

9.  $\bar{\epsilon}$  va zarraning kinetik energiyasining eng katta ehtimollik qiymati  $\epsilon_e$  ni toping. Bu qiymatlarning teng emaslik sababini tushuntiring.

10. Ideal gazda zarralar soni  $N$  bo'lsa, tezligi  $0 \leq v \leq v_e$  intervalda bo'lgan zarralar soni  $N_e$  ni hisoblang.

11. Gaz molekularining qanday qismi o'rtacha kinetik energiya  $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2}kT$  dan katta bo'lgan ilgarilanma harakat kinetik energiyasiga ega?

12. Idish sirtining birlik yuzasiga bir sekunda urilayotgan gaz molekularining soni  $\nu = \frac{1}{4}n\bar{v}$  ( $n$  - birlik hajmdagi zarralar soni) ko'rinishda bo'lishini ko'rsating.

*Yechish.*  $d\nu = v_x dn(v_x) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) v_x dv_x.$

Bu ifodani integrallab, quyidagi natijani olamiz:

$$\nu = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) v_x dv_x = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = \nu = \frac{1}{4}n\bar{v}.$$

13. Havosi so'rib olingan idishning tor tirqishidan molekular dastasi chiqmoqda. Dastada zarralarning o'rtacha tezligi va o'rtacha kvadratik tezligini toping.

14. Bitta molekulaning birlik vaqt ichida barcha molekular bilan tuqnashish to'la soni va uning o'rtacha yugurish yo'lini toping. Molekulalar  $R_0$  radiusli mutlaq elastik sharlar deb qaralsin.



15. Energiyasi  $\varepsilon_1 = kT$  dan kichik va katta energiyalarga ega bo'lgan zarralar sonining nisbatini aniqlang.

16. Bir jinsli gravitatsion maydondagi ideal gaz ustunining og'irlik markazini toping. Temperatura  $T$ , erkin tushish tezlanishi  $g$ .

17. Radiusi  $R$ , balandligi  $h$  bo'lgan silindr idishda molekularining massalari  $m_1, m_2, \dots, m_n$  bo'lgan ideal gaz aralashmasining massa markazini toping. Idishdagi turli navdagi gazlarning miqdori bir xil.

18. 300 K temperaturada Yer atmosferasidagi kislorod molekularining qanday qismi Yerning gravitatsion maydonini yenga oladi?

19. Bosim va temperaturalari mos ravishda  $p_1, T_1$  va  $p_2, T_2$  bo'lgan ikki idish  $S$  kesimli qisqa naycha bilan tutashtirilgan. Agar gaz molekularining massalari  $m_1 = m_2 = m$ , bosimlari  $p_1 = 2p_2$  va temperaturalari  $T_1 = 2T_2$  munosabatda bo'lsa, bir idishdan ikkinchisiga oqib o'tgan gaz massasini aniqlang.

*Ko'rsatma:* biridan ikkinchisiga oqib o'tgan gaz massasi oqimlar farqidan topiladi, ya'ni

$$\begin{aligned}
 M &= S(n_1 \overline{v_{1x}} - n_2 \overline{v_{2x}}) = \\
 &= Sn_1 \left( \frac{m}{2\pi kT_1} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT_1}} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m(v_y^2+v_z^2)}{2kT_1}} dv_y dv_z - \\
 &- Sn_2 \left( \frac{m}{2\pi kT_2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT_2}} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m(v_y^2+v_z^2)}{2kT_2}} dv_y dv_z.
 \end{aligned}$$

Bu yerda  $n_i = \frac{p_i}{kT_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

20. Siyraklashgan gaz  $p$  bosim ostida berk idishga joylashgan. Agar idishda  $S_0$  yuzali kichkina tirqish ochilsa, undan gaz qanday tezlik bilan chiqadi? Gaz Maksvell tezliklar bo'yicha taqsimotiga bo'ysunadi deb hisoblang.

*Yechish.*  $u = -\frac{dN}{dt}$ ,  $dN = -S_0 n_0 \overline{v_x} dt$ . Bu yerda

$$\overline{v_x} = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2 + mv_z^2}{2kT}} dv_y dv_z = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = \frac{1}{4} \bar{v}.$$

Demak,  $u = \frac{p}{4kT} S_0 \bar{v}$ .

**21.** Gibbsning mikro va kichik kanonik taqsimotlarining farqi. Nima uchun kvant holatlar soni  $\Omega \sim e^S$  ( $S$  – o'lchamsiz entropiya) ko'rinishda olinadi?

**22.** Gibbs kichik kanonik taqsimotining asosiy vazifasi va xossalari.

**23.** Holat funksiyasi va uning vazifasi.

**24.** Bitta zarra uchun Gibbs taqsimoti.

**25.**  $N$  ta zarra uchun Gibbs taqsimoti.

**26.** Impuls, tezlik va energiya bo'yicha Maksvell taqsimotlari qanday olinadi?

**27.** Maksvell–Bolsman taqsimoti.

**28.** Xarakteristik balandlik qanday balandlik?

**29.** Cheksiz balandlikdagi gazning issiqlik sig'imi nimaga teng?

**30.** Avagadro sonini Jan-Perren qanday formula yordamida hisoblagan? Bu formula qanday olinadi?

**31.** Zarralar sonining taqsimot funksiyasi qanday hollarda o'rinli va o'rinsiz bo'ladi?

**32.** Maksvell taqsimotining tadbiiq qilinish sohasi.

## III bob

# STATISTIK VA FENOMENOLOGIK TERMODINAMIKA

*Termodinamika birinchi qonunining asoschilari: Yulius Robert Mayer (1814–1878), bamisoli dunyoga bittayu-bitta maqsad bilan, ya'ni ushbu qonunni kashf qilish uchun kelgan haqiqiy daho edi. German Lyudvig Ferdinand Gelmgols (1821–1894) bu qonunni «Erhaltung der Kraft», ya'ni energiya saqlanish qonuni deb atagan. Jey Preskott Joul (1816–1889) issiqlik va ishning ekvivalentligi ustida tajribalarni 40 yildan ortiq olib borgan.*

### 3.1. Kirish

Termodinamika va statistik fizika materiyaning issiqlik harakat formasini o'rganadi. Ularning asosiy mazmuni issiqlik muvozanat holatda bo'lgan ko'p sondagi zarralardan tashkil topgan makroskopik sistemada issiqlik harakat qonuniyatlari va unda o'tayotgan jarayonlarni, eng avvalo termodinamik metod, so'ng esa statistik metod yordamida o'rganishdan iboratdir.

Termodinamikaning fenomenologik xarakteriga ko'ra, issiqlik muvozanatda bo'lgan sistemada o'tadigan jarayonlarni o'rganishda muhim natijalarga kelsada, uning xususiyatlarini chuqur o'rganishni chegaralaydi va tekshiriladigan fizik hodisalarning ichki tabiatini ochishga imkon bermaydi. Termodinamika muvozanat holatdagi makroskopik sistemada issiqlik bilan bog'liq bo'lgan jarayon, hodisa va qonuniyatlarni tiklashda va tekshirishda nafaqat tajriba yo'li bilan olingan muhim natijalardan foydalaniladi, balki statistik fizika metodlari asosida olingan umumiy qonuniyatlar, formulalar va xulosalardan foydalanadi.

Muvozanatdagi makroskopik sistemalar o'rtacha kattaliklar uchun Statistik fizika metodi asosida o'tkazilgan nazariy tadqiqotlar fenomenologik termodinamika qonuniyatlarini tiklashga

olib keldi va asoslab berdi. Shuning uchun muvozanatdagi sistema statistik fizikasi statistik termodinamika degan nom oldi.

Birinchi navbatda fenomenologik termodinamikada ko'riladigan masalalarni ko'rib chiqamiz. So'ngra termodinamika qonunlarini statistik fizika metodlari yordamida o'rganamiz.

#### **Termodinamika uch qismga bo'linadi:**

1. Fizikaviy termodinamika.
2. Kimyoviy termodinamika.
3. Texnik termodinamika.

Fizikaviy termodinamika – termodinamikaning umumiy nazariy asoslarini va aksiomalarini o'rganadi. Kimyoviy termodinamika kimyoviy va fizikaviy muvozanatlarni tekshirishda termodinamikaning nazariy asoslaridan va metodlaridan foydalanadi. Texnik termodinamika esa issiqlik va ishning o'zaro bir-biriga almashinishini o'rganishda termodinamikaning asosiy qonunlaridan foydalanadi. Texnik termodinamikaning asosiy maqsadi – issiqlik mashinalar nazariyasini ishlab chiqishdan iborat.

#### **Termodinamikada asosiy tushunchalar:**

1. Termodinamik sistema yoki makroskopik sistema.
2. Termodinamik sistema holati.
3. Termodinamik muvozanat.
4. Termodinamik jarayon.
5. Temperatura.
6. Termodinamik sistema ichki energiyasi.
7. Energiyaning saqlanish va aylanish qonuni.
8. Termodinamik ish. Issiqlik miqdori.
9. Holat funksiyasi.
10. Holat tenglamasi.

#### **Termodinamikaning tekshirish metodlari:**

1. Davriy jarayonlar metodi.
2. Termodinamik potentsiallar metodi.

Jarayonlar, xususan, siklik jarayonlar metodi fransuz olimi Sadi Karno va nemis olimi Klauzius tomonidan ishlab chiqilgan. Termodinamik potensial metodi esa amerikalik olim Gibbsga tegishlidir.

#### **Termodinamika asosini tashkil qiluvchi qonunlar:**

1. Termodinamikaning birinchi qonuni.
2. Termodinamikaning ikkinchi qonuni.
3. Termodinamikaning uchinchi qonuni.

## 3.2. Termodinamikada asosiy tushunchalar

Yuqorida sanab o'tilgan termodinamikadagi asosiy tushunchalar bilan tanishib chiqamiz.

### 1. Makroskopik sistema.

*Makroskopik* yoki *termodinamik sistema* juda katta sondagi zarralardan tashkil topgan bo'lib, uning o'lchamlari zarralar o'lchamlaridan juda katta va yashash vaqti ham yetarlicha katta bo'lishi kerak. Bunday sistemaning tashkil etuvchilari moddiy zarralardan (atom, molekula, ion, elektron va boshqalar) va maydonlardan (masalan, elektr va magnit maydonlari) iborat bo'lishi mumkin.<sup>1</sup> Makroskopik sistema qanday zarralardan tashkil topgan bo'lishidan qat'iy nazar u katta sondagi erkinlik darajasiga ega bo'lgan dinamik sistema bo'lib hisoblanadi. Erkinlik darajasi kichik sistemalar termodinamikada o'rganilmaydi.

Agar sistemaning faqat bir qismida o'tayotgan jarayonlarni o'rganayotgan bo'lsak, sistemaning qolgan qismini atrof-muhit deb hisoblaymiz. Keng ma'noda atrof-muhitni sistemaning o'rganilayotgan qismiga qandaydir shartlar qo'yadigan *termostat* deb qarash mumkin (masalan bosim, temperatura, kimyoviy potensial va boshqalarning o'zgarishini ta'minlaydi).

Termodinamik sistemalar izolatsiyalangan va izolatsiyalanmagan bo'ladi. Mustaqil, atrof-muhit bilan mutlaq ta'sirlashmaydigan sistema *izolatsiyalangan* deyiladi.

Atrof-muhit bilan modda (energiya, modda, nurlanish) almashmaydigan sistema *yopiq* deyiladi.

### 2. Termodinamik sistema holati.

Makroskopik sistema holatini aniq fizik ma'noga ega bo'lgan makroskopik parametrlar (ichki energiya, entalpiya, entropiya, temperatura, bosim va boshqalar) aniqlaydi. Bu kattaliklar holat funksiyasi deb yuritiladi. Yuqorida sanab o'tilgan kattaliklar tor ma'noda holat o'zgaruvchilari hisoblanadi. Keng ma'noda holat o'zgaruvchilariga lokal termodinamik muvozanatni belgilovchi kattaliklar kiradi. O'zaro bog'liq bo'lmagan termodinamik kattaliklarni shunday tanlash mumkinki, ular sistema holatini aniqlash uchun zaruriy va yetarli bo'lishi kerak, qolgan o'zgaruvchilar esa ularning funksiyasi bo'ladi. O'zaro bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchilar soni empirik yo'l bilan aniqlanadi.

---

<sup>1</sup> Koinot va galaktika miqyosidagi gravitatsion maydon bundan istisnodir.

O'zgaruvchilar *ichki* va *tashqi* bo'ladi. Tashqi o'zgaruvchilar sistemani o'rab turgan muhitning holatini aniqlaydi. Masalan, silindrdagi porshenning holati, sistemaga ta'sir qiluvchi elektr yoki magnit maydon kuchlanganligi tashqi o'zgaruvchilarga misol bo'ladi. Ko'rilayotgan sistema holatini bevosita aniqlovchi kattaliklar ichki o'zgaruvchilar deyiladi. Umuman olganda o'zgaruvchilarni ichki va tashqiga ajratish shartli bo'ladi. Yuqoridagi misolda, masalan, maydonni o'rganilayotgan sistema bilan birga ko'rsak, maydon kuchlanganliklari ichki o'zgaruvchiga o'tib qoladi. Shuning uchun eng avvalo masalani o'rganishda o'zgaruvchilarni ichki va tashqiga ajratish shartlarini belgilab olish kerak, bu ayniqsa mexanik kontaktlarda juda muhimdir.

O'zgaruvchilar o'z navbatida *intensiv* va *ekstensivga* ajraladi. Termodinamik muvozanatda turgan bir jinsli sistemani faraziy mutlaq o'tkazmaydigan chegara bilan ikkiga ajratsak, bo'laklar o'z muvozanat holatini o'zgartirmaydi. Ya'ni muvozanat holatda qolishni davom ettiradi. Demak, bir jinsli sistemaning muvozanat holati uning ichki xossasi bo'lib, sistemaning o'lchamlariga bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchilar bilan aniqlanadi. Bunday o'zgaruvchilar intensiv deyiladi. Masalan, temperatura, bosim, kimyoviy potensial. Sistema yuqoridagi kabi bo'linganda uni xarakterlovchi o'zgaruvchilar bo'laklar o'lchamlariga yoki massalariga proporsional ravishda o'zgarsa, ekstensiv deyiladi. Masalan, massa, ichki energiya, entropiya va boshqalar.

### **3. Termodinamik muvozanat.**

Fizika materiyaning struktur ko'rinishlariga mos keluvchi harakatning (mexanik, issiqlik, elektromagnit) eng oddiy shakllari bilan bog'liq bo'lgan qonuniyatlarni o'rganadi. Ularning bir holatdan ikkinchi holatga o'tishida harakat shakllarining umumiy o'lchovi energiya deb yuritiladi. Atrof-muhit bilan issiqlik yoki boshqa kontaktda bo'lmagan, izolatsiyalangan sistema (masalan, devorlari o'tkazmaydigan idish ichidagi gaz) boshlang'ich holatidan qat'iy nazar, pirovardida shunday holatga o'tadi-ki, bu holat vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi. Bu fikrni umumiy holda quyidagicha ta'riflash mumkin. Agar sistema holatini aniqlovchi parametrlar vaqt o'tishi bilan o'zgarmasa, holat statsionar deyiladi. Bundan tashqari hamma parametrlar vaqt bo'yicha o'zgarmas bo'libgina qolmay, qandaydir tashqi manbalar ta'siri hisobiga hech qanday statsionar oqimlar bo'lmasa, u holda bunday sistema muvozanat holatda deyiladi

(yoki termodinamik muvozanat holatda deyiladi). Muvozanat holat sistemada yetarlicha katta vaqt oralig'ida yuzaga keladi. Sistemaning termodinamik muvozanat holatga o'tish vaqti relaksatsiya vaqti deyiladi. Mikroskopik manzara, ya'ni sistemani tashkil qilgan zarralar o'zining murakkab va tartibsiz harakatini davom ettiraveradi. Makroskopik holat sodda bo'lib, bir nechta parametrlar bilan aniqlanadi, masalan, temperatura, bosim, hajm.

*Termodinamik muvozanat holat vaqt o'tishi bilan yuzaga keladi va hech qachon o'z holicha ana shu muvozanat holatidan chiqa olmaydi.* Bu tasdiq termodinamikaning birinchi, yoki asosiy postulati bo'lib, termodinamikaning birinchi dastlabki fikri, yoki termodinamikaning umumiy boshlanishi deb yuritiladi.

#### **4. Termodinamik jarayon.**

Termodinamik sistemaning bir muvozanat holatidan ikkinchi muvozanat holatga o'tishi termodinamik jarayon deb yuritiladi. Ikki holat o'rtasida holatlar termodinamik bo'lishi shart emas. U yerda kechadigan jarayonlar o'ta murakkab va chigal bo'lishi mumkin. Agar jarayon juda sekin kechsa, oraliq holatlar termodinamik bo'ladi. Bu holda sistema oraliq holatlarda termodinamik muvozanatga o'tib ulguradi. Termodinamikada ikkita jarayon farq qilinadi:

Jarayon davomida sistema atrof-muhit bilan doimo termodinamik muvozanatda qoladigan ideal jarayonlar *kvazistatik* deyiladi. Jarayon bunday bo'lishi uchun u juda sekin kechishi kerak, ya'ni sistema parametrlarining o'zgarishi juda sekin bo'lishi kerak. Masalan, gazni kvazistatik siqish (shartli ravishda to'g'ri jarayon deb qabul qilamiz) uchun tashqi bosim ichki bosimdan juda kichik miqdorga katta bo'lishi kerak. Aksincha, gazni xuddi shunday yo'l bilan kengaytirishda (teskari yoki qaytish jarayoni) tashqi bosim ichki bosimdan juda kichik miqdorga kichik bo'lishi kerak. Yuqoridagi misolda to'g'ri va teskari jarayonlar tekislikda turli trayektoriyalar bo'yicha o'tadi. Chegaraviy holda, o'ta sekin jarayonda ikkala traektoriya bitta traektoriya bo'ylab turli yo'nalishlarda o'tadi va jarayon *qaytuvchi* bo'ladi.

*Nokvazistatik* (qaytmas) jarayon. Bunday holda to'g'ri va teskari jarayonlar turli ssenariy bo'yicha o'tadi va faza diagrammalari hech qachon ustma-ust tushmaydi.

## 5. Temperatura.

Tajribalar shuni ko'rsatadiki, termodinamik muvozanat issiqlik harakatining maxsus ko'rinishi sifatida ham yuzaga kelar ekan. Agar turli muvozanat holatdagi ikkita sistema kontaktga (xususan, issiqlik kontakti) keltirilsa, tashqi parametrlar qanday bo'lishidan qat'iy nazar, ular ilgari dagidek termodinamik muvozanat holatda qolishi yoki ulardagi muvozanat holatlar buzilishi mumkin.

Birinchi holni uchta sistema misolida ko'rib chiqamiz. Agar muvozanat holatdagi uchta sistemalardan birinchi va ikkinchisi har biri uchinchi sistema bilan muvozanatda bo'lsa, u holda birinchi va ikkinchi sistemalar ham o'zaro termodinamik muvozanat holatda bo'ladi. Sistemalarning bunday xossasi termodinamik muvozanatning tranzitivligi deyiladi.

Ikkinchi holda o'zaro kontaktga keltirilgan ikkita sistema ma'lum vaqt o'tgandan so'ng issiqlik (energiya) almashinishi natijasida ikkala sistema bir sistema bo'lib boshqa muvozanat holatga o'tadi. Demak, sistemaning termodinamik muvozanat holati faqat tashqi parametrlar  $\lambda$ , bilan aniqlanmasdan, sistemaning ichki holatini xarakterlovchi yana bitta kattalik  $T$  bilan aniqlanadi. Bu kattalik ichki parametr bo'lib, sistemaning muvozanat holatini xarakterlaydi. Bir biri bilan muvozanatdagi sistemalar issiqlik kontaktda, kontakt davomida va kontakt olingandan keyin ham  $T$  ning qiymati bir xil bo'lib qoladi.

Bu fikr shunday xulosaga olib keladiki, termodinamik muvozanat holatining tranzitivlik xossasi turli xil sistemalarni to'g'ridan-to'g'ri, o'zaro issiqlik kontaktinga keltirmasdan turib uchinchi sistema (jism) yordamida  $T$  ning qiymatini solishtirish imkonini beradi. Muvozanatdagi sistemaning barcha nuqtalarida bir xil bo'lgan, zarrachalar soniga bog'liq bo'lmagan, energiya va tashqi parametrlarga bog'liq bo'lgan bu kattalik sistemaning ichki harakat holatini aniqlaydi va *temperatura* deyiladi. Temperatura intensiv parametr bo'lganligi uchun sistemadagi issiqlik harakatining o'lchovi hisoblanadi.

Muvozanatdagi sistema holatining maxsus funksiyasi sifatida *temperaturaning mavjudligi to'g'risidagi fikr termodinamikaning ikkinchi dastlabki fikri yoki «nolinchi boshlanishi»* deb yuritiladi.

Temperatura termodinamik muvozanatdagi sistemalar holatini belgilovchi termodinamik funksiyadir. Muvozanatda



bo'lmagan sistemalar uchun temperatura tushunchasini kiritish ma'noga ega emas. Bunday sistemalarda energiya intensiv almashinib turadi va sistemaning energiyasi uning bo'laklari energiyalarining yig'indisiga teng bo'lmaydi, chunki o'zaro ta'sir energiyasi katta bo'ladi va energiyaning oddiy additivlik xossasi bajarilmaydi.

*Muvozanatdagi sistemaning hamma ichki parametrlari – tashqi parametrlar va temperaturaning funksiyasidir (termodinamikaning ikkinchi postulati).*

Sistema energiyasi uning ichki parametridir, shuning uchun energiya, tashqi parametr va temperaturaning funksiyasidir. Bu funksiyadan temperaturani energiya va tashqi parametr orqali ifodalab, termodinamikaning ikkinchi dastlabki fikrini quyidagicha ta'riflash mumkin: *termodinamik muvozanatda sistemaning hamma ichki parametrlari – tashqi parametrlar va energiyaning funksiyasidir.*

Termodinamikaning ikkinchi dastlabki fikri jism temperaturasining o'zgarishini uning birorta ichki parametrining o'zgarishi bo'yicha aniqlash imkonini beradi. Temperaturani o'lchovchi turli xil termometrlarning qurilishi shunga asoslangan.

Amalda temperaturani aniqlashda modda bilan bog'langan qandaydir aniq shkaladan foydalanishga to'g'ri keladi. Termometrik parametr sifatida odatda shu modda hajmidan foydalaniladi. Odatda temperatura – *Selsiy* shkalasi bo'yicha o'lchanadi. Temperatura Kelvin shkalasi bo'yicha ham o'lchanadi. Bu ikki shkala orasida quyidagi bog'lanish mavjud:

$$T = \frac{1}{\alpha} + t = 273,15 + t,$$

bu yerda  $t$  va  $T$  – mos ravishda Selsiy va Kelvin shkalalari bo'yicha olingan temperatura;  $\alpha$  – hajmiy kengayish koefitsiyenti.

Temperatura tushunchasining mexanik sistemalarga mutlaqo aloqasi yo'q. Shunga o'xshash statistik fizikada, xususan termodinamikada, olinadigan natijalarni va kiritiladigan kataliklarni to'g'ridan-to'g'ri mexanik sistemalarga tatbiq qilib bo'lmaydi. Chunki, termodinamika mexanik harakatdan tubdan farq qiladigan harakatning maxsus ko'rinishi – issiqlik harakati bilan ish ko'radi.

## 6. Termodinamik sistema ichki energiyasi.

Termodinamik sistemani tashkil etuvchi ko'p sonli zarralarning uzluksiz doimiy harakat, o'zaro va tashqi maydon bilan ta'sirlashish energiyasi birgalikda sistemaning energiyasi deyiladi. To'liq energiya tashqi va ichkilarga ajraladi. Sistemaning bir butun holdagi harakat kinetik energiyasi va uning tashqi maydondagi potensial energiyasi tashqi energiya deyiladi. Energiyaning qolgan qismi ichki energiyani tashkil qiladi. Termodinamikada sistemaning tashqi energiyasi o'rganilmaydi. Shuning uchun sistemaning energiyasi deganda odatda ichki energiya tushuniladi. Termodinamikaning ikkinchi boshlanishiga asosan ichki energiya temperatura va tashqi parametrlarga bog'liq bo'ladi. Temperatura uzluksiz oshishi bilan u ham uzluksiz oshadi va limitda cheksizga intiladi.<sup>2</sup>

Statistik fizikada ichki energiya bir necha qismdan iborat bo'ladi, ya'ni molekullarning ilgarilanma, aylanma va tebranma harakat kinetik, ularning o'zaro ta'sir va molekula yoki atomlarning tashqi maydondagi potensial energiyalardan tashkil topgan.

$N$  ta zarradan tashkil topgan real gaz ichki energiyasini umumiy holda quyidagicha yozish mumkin:

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} u(|r_i - r_j|) + \sum_{i=1}^N u(r_i), \quad (3.1)$$

bu yerda  $p_i$  -  $i$ -zarra impulsi,  $r_i$  -  $i$  zarraning koordinatasi. Birinchi had zarralarning kinetik energiyalarining yig'indisi;  $u(|r_i - r_j|)$  -  $i$ - va  $j$ -zarralarning o'zaro ta'sir energiyasi;  $u(r_i)$  -  $i$ -zarraning tashqi maydondagi potensial energiya.

Ichki energiya sistemaning ichki parametri bo'lib hisoblanadi. Ichki energiya muvozanat holatda tashqi parametrlar  $\lambda_i$  va temperatura  $T$  ga bog'liq bo'ladi:

$$E = E(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, T). \quad (3.2)$$

Bu ifoda holatning kalorik tenglamasi deb yuritiladi. Ichki energiyaning oshkora ko'rinishini II bobda olingan: «makroskopik sistema ichki energiyasi statistik metod asosida hisoblangan sistema o'rtacha energiyasi ( $\bar{\epsilon}$ ) ga teng, ya'ni  $E = \bar{\epsilon}$ » degan muhim qoidaga asoslanib topish mumkin.

---

<sup>2</sup> Bu qoidaga bo'ysunmaydigan sistemalar ham mavjud ekan. Masalan, kristall panjara tugunlaridagi atom yadrolarining spin-spin ta'sir energiyasi temperatura oshishi bilan chekli qiymatga intiladi.

## 7. Energiyaning saqlanish va aylanish qonuni.

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, termodinamikada energiya, xususan ichki energiya harakat shakllarining umumiy o'lchovi ekan. Harakatning yo'qolmasligi va uning bir shakldan boshqa shaklga o'tishi energiyaning saqlanish va aylanish qonuni deyiladi. Energiyaning saqlanish va aylanish qonuni: Gess (1840- y.), Joul (1840- y.), Mayer (1842- y.) va Gelmgols (1847- y.) tomonidan shakllantirilgan. Energiyaning saqlanish va aylanish qonuni miqdoriy va sifat ko'rinishlariga ega. Energiyaning saqlanish va aylanish qonuni issiqlik jarayonlari uchun tadbiiq qilishda tajribalarda olingan miqdoriy natijalar termodinamika birinchi qonunining matematik ifodasini shakllanishiga olib kelgan.

## 8. Termodinamik ish. Issiqlik miqdori.

Termodinamikada «ish» tushunchasi muhim rol o'ynaydi. Chunki, sistemaning holati o'zgargandagina termodinamik ish bajariladi. Sistema tashqi jismlar bilan o'zaro ta'sirda bo'lgandagina, uning holati o'zgaradi va ishni miqdoriy tomondan aniqlash mumkin bo'ladi. Haqiqatan ham, sistema noldan farqli ish bajarishi uchun, u tashqi jismlarni «siljitishi» kerak. Bunda o'zining holati albatta o'zgaradi.

Tajribalar shuni ko'rsatadiki, sistema va uni o'rab olgan muhit o'zaro ta'sirlashishi natijasida energiya almashinishi yuz beradi. Energiya almashinishi ikki xil yo'l bilan amalga oshishi mumkin: tashqi parametrlari o'zgarishi bilan va bu parametrlarning o'zgarishisiz.

Tashqi parametrlarning o'zgarishi bilan bog'liq bo'lgan energiya almashinishining birinchi usuli ish deyiladi. Tashqi parametrlarning o'zgarishisiz, ammo yangi termodinamik parametr – *entropiyaning o'zgarishi bilan bog'liq bo'lgan energiya almashinishi issiqlik almashinishi* deyiladi.

Ish energiya uzatishning makroskopik tartiblangan shakli bo'lsa, issiqlik almashinish jarayoni esa, sistema zarralari tashqi muhit zarralari bilan o'zaro ta'sirlashish bilan bog'liq bo'lib, negizida mikroskopik jarayon yotadi. Tajribalar yana shuni ko'rsatadiki, sistema holati o'zgargandagina, u aniq energiya miqdorini oladi yoki boshqa biror sistemaga beradi. Agar sistema holati o'zgarmasa energiya qabul qilish yoki uzatish ham bo'lmaydi.

Bir jismdan ikkinchi jismga energiyaning birinchi yo'l bilan uzatilishi, birinchi jismning ikkinchi biror jism ustida «ish» bajarilishi deb yuritiladi. Sistema holati cheksiz kichik o'zgargandagi bajarilgan ish

$$\delta A = \sum_i f_i d\lambda_i \quad (3.3)$$

formula yordamida topiladi. Bu yerda  $\delta A$  – cheksiz kichik bajarilgan ish,  $f_i$  – sistemaga ta'sir etuvchi umumlashgan kuch,  $\lambda_i$  – umumlashgan «koordinata» (parametr).

Termodinamikada bajarilgan ishning ishorasi quyidagicha qabul qilingan: agar sistema tashqi kuchlarga qarshi ish bajarsa – musbat, agar sistema ustida tashqi kuchlar ish bajarsa – manfiy, yoki sistema kengayish jarayonida bajarilgan ishni ifodalovchi yuza (tekislikda) jarayon yo'nalishini ifodalovchi egri chiziqning o'ng tomonida yotsa – musbat, agar chap tomonida yotsa – manfiy deb qabul qilingan. Bu fikrlardan shu narsa kelib chiqadiki, sistema bir holatdan ikkinchi holatga o'tganda bajarilgan kengayish va siqilish ishining ishorasi o'tish yo'liga qarab, o'zgarib turar ekan. Shunday qilib, bajarilgan ish o'tish yo'liga bog'liq ekan. Bu esa ish jarayon funksiyasi bo'lishini ko'rsatadi. Shuning uchun bajarilgan ish  $\delta A$  ko'rinishda ya'ni, to'liqmas differensial ko'rinishda yoziladi. Shunga o'xshash issiqlik ham hech qanday kattalikning to'liq differensial bo'la olmaydi. Lekin ularning yig'indisi to'liq differensial bo'ladi. Bu masalaga keyinroq qaytamiz.

Ishning ishorasini aniqlashga doir misollar keltiramiz.

Agar oddiy sistema kengayish ishi bajarayotgan bo'lsa  $\delta A = p dV$ , agar siqilish ishi bajarilayotgan bo'lsa  $\delta A = -p dV$  ko'rinishda bo'ladi; bu yerda  $p$  – yuza birligida ta'sir etuvchi kuch bo'lib, bosim deyiladi. Agar tashqi elektr maydon ta'siri ostida izotrop dielektrik ustida qutblash ishi bajarilayotgan bo'lsa,  $\delta A = -\mathbf{E} d\mathbf{P}$  bo'ladi; bu yerda  $\mathbf{E}$  – tashqi elektr maydon kuchlanganligi;  $\mathbf{P}$  – qutblanish vektori. Agar tashqi magnit maydon magnitlash ishi bajarilayotgan bo'lsa,  $\delta A = -\mathbf{H} d\mathbf{M}$  bo'ladi. Bu yerda  $\mathbf{H}$  – magnit maydon kuchlanganligi,  $\mathbf{M}$  – magnitlanish vektori. Yana shunga o'xshash qator misollar keltirish mumkin.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>  $\delta A = -\mathbf{E} d\mathbf{P}$  va  $\delta A = -\mathbf{H} d\mathbf{M}$ , bu ifodalar tashqi elektr va magnit maydonlarning birlik hajmda bajargan ishiga teng. To'liq ishni topish uchun bu ifodalarni  $V$  ga ko'paytirish kerak, lekin bajarilgan ish ifodalari «tashqi kuch ko'paytiruv ichki parametr differensial» shaklni saqlash uchun bu ifodalar hajmga ko'paytirilgan deb qabul qilamiz.

## 9. Holat funksiyasi.

O'zaro bog'lanmagan makroskopik parametrlar to'plami sistema holatini belgilaydi. Berilgan vaqtda sistema holatini to'la holda aniqlovchi va sistemaning oldingi tarixiga (holatlari to'plamiga) bog'liq bo'lmagan kattaliklar holat funksiyalari deyiladi.

### 3.3. Holatning termik va kalorik tenglamalari

Termodinamikaning ikkinchi dastlabki fikridan ichki parametrlar – tashqi parametrlar va temperaturaning funksiyasi bo'lishidan sistema holatining termik va kalorik (holat tenglamalari) tenglamalari mavjudligi kelib chiqadi.<sup>4</sup> Yuqoridagiga asosan birorta ichki parametr  $b_k$  uchun kalorik tenglama (ichki parametr, temperatura va tashqi parametrlar  $\lambda_i$  ga bog'lovchi tenglama) quyidagicha yoziladi:

$$b_k = f_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n, T). \quad (3.4)$$

Agar ichki parametr ichki energiya ( $b_k = E$ ) bo'lsa, u holda (3.4) energiya tenglamasiga yoki holatning kalorik tenglamasiga aylanadi:

$$E = E(\lambda_1, \dots, \lambda_n, T). \quad (3.5)$$

Shunday nomlanishiga sabab, bu tenglama yordamida kaloriyada ifodalanuvchi issiqlik sig'imi va boshqa shunga o'xshagan kattaliklarni topish mumkin.

Agar ichki parametr  $b_k$  tashqi parametr  $\lambda_i$  ga qo'shma bo'lgan umumlashgan kuch  $f_i$  bo'lsa, u holda tenglama (3.4) holatning termik tenglamsiga aylanadi:

$$f_i = f_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n, T); \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.5)$$

Bunday nom bilan yuritilishiga sabab, (3.5) yordamida temperaturani hisoblash mumkin.

Holatning termik va kalorik tenglamalarning umumiy soni sistema holatini harakterlovchi bog'lanmagan parametrlar soniga teng. Bu tenglamalar xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan bog'langan bo'ladi.

---

<sup>4</sup> Sistemaning holatini aniqlovchi parametrlar alohida ta'kidlanmasa, muvozanat holatga tegishli bo'ladi.

Agar holatning termik va kalorik tenglamalari ma'lum bo'lsa, u holda termodinamikaning boshlanishlari yordamida sistema-ning hamma termodinamik xossalarini aniqlash mumkin. Termodinamikaning boshlanishlariga asosanib, holat tenglamalarini chiqarish mumkin emas. Ular kirish qismida eslatilganligi kabi tajribadan tiklanadi yoki statistik fizika metodi yordamida topiladi. Bu hol esa termodinamika va statistik fizika bir-birini to'ldirishini ta'kidlaydi.

Muvozanatdagi sistemalarning xususiyatini o'rganishda termodinamika eng avval oddiy sistemalarning xossalarini o'rganadi. Oddiy sistema deganda ikkita parametr bilan aniqlanuvchi bir fazali sistemalarga aytiladi.

Oddiy sistema holatining termik va kalorik tenglamalari mos ravishda quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{aligned} f &= f(\lambda, T), \\ E &= E(\lambda, T). \end{aligned}$$

Agar  $f = p$  bosim,  $\lambda = V$  sistema hajmi bo'lsa, sistemaning holat tenglamalari

$$p = p(V, T), \quad E = E(V, T) \quad (3.6)$$

ko'rinishni oladi.

Ideal gaz uchun holatning termik tenglamasi Mendeleyev-Klapeyron tenglamasi deyiladi. Xususan:  $pV = RT$  - bir mol gaz uchun,  $pV = \nu RT$  -  $\nu$  mol gaz uchun. Bu yerda  $\nu = m/\mu$ ,  $m$  - gaz massasi,  $\mu$  - molar massa.

O'zgarmas temperaturada ideal gazning ichki energiyasi uning hajmiga bog'liq emasligidan (Joul-Tomson effekti 3.24- bandga qarang), ya'ni

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0$$

tenglamadan foydalanib, ideal gaz kalorik tenglamasini quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T dV = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT$$

$$E = \int C_V dT + E_0.$$

Tajriba ko'rsatishicha, bir atomli ideal gazning issiqlik sig'imi temperaturaga bog'liq emas, shuning uchun uning kalorik tenglamasi  $E = C_V T + E_0$  bo'ladi. Sistemaning ichki energiyasi umumiy holda quyidagicha yoziladi:

$$E = \int C_V dT + \int \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T dV + E_0. \quad (3.7)$$

Ushbu formula yordamida har qanday sistema ichki energiyasini topish mumkin.

Real gazlar uchun nazariy va empirik holda holatning 150 dan oshiq termik tenglamalari olingan. Masalan, Van-der-Vals tenglamasi real gazlarning halotini aniqlovchi eng sodda tenglamadir:

$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT. \quad (3.8)$$

Bu tenglama ideal gaz holat tenglamasidan ikki jihatdan farq qiladi. Birinchidan, gazni tashkil qiluvchi molekular hajmi chekli ekanligini hisobga olib hajmga  $b = 4v_0 N$  ( $v_0 = 4\pi r_0^3 / 3$  - bitta molekulaning hajmi) ikkinchidan, ichki bosimga molekularning o'zaro tortishishi bilan bog'liq  $a/V^2$  tuzatmalar kiritilgan. Van-der-Vaals tenglamasi sodda bo'lishiga qaramasdan real gazlarning xossalari katta aniqlikda to'g'ri aks ettiradi. Ideal gaz tenglamasidagi real gazlar uchun tuzatma kiritishni birinchi marta M.V. Lomonosov (issiqlikning tabiati to'g'risidagi molekular-kinetik tasavvurga asoslanib) taklif qilgan.

Real gaz tenglamalaridan ba'zi birlarini keltiramiz:

$$p(V - b) = RT \exp\left(-\frac{a}{RTV}\right) - \text{Diterichening I tenglamasi};$$

$$\left( p + \frac{a}{V^{5/3}} \right) (V - b) = RT - \text{Diterichening II tenglamasi};$$

$$\left( p + \frac{a'}{V^2 T} \right) (V - b) = RT - \text{Bertlo tenglamasi};$$

$$pV = RT \left( 1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + \frac{D}{V^3} + \dots \right) - \text{holatning virial shakldagi tenglamasi.}$$

Bu yerda  $B, C, D, \dots$  - temperatura funksiyasi bo'lib, ular virial koeffitsiyentlar deb yuritiladi. Birinchi had ideal gazga

mos keladi, qaysiki molekulalar orasida o'zaro ta'sir yo'qdir, ikkinchi had esa molekulalar orasidagi juft to'qnashishlarni hisobga oladi va hokazo.

Real gazlarda molekulalar orasidagi o'zaro ta'sir kuch yaqindan ta'sir xarakterdaligini hisobga olib, turli xil metodlar yordamida Mayer va Bogolyubov tomonidan holat uchun quyidagi tenglama olingan:

$$pV = RT \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{V^n} \right), \quad (3.9)$$

bu yerda virial koeffitsiyentlar  $B_n$  gaz zarralari orasidagi o'zaro ta'sir potentsiali orqali ifodalanadi. Masalan, agar molekulalar orasidagi potentsial  $U$  faqat molekulalar orasidagi masofa  $r$  ning funksiyasi bo'lsa, u holda  $N$  ta zarradan tashkil topgan gazning ikkinchi virial koeffitsiyenti

$$B(T) = -2\pi N \int_0^{\infty} \left[ \exp\left(-\frac{U(r)}{kT}\right) - 1 \right] r^2 dr. \quad (3.10)$$

$B(T)$  ni eksperimentda o'lchab, o'zaro ta'sir potentsial funksiyasining parametrini aniqlash mumkin.

Sistema holat tenglamalaridan uchta termik koeffitsiyentlar (kengayish, siqilish va elastiklik) orasida quyidagi bog'lanishni hosil qilish mumkin:

$$\alpha = p_0 \beta \gamma, \quad (3.11)$$

bu yerda  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  - mos ravishda kengayish, siqilish va elastiklik koeffitsiyentlari bo'lib, quyidagicha aniqlanadi:

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad \beta = -\frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T, \quad \gamma = \frac{1}{p_0} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V,$$

$V_0$  va  $p_0$  -  $0^\circ \text{C}$  temperaturadagi sistema hajmi va bosimi.

### 3.4. Termodinamikaning birinchi qonuni

Termodinamika birinchi qonunining yuzaga kelishi tarixiy jihatdan, biror ko'rinishdagi energiyani sarflamasdan va tashqaridan issiqlik miqdori olmasdan davriy ish bajara olish qobiliyatiga ega bo'lgan mashinani qurish yo'lidagi urinishlarning oqibatsiz bo'lib chiqqanligi bilan bog'langandir.



Termodinamikaning birinchi qonuni energiyaning saqlanish va aylanish qonunining xususiy holi bo'lib, issiqlik jarayonlari uchun tatbiq qilinadi.

Birinchi qonunning miqdoriy ifodasini olishni ko'rib chiqamiz. Ikkita termodinamik sistema berilgan bo'lsin deb faraz qilamiz. Ularni bir-biriga kontaktga keltirganimizda birinchi sistemadan ikkinchi sistemaga  $\delta Q$  issiqlik miqdori o'tsin. Natijada ikkinchi sistema ichki energiyasi oshadi va sistema kengayadi. Bu hol uchun energiyaning saqlanish va aylanish qonuniga asosan

$$\delta Q = dE + \delta A, \quad (3.12)$$

bu yerda  $dE$  – ichki energiyaning o'zgarishi;  $\delta A$  – kengayishda tashqi kuchlarga qarshi bajarilgan ish. (3.12) tenglik termodinamika birinchi qonunining miqdoriy ifodasi deyiladi.  $\delta A$  to'liq differensial emas. Ichki energiya sistema holatini xarakterlaydi va holat funksiyasi bo'lib hisoblanadi, shuning uchun  $dE$  to'liq differensial bo'ladi. Ichki energiyaning holat funksiyasi ekanligini ikki yo'l bilan, ya'ni:

- 1) energiyaning saqlanish va aylanish qonuniga asosan;
- 2) doiraviy jarayonlarni qarash natijasida isbotlash mumkin.

Doiraviy jarayon oxirida sistema o'zining boshlang'ich holatiga qaytib keladi. Demak, hamma issiqlik va bajarilgan ishlar yig'indisi nolga teng bo'ladi. Natijada  $\oint dE = 0$  bo'ladi. Bundan ichki energiya sistema holatini bir qiymatli funksiyasi ekanligi kelib chiqadi.  $\delta A$  – to'liq differensial bo'lmaganligi va  $dE$  – to'liq differensial bo'lganligi sababli, issiqlik miqdor  $\delta Q$  – to'liqmas differensial bo'lib, bajarilgan ish kabi jarayon funksiyasi bo'ladi.

Termodinamika birinchi qonunining miqdoriy ifodasi (3.12) bajarilgan ishning turiga qarab umumiy holda

$$dE = \delta Q + \delta A \quad (3.13)$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda  $\delta A$  noldan katta yoki kichik bo'lishi mumkin.

Shunday qilib, termodinamikaning birinchi qonuni: *«bir davr davomida miqdor jihatdan tashqaridan olingan energiya miqdoriga qaraganda, ko'proq miqdorda ish bajara oladigan davriy harakatlanuvchi mashinani qurish mumkin emasligiga olib keladi»*.

Qaytuvchi jarayon uchun (3.12) ifoda

$$Q = \Delta E + A \quad (3.14)$$

ko'rinishni oladi. (3.12) ifodani qaytmas jarayonlar uchun ham tatbiq etish mumkin.

Agarda termodinamik sistema murakkab bo'lsa, ya'ni bir necha kuchlar ta'sir etayotgan bo'lsa, u holda termodinamika birinchi qonunining miqdoriy ifodasi

$$\delta Q = dE + \sum_i f_i d\lambda_i \quad (3.15)$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda  $f_i$  - umumlashgan kuchlar,  $\lambda_i$  - umumlashgan parametr («ko'chish»).

Agar sistema ustida bir vaqtning o'zida mexanik va nomexanik kuchlar ish bajarayotgan bo'lsa, u holda (3.15) ifoda quyidagicha yoziladi:

$$\delta Q = dE + \delta A_{\text{mex}} + \delta A_{\text{nomex}}, \quad (3.16)$$

bu yerda  $\delta A_{\text{mex}}$  - mexanik,  $\delta A_{\text{nomex}}$  - nomexanik kuchlarning bajargan ishi. Agar sistema tashqi kuchlarga qarshi kengayish ishi bajarayotgan bo'lsa,  $\delta A = p dV$  va termodinamikaning birinchi qonuni  $\delta Q = dE + p dV$  ko'rinishda yoziladi.

Sodda misollar keltiramiz. Agar bir vaqtning o'zida kengayish va tashqi elektr maydoni ta'siri ostida izotrop dielektrikni qutblash ishi bajarilayotgan bo'lsa,

$$\delta A_{\text{nomex}} = -EdP, \Rightarrow \delta Q = dE + p dV - EdP.$$

Agar tashqi magnit maydoni ta'siri ostida magnetikni magnitlash ishi bajarilayotgan bo'lsa,

$$\delta A_{\text{nomex}} = -HdM, \Rightarrow \delta Q = dE + p dV - HdM$$

bo'ladi. Bu yerda  $\mathbf{E}$  va  $\mathbf{H}$  tashqi elektr va magnit maydon kuchlanganliklari,  $\mathbf{P}$  va  $\mathbf{M}$  esa qutblanish va magnitlanish vektorlari.

Termodinamika birinchi qonuni miqdoriy ifodasi (3.15)ni sof mexanika qonunlari asosida ham keltirib chiqarish mumkin. Zarralar sistemasini mexanika qonunlari nuqtai nazaridan ko'rib chiqamiz. Buning uchun Gamilton tenglamalaridan foydalanamiz. Bu formalizimga asosan sistemaning harakat qonunlari

umumlashgan koordinatalar  $q_i$  va umumlashgan impulslar  $p_i$  bilan aniqlanadi. Bundan tashqari, sistemani o'rganan muhit zarralarining umumlashgan koordinatalari  $q'_i$ , umumlashgan impulsarlari  $p'_i$  va qandaydir qo'shimcha tashqi parametrlar  $\lambda_k$  sistemaning holatini belgiladaydi. Sistemaning energiyasi  $E$  (Gamilton funksiyasi  $H$ ) yuqorida sanab o'tilgan kattaliklarning hammasining funksiyasi bo'ladi, ya'ni  $H = H(q, p, \lambda, q', p')$ . Bu yerda sistema uchun Gamilton funksiyasini yozish mumkin deb faraz qilinmoqda. Sistemaning mexanik holatini Gamilton tenglamalari

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (3.17)$$

aniqlaydi. Gamilton funksiyasidan vaqt bo'yicha to'liq hosila olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \\ + \sum \frac{\partial H}{\partial \lambda_k} \dot{\lambda}_k + \sum \left( \frac{\partial H}{\partial q'_i} \dot{q}'_i + \frac{\partial H}{\partial p'_i} \dot{p}'_i \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Bu yerda birinchi had Gamilton funksiyasi vaqtga oshkora bog'liq bo'lmaganligi uchun, ikkinchi had esa, (3.17) ga asosan nolga tengligini hisobga olib energiyaning to'liq differensialini yozamiz:

$$dE = \sum \frac{\partial H}{\partial \lambda_k} d\lambda_k + \sum \left( \frac{\partial H}{\partial q'_i} dq'_i + \frac{\partial H}{\partial p'_i} dp'_i \right). \quad (3.19)$$

Bu ifodani katta vaqt oralig'ida o'rtachalaymiz:

$$dE = \sum \frac{\overline{\partial H}}{\partial \lambda_k} d\lambda_k + \sum \left( \frac{\overline{\partial H}}{\partial q'_i} dq'_i + \frac{\overline{\partial H}}{\partial p'_i} dp'_i \right). \quad (3.20)$$

Ushbu natijani termodinamikaning birinchi qonuni

$$dE = -\sum \Lambda_k d\lambda_k + \delta Q \quad (3.21)$$

bilan taqqoslab, (3.20) ifodadagi birinchi had tashqi parametrlarning o'zgarishi bilan bog'liq bo'lganligi uchun tashqi kuch-

larga qarshi bajarilgan ishga, ikkinchi had esa sistemaga berilayotgan issiqlikka teng ekanini ko'ramiz. Yana shuni ta'kidlash lozimki, (3.20) ning ikkinchi hadi to'liq differensial emas.

### 3.5. Termodinamika birinchi qonunining suyuqliklarning statsionar oqimiga tatbig'i

Statsionar harakatdagi suyuqlik uchun termodinamikaning birinchi qonunini tatbiq qilamiz. Statsionar oqimda tok chiziq-lari vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi. Suyuqlik harakatda bo'lganligi uchun tezligi  $\mathbf{v} \equiv \{v_x, v_y, v_z\}$ , zichligi  $\rho$  va bosimi  $p$  koordinataning funksiyasi bo'ladi. Shuning uchun u bir butun holda termodinamik muvozanatda bo'lmaydi. Ammo uning yetarli kichik elementi termodinamik muvozanatda bo'ladi, ya'ni ko'rilayotgan element holatining o'zgarishini kvazistatik deb qarash mumkin. Bu holda bosim holat tenglamasi yordamida element zichligi va temperaturasi  $T$  orqali to'liq aniqlanadi.

Suyuqlikning tezligi, zichligi va temperatura Nyuton harakat tenglamasi, uzluksizlik tenglamasi va energiya saqlanish qonuni, ya'ni termodinamikaning birinchi boshlanishi orqali aniqlanadi:

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div } \rho\mathbf{v} = 0,$$

$$\delta Q = dE + \delta A.$$

Ushbu tenglamalar sistemasi suyuqlik harakatining umumiy holi uchun yozilgan. Bu yerda fazoning har bir nuqtasida suyuqlikning holati vaqt o'tishi bilan o'zgarimas bo'lgan statsionar oqim holini ko'rib chiqamiz. Suyuqlikning atrof-muhit bilan issiqlik almashishini hisobga olmaymiz, ya'ni jarayon adiabatik bo'lsin ( $\delta Q = 0$ ). Bu holda jarayon qaytuvchi bo'lmaydi. Adiabatik jarayon uchun termodinamikaning birinchi qonuni quyidagi ko'rishnida yoziladi:

$$dE + \delta A = 0, \quad (3.22)$$

ya'ni ichki energiya faqat bajarilgan ish hisobiga o'zgaradi.<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Xususan, adiabatik jarayonlarda ichki energiya bilan bir qatorda ish ham to'liq differensial bo'ladi.

Oqim yo'nalishida ixtiyoriy tanlangan nay orqali suyuqlik oqimini kuzataylik (3.1- rasm). Harakat statsionar bo'lganligi uchun nayning ixtiyoriy ko'ndalang kesimidan vaqt birligida bir xil miqdorda massa oqib o'tadi.

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 \text{ yoki } \frac{v_1 S_1}{V_{01}} = \frac{v_2 S_2}{V_{01}}, \quad (3.23)$$

bu yerda  $S_1$  va  $S_2$  - nayning ixtiyoriy ikkita ko'ndalang kesim yuzasi,  $\rho = m/V = 1/V_0$ . Yuqoridagi natija uzluksizlik tenglamasi - massa saqlanish qonunidan bevosita kelib chiqadi.

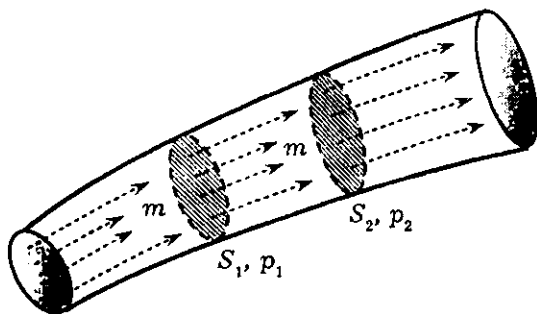
Massasi  $m$  bo'lgan suyuqlikning energiyasini aniqlaylik. Energiya ikki qismdan, ichki energiya va harakat bilan bog'liq bo'lgan kinetik energiyalardan iborat bo'ladi:

$$\epsilon = E(V, T) + \frac{mv^2}{2}, \quad (3.24)$$

bu yerda  $E(V, T)$  - ichki energiya;  $V$  - hajm;  $m$  - gaz yoki suyuqlikning shu hajmdagi massasi.

Harakatdagi suyuqlik tomonidan bajarilgan elementar  $\delta A$  ish ni topamiz. Tashqi kuchlar yo'q bo'lganda ish  $m$  massani o'rab turgan sirtidagi bosim kuchlarining bajargan ishiga teng bo'ladi. Nayning yon sirtidagi bosim kuchi ish bajarmaydi. Demak, bajarilgan ish  $S_1$  va  $S_2$  ko'ndalang kesimlardagi bosimlarning bajargan ishlarining ayirmasidan iborat bo'ladi.  $S_1$  va  $S_2$  kesimlar bir biriga cheksiz yaqin bo'lsa,  $dt$  vaqtda bajarilgan ish quyidagiga teng bo'ladi:

$$\delta A = (p_2 S_2 v_2 - p_1 S_1 v_1) dt = \frac{\partial(pSv)}{\partial t} dldt. \quad (3.25)$$



3.1- rasm.

Ko'chish ham cheksiz kichik bo'lganligi uchun ayirmani differensial bilan almashtirish mumkin:

$$p_2 S_2 v_2 - p_1 S_1 v_1 - d(pSv) - \frac{\partial(pSv)}{\partial l} dl, \quad (3.26)$$

bu yerda  $dl$  oqim chizig'i elementi yoki  $m$  massa egallagan kesma uzunligi. Oqim statsionar bo'lganligi uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\frac{\partial(pSv)}{\partial l} = \frac{1}{v} \cdot \frac{d(pSv)}{dt}. \quad (3.27)$$

Shunday qilib, (3.25) va (3.26) ifodalarga asosan bajarilgan ish uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\delta A = \frac{dldt}{v} \cdot \frac{d(pSv)}{dt}. \quad (3.28)$$

(3.28) va (3.24) ifodalarni energiya saqlanish qonuni (3.22)ga qo'yamiz:

$$\frac{d}{dt} \left( E + \frac{mv^2}{2} \right) + \frac{dl}{v} \cdot \frac{d(pSv)}{dt} = 0. \quad (3.29)$$

Bu yerda massa  $m = \rho Sdl$  ga tengligini hisobga olib oxirgi ifodani qayta yozamiz:

$$d \left( E + \frac{mv^2}{2} \right) + \frac{m}{\rho Sv} d(pSv) = 0. \quad (3.30)$$

Tenglik (3.23)ga asosan harakat davomida  $\rho Sv = \text{const}$  bo'lganligi uchun quyidagini yozish mumkin:

$$d(pSv) = d \left( p v \rho \frac{S}{\rho} \right) = \rho Sv d \left( \frac{p}{\rho} \right) \quad (3.31)$$

va nihoyat energiya saqlanish qonuni quyidagi ko'rinishni oladi:

$$d \left( E + \frac{mv^2}{2} + pV \right) = 0, \quad (3.32)$$

yoki

$$md \left( \chi_0 + \frac{v^2}{2} \right) = 0, \quad (3.33)$$

bu yerda  $\chi_0$  – solishtirma entalpiya bo'lib, quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$\chi_0 = \frac{E + pV}{m}.$$

Agar oqim sekin bo'lsa, (3.33)da  $v^2 \ll 2\chi_0$  shart o'rinli bo'ladi va  $d\chi_0 = 0$ . Demak, harakat davomida solishtirma entalpiya o'zgarmas bo'lar ekan. Shunday qilib, oqim statsionar bo'lishini ta'minlash uchun solishtirma entalpiyani o'zgarmas ushlab kerak ekan yoki statsionar oqimlarda solishtirma entalpiya o'zgarmas bo'ladi.

Yuqorida olingan natijani olishda uzluksiz muhitning zichligiga hech qanday shart qo'yilmaganligi sababli uni gazlar uchun ham tatbiq qilish mumkin.

Statsionar oqimlarda entalpiyaning o'zgarishligi to'g'risidagi nazariy natija Joul–Tomson issiqlik effektini, ya'ni siyrak gazlarda energiya hajmga bog'liq bo'lmasligini tajribada tekshirishda katta ahamiyat kasb etgan. Effektni tajribada (1852–1862- yillar) kuzatish amalda og'ir bo'lgan, chunki gazning issiqlik sig'imi idishning issiqlik sig'imidan juda kichik bo'lganligi sababli tajriba natijalari katta noaniqlikka ega bo'lgan va to'g'ri xulosa chiqarib bo'lmas edi. Bu holdan qutilish uchun tajribada qaytmas adiabatik jarayondan foydalanilgan. Oqimning statsionar va tezlikni kichik bo'lishini ta'minlash uchun esa idishlarni bir-biriga ulashda g'ovak tiqindan foydalanilgan.

### 3.6. Kvazistatik jarayonda sistema ichki energiyasining o'zgarishi

Bu mavzuda, o'zini o'rab olgan muhit (jismlar) bilan o'zaro ta'sirlashuvchi, ya'ni to'g'ridan-to'g'ri kontaktga keltirilganda u bilan energiya almashinuvchi sistema ichki energiyasining o'zgarishini umumiyroq holda ko'rib chiqamiz.

Bu yerda sistemada statistik muvozanat buzilmaydigan jarayonlarni qarash bilan chegaralanamiz. Statistik muvozanat-

da bo'lgan sistemaning holati, bosimi, hajmi, temperaturasi va boshqa parametrlari tashqi sharoitga bog'liq bo'ladi. Jism yotgan tashqi sharoit esa jismga ta'sir etuvchi tashqi maydonlar bilan aniqlanib, tashqi parametrlar to'plami  $\lambda$  orqali xarakterlanadi.

Sistema kvazistatik jarayon davomida muvozanat holatda bo'lganligi uchun ehtimolliklar taqsimoti Gibbsning kichik kanonik taqsimoti bilan aniqlanadi. Bu holda sistema o'rtacha energiyasining to'la o'zgarishi uchun quyidagini yozish mumkin:

$$dE = d\bar{\epsilon} = d\left(\sum_i \epsilon_i W_i\right) = \left(\sum_i W_i d\epsilon_i\right)_{W_i} + \left(\sum_i \epsilon_i dW_i\right)_{\lambda}, \quad (3.34)$$

bu yerda, birinchi had sistema ustida bajarilgan ish (yoki sistemaning tashqi kuchlarga qarshi bajargan ishi), ikkinchi had esa, sistema energiyasi o'zgarishining bir qismi bo'lib, bu o'zgarish tashqi (muhit) parametrlarning o'zgarishi bilan bog'liq emas. Boshqacha qilib aytganda, muhit zarralari tomonidan sistema zarralariga (va aksincha) uzatilgan energiya o'zgarishi bo'lib, sistemaga berilgan (yoki sistemadan olingan) issiqlik miqdorini beradi. Demak,

$$dE = \delta A + \delta Q. \quad (3.35)$$

Ushbu tenglama issiqlik jarayonlari uchun energiya saqlanish qonunini, ya'ni termodinamikaning birinchi boshlanishini ifodalaydi.

Statistik fizika yordamida (3.35) tenglamaga kiruvchi kattaliklarning molekular ma'nosini ochib berish va sodda sistemalar uchun nazariy tomondan ularni hisoblash mumkin.

Issiqlik miqdorining molekular ma'nosini ochish uchun kvazistatik jarayon o'tayotgan berk bo'lmagan ixtiyoriy sistemani olib qaraymiz. Kvazistatik jarayonlar uchun (3.35) dan quyidagini olamiz:

$$\begin{aligned} \delta Q &= \left(\sum_i \epsilon_i \delta W_i\right)_{\lambda} = dE - \left(\sum_i W_i d\epsilon_i\right)_{W_i} = \\ &= dE - \frac{\sum_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\epsilon_i) d\epsilon_i}{Z}. \end{aligned} \quad (3.36)$$



Bu yerda ikkinchi hadni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} d \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i) &= \\ &= -\frac{1}{\theta} \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i) d\varepsilon_i + \sum_i \varepsilon_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i) \frac{d\theta}{\theta^2}, \end{aligned}$$

bundan

$$\begin{aligned} \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i) d\varepsilon_i &= \\ &= -\theta d \left( \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i) \right) + \frac{d\theta}{\theta} \sum_i \varepsilon_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i). \end{aligned}$$

Bu ifodani (3.36) ga qo'ysak, natijada quyidagini olamiz:

$$\delta Q = dE + \theta d \ln Z - E \frac{d\theta}{\theta} = \theta d \left( \frac{E}{\theta} + \ln Z \right). \quad (3.37)$$

Shunday qilib, biz muhim xulosaga kelamiz.

Agar makroskopik sistemada qandaydir jarayon o'tayotgan bo'lsa va sistema jarayon davomida termostat bilan muvozanat holatda qolsa, u vaqtda ichki energiyasining o'zgarishi quyidagicha yoziladi:

$$dE = \delta A + \delta Q = -\Lambda d\lambda + \theta d \left( \frac{E}{\theta} + \ln Z \right) \quad (3.38)$$

va termodinamika birinchi qonunining miqdoriy ifodasini beradi. Bu yerda

$$\Lambda = \left( \sum_i f_i W_i \right)_{W_i}$$

tashqi parametr o'zgarishida hamma sistemachalarga ta'sir etuvchi o'rtacha kuch bo'lib, uning bajargan ishi  $\delta A = -\Lambda d\lambda$ . (3.38) formuladan shu narsa ko'rinadiki, sistema ichki energiyasining o'zgarishi ikki qismga ajraladi: sistema ustida (yoki sistema tomonidan) bajariladigan ish  $\delta A$  ga va sistema oladigan

(yoki beradigan) issiqlik miqdor  $\delta Q$  ga. Bu yerda issiqlik miqdori – muhit zarrasi tomonidan sistema zarralariga uzatilgan (va aksincha) energiya bo‘lib hisoblanadi.

### 3.7. Termodinamikada issiqlik sig‘imi tushunchasi

Issiqlik sig‘imi tushunchasi fizikada eng muhim o‘rin tutadi. Chunki issiqlik sig‘imi tekshiriladigan sistema bilan uzviy holda bog‘langan fizik kattalikdir.

Termodinamikada issiqlik sig‘imi tushunchasi quyidagicha kiritiladi: «issiqlik sig‘imi deb, qandaydir jarayonda sistemaga berilgan (yoki undan olingan)  $\delta Q$  issiqlik miqdorining shunga mos kelgan temperatura o‘zgarishi  $dT$  ga nisbatiga aytiladi», ya‘ni

$$C = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (3.39)$$

Bu ifodada  $\delta Q$  – to‘liqmas,  $dT$  esa to‘liq differensial bo‘lganligi uchun issiqlik sig‘imini bunday aniqlash, uning bir qiymatli emasligidan dalolat beradi. Termodinamikada issiqlik sig‘imini bir qiymatli qilib, aniqlash uchun sistema atrof-muhit bilan qanday jarayonda issiqlik almashayotganligini ko‘rsatish zarur va shart.<sup>6</sup>

Faraz qilaylik, oddiy termodinamik sistema holati makroskopik parametrlar  $p$ ,  $T$ ,  $V$  orqali aniqlansin. Bunday sistemaga (3.39) ta‘rifni qo‘llasak, izoxorik<sup>7</sup> va izobarik jarayonlarda issiqlik sig‘imi turlicha ekanligini ko‘ramiz, ya‘ni

$$C_v = \frac{\delta Q_v}{dT} = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_v,$$

$$C_p = \frac{\delta Q_p}{dT} = \left( \frac{\partial \chi}{\partial T} \right)_p,$$

bu yerda  $\chi = E + pV$  – entalpiya deyiladi. Ichki energiya va entalpiya holat funksiyasi, demak, uning o‘zgarishlari to‘liq differensial bo‘lganligi uchun  $C_p$  va  $C_v$  lar bir qiymatli bo‘ladi.

---

<sup>6</sup> Nima uchun biz qishda uyda o‘t yoqamiz? Mutaxassis bo‘lmagan aytadi – uyni issiqroq qilish uchun. Termodinamikadan xabardar bo‘lgan kishi – yetishmayotgan energiyani berish uchun deb javob beradi. Bu holda birinchi kishi haq bo‘lib chiqadi. Nima uchun?

<sup>7</sup> Izoxorik jarayonda ish bajarilmaydi, ya‘ni  $\delta A = 0$ .

Murakkab sistemalar uchun issiqlik sig'imi quyidagicha aniqlanadi. Umumlashgan kuch va sistema ichki energiyasi quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$f_i = f_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n, T) \text{ va } E = E(\lambda_1, \dots, \lambda_n, T).$$

Bu holda sistema issiqlik sig'imi uchun (3.15) va (3.39) ga asosan quyidagi ifodani olamiz:

$$C = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{\lambda_i} + \sum_i L_{\lambda_i} \frac{d\lambda_i}{dT}. \quad (3.40)$$

Issiqlik sig'imi orqali termodinamika birinchi qonuni (3.15) ning differensial ko'rinishi quyidagicha yoziladi:

$$\delta Q = C_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} dT + \sum_i L_{\lambda_i} d\lambda_i, \quad (3.41)$$

bu yerda  $L_{\lambda_i}$  – yashirin issiqlik bo'lib, temperatura va  $i$  parametrdan boshqa parametrlar doimiy bo'lganda qandaydir tashqi parametrning bir birlikka o'zgarishi uchun zarur bo'lgan issiqlik miqdoridir, ya'ni

$$L_{\lambda_i} = \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda_i}\right)_{T, \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n} = \left(\frac{\partial E}{\partial \lambda_i}\right)_{T, \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n} + f_i. \quad (3.42)$$

(3.41) ko'rinishdagi chiziqli differensial shakl Pfaffa formasi deyiladi.

Issiqlik sig'imilari  $C_p$  va  $C_v$  orasidagi bog'lanishni topamiz. Faraz qilaylik, sistema oddiy sistema bo'lsin:  $f_i = p$ ,  $\lambda_i = V$ . Bu holda sistema holati  $p$ ,  $V$ ,  $T$  kattaliklar yordamida aniqlanadi, ya'ni  $p = p(V, T)$  va  $E = E(V, T)$  bo'ladi. Qaytuvchi kvazistatik jarayonda bo'lgan bunday sistemaning olgan issiqlik miqdorini (3.41) ga asosan quyidagicha yozish mumkin:

$$\delta Q = C_v dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right] dV \quad (3.43)$$

va demak, umumiy holda issiqlik sig'imi

$$C = C_v + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right] \frac{dV}{dT}. \quad (3.44)$$

Xususan, sistemaga issiqlik berish jarayoni  $p = \text{const}$  ostida o'tayotgan bo'lsa, bu holda (3.44) ga asosan

$$C_p = C_v + \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right] \left( \frac{dV}{dT} \right)_p. \quad (3.45)$$

Ushbu ifodadan  $C_p > C_v$  ekanligi kelib chiqadi. Agar gaz ideal bo'lsa, (3.45) Mayer tenglamasiga o'tadi:

$$C_p = C_v + R.$$

Ideal gazda o'tayotgan turli xil jarayonlar uchun termodinamika birinchi qonuniga asosan sig'imilar orasidagi munosabatlarni topish mumkin.

Masalan, ideal gazda 1)  $X = pV^2 = \text{const}$ ; 2)  $X = p^2V = \text{const}$  yoki 3)  $X = \frac{p}{V} = \text{const}$  tenglamalar bilan aniqlanuvchi jarayonlar o'tayotgan bo'lsin. Har bir jarayon uchun issiqlik sig'imini topamiz. Ko'rilayotgan hollar uchun ichki energiya  $E = E(T, X)$ , hajm  $V = V(T, X)$  bog'lanishda deb issiqlik sig'imi uchun quyidagini yozamiz:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dE + pdV}{dT};$$

$$C_X = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_X + \left( p \frac{\partial V}{\partial T} \right)_X. \quad (3.46)$$

Ideal gaz ichki energiya  $E = C_v T + E_0$  bo'lganligi uchun (3.46) tenglikdagi birinchi had  $C_v$  ga teng, ya'ni har qanday jarayonda ideal gazning ichki energiyasi absolut temperaturaga proporsional bo'lib qoladi va proporsionallik koeffitsiyenti  $C_v$  ga tengdir. Demak, (3.46) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$C_X = C_v + \left( p \frac{\partial V}{\partial T} \right)_X. \quad (3.47)$$

Sodda hisoblashlar natijasida ko'rilayotgan jarayonlarda issiqlik sig'imi quyidagilarga teng ekanligini topamiz:

$$C_{1X} = C_v - R, \quad C_{2X} = C_v + 2R, \quad C_{3X} = C_v - \frac{R}{2}.$$

### 3.8. Asosiy termodinamik jarayonlar va ularning tenglamalari

Har qanday oddiy yoki murakkab termodinamik sistemalarda har doim uchta asosiy jarayon mavjud bo'ladi:

1. Izotermik jarayon ( $T = \text{const}$ ,  $C_T = \infty$ ).
2. Adiyabatik jarayon ( $\delta Q = 0$ ,  $C_S = 0$ ).
3. Politropik jarayon ( $C = \text{const}$ ).

Murakkab sistemalarda yuqoridagilardan tashqari yana ko'p sonli turli xil jarayonlar o'tishi mumkin. Jarayonlarning soni va xarakteri sistemaning tabiatiga bog'liq bo'ladi.

Agar termodinamik sistema oddiy bo'lsa, u holda qo'shimcha yana ikkita: izoxorik va izobarik jarayonlar o'tadi. Ko'pincha ana shu jarayonlar asosiy termodinamik jarayonlar deb yuritiladi. Amalda sistemada o'tayotgan jarayon yuqorida sanab o'tilgan asosiy jarayonlarning aralashmasidan iborat bo'ladi. Shuning uchun real jarayonlarning xususiy holi bo'lgan politropik jarayonni olib qaraymiz. Chunki yuqorida eslatib o'tilgan jarayonlar politropik jarayonning xususiy hollaridir.

Izotermik, izoxorik va izobarik jarayonlardan farqli ravishda adiabat va politropa tenglamalarini faqat termik tenglama yordamida hosil qilib bo'lmaydi, chunki termik tenglamada issiqlik miqdori va sig'imi qatnashmaydi. Bu jarayonlar uchun holat tenglamalarini olishda termodinamikaning birinchi qonuni, kalorik va termik tenglamalardan foydalanish kerak bo'ladi. Murakkab termodinamik sistemalar uchun politropa tenglamasini ko'rib chiqamiz. Holat tenglamasi  $F(T, f_i, \lambda_i) = 0$ , umumlashgan kuch  $f_i = f_i(T, \lambda_i)$  va energiya  $E = E(T, \lambda_i)$  ko'rinishda berilgan bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda (3.41) ifodadan

$$C_{f_i} - C_{\lambda_i} = \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right)_T + f_i \right] \left( \frac{\partial \lambda_i}{\partial T} \right)_{f_i} \quad (3.48)$$

ifodani olamiz. (3.48)ni (3.40) tenglikka qo'yish natijasida o'zgaruvchilarga nisbatan murakkab sistema uchun quyidagi politropa tenglamasini olamiz:

$$dT + (n - 1) \left( \frac{\partial T}{\partial \lambda_i} \right)_{f_i} d\lambda_i = 0, \quad (3.49)$$

bu yerda

$$n = \frac{C_{f_i} - C}{C_{\lambda_i} - C}$$

– politropa ko'rsatkichi deyiladi.

Agar politropa tenglamasini  $f_i, \lambda_i$  o'zgaruvchilarga nisbatan olish uchun  $T = T(f_i, \lambda_i)$  deb politropa tenglamasi (3.49) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial f_i}\right)_{\lambda_i} df_i + n \left(\frac{\partial T}{\partial \lambda_i}\right)_{f_i} d\lambda_i = 0. \quad (3.50)$$

Agar sistema har tomonlama bosim kuchi ta'siri ostida bo'lgan oddiy termodinamik sistema bo'lsa, ya'ni  $f_i = p, \lambda_i = V$  bo'lsa, u vaqtda (3.50) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + n \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = 0, \quad (3.51)$$

$$n = \frac{C_p - C}{C_v - C}.$$

Ideal gazlar uchun (3.51) tenglamadan

$$pV^n = \text{const} \quad (3.52)$$

tenglamani olamiz. Bu tenglama ideal gazlar uchun politropa tenglamasi deb yuritiladi. Politropa koeffitsiyenti  $n > 1$  bo'lganda, ideal gaz siqilganda qiziydi,  $n < 1$  da soviydi. (3.52) tenglamadan issiqlik sig'imi  $C$  ning qabul qilgan qiymatlariga qarab, eslatib o'tilgan jarayonlarning tenglamalari kelib chiqadi. Xususan,  $C = 0$  da

$$n = \frac{C_p}{C_v} = \gamma \quad \text{va} \quad pV^\gamma = \text{const} \quad (3.53)$$

ideal gaz adiabata tenglamasini olamiz.

### 3.9. Termodinamikaning ikkinchi qonuni

Termodinamika ikkinchi qonunining yuzaga kelishi issiqlik mashinalarining ishlashini tahlil qilish bilan bog'langan. Issiqlik mashinalarining ishlash prinsipi nazariy holda 1824- yilda Sadi Karno tomonidan ko'rib chiqilgan. Keyinchalik Klauzius va Tomson ularning zamonaviy ta'rifini berdi.

Ikkinchi qonun birinchi qonun kabi tajriba natijalarini umumlashtirilishidir. Kishilarning ko'p yillik amaliyoti – issiqlikni ishga va ishni issiqlikka aylanishini tahlil qilish termodinamika ikkinchi qonunining shakllanishiga olib keldi. Bu qonun entropiyaning mavjudligi to'g'risida bo'lib, u izolatsiyalangan yoki adiabatik izolatsiyalangan sistemalarda kechayotgan har qanday jarayonlarda entropiya kamaymasligi bilan ta'riflanadi.

Tajribalar shuni ko'rsatadiki, issiqlikni ishga kompensatsiyasiz aylantirish mumkin emas, ishni esa to'la holda kompensatsiyasiz issiqlikka yoki boshqa ko'rinishdagi energiyalarga aylantirish mumkin. Bu teng huquqsizlik tabiiy jarayonlarning bir tomonlama ekanligini ko'rsatadi.

Termodinamikaning ikkinchi qonunining umumiy ta'rifi bu ikkita qoidaning bir-biriga bog'lanmaganligidan kelib chiqadi:

$$Q \geq A, \quad A \leq Q. \quad (3.54)$$

$Q \geq A$  – birinchi qoida muvozanatdagi sistemalar uchun absolut termodinamik temperatura va holatning yangi bir qiymatli funksiyasi entropiyaning mavjudligiga olib keladi. (3.54) dan termodinamika ikkinchi qonunining turli xil ta'riflari kelib chiqadi: «Issiqlik o'z holicha sovuq jismdan issiq jismga o'ta olmaydi» – Klauzius ta'rifi; «O'zini o'rab olgan muhitda hech qanday o'zgarish hosil qilmasdan, faqat biror jismning sovishi hisobiga issiqlikni uzluksiz holda musbat ishga aylantirib turuvchi davriy harakatlanuvchi mashinani qurish mumkin emas» – Tomson–Plank ta'rifi. Bu ta'riflar teng kuchlidir.

Biror jism issiqligini kompensatsiyasiz to'la holda ishga aylantiruvchi qurilma ikkinchi xil *perpetuum mobile* deb yuritiladi. Ammo, issiqlikni kompensatsiyasiz to'la holda ishga aylantirish mumkin emas.

Ikkinchi xil abadiy dvigatelni qurish mumkin emasligi to'g'risidagi ikkinchi qonunining umumiy ta'rifi (3.54) dan muvozanatli jarayonlarda, termik tomondan bir jinsli sistemalarning har bir holati yaqinida, shunday holatlar mavjud bo'ladiki, unga muvozanatli adiabatik yo'l bilan etishish mumkin emasligi kelib chiqadi. Bu Karateodorining «adiabatik yo'l bilan etishish mumkin emas» prinsipi deb yuritiladi. Karateodori shu prinsipi asosida absolut temperatura va entropiya tushunchasini kiritadi va matematik isbotini beradi.

### 3.10. Entropiya. Termodinamikaning asosiy tenglamasi

Formula (3.37) kvazistatik jarayonda sistema tomonidan olingan yoki berilgan issiqlik miqdorini quyidagi ko'rinishda yozish mumkinligini ko'rsatadi:

$$\delta Q = \theta dS, \quad (3.55)$$

bu yerda  $dS = d(E/\theta + \ln Z)$  qandaydir funksiyaning o'zgarishini beradi. Bu o'zgarish to'liq differensialdir. Odatda,  $S = E/\theta + \ln Z + \text{const}$  sistemaning (o'lchamsiz) entropiyasi deb yuritiladi.<sup>8</sup> Bu o'lchamsiz kattalik Gibbsning kichik kanonik taqsimotini chiqarishda kiritilgan edi. Bu yerda integrallash doimiysi. Ifoda (3.55) ga termodinamika ikkinchi qonunining miqdoriy ifodasi deyiladi.

Termostat bilan muvozanat holatda bo'lgan makroskopik sistemada qandaydir kvazistatik jarayon o'tayotgan bo'lsa, energiya o'zgarishi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$dE = \delta A + \delta Q = -\Lambda d\lambda + \theta d\left(\frac{E}{\theta} + \ln Z\right) = -\Lambda d\lambda + \theta dS \quad (3.56)$$

yoki

$$\theta dS = dE + \Lambda d\lambda. \quad (3.57)$$

Oddiy sistema uchun  $\Lambda = p$  va  $\lambda = V$  ekanligini hisobga olib, (3.57)ni qayta yozamiz:

$$\theta dS = dE + p dV \quad (3.58)$$

Formulalar (3.57) va (3.58)ga termodinamikaning asosiy tenglamalari deb yuritiladi. Bu tenglamalardan  $\Lambda$  va  $\theta$  ni topib (3.56) ga qo'yamiz. Natijada energiyaning o'zgarishi uchun ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_\lambda dS + \left(\frac{\partial E}{\partial \lambda}\right)_S d\lambda. \quad (3.59)$$

---

<sup>8</sup> *Eslatma.* O'lchamsiz entropiya qulaylik uchun kiritilgan. Biz darslik davomida o'lchamsiz va o'lchov biriigi bor bo'lgan entropiyani farq qilmaymiz. Ular bir-biridan Bolsman doimiysi  $k$  bilan farqlanadi.



Shunday qilib, termodinamik sistemaning ichki energiyasini o'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchilar  $S$  va  $\lambda$  (yoki  $V$ )ning funksiyasi deb qarash mumkin. Shu bilan birga

$$\theta = \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_\lambda$$

va  $\theta > 0$  shartidan, ichki energiya entropiyaning monoton funksiyasi ekanligi kelib chiqadi. (3.55) ifodadan  $dS = \delta Q/\theta$ ,  $dS$  to'liq differensial bo'lganligi uchun  $\delta Q/\theta$  ham to'liq differensial bo'ladi. Demak, entropiya  $S$  sistema holatining bir qiyamatli funksiyasi bo'ladi va quyidagi shart o'rinli:

$$\oint dS = \oint \frac{\delta Q}{\theta} = 0. \quad (3.60)$$

Bu munosabat Klauzius tengligi deyiladi.

Integrallash doimiysi sistema holatini xarakterlovchi parametrlarga bog'liq bo'lmaganligi uchun, ushbu doimiyni entropiyani hisoblashning sanoq boshi deb olish mumkin. U holda entropiya

$$S = \frac{E}{\theta} + \ln Z \quad (3.60)$$

ko'rinishni oladi. Sistema holat funksiyasining ko'rinishini o'zgartiramiz. Sistema statistik muvozanat holatida yagona bitta  $\epsilon_{eh} = \bar{\epsilon}$  energiyali holatda bo'la olishini hisobga olsak:

$$Z = \sum_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\epsilon_i) \simeq \exp\left(-\frac{\bar{\epsilon}}{\theta}\right) \Omega(\bar{\epsilon}) = \exp\left(-\frac{E}{\theta}\right) \Omega(\bar{\epsilon}).$$

Bu yerda yig'indida eng katta haddan boshqalarini tashlab yubordik. Yuqoridagini hisobga olsak, entropiya uchun ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$S = \frac{E}{\theta} + \ln \left[ \exp\left(-\frac{E}{\theta}\right) \Omega(\bar{\epsilon}) \right] = \ln \Omega(\bar{\epsilon}). \quad (3.62)$$

Bu ifodadan makroskopik kvaziberk sistemaning entropiyasi muvozanat holatda yotgan sistema kvant holatlar soni  $\Omega(\bar{\epsilon})$  ning logarifmiga teng bo'lishi kelib chiqadi. Kvant holatlar soni  $\Omega(\epsilon)$

multiplikativ qonunga bo'ysunadi. Shuning uchun, murakkab sistema entropiyasi sistema qismlarining entropiyalarining yig'indisiga teng deyilgan muhim additivlik qonuniyat kelib chiqadi, ya'ni

$$S = \ln \Omega = \ln \prod_n \Omega_n = \sum_n \ln \Omega_n = \sum_n S_n. \quad (3.63)$$

### 3.11. Entropiyaning o'sish qonuni

Biz oldingi paragraflarda bir qator makroskopik kattaliklar – ichki energiya, bajarilgan ish, issiqlik miqdorining molekular talqinini ko'rib chiqdik. Shunday tushunchalarga makroskopik kattalik – entropiya ham kiradi. Entropiyaning molekular ma'nosini ochish uchun berk sistemani qaraymiz. Bunday sistemada muvozanat holat bilan bir qatorda nomuvozanat holatni ham qarash mumkin. Nomuvozanat berk sistemada jarayon shunday o'tadiki, sistema uzluksiz holda kichik entropiyali holatdan katta entropiyali holatga to'la muvozanat holat yuzaga kelguncha o'tib boradi.

Shunday qilib, agar berk sistema qandaydir vaqt momentida nomuvozanat holatda bo'lsa, u holda keyingi vaqt momentidagi yangi holatga o'tishda sistemaning entropiyasi katta ehtimollik bilan monoton o'sib boradi. Bu entropiyaning o'sish qonunini yoki termodinamikaning ikkinchi qonuni deb ham yuritiladi. Bu qonun 1865- yilda Klauzius tomonidan ochilgan, uning statistik talqini 1870- yillarda Bolsman tomonidan berilgan.

Endi entropiyaning o'sish qonunini ko'rsatuvchi miqdoriy ifodani topamiz. Buning uchun ko'p sonli bo'laklar to'plamidan iborat berk makroskopik sistemani qaraylik. Har bir bo'lak (sistemacha) yetarlicha katta sondagi zarralarga ega va kvazi-berk sistema bo'lib hisoblanadi. Faraz qilaylik, murakkab sistema bo'laklari statistik muvozanat holatga kelgan bo'lsin. U holda har bir bo'lak entropiyasi uchun quyidagi ifodani yozish mumkin:

$$S_n = \ln \Omega_n(\bar{\varepsilon}_n). \quad (3.64)$$

Har bir bo'lak o'zi statistik muvozanat holatda bo'lsada, ammo murakkab makroskopik sistema nomuvozanat holatda bo'ladi. Bunday sistema entropiyasi

$$S = \sum_n S_n. \quad (3.65)$$

Sistemaning har bir bo'lagi uchun muvozanat holatdagi entropiyasini (3.62) yordamida hisoblasak, sistema entropiyasi

$$S = \sum_n S_n = \sum_n \ln \Omega_n(\bar{\epsilon}) = \ln \prod_n \Omega_n(\bar{\epsilon}_n) = \ln \Omega, \quad (3.66)$$

bu yerda

$$\Omega = \prod_{n=1}^N \Omega_n(\bar{\epsilon}_n)$$

$N$  ta zarradan tashkil topgan bir butun sistemaning to'la kvant holatlar soni. Demak, berk sistema entropiyasi sistema to'la holatlar sonining logarifmiga teng bo'lar ekan.

Qaralayotgan berk sistema uchun Gibbsning mikrokanonik taqsimoti  $W(\epsilon_i) \sim \Omega(\epsilon_i)$  o'rinli bo'ladi. Bundan  $S = \ln W + \text{const}$  kelib chiqadi. (3.66) termodinamika ikkinchi qonunining statistik talqinini beruvchi ifoda bo'lib, Bolsman formulasi deb yuritiladi. Bolsman formulasi berk sistema entropiyasini uning bu holatda bo'lish ehtimolligi bilan bog'laydi. Berk sistema bir holatdan boshqa holatga o'tganda entropiya o'zgarishi

$$S_2 - S_1 = \Delta S = \ln \frac{W_2}{W_1} \quad (3.67)$$

bo'ladi. Bu yerda  $W_1$  va  $W_2$ ,  $S_1$  va  $S_2$  - mos holda birinchi va ikkinchi holatlar ehtimolliklari va entropiyalari. Bu ifoda entropiyaning o'sish qonunini ko'rsatadi.

Kvaziberk sistema entropiyasini ehtimollik zichligi  $\rho(q, p)$  orqali ifodalash mumkin. Ehtimollik zichligi  $\rho(q, p)$  normalash-tirish shartini qanoatlantiradi, ya'ni

$$\int \rho(q, p) d\Omega = 1.$$

$\rho(q, p)$  ni  $\epsilon_{\text{eh}} = \bar{\epsilon}$  da keskin maksimumga ega bo'lishini hisob-ga olsak:

$$\int \rho(q, p) d\Omega = \rho(\bar{\epsilon}) \Omega(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\bar{\epsilon}}{\theta}\right) \Omega(\bar{\epsilon}) = 1.$$

Sistema entropiyasi

$$S = \ln \Omega(\bar{\epsilon}) = \ln \frac{1}{\rho(\bar{\epsilon})} = -\ln \rho(\bar{\epsilon}) = \frac{\bar{\epsilon}}{\theta} + \ln Z.$$

Bu ifodaga asoslanib, quyidagi ifodani olamiz:

$$\overline{\ln \frac{1}{\rho(\bar{\varepsilon})}} = \int \ln \frac{1}{\rho(\bar{\varepsilon})} \rho(\bar{\varepsilon}) d\Omega =$$

$$\int \left( \ln Z + \frac{\varepsilon_{eh}}{\theta} \right) \rho(\varepsilon) d\Omega = \ln Z + \frac{\varepsilon_{eh}}{\theta} = \ln Z + \frac{E}{\theta}.$$

Demak, kvaziberk sistemaning entropiyasini quyidagicha yozish mumkin:

$$S = \ln \frac{1}{\rho(\bar{\varepsilon})}. \quad (3.68)$$

Bu formula keyinchalik Bolsmaning  $H$ - teoremasini va entropiyaning vaqt bo'yicha o'sish qonunini kinetikada isbotlash imkonini beradi. Entropiyani vaqt bo'yicha o'sish qonunini faqat kinetikada ko'rsatish mumkin.

Bolsman formulasidan kelib chiqadigan xulosa shuki, agar berk makroskopik sistema bir holatdan ikkinchisiga o'tish jarayonda uning entropiyasi oshsa yoki doimiy bo'lib qolsa, bunday jarayon eng katta ehtimollik bilan sodir bo'ladi. U holda

$$\Delta S \geq 0, \quad (3.69)$$

bu yerda «katta» belgisi, sistema statistik muvozanatga yaqinlashish jarayonlariga taaluqli, «tenglik» belgisi esa sistema muvozanat holatda bo'lish jarayoniga tegishlidir. Bu hollarni esa, ya'ni entropiya o'zgarishini yoki doimiyligini qaytmas va qaytuvchi jarayonlar kriteriyasi deb qarash mumkin. Qaytmas jarayonlarda, qaysiki sistema muvozanat holatga yaqinlashadi va entropiya oshadi, qaytuvchi jarayonlarda esa sistema entropiyasi doimiy bo'lib qoladi.

Agar sistemaning statistik temperaturalari  $\theta_1$  va  $\theta_2$  ( $\theta_2 > \theta_1$ , hol uchun ko'raylik) bo'lgan ikkita bo'lagini bir-biriga tegizsak, u holda berk sistema entropiyasining o'zgarishi quyidagicha aniqlanadi:

$$dS = dS_1 + dS_2 = \frac{\partial S_1}{\partial E_1} dE_1 + \frac{\partial S_2}{\partial E_2} dE_2 = \frac{dE_1}{\theta_1} + \frac{dE_2}{\theta_2} \geq 0. \quad (3.70)$$

Sistema berk bo'lganligi uchun, uning to'la energiyasi o'zgar-  
masdan qoladi:

$$dE = dE_1 + dE_2 = 0.$$

Natijada (3.70)ga asosan entropiyaning o'zgarishi uchun  
quyidagini olamiz:

$$dS = dE_1 \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \geq 0. \quad (3.71)$$

Ushbu ifodadan ko'rinadiki, agar  $\theta_2 > \theta_1$  bo'lsa, u holda entropi-  
yaning o'sish qonunidan  $dE_1 \geq 0$  kelib chiqadi. Bu shuni angla-  
tadiki past temperaturaga ega bo'lgan sistema bo'lagi, yuqori  
temperaturali ikkinchi bo'lagidan energiya olar ekan. Boshqa-  
cha qilib aytganda, issiqlik har doim issiq jismdan sovuq jisimga  
o'tadi. Bu esa ikkinchi qonunni sifat ta'rifiga olib keladi.

### 3.12. Qaytuvchi va qaytmas jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi

Biz olgan entropiyaning o'sish qonunini berk bo'lmagan siste-  
malar uchun umumlashtiraylik. Umumlashtirishni issiqlikdan  
izolyatsiyalangan berk bo'lmagan sistemalarda ko'raylik. Issiq-  
likdan izolatsiyalangan sistema deb, tashqi parametrlari o'zga-  
radigan sistemani tushunamiz. Tashqi parametrlarning o'zga-  
rishi, sistema energetik sathlarining o'zgarishiga olib keladi,  
ammo ehtimolliklar taqsimotining o'zgarishiga olib kelmaydi.  
Shuning uchun, issiqlikdan izolatsiyalangan sistemada kam ehti-  
moli holatdan katta ehtimoli holatga o'tish, xuddi berk siste-  
mada o'tish kabi bo'ladi. Demak, bunday sistemalarda entropi-  
ya o'zgarishi  $dS \geq 0$  tengsizlik bilan aniqlanadi.

O'zini o'rab olgan jismlar bilan ixtiyoriy ravishda energiya  
almashinuvchi berk bo'lmagan sistemalar uchun umumiy holda  
quyidagi tengsizlikni yozish mumkin:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{\theta}. \quad (3.72)$$

Bu tengsizlikni hisobga olsak, qaytuvchi va qaytmas  
jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy tengsizligi quyidagi  
ko'rinishni oladi:

$$dE \leq \theta dS + \delta A, \quad (3.73)$$

bu yerda «tenglik» belgisi qaytuvchi jarayonlarga, «kichik» belgisi esa qaytmas jarayonlarga tegishlidir. (3.73) energiyaning saqlanish va entropiyaning o'zgarish qonunlarini birlashtiruchi tengsizlik bo'lib, u ko'pincha termodinamika birinchi va ikkinchi qonunlarini birlashgan shakli ham deb yuritiladi.

Olingan ifodalar statistik va absolut temperaturani hisoblash usullarini aniqlashga imkon beradi. Bu temperaturalar ma'no jihatdan bir xil. Ma'lumki statistik temperatura  $\theta = kT$ . Bu yerda  $k$  – Bolsman doimiysi;  $T$  – absolut temperatura. Sistema o'lchamli entropiyasi  $S = kS$  (bu yerda o'lchamli entropiyani yana  $S$  bilan belgiladik, 71- betdagi eslatmaga qarang.) ekanligini hisobga olsak, u holda entropiya yoki termodinamikaning asosiy tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$S = k \ln W + \text{const} = \frac{E}{T} + k \ln Z + \text{const}. \quad (3.74)$$

Oddiy sistema uchun (3.72) tengsizlik esa quyidagi ko'rinishni oladi:

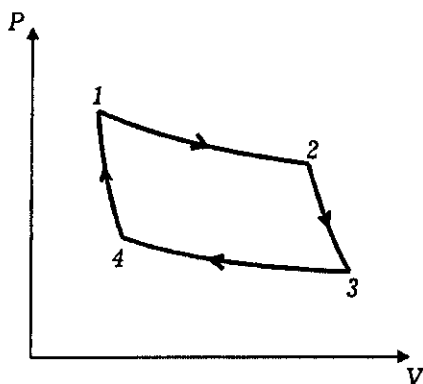
$$TdS \geq dE + pdV. \quad (3.75)$$

### 3.13. Karno sikli va Karno teoremasi

Issiqlik mashinalarining ishlash prinsipi Sadi Karno tomonidan 1924- yilda «Olovning harakatga keltiruvchi kuchi haqida fikrlash va bu kuchni yuzaga keltiruvchi mashinalar to'g'risida» degan asarida ishlab chiqilgan. Karno ideal gazlarda qaytuvchi aylanma jarayonlarni o'rganib, ikkita teoremaga ta'rif beradi.

Karno birinchi teoremasi quyidagicha: *qaytuvchi jarayonlar bilan ishlovchi davriy mashinalarning FIK faqat isitgich va sovtgichning temperaturalariga bog'liq bo'lib, ishlovchi jismlarning tabiatiga va turiga bog'liq bo'lmaydi.*

Birinchi teoremani isbot qilish uchun Karno nomi bilan ataluvchi siklni ko'rib chiqamiz. Bu sikl navbat bilan takrorlanuvchi ikkita izoterma (1→2; 3→4) va ikkita adiabatadan (2→3 va 4→1) iborat bo'lgan aylanma jarayondir (3.2- rasm).



3.1- rasm. Karno sikli.

Diagrammada 1→2 jarayonda ishlovchi jism  $Q_1$  issiqlik miqdorini isitgichdan oladi. 3→4 jarayonda ishlovchi jism  $Q_2$  issiqlik miqdorini sovitgichga qaytaradi. Bunday aylanma jarayon bilan ishlovchi issiqlik mashinalarining foydali ish koeffitsiyenti sikl davomida bajarilgan ishning isitgichdan olgan issiqlik miqdoriga nisbatiga teng, ya'ni

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (3.76)$$

Bu ifodani absolut temperaturalar orqali yozish uchun Klauzius tengligi (3.60) dan foydalanamiz. Karno sikli uchun (3.60) dagi integral to'rt qismga, ya'ni ikkita izoterma va ikkita adiabat bo'yicha olingan integralga ajraladi. Adiabatlarda  $\delta Q = 0$  bo'lganligi uchun integrallar nolga teng bo'ladi. Izotermalarda  $T = \text{const}$  bo'lganligi uchun integrallar sodda ko'rinishni oladi. Natijada Klauzius tengligini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{1}{T_1} \int_1^2 \delta Q + \frac{1}{T_2} \int_3^4 \delta Q = 0, \quad T_1 > T_2.$$

Bu yerda birinchi integral  $T_1$  temperaturada mashina olgan issiqlik miqdori  $Q_1$  ga teng. Ikkinchi integral mashina sovitgichga qaytargan issiqlik miqdori  $-Q_2$  ga teng. Bularni hisobga olib oxirgi tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (3.77)$$

Bundan

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (3.78)$$

Ushbu nisbatdan foydalanib Karno sikli uchun foydali ish koef-fitsiyentini quyidagicha yozish mumkin:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (3.79)$$

Olingan ushbu natija Karno birinchi teoremasining isboti hisoblanadi. Demak, birinchi teoreмага asosan issiqlik mashinasi davriy ishlashi uchun isitgichdan tashqari sovitgich ham bo'lishi shart ekanligini ko'rsatadi. Bundan tashqari (3.79) dan ko'rinib turibdiki, isitgich va sovitgich absolut temperaturalarining o'zgarishi foydali ish koefitsiyentining turlicha o'zgarishiga olib keladi. Haqiqatan ham,  $\eta$  dan  $T_1$  va  $T_2$  bo'yicha hosilalarni solishtirib,

$$\left| \frac{\partial \eta}{\partial T_1} \right| < \left| \frac{\partial \eta}{\partial T_2} \right| \quad (3.80)$$

shartni hosil qilamiz. Bunga asosan sovitgich temperaturasining o'zgarishi isitgich temperaturasining o'zgarishiga nisbatan  $\eta$  ga ko'proq ta'sir qilar ekan. Karno birinchi teoremasini entropiya-dan foydalanmasdan isbot qildik. Teoremani entropiya yorda-mida ham isbot qilish mumkin. Buning uchun holat diagram-masini ( $S, T$ ) o'zgaruvchilarda ko'rish kerak.

Karnoning ikkinchi teoremasi quyidagicha: *qaytmas ja-rayonlar bilan ishlovchi issiqlik mashinalarining FIK qaytuvchi jarayonlar bilan ishlovchi mashinalarning FIK dan kichik bo'ladi, ya'ni*

$$\eta_{\text{qaytmas}} < \eta \quad \text{yoki} \quad \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (3.81)$$

Bu tengsizlik isitgich va sovitgichga ega bo'lgan sistema uchun termodinamika ikkinchi qonunining miqdoriy ta'rifini beradi. Shu bilan birga (3.81) sifat ta'rifini ham beradi:

1. Issiqlik bir jismdan ikkinchi jismga ish bajarmasdan o'tayot-gan bo'lsin, ya'ni  $Q_1 - Q_2 = 0$  bo'lsin. U holda (3.81) dan  $T_1 \geq T_2$  kelib chiqadi. Bu esa Klauzius ta'rifini isbotlaydi.



2. Mashina issiqlikni to'la ravishda ishga aylantirsin, ya'ni  $Q_2 = 0$  bo'lsin. Bu holda (3.58) dan  $T_2 = 0$  bo'lishi kelib chiqadi.  $T_2 = 0$  bo'lishi mumkin emas. Har ikkala hol termodinamika ikkinchi qonunining sifat ta'rifini ko'rsatadi.

Amalda Karno siklida ishlaydigan birorta ham issiqlik mashinasi bo'lmasada, Karno teoremlari issiqlik mashinalarining foydali ish ko'effitsiyentini oshirish yo'llarini ko'rsatadi. Bu siklda ishlaydigan issiqlik mashinalarining foydali ish ko'effitsiyenti berilgan temperaturalarda eng katta bo'lib, boshqa sikllarda ishlaydigan mashinalarning foydali ish ko'effitsiyentlari uchun chegaraviy qiymatni ko'rsatadi.

### 3.14. Entropiyani fenomenologik aniqlash

Karno siklidan farq qiluvchi qaytuvchi va qaytmas doiraviy jarayonlarni ko'rib chiqamiz va ularga termodinamikaning ikkinchi qonunini tatbiq qilamiz. Ammo har qanday murakkab jarayonlarni oddiy jarayonlarga olib kelib, tekshirish mumkin. Buning uchun eng avvalo (3.81) tengsizlikni quyidagi ko'rinishda yozaylik:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (3.82)$$

Bu yerda  $-Q_2 = Q_2 < 0$  deb yozdik. (3.82) ga Klauzius tengsizligi deb yuritiladi.

Issiqlik mashinasi har qaysisi o'z siklini bajaruvchi bir nechta ishlovchi termodinamik sistemaga ega bo'lsa, u vaqtda bunday murakkab siklning har biri uchun (3.82) ni qo'llash mumkin va bunday jarayonlar uchun termodinamika ikkinchi qonunining miqdoriy ta'rifi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sum \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \quad (3.83)$$

Qaytuvchi murakkab jarayonlar uchun

$$\sum \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (3.84)$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik, qandaydir sistema murakkab doiraviy qaytuvchi siklni bajarayotgan bo'lsin. Bu siklning konturi ichida

temperatura uzluksiz ravishda o'zgarib tursin. Bunday siklni izoterma va adiabata setkalari bilan kesib, ularning sonini oshirib borish natijasida, bu konturlar qaraladigan konturga qo'shib ketadi va bu holda (3.84) ko'rinishdagi yig'indidan yopiq kontur bo'yicha olingan integralga o'tamiz:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Bu ifodadan va entropiyaning ta'rifidan

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (3.85)$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib, (3.85) dan kelib chiqadigan

$$\delta Q = TdS \quad (3.86)$$

tenglama qaytuvchi jarayonlar uchun termodinamika ikkinchi qonunining yana bir ko'rinishi bo'ladi. Demak, sistema entropiyasi  $S$ - holat funksiyasi va uning o'zgarishi to'liq differensial ekan.

Termodinamikaning birinchi va ikkinchi qonunlari (3.12), (3.86)ga asosan quyidagini yozish mumkin:

$$TdS = dE + \sum_i f_i d\lambda_i. \quad (3.87)$$

Ma'lumki, bu termodinamikaning asosiy tenglamasidir.

Qaytuvchi jarayonlarda sistema bir holatdan ikkinchi holatga o'tganda (3.87) ga ko'ra entropiyaning o'zgarishini hisoblash formulasi

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{1}{T} \left[ dE + \sum_i f_i d\lambda_i \right] \quad (3.88)$$

ko'rinishni oladi. Bu ifodadan entropiyaning o'zgarishini hisoblash uchun holatning termik va kalorik tenglamalarini bilish kerakligi kelib chiqadi. Kalorik va termik kattaliklarni bog'lovchi ((3.103) ga qarang)

$$T \left( \frac{\partial f_i}{\partial T} \right)_{\lambda_i} = \left( \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right)_T + f_i$$

differensial tenglamadan foydalanib (3.88) ifodani qayta yoza-miz:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 C_V \frac{dT}{T} + \sum_i \int_1^2 \left( \frac{\partial f_i}{\partial T} \right)_{\lambda_i} d\lambda_i. \quad (3.89)$$

Agar sistema oddiy, ya'ni  $f_i = p$  va  $\lambda_i = V$  bo'lsa, entropiyaning o'zgarishini hisoblash formulasi quyidagi ko'rinishga o'tadi:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 C_V \frac{dT}{T} + \int_1^2 \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV + S_0. \quad (3.90)$$

Bir mol ideal gaz uchun  $pV = RT$ ,  $\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{R}{V}$  ekanligini inobatga olib, entropiyaning o'zgarishini hisoblash uchun nihoyat quyidagi ifodani olamiz:

$$S_2 - S_1 = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1}, \quad (3.91)$$

bu yerda  $v$  bitta molekulaga to'g'ri kelgan hajm. Berilgan holatda entropiyani topish uchun «2» nuqtani ixtiyoriy, ya'ni entropiyasi aniqlanishi lozim bo'lgan holat deb qaraymiz, «1» nuqtani esa, hisob boshi deb olamiz. Natijada ideal gaz entropiyasi uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$S = C_V \ln T + R \ln v + S_0, \quad (3.92)$$

bu yerda  $S_0$  - birinchi nuqta bilan bog'liq bo'lgan o'zgarmas. Ya'ni, asosan sistemaning entropiyasini qandaydir o'zgarmas  $S_0$  aniqlikda topilar ekan.  $T$  temperaturada  $V$  hajmni egallagan  $\nu$  mol ideal gazning entropiyasi

$$S = \nu \left[ C_V \ln T + R \ln \frac{V}{N} + S_0 \right] \quad (3.93)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu yerda  $N$  - molekulalar soni.

Yuqoridagi natijalarni tahlil qilib Gibbs quyidagi teoremani ta'riflaydi: *agar aralashmaga kirgan har bir ideal gaz butun hajmni egallasa, gaz aralashmasining entropiyasi har qaysi gaz entro-*

piyalarining yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni  $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ . Shunday qilib, entropiya ichki energiya kabi additiv kattalikdir.

Bu teoremaning mazmunini ochish uchun bir xil temperaturada ( $T_1 = T_2 = T$ ) turli hajmlarni ( $V_1 \neq V_2$ ) egallagan va gazlar miqdori turlicha ( $\nu_1 \neq \nu_2$  yoki  $N_1 \neq N_2$ ) bo'lgan ikki xil ideal gazning entropiyasini hisoblaymiz.

Avval gazlar bir-biridan to'siq bilan ajratilgan bo'lsin, u holda teoreмага asosan umumiy entropiya ikkala gaz entropiyalarining yig'indisiga teng bo'ladi:

$$S_I = S_1 + S_2 = \nu_1 \left[ C_{\nu_1} \ln T + R \ln \frac{V_1}{N_1} + S_{1o} \right] + \nu_2 \left[ C_{\nu_2} \ln T + R \ln \frac{V_2}{N_2} + S_{2o} \right]. \quad (3.94)$$

Endi to'siqni olib tashlaymiz, bunda har bir gaz izotermik kengayadi. Bu kengayishda ish bajarilmaydi, demak, ichki energiya va entropiya o'zgarmaydi. Aralashmaning entropiyasini hisoblashda endi ularning har biri  $V_1 + V_2$  hajmini egallaganligini inobatga olamiz, ya'ni

$$S_{II} = \nu_1 \left[ C_{\nu_1} \ln T + R \ln \frac{V_1+V_2}{N_1} + S_{1o} \right] + \nu_2 \left[ C_{\nu_2} \ln T + R \ln \frac{V_1+V_2}{N_2} + S_{2o} \right]. \quad (3.95)$$

Har ikkala yo'l bilan topilgan entropiyalarning farqi quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\Delta S = \nu_1 \left[ R \ln \frac{V_1+V_2}{V_1} \right] + \nu_2 \left[ R \ln \frac{V_1+V_2}{V_2} \right]. \quad (3.96)$$

Xususiy holda  $\nu_1 = \nu_2$ ,  $V_1 = V_2$  bo'lsa,

$$\Delta S = 2\nu R \ln 2. \quad (3.97)$$

Vaholanki, gazlarni boshidan bir xil sharoitda va miqdori bir xil deb qarasa bunday farq chiqmaydi. Bir-biridan to'siq bilan ajratilgan teng hajmlarni egallagan, teng miqdordagi va bir xil temperaturadagi ideal gazdan tashkil topgan ikkita sistemani qaraymiz. To'siq mavjud bo'lganda (3.92)ga asosan

umumiy entropiya alohida olinganiga nisbatan ikki marta katta bo'ladi. To'siqni olib tashlasak, sistema bir butun bo'lib  $2V$  hajmni egallaydi va molekulalar soni  $2N$  ga teng bo'ladi. Demak, (3.92) ifodada  $\nu \rightarrow 2\nu$ ,  $N \rightarrow 2N$  va  $V \rightarrow 2V$  almashtirishlarni bajarish kerak. Bunday ikki xil yo'l bilan hisoblangan umumiy entropiya yuqoridagi natijadan farqli o'laroq bir-biridan farq qilmaydi.

Bunday ziddiyatning paydo bo'lishi, ya'ni bir xil gazlar aralashmasi turli gazlarning aralashmasining chegaraviy holi emasligi Gibbs paradoksi deyiladi. Bu paradoksni Gibbs hayratga soluvchi intuitsiyani ko'rsatib hal qilgan.<sup>9</sup>

### 3.15. Nomuvozanat jarayonlar uchun termodinamika ikkinchi qonunining asosiy tenglamasi

Tabiatda uchraydigan jarayonlar qaytuvchi va qaytmas bo'ladi. Ana shu jarayonlarda entropiya tushunchasini ko'rib o'taylik. Bu holda (3.83) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \quad (3.98)$$

Bu tengsizlikni Afanasova-Ernfest ko'rsatib bergan. Chizmadagi hol uchun integral (3.98)ni  $ACB$  va  $BDA$  qaytmas va qaytuvchi bo'laklariga to'g'ri kelgan ikkita integralga ajratish mumkin (3.3- rasm):

$$(C) \int_A^B \frac{\delta Q}{T} + (D) \int_B^A \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad \text{yoki} \quad (C) \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \leq -(D) \int_B^A \frac{\delta Q}{T},$$

$$(D) \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \geq (C) \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \quad \text{yoki} \quad (D) \int_A^B dS \geq (C) \int_A^B \frac{\delta Q}{T}.$$

Integralash natijasida

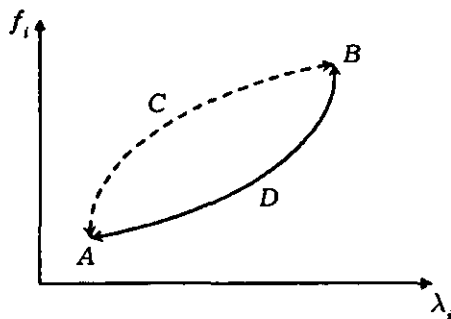
$$\Delta S = S_B - S_A \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$$

yoki differensial formada

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (3.99)$$

---

<sup>9</sup> Bu davrda kvant fizikasi, jumladan, zarralarning aynanligi to'g'risida hech qanday gap yo'q edi. Gibbs paradoksi kvant fizikasi nuqtayi nazaridan juda oson hal bo'ladi.



3.3- rasm. Murakkab sistemalarda qaytuvchi (D) va qaytmas (C) jarayonlarni ko'rsatuvchi diagramma.

tengsizlikni olamiz. Bu tengsizliklardan shu narsa ko'rinib turibdiki, qaytmas jarayonlarda sistema entropiyasi o'sib borar ekan. O'sish muvozanat holat yuzaga kelguncha davom etadi. Adiyatik qaytmas jarayonlarda esa  $dS \geq 0$  yoki  $\Delta S \geq 0$  bo'ladi, ya'ni

$$\Delta S > \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \quad \text{yoki} \quad dS > \frac{\delta Q}{T},$$

bu tengsizlik nomuvozanat jarayonlar uchun termodinamika ikkinchi qonunining miqdoriy ifodasi deb yuritiladi.

Qaytmas va qaytuvchi jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy qonuni umumiy holda quydagicha yoziladi:

$$TdS \geq dE + \sum_i f_i d\lambda_i. \quad (3.100)$$

### 3.16. Holatning termik va kalorik tenglamalari orasidagi bog'lanish

Termodinamikaning birinchi va ikkinchi qonuni sistema holatining termik va kalorik tenglamalarini bilmagan holda ular orasidagi bog'lanishni aniqlash imkonini beradi. Bu masalani avval murakkab sistema uchun ko'rib chiqamiz. Bizga ma'lumki, termodinamika birinchi va ikkinchi qonunlari

$$\delta Q = dE + \sum_i f_i \delta \lambda_i,$$

$$\delta Q = TdS$$

ko'rinishda yoziladi. Bu ikkala tenglamani birlashtirib umumiy tenglamani olamiz, ya'ni

$$dS = \frac{1}{T} \left( dE + \sum_i f_i \delta \lambda_i \right). \quad (3.101)$$

Entropiya ( $S = S(T, \lambda_i)$ ) va ichki energiya ( $E = E(T, \lambda_i)$ ) holat funksiyasi ekanligini hisobga olib, (3.101) tenglamadagi differensiallarni hisoblaymiz va bir xil differensiallar oldidagi kattaliklarni tenglashtiramiz:

$$\left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\lambda_i} = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_{\lambda_i}, \quad \left( \frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \right)_T = \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right)_T + f_i \right]. \quad (3.102)$$

Bu tenglamalardan, mos ravishda, o'zgarmas temperaturadada  $\lambda_i$  va o'zgarmas  $\lambda_i$  da temperatura bo'yicha hosila olamiz va natijalarni tenglashtirib termik va kalorik kattaliklar orasidagi muhim bog'lanishni olamiz:

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial T} \right)_{\lambda_i} = \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right)_T + f_i \right]. \quad (3.103)$$

Bu ifodalarga asosan entropiyani hisoblash formulalari (3.88) va (3.90) quyidagi ko'rinishlarni oladi:

$$S - S_0 = \int \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_{\lambda_i} dT + T \sum_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial T} \right)_{\lambda_i} d\lambda_i \right] \quad (3.104)$$

va

$$S = \int C_v \frac{dT}{T} + \int \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dV + S_0. \quad (3.105)$$

Oddiy sistema uchun (3.103) bog'lanish quyidagicha yoziladi:

$$T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p. \quad (3.106)$$

(3.106) ifoda bir qator termodinamik masalalarni yechish uchun qulaylik yaratadi.

Masalan, (3.106) tenglama yordamida (3.45)ni quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$C_p - C_v - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

yoki

$$C_p - C_v = \frac{TV_0\alpha^2}{\beta}, \quad (3.107)$$

bu yerda  $\alpha = \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$  - hajm kengayishi;  $\beta = \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$  - siqilish koeffitsiyentlari. (3.107) formuladan  $t = 4 \text{ }^\circ\text{C}$  da  $C_p = C_v$  ekanligi kelib chiqadi, chunki bu temperaturada  $\alpha = 0$ . Demak,  $t = 4 \text{ }^\circ\text{C}$  da suv o'zini qattiq jism kabi tutar ekan.

Agar  $0 < t < 4 \text{ }^\circ\text{C}$  temperatura intervalda suv adiabatik siqilsa, uning temperaturasi ko'tarilish o'rniga pasayadi, ya'ni soviydi. Haqiqatan ham, termodinamika birinchi qonuniga asosan

$$\begin{aligned} \delta Q &= C_v dT + \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right] dV = \\ &= C_v dT + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dV = C_v dT + \frac{\alpha T}{\beta} dV = 0. \end{aligned}$$

Oxirgi ifodani integrallash natijasida quyidagini hosil qilamiz:

$$\Delta T = -\frac{T}{C_v} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \Delta V. \quad (3.108)$$

Bu ifodadagi  $\alpha$  temperatura  $0 < t < 4 \text{ }^\circ\text{C}$  intervalida manfiy bo'lganligi uchun suv siqilganda ( $\Delta V < 0$ ) uning temperaturasi pasayadi, ya'ni  $\Delta T < 0$ . Bu anomal effektdir.

Van-der-Vaals gazi uchun adiabataga tenglamasini yozaylik. Bu masalani echish uchun (3.105) tenglamaga kiruvchi kattaliklarni Van-der-Vaals gazi uchun yozamiz. Ya'ni

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}, \quad \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{R}{V-b}.$$

Bu ifodani (3.105) qo'ysak, Van-der-Vaals gazi entropiyasi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$S = \int C_v \frac{dT}{T} + R \ln(V-b) + S_0.$$



Bu yerda issiqlik sig'imi temperaturaga kuchsiz bog'langan deb faraz qilsak, yuqoridagi ifoda

$$S = C_v \ln T + R \ln(V - b) + S_0 \quad (3.109)$$

ko'rinish oladi. Adiabatik jarayonlarda entropiya o'zgarishini sababli  $C_v = \text{const}$  holi uchun Van-der-Vaals adiabat tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$T(V - b)^{R/C_v} = \text{const}$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamani o'zgaruvchilarda yozamiz:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b)^{1+R/C_v} = \text{const.}$$

Issiqlik sig'imi temperaturaga bog'liq bo'lsa, quyidagi tenglamani olamiz:

$$(V - b) \exp\left(-\frac{1}{R} \int \frac{C_v}{T} dT\right) = \text{const.}$$

### 3.17. Bolsman prinsipi

Bolsman prinsipiga ko'ra sistema entropiyasi  $S$  holat ehtimolligi  $W$  bilan funksional bog'langan bo'ladi, ya'ni  $S = f(W)$ . Bu bog'lanishni aniqlash uchun sistemani ikki bo'lakdan tashkil topgan deb faraz qilamiz. U holda prinsipga asosan  $S_1 = f(W_1)$ ,  $S_2 = f(W_2)$  bo'ladi. Entropiya additiv bo'lganligi uchun esa

$$S = S_1 + S_2 = f(W_1) + f(W_2) = f(W) \quad (3.110)$$

bo'ladi. O'zaro bog'lanmagan sistemalar uchun  $W = W_1 W_2$ . Shunga ko'ra (3.110) dagi  $f(W)$  ni aniqlash uchun funksional ko'rinishdagi

$$f(W_1) + f(W_2) = f(W_1 W_2) \quad (3.111)$$

tenglamani olamiz. Bu tenglamadan  $W_1$  va  $W_2$  bo'yicha hosila olib, mos ravishda, ikkita tenglama olamiz:

$$\begin{aligned} f'(W_1) &= W_2 f'(W_1 W_2), \\ f'(W_2) &= W_1 f'(W_1 W_2). \end{aligned} \quad (3.112)$$

(3.110) ifodadagi tenglamalarni hadlab nisbatini olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$W_1 f(W_1) = W_2 f(W_2). \quad (3.113)$$

Ushbu tenglamaning chap tomoni faqat  $W_1$  ga o'ng tomoni esa  $W_2$  ga bog'liq bo'lganligi uchun

$$Wf'(W) - \text{const} = k \quad (3.114)$$

shart kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan  $S = f(W)$  ekanligini hisobga olib quyidagi differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$dS = k \frac{dW}{W}. \quad (3.115)$$

Bu tenglamani integrallab, sistema entropiyasi holat ehtimolligi bilan

$$S = k \ln W \quad (3.116)$$

ko'rinishda bog'langan ekanligini olamiz. Bunday bog'lanish Bolsman prinsipi deyiladi.

### 3.18. Termodinamika ikkinchi qonunini tatbiq qilish chegarasi

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, termodinamika katta sondagi zarralardan tashkil topgan muvozanatdagi sistemalarda o'ta-yotgan jarayonlarni va qonuniyatlarni o'rganadi. Termodinamika ikkinchi qonuni ish, energiya va issiqlik orasidagi munosabatni belgilaydi. Shu uchta kattaliklardan uchinchi, ya'ni issiqlik faqat katta sondagi zarralardan tashkil topgan sistemalarda ma'no kasb etadi. Molekulalar o'lchami tartibidagi sistemalar uchun issiqlik tushunchasining ma'nosi yo'q. Bunday sistemalar uchun termodinamikaning ikkinchi qonunini yozib bo'lmaydi. Shunday qilib ikkinchi qonun uchun, va demak, butun termodinamika uchun uni tatbiq qilishning quyi chegarasi mavjudligi, ya'ni uni «mikrosistemalar uchun tatbiq qilish mumkin emasligi» kelib chiqadi.

Termodinamika ikkinchi qonunining tatbiq qilishni yuqori chegarasini uzoqdan ta'sir qiluvchi xarakterga ega bo'lgan gravitatsion kuchlar belgilaydi. Koinotdagi galaktikalar va ularni tashkil qiluvchi osmon jismlarining ichki energiyasi ular orasidagi ta'sir energiyasi tartibida bo'lganligi sababli sistema-

ning energiyasini alohida qismlar energiyalarining yig'indisi ko'rinishida yozib bo'lmaydi. Termodinamikaning asosiy sharti – o'zaro ta'sir kuchisiz bo'lishi kerak. Shu sababli termodinamikani koinot jismlariga tatbiq qilib bo'lmaydi. XIX asrda ikkinchi qonunni bir butun koinotga asossiz tatbiq qilinishi «koinotning issiqlik o'limi» degan noto'g'ri fikrga olib keldi. Rudolf Klauziusning fikri bo'yicha «dunyo energiyasi o'zgarmaydi, entropiyasi esa maksimumga intiladi». Boshqacha qilib aytganda termodinamik muvozanat barqaror topadi, demak, hamma makroskopik jarayonlar, jumladan hayot ham to'xtaydi.

Bu g'oyaga qarshi «katta fluktuatsiya» g'oyasi ilgari suriladi va ikkinchi qonunning statistik tabiati ochib beriladi. Bolsman bo'yicha Koinot termodinamik muvozanat holatda bo'ladi, lekin yetarli darajada katta fluktuatsiyalar ham yuzaga kelib turadi. Har qanday fluktuatsiya kabi Koinotning bir qismida paydo bo'lgan fluktuatsiya so'rilib ketadi, shu vaqtning o'zida uning yana boshqa qismida paydo bo'ladi. Bolsmaning bu fikri M.P. Bronshteyn tomonidan asosli tanqid qilinadi. Zamonaviy nazariyaga asosan Koinot kengayib boruvchi nostatsionar sistemadir.

### **3.19. Termodinamikaning uchinchi qonuni. Nernst issiqlik teoremasi**

Past temperaturalar sohasida jismlarning xususiyatlarini tekshirish natijasida Nernst XX asr boshlarida (1906- yil) termodinamikaning uchinchi qonunini ta'riflaydi. Uchinchi qonunni to'g'ridan-to'g'ri tatbiq qilish sohasi past temperaturalarda o'tadigan jarayonlardir. Ammo, uchinchi qonunni keng temperatura intervalida ham tatbiq qilish mumkin.

Termodinamika uchinchi qonunining yaratilishi, turli moddalarning bir-birlari bilan kimyoviy reaksiyaga kirish qobiliyatini aniqlash bilan bog'langandir. Bu esa kimyoviy reaksiya vaqtida kuchning bajargan maksimal ishi bilan aniqlanadi. Nernst uchinchi qonunni quyidagicha ta'riflaydi:

*absolut nol temperaturaga yaqinlashishda har qanday muvozanatdagi sistema entropiyasi, izotermik jarayonlarda, holatning termodinamik parametrlariga bog'liq bo'lmay qoladi va  $T = 0$  yaqinida hamma sistemalar uchun bir xil doimiy universal qiymat qabul qiladi, bu qiymatni nolga teng deyish mumkin. Ya'ni*

$$\lim_{T \rightarrow 0} [S(T, \chi_2) - S(T, \chi_1)] = 0 \quad (3.117)$$

yoki

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{\partial S}{\partial \chi} \right)_T = 0, \quad \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{\partial S}{\partial f_i} \right)_T = \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \right)_T = 0, \quad (3.118)$$

bu yerda  $\chi$  – qandaydir termodinamik parametr ( $f_i$  yoki  $\lambda_i$ ). (3.117)ga asosan,  $T \rightarrow 0$  da sistema entropiyasining doimiyligi ( $S \rightarrow 0$ ) shuni anglatadiki, izotermik jarayon  $T = 0$  K bir vaqtning o'zida izoentropik jarayon ham bo'ladi va, demak, adiabatik jarayon hamdir.

Demak, uchinchi qonun bo'yicha: *nol izotetrma nol izoentropiya va adiabata bilan mos tushadi*. Bu ta'rif Nernstning issiqlik teoremasi deb yuritiladi. Termodinamikaning uchinchi qonunidan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1. Absolut nol temperaturaga yetishish mumkin emas.
2.  $T \rightarrow 0$  K da termik koeffitsiyentlar nolga intiladi.
3.  $T \rightarrow 0$  K da issiqlik sig'implari nolga teng bo'ladi.
4.  $T \rightarrow 0$  K da sistema entropiyasini hisoblash faqat issiqlik sig'implarining temperaturaga bog'liqligini topishga olib keladi, ya'ni

$$S(T, V) = \int_0^T \frac{C_V}{T} dT \quad \text{va} \quad S(T, p) = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT. \quad (3.119)$$

Uchinchi qonunga asosan,  $T \rightarrow 0$  da entropiya  $S \rightarrow 0$  ga intilishi uchun  $C_V$  va  $C_p$  lar  $T$  chiziqli funksiyasiga nisbatan tezroq nolga intilishi kelib chiqadi.  $T \rightarrow 0$  da ideal gaz o'zining ideal gazlik xususiyatini yo'qotadi, ya'ni aynigan holatda bo'ladi.

Termodinamikaning uchinchi qonuni sistemaning kvant xususiyatidan kelib chiqadi va barcha urinishlarga qaramasdan klassik fizika doirasida uni nazariy isbot qilib bo'lmaydi. Klassik fizikada bu qonun tajriba natijalari asosida yaratilgan. Nernstning issiqlik teoremasi va undan kelib chiqadigan xulosalar statistik fizika qonunlari asosida juda oson tushintiriladi.

Issiqlik sig'imi aniq musbat bo'lganligi uchun temperatura oshishi bilan sistemaning ichki energiyasi ham oshib boradi, va aksincha, temperatura pasayishi bilan energiya kamayadi. Temperatura absolut nolga intilganda energiya nolga intiladi.

Sistema bir jinsli, xususan, kimyoviy bir jinsli bo'lsin. Sistemani faraziy bo'laklarga ajratamiz, bu bo'laklarning energiyasi temperatura absolut nolga intilganda o'zining minimum qiyamatiga intiladi, demak, bir butun sistemaning energiyasi ham minimumga intiladi. Bunga asosan, kvant nazariyasiga ko'ra, sistema mikroholatlarining statistik vazni birday bo'lib birga teng bo'ladi. Entropiya statistik vazndan olingan logorifm bo'lganligi uchun u nolga teng bo'ladi.

Faraz qilaylik, kvant mexanika qonunlariga bo'ysunuvchi sistema  $\bar{\epsilon}_i$  diskret energetik holatlardan birortasida statistik muvozanatda yotgan bo'lsin. Temperatura pasayishi bilan yuqorida ta'kidlaganimizdek u pastki energetik holatlarga tusha boshlaydi va temperatura nolga intilganda eng quyi holatga tushadi. Ikkinchi tomondan, o'ta past temperaturalarda eng quyi va birinchi holatlarning energiyalarining farqi issiqlik energiyasidan juda katta bo'ladi, ya'ni

$$kT \ll \Delta\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_0.$$

Demak, sistemaning  $\epsilon_0$  holatdan  $\epsilon_1$  holatga o'tishi uchun issiqlik energiyasi etarli emas va sistema  $\epsilon_0$  energetik holatda qoladi.

Bunday sistema entropiyasi  $S = k \ln W_0$  Bolsman formulasi yoki  $S = k \ln \Omega_0$  formula bilan aniqlanadi. Bu yerda  $W_0$  - sistemaning asosiy holatda bo'lish ehtimolligi,  $\Omega_0$  - eng quyi sath energiyasi  $\epsilon_0$  ga to'g'ri kelgan kvant holatlar soni. Absolut nolda sistema asosiy holatdan chiqib ketolmaganligi uchun temperatura o'zgarishi bilan energiya o'zgarmaydi. Bu holda

$$C_v = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_v = \left( \frac{\partial \epsilon_0}{\partial T} \right)_v = 0$$

bo'ladi. Sistemaning asosiy holatda bo'lish ehtimolligi va holatlar soni (vazni)  $\Omega_0 = \Omega(\epsilon_0) = 1$  bo'ladi. Demak,

$$S = k \ln \Omega(\epsilon_0) = 0.$$

Shunday qilib, Nernst teoremasini isbot qildik.

Yana shuni ta'kidlash lozimki, termodinamikaning uchinchi qonuni, ikkinchi qonun kabi, keng ko'lamda tajribalarda o'z isbotini topmagan. Masalan, metostabil (amorf, shishasimonlar va boshqalar) sistemalar uchun uchinchi qonun bajarilmaydi. Bunday sistemalarga uchinchi qonun tatbiq qilinmaydi.

### 3.20. Termodinamik metodlar

Termodinamikada ikkita tekshirish metodi qo'llaniladi. Bular doiraviy jarayonlar va termodinamik potensiallar metodidir. Doiraviy jarayonlar metodining mazmuni shundan iboratki, fizik hodisalar uchun aniq qonuniyatlarni tiklashda, unga mos holda tanlangan qaytuvchi sikl olib qaraladi va bu tanlangan siklni tahlil qilish uchun termodinamikaning birinchi va ikkinchi qonunlarining miqdoriy ifodalari:

$$\oint \delta Q = A, \quad (3.120)$$

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad \text{yoki} \quad dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (3.121)$$

tatbiq qilinadi.

Tanlangan qaytuvchi siklni faraziy kichik bo'laklarga bo'lalimiz. Bunda aksariyat hollarda har bir bo'lakka Karno siklini mos keltirish mumkin. Kichik Karno sikllari uchun (3.121) o'rinli bo'ladi, demak, to'liq sikl uchun ham (3.121) o'rinli bo'ladi. Bu yo'l sistemaning xususiyatlarini ochishi mumkin. Shunday qilib sikl uchun (3.120) yordamida maksimal ishni topish va (3.121) ifodalarga kiruvchi zaruriy kattaliklarni hisoblash imkoniyatini beradi. Bu ifodalar yordamida siklning hamma elementlari uchun izlanayotgan noma'lum qonuniyatlarni ochish mumkin bo'ladi.

Sikllar metodi ustida ko'p to'xtalmaymiz, faqat shuni ta'kidlaymizki, uning yordamida elektr yurituvchi kuchni, sirt taranglik koeffitsiyentining va to'yingan bug' bosimining va h. k. larning temperaturaga bog'liqligini aniqlash mumkin.

Termodinamik potensiallar metodi to'g'risida batafsilroq to'xtalamiz. Bu metod Gibbs tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib, termodinamikaning asosiy tenglamasi (3.87)ga asoslanadi. Termodinamik potensiallar metodining mazmuni shundan iboratki, (3.87) tenglama har xil sharoitlarda sistema holatini xarakterlovchi yangi funksiyalarni kiritish imkonini beradi. Sistema holati o'zgarganda bu funksiyalarning o'zgarishi to'liq differensialni beradi. Bu funksiyalar yordamida fizikaviy hodisalarni tahlil qilishda zarur bo'lgan termik, kalorik va boshqa tipdagi tenglamalarni tuzish mumkin.

Biz eng avval oddiy sistemani olib qaraylik. (3.87) da  $f_i = p$  va  $\lambda_i = V$  desak, u holda

$$TdS = dE + pdV. \quad (3.122)$$

Bu tenglama beshta termodinamik kattalik  $T, S, E, p, V$  larni bir-biriga bog'laydi. Bunday oddiy sistema holati o'zaro bog'lanmagan ikkita parametr orqali aniqlanadi. Agar beshta o'zgaruvchi kattaliklardan ikkitasini o'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchilar deb tanlab olsak, u vaqtda (3.122) tenglama uchta noma'lumni o'z ichiga oladi. Bu uchta noma'lum kattaliklarni topish uchun (3.122) dan tashqari yana ikkita tenglama bo'lishi zarurdir. Bunday tenglama – holatning termik va kalorik tenglamalari bo'lishi mumkin. Natijada uchta tenglama yordamida noma'lum bo'lgan uchta kattaliklarni aniqlash mumkin bo'ladi.

Ammo noma'lum kattaliklarni hisoblashda qulayroq metod mavjud ekan. Buni Gibbs ko'rsatadi. Gibbs bo'yicha shunday funksiyani topish kerakki, uchta tenglama tuzmasdan turib, uchta noma'lum kattalikni topish mumkin bo'lsin. Bu termodinamik potentsiallar metodi deb yuritiladi.

Oddiy sistema holatini aniqlovchi shunday funksiyalardan o'ntasini topish mumkin. Ammo bu funksiyalar ichida eng ko'p ishlatiladiganlari to'rtadir:

$$E = E(S, V), \quad F = F(T, V), \quad \Phi = \Phi(T, p), \quad \chi = \chi(S, p).$$

### 1. Ichki energiya

Agar ichki energiya entropiya va hajmning funksiyasi bo'lsa, u holda ichki energiya termodinamik funksiya bo'la olar ekan. Haqiqatan ham, (3.122) tenglamadan:

$$dE = TdS - pdV. \quad (3.123)$$

Bu ifoda yordamida qolgan ikkita noma'lum termik o'zgaruvchanlar  $T$  va  $p$  ni topish mumkin:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V = T \quad \text{va} \quad \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S = -p. \quad (3.124)$$

Bu ifodadan ikkinchi tartibli differensial olsak:

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V \quad \text{va} \quad \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S. \quad (3.125)$$

Ushbu tengliklardan issiqlik sig'imi  $C_v$  va izoentropik elastiklik modeli  $K_s$  ni olamiz. (3.124) dan ikkinchi tartibli aralash differensial olish natijasida muhim tenglikni olamiz:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V. \quad (3.126)$$

Bu tenglama adiabatik va izoxorik jarayonlarda sistema xossalarini bir-biriga bog'laydi. Ana shunday bog'lanishlarni topish termodinamik potentsiallar metodining mazmunini tashkil qiladi. Yuqoridagi kattaliklarni olish uchun ichki energiyani oshkora bilish shart emas. Shuning uchun  $E(S, V)$  sistema holatini to'liq aniqlaydi, ya'ni sistema uchun xarakteristik funksiya yoki termodinamik potentsial bo'ladi.

## 2. Erkin energiya

Agar oddiy sistema uchun o'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchilar sifatida  $T$  va  $V$  tanlansa, u holda Lejandr metodiga ko'ra (3.122)ning ikkala tomoniga  $d(-TS)$ ni qo'shish tufayli

$$dF = -SdT - pdV \quad (3.127)$$

tenglikni olamiz. Bu yerda  $F = E - TS$  bo'lib, erkin energiya yoki Gelmgols energiyasi ham deb yuritiladi, chunki bu tushunchani Gelmgols kiritgan. (3.127) tenglamadan temperatura va hajm bo'yicha differensiallash tufayli noma'lum kattaliklar entropiya  $S$  ni, bosim  $p$  ni va  $E = F + TS$  dan ichki energiyani topamiz. (3.127) dan ikkinchi tartibli differensial olish natijasida issiqlik sig'imi  $C_v$  va termik siqilish koeffitsiyenti  $\beta$  ni olamiz.

Agar (3.127) tenglamadan  $T$  va  $V$  bo'yicha ikkinchi tartibli aralash differensial olsak, termodinamikada muhim bo'lgan ikkinchi tenglikni olamiz:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V. \quad (3.128)$$

Erkin energiya shunday energiyaki, adiabatik jarayonlarda ichki energiya qanday rol o'ynasa, izotermik jarayonlarda erkin energiya shunday rol o'ynaydi. Boshqacha qilib aytganda, izotermik jarayonlarda ish erkin energiyaning kamayishi hisobiga bajariladi, ya'ni

$$\delta A = -(\Delta F)_T = -(F_2 - F_1)_T. \quad (3.129)$$



Bir mol Van-der-Vaals gazining qaytuvchi izotermik kengayishida bajarilgan ishni ko'rib chiqamiz. Ish uchun olingan (3.129) ifoda yordamida bir mol Van-der-Vaals gazining qaytuvchi izotermik kengayishida bajarilgan ishni hisoblaymiz:

$$\delta A = -(\Delta F)_T = -d(E - TS)_T = -(dE - TdS)_T = pdV.$$

Bu ifodadagi  $p$  ni bir mol gaz uchun yozilgan Van-der-Vaals tenglamasidan topib o'rniga qo'yamiz va «1» va «2» nuqtalar orasida integrallaymiz. Natijada bajarilgan ish uchun quyidagi natijani olamiz:

$$A = RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} + a \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

### 3. Gibbs termodinamik potentsiali

Agar o'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchi sifatida  $T$  va  $p$  bo'lsa, u holda  $\Phi = \Phi(T, p)$  funksiya termodinamik potentsial bo'la oladi. Ana shu termodinamik potentsialning ko'rinishini olish uchun (3.127) tenglamani har ikki tomoniga  $d(pV)$  to'la differensialni qo'shamiz, natijada

$$d\Phi = -SdT + Vdp \quad (3.130)$$

tenglamani olamiz. Bu yerda  $\Phi = F + pV = E - TS + pV$  ga teng bo'lib, Gibbs termodinamik potentsiali deb yuritiladi. Bu Gibbs tomonidan kiritilgan. (3.130) tenglamadan doimiy temperatura va bosimda differensiallash tufayli noma'lum kattaliklar entropiya  $S$ , hajm  $V$  va  $E = \Phi + TS - pV$  dan ichki energiyani olamiz. (3.130) dan ikkinchi marotaba differensiallash tufayli issiqlik sig'imi  $C_p$  va termik siqilish koeffitsiyenti  $\beta$  ni topamiz. (3.130) tenglamadan  $T$  va  $p$  bo'yicha ikkinchi tartibli aralash differensial olsak, u holda termodinamikada muhim bo'lgan uchinchi munosabatni olamiz:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T. \quad (3.131)$$

Gibbs termodinamik potentsialining fizik ma'nosi izotermik-izobarik jarayonlarda nomexanik kuchlarning bajargan ishi Gibbs termodinamik potentsialining kamayishi hisobiga o'tadi, ya'ni

$$A_{\text{nomex}} = -(\Delta\Phi)_{T,p} = -(\Phi_2 - \Phi_1)_{T,p}. \quad (1.32)$$

#### 4. Entalpiya

Agar oddiy sistema uchun o'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchilar qilib, entropiya  $S$  va bosim  $p$  jufti olinsa, u holda (3.122) tenglamaning har ikki tomoniga  $d(pV)$  to'liq differensialni qo'shish tufayli

$$d\chi = TdS + Vdp \quad (3.133)$$

tenglamani olamiz. Bu yerda  $\chi = E + pV$  bo'lib, entalpiya deb yuritiladi. (3.133) tenglamadan noma'lum bo'lgan kattaliklar temperatura  $T$ , hajm  $V$  va ichki energiya  $E = \chi - pV$  topiladi. (3.133) tenglamadan  $S$  va  $p$  bo'yicha ikki marotaba differensiallash natijasida issiqlik sig'imi  $C_p$  va izoentropik elastiklik moduli  $K_s$  ni topish mumkin bo'ladi. (3.133) dan  $S$  va  $p$  bo'yicha ikkinchi tartibli aralash differensial olganimizda termodinamikada muhim bo'lgan to'rtinchi munosabatni olamiz:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p. \quad (3.134)$$

Murakkab sistemalarda adiabatik-izobarik jarayonlarda bajarilgan ish entalpiyaning kamayishi hisobiga bo'ladi, ya'ni

$$A_{\text{nomex}} = -(\Delta\chi)_{S,p} = -(\chi_2 - \chi_1)_{S,p}. \quad (3.135)$$

Oddiy sistema misolida termodinamik potentsiallar metodi bilan tanishib chiqdik. Bu metodni ideal gazlarga tatbiq qilamiz.

#### 3.21. Ideal gaz uchun termodinamik potentsiallar

Oldingi mavzuda sistema holatini aniqlovchi xarakteristik funksiyalar, ya'ni termodinamik potentsiallar metodi termodinamikaning muhim yutug'i ekanligini ko'rib chiqdik. Lekin termodinamika doirasida potentsiallarning oshkora ko'rinishini topish mumkin emas. Faqat ayrim hollarda, xususan, ideal gaz va muvozanatli nurlanish uchun potentsiallarning oshkora ko'rinishini topish mumkin. Boshqa hollarda potentsiallar tajriba natijalari asosida tiklanadi yoki statistik metodlar yordamida hisoblanadi.

Bizga ma'lumki ideal gaz ichki energiyasi

$$E = C_v T + E_0 \quad (3.136)$$

ko'rinishga ega. Ichki energiya bu ko'rinishda termodinamik potensial bo'la olmaydi. Termodinamik potensial bo'lishi uchun u hajm va entropiyaning funksiyasi, ya'ni  $E = E(S, V)$  ko'rinishda bo'lishi kerak. Ichki energiya termodinamik potensial bo'lishi uchun temperaturani entropiya orqali ifodalash kerak. Bizga ma'lumki, ideal gaz entropiyasi  $S = C_v \ln T + R \ln V + S_0$  ko'rinishda yoziladi. Bu ifodadan temperaturani topib (3.136) ifodaga qo'yamiz va ichki energiya uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$E(S, V) = \frac{C_v}{\gamma-1} \exp\left(\frac{S-S_0}{C_v}\right) + E_0. \quad (3.137)$$

Bu ifoda termodinamik potensial bo'la oladi. Undan foydalanib, ideal gaz holat tenglamasi  $pV = RT$  va adiabata tenglamasi  $pV^\gamma = \text{const}$  ni topish mumkin.

Erkin energiya  $F(T, V) = E - TS$  ni, ichki energiya va entropiya ifodalarini bilgan holda, quyidagicha yozish mumkin:

$$F(T, V) = C_v T(1 - \ln T) - RT \ln V - TS_0 + E_0, \quad (3.138)$$

bu yerda  $F_0$  - erkin energiyaning  $T = 0$  dagi qiymati. Shunga o'xshash Gibbs energiyasini quyidagicha yozamiz:

$$\Phi(T, p) = C_p T(1 - \ln T) - RT \ln p - TS_0 + \Phi_0, \quad (3.139)$$

bu yerda  $\Phi_0$  - Gibbs energiyasining  $T = 0$  dagi qiymati. Ichki energiyaning termodinamik potensialga keltirish yo'li bilan erkin va Gibbs energiyalarini ham termodinamik potensial ko'rinishiga keltirish mumkin. Boshqa termodinamik kattaliklarni ham termodinamik potensial ko'rinishda yozish mumkin. Masalan, ideal gaz entalpiyasining potensial ko'rinishini keltiramiz:

$$\chi(S, p) = E + pV = C_p p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} e^{\frac{S-S_0}{C_p}} + \chi_0. \quad (3.140)$$

### 3.22. Murakkab sistemalar termodinamik potentsiallari

Bir nechta tashqi kuchlar ta'siri ostida murakkab sistema termodinamik potentsiallarini ko'raylik. Bu holda termodinamikaning asosiy tenglamasi

$$TdS = dE + \sum_i f_i d\lambda_i$$

dan foydalanamiz. Agar sistemaning holati umumlashgan tashqi parametrlar  $\lambda_i$  va entropiya  $S$  orqali aniqlansa, u termodinamik potensial bo'lib, ichki energiya  $E = E(S, \lambda_i)$  hisoblanadi, o'zgarishi esa

$$dE - TdS = \sum_i f_i d\lambda_i.$$

Agar sistemaning holati tashqi parametrlar  $\lambda_i$  va  $T$  temperatura orqali aniqlansa, u holda termodinamik potensial bo'lib, erkin energiya  $F = F(S, \lambda_i)$  hisoblanadi:

$$dF - SdT = \sum_i f_i d\lambda_i.$$

Agar sistemaning holati berilgan o'zgaruvchilar  $T, p, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  orqali aniqlansa, u holda termodinamik potensial bo'lib, Gibbs termodinamik potentsiali  $\Phi = \Phi(T, p, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  hisoblanadi. O'zgarishi esa

$$d\Phi = -SdT + Vdp - \sum_i f_i d\lambda_i$$

bo'ladi. Agar o'zaro bog'lanmagan parametrlar bo'lib,  $p, S, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  hisoblansa, u holda  $\chi = \chi(p, S, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , entalpiya termodinamik potensial bo'lib, hisoblanadi. O'zgarishi esa

$$d\chi = TdS + Vdp - \sum_i f_i d\lambda_i$$

bo'ladi. Bu termodinamik potentsiallar additiv va holatning bir qiymatli funksiyalari bo'lib hisoblanadi. Bu termodinamik potentsiallarning kamayishi to'g'ri kelgan sharoitda sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarning bajargan ishini aniqlaydi.

### 3.23. Gibbs-Gelmgols tenglamalari

Termodinamik xarakteristik funksiyalar o'zaro bog'langan-dir. Agar ulardan birortasi ma'lum bo'lsa, qolganlarini aniqlash mumkin.

I-hol. Erkin energiya  $F = E - TS$  berilgan bo'lsa, u holda ichki energiya  $E$  ni hisoblash mumkin. Entropiya  $S$  ni (3.127)dan topib, o'rniga qo'yish natijasida ichki energiya quyidagiga teng bo'ladi:

$$E = F - T \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V. \quad (3.141)$$

II- h o l. Gibbs termodinamik potentsiali  $\Phi = \chi - TS$  berilgan bo'lsa, u holda entalpiya  $\chi$  ni hisoblash mumkin. Entropiyani (3.130)dan topib, o'rniga qo'yish natijasida entalpiyani aniqlash mumkin:

$$\chi = \Phi - T \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_p. \quad (3.142)$$

(3.141) va (3.142) tenglamalar Gibbs-Gelmgols tenglamalari deb yuritiladi. Agar  $T = 0$  da  $F = E_0$  va  $\Phi = \chi_0$  bo'lishini hisobga olsak, u holda (3.141) va (3.142)larning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$F = E_0 - T \int_0^T \frac{E - E_0}{T^2} dT, \quad (3.143)$$

$$\Phi = \chi_0 - T \int_0^T \frac{\chi - \chi_0}{T^2} dT, \quad (3.144)$$

bu yerda integrallash doimiysi  $I(V)$  va  $I(p)$  lar  $T = 0$  da nolga teng bo'lishligi hisobga olindi.<sup>10</sup> (3.143) va (3.144) ifodalar ichki energiya va entalpiyaning temperaturaga bog'liqligi berilganda erkin energiya va Gibbs termodinamik potentsialini topish mumkinligini beradi.

Gibbs-Gelmgols tenglamalari yordamida, izotermik jarayonda mexanik kuchlarni va izotermik-izobarik jarayonda nomen-xanik kuchlarning bajargan maksimal ishini hisoblash mumkin.

Agar sistema izotermik holda  $F_1$  erkin energiyali  $F_2$  holatdan erkin energiyali holatga o'tsa, u holda bajarilgan ish erkin energiyaning kamayishi hisobiga o'tadi:

$$A = -(\Delta F)_T = -(F_2 - F_1)_T.$$

Gibbs-Gelmgols tenglamasi (3.141)ga asosan quyidagi ifodani olamiz:

$$A = -\Delta E + T \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right)_V,$$

---

<sup>10</sup> Noaniq integrallash doimiylari  $I(V)$  va  $I(p)$  ning nolga tengligini termodinamika-ning birinchi va ikkinchi qonunlari orqali isbotlab bo'lmaydi. Bu masalani o'rganish Nernst tomonidan termodinamikaning uchuinchi qonunining kashf qilinishiga olib keldi

bu yerda  $\Delta E - E_2 - E_1$  - ichki energiya kamayishi (tajribadan aniqlanishi mumkin) izoxorik jarayonda reaksiya vaqtida ajralib chiqqan issiqlik miqdoriga teng:  $\Delta E - Q - Q_v$ . U holda

$$A = Q_v + T \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right)_v. \quad (3.145)$$

(3.145) ifoda har qanday izotermik jarayonda sistemaning hamma kuchlarga qarshi bajargan to'la ishi uchun Gibbs-Gelmgols tenglamasi bo'lib hisoblanadi.

Agar sistema izobarik-izotermik holda  $\Phi_1$  energiyali holatdan  $\Phi_2$  energiyali holatga o'tsa, u holda mexanik bo'lmagan kuchlarning bajargan ishi Gibbs energiyasining kamayishi hisobiga o'tadi:

$$A_{\text{nomex}} = -(\Delta\Phi)_{T,p} = -(\Phi_2 - \Phi_1)_{T,p}.$$

Gibbs-Gelmgols tenglamasi (3.142)ga asosan

$$A_{\text{nomex}} = Q_p + T \left( \frac{\partial A_{\text{nomex}}}{\partial T} \right)_p \quad (3.146)$$

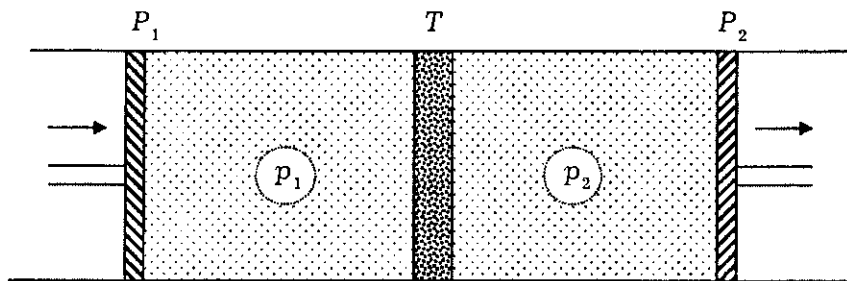
tenglamani olamiz. Bu yerda  $Q_p$  - izobar jarayonda issiqlik effekti:  $Q_p = \chi_1 - \chi_2 = E_1 - E_2 + p(V_1 - V_2) = -Q = Q_p$ .

Olingan (3.145) va (3.146) Gibbs-Gelmgols tenglamalari ko'rib chiqilgan jarayonlarda bajarilgan maksimal ishni hisoblash imkonini beradi.

### 3.24. Qaytmas va qaytuvchi adiabatik kengayishda gazlarning sovishi

Gazlarni suyultirish masalasi amaliyotda muhim o'rin tutadi. Gazlarni suyultirish uchun eng avval uni past temperatura-gacha sovitish kerak. Buning uchun gazning adiabatik holda kengayishida ish bajarishga majbur qilish kerak. Bu holda bajarilgan ish ichki energiyaning kamayishi hisobiga o'tadi. Natijada gaz temperaturasi pasayadi. Adiabatik holda kengayish jarayoni qaytmas yoki qaytuvchi bo'lishi mumkin.

Joul-Tomson tajribasida adiabatik izolatsiyalangan silindrlardan birinchisidagi katta  $p_1$  bosim ostidagi gaz kichik  $p_2$  bosim ostidagi ikkinchi silindrga statsionar holda o'tkaziladi (3.4- rasm).



3.4- rasm. Joule–Tomson tajribasi qurilmasi:  $P_1$  va  $P_2$  – porshenlar;  $T$  – g'ovak to'siq.

Oqimni stasionarligini gazni o'tkazuvchi g'ovak to'siq ( $T$ ) ta'minlab beradi. Jarayon sekin o'tganligi uchun bosimlarni  $P_1$  va  $P_2$  porshenlarni sekin surish yordamida o'zgarmas ushlab turish mumkin. To'siq borligi bunday jarayon qaytmas adiabatikligidan dalolat beradi. Bu Joule–Tomson jarayoni yoki hodisasi deyiladi. Gazlarni sovutishda katta ahamiyatga ega bo'lgan bu jarayon ustida 10 yil tajribalar olib borilgan (1852–1862- yy.).

Demak, Joule–Tomson jarayonida  $\Delta p = p_2 - p_1 < 0$  va  $\Delta T = T_2 - T_1$  bo'ladi.  $\mu = \frac{\Delta T}{\Delta p}$  nisbat Joule–Tomson hodisasini aniqlovchi koeffitsiyentdir. Agar  $\frac{\Delta p}{p_1} \ll 1$  bo'lsa, differensial, agar  $\frac{\Delta p}{p_1} < 1$  bo'lsa, integral hodisa deb yuritiladi. Gazning o'tishi stasionar jarayon bo'lganligi uchun entalpiya doimiy bo'ladi, shuning uchun Joule–Tomson jarayoni izoentalpik bo'ladi, ya'ni  $\Delta\chi = \chi_2 - \chi_1 = 0$  yoki  $\chi_2 = \chi_1$  bo'ladi.  $\chi = \chi(T, p)$  desak,

$$\Delta\chi = \left(\frac{\partial\chi}{\partial T}\right)\Delta T + \left(\frac{\partial\chi}{\partial p}\right)\Delta p,$$

$$d\chi = TdS + Vdp \text{ va } d\Phi = -SdT + Vdp$$

ifodalardan

$$\frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V}{C_p} = \frac{T^2}{C_p} \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right) \right]_p \quad (3.147)$$

Joul–Tomson hodisasini ifodalovchi tenglamani olamiz. Agar

$$\left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right) \right]_p > 0$$

bo'lsa, u vaqtda gaz soviydi. Agar

$$\left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right) \right]_p < 0$$

bo'lsa, u vaqtda gaz qiziydi.

Shu masalani aniq misolda qaraylik. Agar ideal gazni olib qarasaq, u holda

$$\frac{\Delta T}{\Delta p} = 0$$

bo'ladi. Tajriba ham shunday bo'lishini ko'rsatadi. Agar Van-der-Vaals gazini olib qarasaq, u holda quyidagi ifodani olamiz:

$$\mu = \frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{1}{C_p} \left( \frac{2a}{RT} - b \right), \quad (3.148)$$

bu ifodadan  $\Delta T \neq 0$  ekanligi kelib chiqadi. Ya'ni ideal gazdan chetlanishini ko'rsatadi. (3.148) dan Joul–Tomson hodisasining kattaligi «a» va «b» parametrlarga bog'liq bo'lar ekan.

1. Agar «a» juda katta bo'lib,  $b \rightarrow 0$  desak, bu holda

$$\mu = \frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{2a}{RTC_p} > 0$$

bo'ladi. Bunday holda gaz adiabatik kengayganda sovir ekan, chunki  $\Delta T = T_2 - T_1 < 0$  bo'ladi.

2. Agar «b» juda katta bo'lib,  $a \rightarrow 0$  desak, bu holda

$$\mu = \frac{\Delta T}{\Delta p} = -\frac{b}{C_p} < 0$$

bo'ladi. Bu holda gaz isiydi.

Ma'lum bir temperaturada real gazlar uchun Joul–Tomson koeffitsiyenti  $\mu = 0$ , ya'ni  $\Delta T = 0$  bo'ladi. Bu shart (3.148) dagi  $\frac{2a}{RT} - b = 0$  bo'lsa bajariladi. Umuman, agar (3.147) ning surati



$T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V = 0$  bo'lsa, real gazlar uchun  $\mu = 0$  bo'ladi. Bu inversiya nuqtasi, temperatura esa inversiya temperaturasi va

$$T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V = 0 \quad (3.148)$$

esa inversiya egriligi deb yuritiladi. Van-der-Vaals gazi uchun inversiya temperaturasi  $T_i$  ni aniqlaymiz. Bir mol gaz uchun yozilgan Van-der-Vaals tenglamasi (3.8) dan  $p = \text{const}$  deb

temperatura bo'yicha hosila olamiz va (3.148) tenglikdagi  $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$

kattalik uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \simeq \frac{V}{T} - \frac{b}{T} + \frac{2a}{RT^2}.$$

Bu ifodani olishda gazning noidealliliga bo'lgan tuzatmalar  $a$  va  $b$  ning kichik ekanligi hisobga olingan. Inversiya nuqtasida inversiya egriligi nolga teng bo'lishidan Van-der-Vaals gazi uchun inversiya temperaturasi quyidagiga tengligi kelib chiqadi:

$$T_i = \frac{2a}{Rb} = 2T_B,$$

bu yerda  $T_B = \frac{a}{Rb}$  bo'lib, Boyle temperaturasi deyiladi.

Inversiya temperaturasi yaqinida Joule-Tomson hodisasi ishorasini o'zgartiradi:

a) inversiya temperaturasidan pastda ( $T < T_i$  da) Joule-Tomson hodisasi musbat ( $\mu > 0$ ). Bu holda gaz kengayishida soviydi, chunki va  $\Delta T < 0$ ;

b) inversiya temperaturasidan yuqorida ( $T > T_i$  da) Joule-Tomson hodisasi manfiy ( $\mu < 0$ ). Bu holda gaz qiziydi. Aksariyat inert gazlar kengayganda qizishi kuzatilgan.

Sababi shundaki, eksperimental kuzatishlar hamma inert gazlarning inversiya temperaturasi kritik temperaturasidan ancha yuqorida bo'lishini ko'rsatadi.

Demak, inert gazlarni adiabatik holda kengayishida sovitish uchun, eng avval, ularning inversiya temperaturasini kritik

temperaturagacha keltirish zarur ekan. Inversiya nuqtasida (3.149) ga asosan gazning issiqlik sig'irlar farqi

$$C_p - C_v = V \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

ko'rinishni oladi. Bu formula yordamida Van-der-Vaals va Diterichining ikkinchi tenglamasi bilan tavsiflanuvchi gazlar uchun issiqlik sig'irlar farqi inversiya nuqtasida bir xil qiymat qabul qilishini ko'rsatish mumkin:

$$C_p - C_v = R \left( 1 + \frac{b}{V} \right).$$

Gazlarni qaytuvchi adiabatik kengayishida sovitish uchun tashqaridan ish bajarish kerak. Bu holda temperatura o'zgarishini  $d\chi - Vdp = 0$  va  $d\chi = TdS + Vdp$  ifodalar asosida topish mumkin:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = \frac{T}{C_p} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \quad (3.150)$$

Holat tenglamasi qanday bo'lishidan qat'iy nazar, har qanday gaz uchun har doim  $\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p > 0$  bo'ladi. Demak,  $\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_S < 0$  bo'ladi. Gaz kengayishida soviydi, chunki  $\Delta p < 0$  va  $\Delta T < 0$  bo'ladi. Gazlarning qaytuvchi adiabatik jarayon ostida kengayishida past temperaturalarni olish metodi P.L. Kapitsa tomonidan ishlab chiqilgan va amalda ko'rsatilgan.

### 3.25. Magnetiklar va dielektriklar termodinamikasi

Elektr va magnit maydoniga kiritilgan dielektrik va magnetiklarning tabiatini termodinamika nuqtayi nazaridan qarab chiqaylik.

Izotrop dielektrikda tashqi elektr maydonining bajargan ishi

$$\delta A = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{E}d\mathbf{D} \quad (3.151)$$

bo'ladi. Bu yerda elektr maydon kuchlanganligi  $\mathbf{E}$  tashqi parametr bo'lib, bunga ikkita ichki parametr – qutblanganlik  $\mathbf{P}$  va elektr induksiya vektori  $\mathbf{D}$  to'g'ri keladi. (3.151) ifoda bilan aniqlanuvchi ish qutblanish ishi emas. Chunki, elektr induksiya vektori, birinchidan, tashqi parametr emas ((3.151) da u tashqi parametr vazifasini o'tamoqda), ikkinchidan elektrodinamikadan ma'lumki, u hosilaviy kattalik, asosiy kattalik elektr maydon kuchlanganligidir. Shuning uchun (3.151) ifodani dielektrikning qutblashdagi ishga aylantirish kerak. Bu masala ikki yo'l bilan amalga oshirilishi mumkin:

$$\delta A = -d\left(\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}\right) - d(\mathbf{P}\mathbf{E}) + \mathbf{P}d\mathbf{E}$$

yoki

$$\delta A = -d\left(\frac{\mathbf{E}^2}{4\pi}\right) - d(\mathbf{P}\mathbf{E}) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{D}d\mathbf{E}.$$

Bu yerda birinchi had vakuumda elektr maydonini hosil qilishda bajarilgan ish, ikkinchi had tashqi maydonga qarshi bajarilgan ish, uchinchi had esa tom ma'noda dielektrikni qutblashda bajarilgan ish yoki dielektrikning tashqi elektr maydonidagi potensial energiyasi. Birinchi tenglamada qutblanish, ikkinchida esa elektr induksiya vektori ichki parametr vazifasini o'taydi.

Biz qaytuvchi jarayonlarda tom ma'noda dielektrikning qutblanish ishini qarab chiqamiz. Odatda tom ma'nodagi bajarilgan ish deb,

$$\delta A_{\chi} = \mathbf{P}d\mathbf{E} + d(-\mathbf{P}\mathbf{E}) = \delta A + d\left(\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}\right) = -\mathbf{E}d\mathbf{P}$$

kattalik qabul qilinadi. U holda qaytuvchi jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$TdS = dE + pdV - \mathbf{E}d\mathbf{P}. \quad (3.152)$$

(3.152) dan, termodinamik potenciallarning differensiallari uchun Lejandr metodiga asosan, quyidagilarni olamiz:

$$dE = TdS - pdV + \mathbf{E}d\mathbf{P},$$

$$\begin{aligned}dF &= -SdT - pdV + \mathbf{E}d\mathbf{P}, \quad F = E - TS, \\d\Phi &= -SdT + Vdp - \mathbf{P}d\mathbf{E}, \quad \Phi = E - TS + pV - \mathbf{E}\mathbf{P}, \\d\chi &= TdS + Vdp - \mathbf{P}d\mathbf{E}, \quad \chi = E + pV - \mathbf{E}\mathbf{P}. \quad (3.153)\end{aligned}$$

Magnetiklar uchun termodinamik potentsiallarning differensialiy quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned}dE &= TdS - pdV + Hd\mathbf{M}, \\dF &= -SdT - pdV + \mathbf{H}d\mathbf{M}, \quad F = E - TS, \\d\Phi &= -SdT + Vdp - \mathbf{M}d\mathbf{H}, \quad \Phi = E - TS + pV - \mathbf{H}\mathbf{M}, \\d\chi &= TdS + Vdp - \mathbf{M}d\mathbf{H}, \quad \chi = E + pV - \mathbf{H}\mathbf{M}, \quad (3.154)\end{aligned}$$

bu yerda  $\mathbf{H}$  - tashqi magnit maydon kuchlanganligi,  $\mathbf{M}$  - magnitlanganlik.

(3.153) va (3.154) tenglamalar yordamida dielektriklar va magnetiklar uchun zarur munosabatlarni olish mumkin. Masalan, (3.153) dagi uchinchi tenglamadan:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{E}}\right)_{T,p} = -\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p}\right)_{T,E}, \quad (3.155)$$

bu yerda  $\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{E}}\right)_{T,p}$  - elektr maydoni ta'sirida yuzaga kelgan dielektrik hajmining o'zgarishi bo'lib, bunga hajm elektrostriksiya hodisasi deyiladi.  $\left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{E}}\right)_{T,E}$  - bosim o'zgarishi bilan dielektrik qutblanganligining o'zgarish hodisasi *pyezoelektrik hodisasi* deyiladi.

(3.154) dagi uchinchi tenglamadan quyidagi tenglikni olamiz:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{H}}\right)_{T,p} = -\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p}\right)_{T,H}, \quad (3.156)$$

bu yerda  $\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{H}}\right)_{T,p}$  - hajmiy magnitostriksiya hodisasi deyiladi.

$\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p}\right)_{T,H}$  - magnitoelastik ( $\mathbf{H} \neq 0$ ) yoki pyezomagnit ( $\mathbf{H} = 0$ ) hodisasi deb yuritiladi.

### 3.26. Magnit va yadro sovitish metodlari

Jismni sovitish faqat adiabatik holda kengaytirish usuli bilan emas, balki sistemada boshqa ko'rinishdagi adiabatik holda bajarilgan ish orqali ham amalga oshirilishi mumkin.

Hozirgi vaqtda o'ta past temperaturalarni ( $T < 1 \text{ K}$ ) ni olishda asosiy metodlardan biri, bu paramagnit tuzlarni adiabatik magnitsizlash metodi bo'lib hisoblanadi. Bu metod 1926- yilda Debay tomonidan taklif qilingan.

Adiabatik magnitsizlashda temperaturaning o'zgarishi magnitokolorik hodisasi deb yuritiladi. Bu hodisaning miqdoriy qiymati

( $\frac{\partial T}{\partial H}$ )<sub>S,p</sub> ni entalpiyaning o'zgarishi  $d\chi = TdS + Vdp - M dH$  dan

topish mumkin. Buning uchun (3.150) da  $p \rightarrow -H$  va  $V \rightarrow M$  almashtirish, ya'ni kengayishda bajarilgan ishni magnitlanishda bajarilgan ish bilan taqqoslash kerak. Natijada

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = -\frac{T}{C_H} \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H. \quad (3.157)$$

Bu yerda  $C_H$  - magnit maydon kuchlanganligi o'zgarish bo'lgandagi issiqlik sig'imi. Paramagnetiklar uchun  $M = \kappa H$  bog'lanishni va Kyuri qonuniga asosan moddaning paramagnit kirituvchanlik absolut temperaturaga teskari proporsionalligini,

ya'ni  $\kappa = \frac{C}{T}$  munosabatni hisobga olib, (3.157)ni quyidagi

ko'rinishga keltiramiz:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = \frac{CH}{TC_H} > 0. \quad (3.158)$$

Bundan ko'rinadiki, adiabatik magnitsizlanishda ( $dH < 0$ ), paramagnit kristall temperaturasi pasayar ekan ( $dT < 0$ ). Debay nazariyasiga ko'ra kristallarning issiqlik sig'imi past temperaturalarda  $C_{p,H} = \alpha T^3$ . Shuning uchun

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = \frac{CH}{\alpha T^4} \sim \frac{1}{T^4}.$$

Demak, past temperaturalarda temperaturaning o'zgarishi juda katta o'zgarishlarga olib keladi, chunki magnitokolorik

effekt temperaturaning to'rtinchi darajasiga teskari proporsional. Bu metod yordamida  $10^{-3}$  K temperatura olingan. Bu temperaturalarda issiqlik energiya elektron spinlari orasidagi o'zaro ta'sir energiyasi tartibida bo'ladi. Termodinamikaning uchinchi qonuniga asosan temperatura nolga intilganda termodinamik parametrlar, xususan, temperaturaga bog'liq bo'lmay qoladi va magnitokalorik effekt yo'qoladi. Past temperatura olish uchun ishlovchi moddalarda o'ta kuchsiz o'zaro ta'sirni hisobga olish kerak. 0 K temperaturani olishga yaqin yo'l yadro magnetizmidan foydalanish, ya'ni yadrolar spinlarini adiabatik holda magnitsizlash kerak. Bu holda o'zaro ta'sir kuchi  $10^{-5}$  K da namoyon bo'ladi. Bu metod yordamida spinlar temperaturasi  $\sim 10^{-6}$  K da olish mumkin bo'ladi.<sup>11</sup>

Ferromagnetiklar uchun magnitokalorik effektini hisoblash yuqoridagi kabi yo'l bilan amalga oshiriladi. Ferromagnetiklar

uchun  $M = \kappa H - \frac{CH}{T-\theta}$  va magnitokalorik effekt kattaligi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = \frac{CTH}{C_H(T-\theta)^2}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu yerda  $\theta$  – paramagnit nuqtasidagi Kyuri temperaturasi.

### 3.27. Termodinamik kattaliklarni statistik fizika metodi bo'yicha hisoblash

Muvozanatdagi berk sistema holatini aniqlovchi termodinamik kattaliklarni hisoblashda yuqorida olingan muhim farazni qabul qilamiz: «Makroskopik sistemaning ichki energiyasi  $E$  statistik fizika metodi asosida hisoblangan o'rtacha energiyasi  $\bar{E}$  ga teng». Ya'ni,  $E = \bar{E}$ . Bu yerda Gibbsning kichik kanonik taqsimotini qo'llash natijasida muvozanatdagi berk makroskopik sistemaning ichki energiyasini hisoblash formulasini olamiz:

$$E = \bar{E} = \sum_i \bar{E}_i W_i = \theta^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial \theta} = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}. \quad (3.159)$$

<sup>11</sup> Oxirgi 5-10 yillarda fizikada juda katta yutuqlarga erishildi. Jumladan, lazer yordamida va bug'latish yo'li bilan temperaturani  $10^{-6}$  K gacha pasaytirishga erishildi. Bu to'g'risida Boze kondensat masalasida batafsil to'xtalib o'tamiz.

Entropiyani hisoblash uchun (3.61) ifodaga asosan sistema-ning holat funksiyasini bilish yetarli ekan, ya'ni

$$S = \frac{E}{T} + k \ln Z(T, V). \quad (3.160)$$

Erkin energiya  $F = E - TS$  (3.160) ga asosan

$$F = -kT \ln Z(T, V). \quad (3.161)$$

Makroskopik sistemada bosim bajarigan ish ifodasi

$$\delta A = \sum (W_i d\varepsilon_i) W_i = -pdV$$

dan

$$p = \theta \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \quad (3.162)$$

yoki (3.127) yordamida

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \quad (3.163)$$

ifodani topamiz.

Bir qator fizik hodisalarni tushuntirishda Gibbs termodinamik potentsiali  $\Phi(T, p)$  katta rol o'ynaydi. Agar sistemaning holat funksiyasi  $Z(T, p)$  ni topish mumkin bo'lsa, u holda

$$\Phi(T, p) = -kT \ln Z(T, p) \quad (3.164)$$

va sistema hajmi uchun

$$V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T = -kT \frac{\partial \ln Z(T, p)}{\partial p} \quad (3.165)$$

ifodalar olinadi. Yuqorida olingan ifodalardan shu narsa ko'rinadiki, sistema termodinamik kattaliklarini hisoblashda yagona kattalik holat funksiya  $Z$  ni bilish kifoyadir.

### 3.28. III bobga oid masala va savollar

1. 100 °C va normal bosimda bir mol suvning bug' holiga o'tishida bug'lanish ishi va berilgan issiqlik miqdorini hisoblang.

2. Izotrop dielektrikning qutblashda tashqi maydon bajarigan ishni hisoblang.

3. Tashqi parametr  $\lambda$  ga qo'shma bo'lgan umumlashgan kuch  $f$  ta'sir etayotgan har qanday oddiy sistema uchun

$$\left(\frac{\partial T}{\partial f}\right)_\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_T \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right)_f = -1, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\lambda = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial f}\right)_\lambda\right]^{-1}$$

ayniyat o'rinli ekanligini ko'rsating.

4. Van-der-Vaals tenglamasi bilan tavsiflanuvchi gazning kritik parametrlari  $p_k$ ,  $V_k$ ,  $T_k$  va kritik koeffitsiyenti  $s = \frac{RT_k}{p_k V_k}$  ni hisoblang.

5. Diterichi birinchi tenglamasi  $p(V - b) = RTe^{-a/RTV}$  bilan tavsiflanuvchi gazning kritik parametrlari  $p_k$ ,  $V_k$ ,  $T_k$  va kritik koeffitsiyenti  $s$  ni hisoblang. Katta hajmlarda Diterichi tenglamasi Van-der-Vaals tenglamasiga o'tishini ko'rsating.

6. Diterichi ikkinchi tenglamasi  $\left(p + \frac{a}{V^3/3}\right)(V - b) = RT$  bilan tavsiflanuvchi gazning kritik koeffitsiyenti  $s$  ni hisoblang. Natijani  $s$  ning eksperimental qiymati va Van-der-Vaals gazi uchun olingan qiymatlari bilan solishtiring.

7. Klauzius tenglamasi  $\left(p + \frac{a}{T(V+C)^2}\right)(V - b) = RT$  bilan tavsiflanuvchi gazning kritik parametrlari  $p_k$ ,  $V_k$ ,  $T_k$  va kritik koeffitsiyenti  $s$  ni hisoblang.

8. Bertlo tenglamasi  $\left(p + \frac{a'}{TV^2}\right)(V - b) = RT$  dagi o'zgarma kattaliklar  $a'$ ,  $b$  va  $R$  larni kritik parametrlar  $p_k$ ,  $V_k$ ,  $T_k$  orqali ifodalang.

*Yechish.* Kritik nuqtadagi Bertlo tenglamasini:

$$\left(p_k + \frac{a'}{T_k V_k^2}\right)(V_k - b) = RT_k,$$

va

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T_k} = -\frac{RT_k}{(V_k - b)^2} + \frac{2a'}{T_k V_k^3} = 0,$$



$$\left( \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{T_k} = \frac{RT_k}{(V_k - b)^3} - \frac{3a'}{T_k V_k^4} = 0$$

tenglamalarni birgalikda  $a'$ ,  $b$  va  $R$  ga nisbatan echib, bu kattaliklarni bosim, hajm va temperaturaning kritik nuqtadagi qiymatlari orqali ifodalarini topamiz, ya'ni

$$a' = 3p_k T_k V_k^2, \quad b = \frac{1}{3} V_k, \quad R = \frac{8p_k V_k}{3T_k}.$$

*Eslatma: 4-7- masalalar 8- masala kabi yechiladi.*

9. Van-der-Vaals tenglamasini keltirilgan kattaliklar  $\pi = p/p_k$ ,  $\varphi = V/V_k$ ,  $\tau = T/T_k$  orqali yozing va  $v \gg 1$  holdida bu tenglama Klayperon-Mendeleyev tenglamasiga o'tishini ko'rsating.

*Ko'rsatma:* Van-der-Vaals tenglamasi  $\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$  dagi

$p$ ,  $V$ ,  $T$ ,  $a$ ,  $b$  va  $R$  larni  $p_k$ ,  $V_k$  va  $T_k$  orqali ifoda qilinadi.

10. Van-der-Vaals tenglamasidan foydalanib, gaz uchun ikkinchi, uchinchi, to'rtinchi virial koeffitsiyentlar va Boyl temperaturasi toping.

*Yechish.* Gazning holat tenglamasining virial shakli

$$pV = RT \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{V^n} \right)$$

ko'rinishida yoziladi, bu yerda  $B_n$  virial koeffitsiyent deb yuritiladi. Van-der-Vaals tenglamasining virial ko'rinishini olaylik:

$$\begin{aligned} p &= \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V} \left( \frac{V}{V-b} - \frac{a}{RTV} \right) = \\ &= \frac{RT}{V} \left( 1 + \frac{RTb-a}{RTV} + \frac{b^2}{V^2} + \frac{b^3}{V^3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Bundan

$$B_1 = b - \frac{a}{RT}, \quad B_2 = b^2, \quad B_3 = b^3$$

kelib chiqadi. Boyl temperaturasi  $B_1 = 0$  bo'lganda erishiladi.

Demak, Van-der-Vaals gazi uchun  $T_B = \frac{a}{Rb}$ .

11. Diterichi birinchi va ikkinchi tenglamalari bilan tavsiflanuvchi gaz uchun ikkinchi va to'rtinchi virial ko'effitsiyentlar va Boyl temperaturasini aniqlang.

12. Ideal gaz politropa va adiabata tenglamalarini ( $V, T$ ) va ( $p, V$ ) o'zgaruvchilarda yozing va boshqa termodinamik jarayonlar uchun tahlil qiling.

13. Elastik muhitda tovushning tarqalish tezligi  $v = \sqrt{K/\rho}$  ( $K$  - elastiklik moduli;  $\rho$  - muhit zichligi) ma'lum deb hisoblab: a) issiqlik sig'implar nisbati  $\gamma$  bilan izotermik elastiklik moduli orasidagi bog'lanishni; b) ideal gazda tovush to'liqinining tarqalish tezligining temperaturaga bog'lanishini toping ( $\gamma = C_p/C_v$ ).

14. Van-der-Vaals tenglamasi bilan tavsiflanuvchi gazda tovush tezligini toping.

15. Ideal gaz ichki energiyasi va entalpiyasini issiqlik sig'implar nisbati va tovush tezligi orqali ifodalang.

16. Sterjen cho'zilishida deformatsiya elastik deb hisoblab, izotermik va adiabatik uzayish ko'effitsiyentlari

$$\left(\frac{\partial l}{\partial f}\right)_{ad} = \frac{C_l}{C_f} \left(\frac{\partial l}{\partial f}\right)_{tot}$$

munosabat orqali bog'langanligini ko'rsating. Bu yerda  $C_l$  va  $C_f$ , mos ravishda,  $l$  va  $f$  o'zgarimas bo'lgandagi issiqlik sig'implari,  $l$  - sterjenning uzunligi,  $f$  - sterjenga ta'sir etuvchi kuch.

Ko'rsatma. Bu holda termodinamika birinchi qonuni  $\delta Q = dE - fdl$  ko'rinishni oladi.

17. Ideal paramagnetik uchun issiqlik sig'implari farqi  $C_{II} - C_M$  ni hisoblang.

18. Ideal paramagnetik uchun adiabata tenglamasini yozing.

19. Har qanday bir jinsli modda uchun

$$(C_p - C_v) \frac{\partial^2 T}{\partial p \partial V} + \left(\frac{\partial C_p}{\partial V}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - \left(\frac{\partial C_v}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v = 1$$

munosabat o'rinli ekanligini ko'rsating.

Yechish. Moddaning ichki energiyasi bosim va hajm funksiyasi bo'lsin, ya'ni  $E = E(p, V)$ . Ichki energiyaning o'zgarishi

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_v dp + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_p dV$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu kirgan xususiy hosilalarni topaylik:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V,$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_p = \left(\frac{\partial(\chi - pV)}{\partial V}\right)_p = \left(\frac{\partial \chi}{\partial V}\right)_p - p =$$

$$= \left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - p = C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - p.$$

Bularni ichki energiya o'zgarishi ifodasiga qo'yamiz va ichki energiya holat funksiyasi, ya'ni bosim va hajm bo'yicha aralash hosila simmetrik ekanligini hisobga olamiz. Bir qator murakkab bo'lmagan soddalashtirishlarni amalga oshirsak, masala sharti isbotlanadi.

20. Entropiya  $S = k \ln \Gamma(\epsilon)$  yoki  $S = \ln \Omega(\epsilon)$  ko'rinishda aniqlanadi. Katta sondagi zarralardan tashkil topgan sistema uchun bu ikkala ifoda ekvivalent ekanligini ko'rsating.

21. Bir jinsli og'irlik kuchi maydonida silindrda joylashgan, yuqoridan chegaralanmagan ideal gaz ustunining issiqlik sig'imi  $C_p$  ga tengligi ko'rsatilsin.

22. Balandlikka qarab troposfera temperaturasining pasayish sababi tushintirilsin va havoni ideal gaz deb hisoblab, atmosferaning balandlik bo'yicha temperatura gradientini aniqlang.

*Yechish.* Havo balandlikka ko'tarilganda, kichik bosim sohasiga o'tishi tufayli kengayadi. Bu kengayishni adiabatik deb hisoblash mumkin, chunki havoning issiqlik o'tkazuvchanligi juda kichik. Adiabatik jarayonda  $Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const}$ . Bu ifodadan

$$\frac{dT}{T} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{dp}{p} = 0.$$

Ikkinchi tomondan, balandlik ortishi bilan bosim o'zgarishi  $dp = -\rho g dh$ ,  $\rho$  - havo zichligi. Ideal gaz holat tenglamasi

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad \text{dan} \quad \rho = \frac{\mu p}{RT},$$

u holda

$$\frac{dp}{p} = \frac{\mu g}{RT} dh \quad \text{yoki} \quad \frac{dT}{T} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{p} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{RT} dh.$$

Bundan

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R},$$

havo uchun  $\gamma = 1,4$ ;  $\mu = 0,029$  kg/mol. Balandlikka qarab atmosferada gradienti  $\frac{dT}{dh} = -9,8 \cdot 10^{-5}$  K/m.

23. Termodinamika birinchi qonunidan foydalanib Klayperon-Mendeleyev tenglamasiga bo'ysunuvchi gaz uchun

$$C_p - C_v = R + V \left( \frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_p - p \left( \frac{\partial C_p}{\partial p} \right)_v$$

ekanligini ko'rsating.

24. Ideal elektron gaz holatining termik va kalorik tenglamalari  $pV = \frac{2}{3} E$  munosabat bilan bog'langan. Shu gaz uchun adiabat tenglamalari ( $p, V$ ) va ( $T, V$ ) o'zgaruvchilarda topilsin.

*Yechish:* Birinchi qonun ifodasi  $\delta Q = dE + pdV$  ga ko'ra

$$\delta Q = \left( \frac{\partial E}{\partial p} \right)_v dp + \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_p + p \right] dV$$

yoki

$$\begin{aligned} \delta Q &= \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_v dT + \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right] dV = \\ &= \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_v dT + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dV \end{aligned}$$

bo'ladi. Adiabatik jarayonlarda  $\delta Q = 0$  ekanligini hisobga olib, yuqoridagi birinchi ifodadan  $pV^{5/2} = \text{const}$  va ikkinchi ifodadan  $TV^{2/3} = \text{const}$  larni olamiz.

25. Van-der-Vaals gazining entropiyasi hisoblansin va uning adiabat tenglamasi  $p, V$  o'zgaruvchilarda topilsin.

26.  $C_p - C_v$  ayirmaning hajmiy kengayish koeffitsiyenti  $\alpha$  va siqilish koeffitsiyenti  $\beta$  bilan bog'liqligi ko'rsatilsin.

27. Ideal paramagnetiklarda ichki energiya magnitlanish vektoriga bog'liq emasligi ko'rsatilsin.

28. Bosimi temperaturaning chiziqli funksiyasi bo'lgan moddalar uchun  $C_v$  ning hajmga bog'liq emasligi ko'rsatilsin.

Van-der-Vaals gazi uchun  $\frac{\partial C_v}{\partial V} = 0$  tenglik olinsin.

29. Doimiy bosim ostida jism kengayishida uning entropiya-sining o'zgarishi hisoblansin.

30. Bir xil temperatura orilig'ida Karno sikli boshqa sikllarga nisbatan eng katta FIK ega ekanligi ko'rsatilsin.

31.  $N_1$  va  $N_2$  ta zarralardan tashkil topgan ikki xil gaz aralashtirilganda entropiyaning o'zgarishi hisoblansin.

32. Termodinamikaning uchinchi qonuniga asosan paramagnetiklar uchun Kyuri qonuni ( $\theta = C/T$ ) yetarlicha past temperaturalarda buzilishi ko'rsatilsin.

33. Sikllar metodi yordamida to'yingan bug' bosimining temperaturaga bog'lanishini toping.

34. Bir atomli bir mol ideal gaz uchun  $F$ ,  $\Phi$  va  $\chi$  termodinamik potentsiallarni toping.

35. Gibbs energiyasi o'zgarimas bo'lgan sistemalar uchun holat va kalorik tenglamalar topilsin.

36. Past temperaturalarda metallarda elektron gazining entropiyasi temperaturaga proporsionaldir. Issiqlik sig'imlar ayirmasi  $C_p - C_v$  ning temperaturaga bog'liqligi topilsin.

37. Siyrak Van-der-Vaals gazi bitta inversiya nuqtasiga ega bo'ladi. Umumiy holda qanday zichliklarda ikkita inversiya nuqtasi mavjud bo'ladi.  $(T, p)$  o'zgaruvchilarda Van-der-Vaals gazining inversiya egriligi grafigini tasvirlang.

38. Kyuri qonuniga bo'ysunuvchi moddalar uchun magnitokorik effekt kattaligi topilsin.

39. Termodinamika va statistik fizikaning farqi nimada?

40. Ichki parametrlar qanday fizik xususiyatiga qarab ajraladi?

41. Termodinamikaning dastlabki birinchi va ikkinchi fikrlari.

42. Ichki va tashqi energiya deb qanday energiyani tushunasiz?

43. Nima uchun termik va kalorik tenglama deyiladi?

44. Van-der-Vaals tenglamasi verial qatorga yozilsin.

45. Kritik nuqta. Kritik kattaliklar qanday hisoblanadi?

46. Bajarilgan elementar ish va issiqlik miqdori nima uchun to'liqmas differensial ko'rinishida, ichki energiya esa to'liq differensial ko'rinishida yoziladi?

47. Issiqlik miqdorining molekular ma'nosi ochilsin.

48. Yashirin issiqlik, Pfaffa tenglamasi.
49. Nima uchun gazlarda bosim o'zgarmas bo'lgandagi issiqlik sig'imi hajm o'zgarmas bo'lgandagi issiqlik sig'imidan katta bo'ladi?
50. Ideal gazlarda har qanday jarayon uchun issiqlik sig'imini qanday hisoblash mumkin?
51. Ideal gazni siqishda gazni sovishi yoki qizishi nimaga bog'liq?
52. Ideal gaz politropa tenglamasidan qanday jarayonlar tenglamasini keltirib chiqarish mumkin?
53. Entropiya va uning xossalari. Entropiyani hisoblash.
54. Qaytuvchi va qaytmas jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi.
55. Entropiyaning o'sish qonunini tushuntiring.
56. Gibbs paradoksi nima?
57. Suvni  $0 < t < 4$  °C temperatura intervalda siqqanda nima hodisa yuz beradi? Shuni tushuntiring.
58. Qanday shart bajarilganda, suv qattiq jism xususiyatiga ega bo'ladi?
59. Uchinchi qonunga asosan  $T = 0$  K da  $S = 0$  bo'lish sababini tushuntiring.
60. Termodinamik potentsiallar metodi deb qanday metodga aytiladi?
61. Gibbs–Gelmgol's tenglamalari.
62. Maksimal bajarilgan ish formulasi.
63. Integrallash doimiysi  $T = 0$  K da qanday hisoblanadi?
64. Inversiya nuqtasi, inversiya egriligi, inversiya temperaturasi qanday tushunchalar?
65. Qanday hodisa magnitokalorik hodisa deyiladi?

## IV bob

### ZARRALAR SONI O'ZGARUVCHAN SISTEMALAR. FAZA O'TISHLAR

#### 4.1. Zarralar soni o'zgaruvchan sistema termodinamik potentsiallari

Oldingi boblarda sistema va uni o'rab turgan muhit, ya'ni termostat o'zaro ta'sirlashish natijasida ular bir biri bilan faqat energiya almashinadi deb ko'rdik. Ko'p hollarda o'zaro ta'sirda energiya almashish bilan bir qatorda zarralar almashinishi ham yuz beradi. Sistemaga kiruvchi va undan chiqib ketuvchi zarralar o'zi bilan energiya tashiganligi uchun, bu yo'l bilan ham energiya almashinishi ro'y beradi. Ushbu bobda zarralar soni o'zgaruvchi sistemalarning xossalarini termodinamika metodlari bilan o'rganamiz. Sistemada zarralar turli sabablar bilan o'zgarishi mumkin. Masalan, quyidagi hollarda sistemada zarralar soni o'zgaruvchi bo'ladi:

To'yingan bug'i bilan muvozanatdagi suyuqlik. Bunday sistemada umumiy hajm yoki temperaturaning o'zgarishi suyuqlik va uning bug'idagi zarralar sonining nisbati o'zgarishiga olib keladi.

Temperatura yoki boshqa parametrlar o'zgarishi natijasida sistemada boradigan kimyoviy reaksiya vaqtida reaksiyada ishtirok etayotgan va hosil bo'layotgan zarralar soni o'zgarib turadi va uzluksiz biri ikkinchisiga o'tib turadi.

Muvozanatli nurlanishda temperatura o'zgarishi nurlanish spektrida nurlanish kvanti – fotonlarning soni o'zgarishiga olib keladi.

O'zaro bog'lanmagan mustaqil sistemalar orasidagi o'zaro ta'sir paydo bo'lganda ham zarralar soni o'zgarishi mumkin.

Bu ro'yxatni yana davom ettirish mumkin. Shuni esda saqlash kerakki, tashqi yoki ichki parametrlar o'zgarishida sistemadagi muvozanat buziladi. Biz muvozanatdagi sistemalarni o'rganish bilan cheklanamiz. Demak, o'rganilayotgan sistemada

zarralar soni o'zgaruvchi bo'lsa ham, u muvozanat holatdan chiqib ketmasligi kerak.

Zarralar soni o'zgarib turuvchi sistema holati temperatura  $T$ , parametrlar va berilgan turdagi zarralar soni  $N_1, N_2, \dots, N_r$  yoki bunga to'g'ri keluvchi konsentratsiya  $c_i = N_i / \sum N_k$  bilan aniqlanadi. Bunday sistemalarda ichki energiyasining o'zgarishi faqat uzatilgan issiqlik va sistema tomonidan bajarilgan ish hisobiga yuzaga kelmasdan, balki sistemada zarralar sonining o'zgarishi hisobiga ham yuzaga keladi. Bu holni hisobga oluvchi qaytuvchi va qaytmas jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy tengsizligi quyidagicha yoziladi:

$$TdS \geq dE + \sum_i f_i d\lambda_i - \sum_k \mu_k dN_k. \quad (4.1)$$

Bu yerda  $\mu_k$  -  $k$  navdagi zarralarning kimyoviy potentsiali. (4.1)dagi oxirgi had zarralar sonining o'zgarishini aks etdiradi.

Umumiy qoidalarga asosan yozilgan (4.1) tengsizlikni oddiy sistema uchun hosil qilishni ko'rib chiqamiz. Zarralar soni o'zgarmaydigan sistema uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi (3.86) ga kiruvchi kattaliklar  $E, S$  va  $V$  additivlik xossasiga ega bo'lganligi uchun tenglamani bu kattaliklarning bitta zarraga to'g'ri kelgan solishtirma qiymatlari uchun ham yozish mumkin, ya'ni

$$d\left(\frac{E}{N}\right) = Td\left(\frac{S}{N}\right) - pd\left(\frac{V}{N}\right). \quad (4.2)$$

Bu tenglama umumiylikka ega bo'lib, unga kiruvchi solishtirma kattaliklarning nima sababdan o'zgarishiga bog'liq emas. Haqiqatan ham, solishtirma kattaliklar uchun o'zgarish kattaliklarning o'zining o'zgarishi hisobigami yoki zarralar soni o'zgarishi sabablimi tamoman farqi yo'q. Demak, (4.2) tenglamada zarralar soni  $N$  o'zgaruvchi bo'lishi va uni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{dE}{N} = E \frac{dN}{N^2} + T \frac{dS}{N} - TS \frac{dN}{N^2} - p \frac{dV}{N} + pV \frac{dN}{N^2}.$$

Belgilash kiritamiz:

$$\mu = \frac{E - TS + pV}{N}, \quad (4.3)$$



bundan

$$dE = TdS - pdV + \mu dN, \quad (4.4)$$

tenglamani hosil qilamiz. (4.4) zarralar soni o'zgaruvchi oddiy sistema uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi hisoblanadi. Bu tenglamaga asosan kimyoviy potensial

$$\mu = \left( \frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S,V}; \quad \frac{\mu}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial N} \right)_{E,V}. \quad (4.5)$$

Sistema turli xil gazlardan tashkil topgan bo'lsa va unga qandaydir tashqi kuchlar ta'sir qilayotgan bo'lsa, asosiy tenglama (4.1) ko'rinishni qabul qiladi.

Har tomondan  $p$  bosim ta'siri ostida bo'lgan sistemadagi qaytuvchi jarayon uchun termodinamik potenciallar differensialini Lejandr metodi bilan topamiz:

$$\begin{aligned} dE &= TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i, \\ dF &= -SdT - pdV + \sum_i \mu_i dN_i, \\ d\Phi &= -SdT + Vdp + \sum_i \mu_i dN_i, \\ d\chi &= TdS + Vdp + \sum_i \mu_i dN_i. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Bu yerda  $dE$ ,  $dF$ ,  $d\Phi$ ,  $d\chi$  mos ravishda erkin, Gelmgols, Gibbs energiyasi va entalpiya differensiallari. Bu tenglamalardan zarralar soni o'zgaruvchan sistemada kimyoviy potensial  $\mu_i$  ni aniqlaymiz:

$$\mu_i = \left( \frac{\partial E}{\partial N_i} \right)_{S,V} = \left( \frac{\partial F}{\partial N_i} \right)_{T,V} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial N_i} \right)_{T,p} = \left( \frac{\partial \chi}{\partial N_i} \right)_{S,p}. \quad (4.7)$$

Bu ifodalardan ko'rinib turibdiki, kimyoviy potensialni ixtiyoriy termodinamik potentsialdan zarralar soni bo'yicha olingan hosila bilan aniqlash mumkin ekan.

Hamma termodinamik potenciallar additiv funksiyalardir. Bir xil sortdagi zarralardan tashkil topgan sistema uchun bu shuni anglatadiki, agar zarralar soni  $N$  necha marta o'zgarsa, termodinamik potenciallar shuncha marta o'zgaradi:

$$E = Nf_1\left(\frac{S}{N}, \frac{V}{N}\right), \quad F = Nf_2\left(T, \frac{V}{N}\right),$$

$$\Phi = Nf_3(T, p), \quad \chi = Nf_4\left(\frac{S}{N}, p\right). \quad (4.8)$$

(4.8) tenglamalar sistemasidan quyidagini hosil qilamiz:

$$\mu = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial N}\right)_{T,p} = f_3(T, p).$$

Demak, bitta zarraga to'g'ri kelgan Gibbs termodinamik potentsiali (energiyasi) kimyoviy potentsialga teng ekan.

Agar sistema har xil navdagi zarralardan tashkil topgan bo'lsa, u holda Gibbs termodinamik potentsiali quyidagicha yoziladi:

$$\Phi = \sum_i N_i \mu_i. \quad (4.9)$$

Zarralar soni o'zgaruvchan bo'lgan sistemalarni o'rganishda, odatda, katta termodinamik potentsial

$$B(T, V, \mu_i) = E - TS - \sum_i N_i \mu_i = F - \Phi = -pV \quad (4.10)$$

ishlatiladi. Bu potentsial yordamida sistemadagi har bir navdagi zarralar soni  $N_i$  ni topish mumkin bo'ladi. Haqiqatdan ham (4.6) va (4.10) dan Lejandir metodiga asosan

$$dB = -SdT - pdV - \sum_i N_i d\mu_i \quad (4.11)$$

ni olamiz. Bu tengliklardan entropiya  $S$ , bosim  $p$  va zarralar soni  $N_i$  ni topish mumkin.

## 4.2. Gibbsning katta kanonik taqsimoti

Gibbsning kichik kanonik taqsimoti zarralar soni o'zgarmac bo'lgan muvozanatdagi berk sistemalar uchun chiqarilgan edi. U yerda sistemani termostat bilan o'zaro ta'siri faqat energiya almashinishidan iborat deb qaradik. Muvozanat holatda sistema va termostat o'rtasida energiya va zarralar almashinishi uzluksiz holda o'tib turadi. Umumiy holda sistema va termostatning

energiya almashinishi faqat o'zaro ta'sir orqali emas, balki sistemaga kirayotgan va sistemadan chiqib ketayotgan zarralar orqali ham amalga oshadi. Chunki zarralar o'zi bilan birga energiyani olib yuradi. Bu holda faqat energiya emas, balki sistemani tashkil qiluvchi zarralar soni ham o'zgaruvchan kattalik bo'ladi. Shuning uchun sistema holatini xarakterlashda berk sistemaning to'liq energiyasi bilan birgalikda zarralar sonini ham ko'rsatish kerak bo'ladi. Zarralar soni o'zgarimas bo'lgan sistema va termostat o'zaro muvozanatda bo'lishi uchun ularning temperaturalari va bosimlari ham teng bo'lishi kerak edi. Zarralar soni o'zgaruvchi sistemaning muvozanatda bo'lishi uchun yuqoridagidan tashqari ularning kimyoviy potentsiallari ham teng bo'lishi kerak ekan.

O'zaro ta'sir tufayli sistema va termostat turli xil energiyali va zarralar soni o'zgaruvchan bo'lgan holatlarda bo'la oladi.<sup>1</sup> Sistema  $i$ - holatida bo'lishi va shu holatda  $n$  ta zarraga ega bo'lish ehtimolligini Gibbsning katta kanonik taqsimoti  $W_{i,n}$  aniqlaydi. Gibbs katta kanonik taqsimoti  $W_{i,n}$  ning oshkora ko'rinishini aniqlashga kirishamiz. Sistema bilan termostatdagi to'liq zarralar soni  $N$  o'zgarimas bo'ladi. Taqsimot funksiyasini olish uchun (2.6) ifodadagi kattaliklarni quyidagi kattaliklar bilan almashtiramiz:

$$\Omega(\varepsilon_i) \rightarrow \Omega(\varepsilon_i, n) \quad \text{va} \quad \Omega_0(E_i) \rightarrow \Omega_0(E_i, N_0).$$

Bu yerda  $E_i = E - \varepsilon_i$  va  $N_0 = N - n$ , mos ravishda, termostat energiyasi va termostatdagi zarralar sonidir.  $E, N$  - sistema va termostatning to'liq energiyasi va zarralar soni. Ehtimolliklarni ko'paytirish xossasiga asosan (2.6) ifodani quyidagicha yozish mumkin bo'ladi:

$$W_{i,n} \sim \Omega_0(E - \varepsilon_i, N - n) \Omega(\varepsilon_i, n). \quad (4.12)$$

Holatlar soni  $\Omega_0(E - \varepsilon_i, N - n)$  ni quyidagi

$$\Omega_0(E - \varepsilon_i, N - n) = e^{S(E - \varepsilon_i, N - n)}$$

---

<sup>1</sup> Sistema va termostatning o'zaro ta'sirini oshkor holda foydalanmasak ham, uni kuchsiz deb olamiz. Agar o'zaro ta'sir kuchli bo'lsa, nochiziqli effektlar rol o'ynay boshlaydi va masala murakkablashadi. Bunday holni o'rganish ushbu o'quv dasturi doirasiga kirmaydi.

ifoda bilan almashtirib,  $\varepsilon_i \ll E$  va  $n \ll N$  ekanligini hisobga olib,  $\Omega(E - \varepsilon_i, N - n)$  ni kichik kattaliklarning darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz va o'zgaruvchanlarning birinchi darajalari ishtirok etgan hadlar bilan chegaralanamiz, natijada (4.12) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$W_{i,n} = \text{const} \cdot \exp\left(\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n). \quad (4.13)$$

Bu yerda const - normirovka sharti  $\sum_i \sum_n W_{i,n} = 1$  dan topiladi.

Natijada energiyasi va zarralar soni o'zgaruvchan va termostat bilan muvozanatda bo'lgan sistema uchun Gibbsning katta kanonik taqsimotining oshkora ko'rinishini olamiz:

$$W_{i,n} = \frac{\exp\left(\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n)}{\sum_i \sum_n \exp\left(\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n)} = \frac{\exp\left(\frac{-\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n)}{\tilde{Z}}, \quad (4.14)$$

$$\tilde{Z} = \sum_i \sum_n \exp\left(\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n). \quad (4.15)$$

Bu yerda  $\mu = -\theta \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{n=0}$  - kimyoviy potensial yoki parsial potensial,  $\Omega(\varepsilon_i, n)$  - energiyasi  $\varepsilon_i$  va zarralar soni  $n$  bo'lgan holatlar soni yoki oddiygina holatlar soni deb yuritiladi,  $\tilde{Z}$  esa energiyasi va zarralar soni o'zgaruvchan sistema holat funksiyasi yoki *katta statistik yig'indi* deyiladi. Agar sistemadagi zarralar soni  $n = \bar{n} = N$  bo'lsa, u holda katta kanonik taqsimot (4.14) kichik kanonik taqsimotga o'tadi.

Sistemadagi holatlar soni

$$\Omega(\varepsilon_i, n) = \Delta \Gamma_n / h^{3n}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu yerda  $\Delta \Gamma_n$  -  $n$  ta zarrani o'z ichiga olgan  $\varepsilon_i$  energiyali fazalar fazosining hajmi:

$$\Delta \Gamma_n = \Delta p_1 \Delta p_2 \dots \Delta p_{3n} \Delta q_1 \Delta q_2 \dots \Delta q_{3n}.$$

Yuqoridagilarni hisobga olib, (4.14)ni quyidagicha yozish mumkin:

$$dW_{i,n} = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Gamma_n}{\tilde{Z} h^{3n}}.$$

Gibbsning katta kanonik taqsimotidan foydalanib, energiyasi va zarralar soni o'zgaruvchan bo'lgan sistemalarning holatini aniqlovchi termodinamik kattaliklarning o'rtacha qiymatini aniqlash mumkin:

$$\bar{L} = \sum_i \sum_n L W_{i,n}. \quad (4.16)$$

Xususan, ixtiyoriy energiyali holatdagi zarralar sonining o'rtacha qiymati, (4.14)–(4.16) ga asosan, quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\bar{n} = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_i \sum_n \exp\left(\frac{n\mu - \varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n). \quad (4.17)$$

Bu ifoda juda muhim bo'lib, uning yordamida Maksvell, Boze–Eynshteyn va Fermi–Dirak taqsimotlarini olish mumkin.

Ko'pincha qulaylik uchun  $z = \exp(\mu/kT)$  aktivlik kiritilib, holat funksiyasi  $\tilde{Z}$  quyidagicha yoziladi:

$$\tilde{Z} = \sum_{n=1}^N z^n Z_n,$$

bu yerda  $Z_n$  – zarralari soni  $n$  ta bo'lgan sistema uchun statistik yig'indi. Klassik yaqinlashishda

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \sum_{n=1}^N \exp\left(\frac{\mu n}{\theta}\right) Z_n \simeq \sum_{n=1}^N \exp\left(\frac{\mu n - F_n}{\theta}\right) \simeq \\ &\simeq \exp\left(\frac{\mu \bar{n} - F}{\theta}\right) \simeq \exp\left(\frac{\mu N - F}{\theta}\right) = \exp\left(\frac{\Phi - F}{\theta}\right). \end{aligned}$$

Bu yerda  $\Phi = \mu N$  Gibbs termodinamik potentsiali,  $F$  – erkin energiya,  $\mu N - F = \Phi - F = pV$ . Demak,

$$\tilde{Z} = \exp\left(\frac{pV}{\theta}\right), \quad p = \frac{\theta}{V} \ln \tilde{Z} \quad (4.18)$$

bo'ladi.

Gibbs kichik kanonik taqsimot funksiyasini olishda (2.1- band) formal kiritilgan kattalik,  $\theta$  – statistik temperatura, chuqur fizik ma'noga ega bo'lgani kabi, bu yerda yana formal ravishda kiritilgan,  $\mu$  – kimyoviy potensial ham shunday ma'noga ega. Buni ochish uchun statistik muvozatda bo'lgan birorta sistemani ko'ramiz. Unda bir-biri bilan kuchsiz ta'sirlashayotgan ikkita sistemachani ( $\mu_1, n_1$  va  $\mu_2, n_2$ ) faraziy ajratamiz. O'zaro ta'sir sistemachalar orasida energiya va zarralar bilan almashuvni ta'minlab beradi. Har ikkala sistemacha uchun va ularni bitta sistemacha deb qarab, (4.13) ko'rinishdagi holatlarning taqsimot funksiyasini yozish mumkin. Bunday taqsimot funksiyalarini ehtimolliklarni ko'paytirish qoidasiga asosan solishtirib quyidagi ikkita tenglamani olamiz:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta, \quad (4.19)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu. \quad (4.20)$$

Bu tenglamalardan birinchisi, bizga ma'lum bo'lib, termostat va u bilan statistik muvozanatdagi sistemachaning statistik temperaturasi bir xil ekanligini ko'rsatadi. Ikkinchi tenglama umuman yangi bo'lib,  $\mu$  termostatga tegishli kattalik ekanligini ko'rsatadi. Statistik muvozanatda termostatni tashkil qilgan barcha sistemachalarda birday qiymat qabul qilar ekan. Demak, ikkita sistema statistik muvozatda bo'lishi uchun ularning temperaturalari bir xil bo'lishidan tashqari ularning kimyoviy potentsiallari ham bir xil bo'lishi kerak ekan.

### 4.3. Holat kattaliklari

Bir atomli  $N$  zarradan tashkil topgan ideal gaz holatini xarakterlovchi kattaliklarni Gibbs katta kanonik taqsimotidan foydalanib, hisoblashni ko'rib chiqamiz. Buning uchun katta statistik yig'indini, ya'ni sistemaning holat funksiyasini hisoblash kerak. Ideal gazda atomlar erkin harakatda bo'lganligi uchun holatlar kvantlanmagan bo'ladi. Shuning uchun  $\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$  va yig'indini integral bilan almashtiramiz, ya'ni

$$\begin{aligned}\tilde{Z} &= \sum_{i,n} \exp\left(\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n) = \\ &= \sum_n \exp\left(\frac{\mu n}{\theta}\right) \int \exp\left(-\frac{\varepsilon(p)}{\theta}\right) d\Omega(\varepsilon(p), n).\end{aligned}\quad (4.21)$$

Kichik kononik taqsimotni hisoblashdagi amallarni bajarib  $\tilde{Z}$  uchun quyidagi ifodani yozamiz:

$$\tilde{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3n/2} V^n \exp\left(\frac{\mu n}{kT}\right).\quad (4.22)$$

Bu yerda

$$\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}} = \lambda$$

belgilash kiritamiz va uni de-Broyl «issiqlik» to'liqini uzunligi deb ataymiz. Bu belgilashda  $\tilde{Z}$  quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\tilde{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^n \exp\left(\frac{\mu n}{kT}\right).\quad (4.23)$$

Ushbu yig'indini hisoblab,  $\tilde{Z}$  uchun quyidagi hosil qilamiz:

$$\tilde{Z} = \exp\left[\frac{V}{\lambda^3} \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right)\right].\quad (4.24)$$

Holat funksiyasi yordamida istalgan termodinamik kattliklarni hisoblash mumkin. Birinchi navbatda ko'rilyotgan  $V$  hajmdagi o'rtacha zarralar sonini topamiz. Bu kattalikni ikki yo'l bilan hisoblash mumkin. Birinchisi Gibbsning katta kanonik taqsimoti yordamida bo'lsa, ikkinchisi esa bevosita katta statistik yig'indi yordamida hisoblash mumkin. Natijada  $\tilde{N}$  uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\bar{n} = N = kT \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \mu} = \frac{V}{\lambda^3} \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right).\quad (4.25)$$

Bu ifodadan kimyoviy potensial

$$\mu = kT \ln \frac{\bar{n} \lambda^3}{V}.\quad (4.26)$$

Ideal gaz bosimi

$$p = kT \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial V} = \frac{kT\bar{n}}{V}. \quad (4.27)$$

Ideal gaz ichki energiyasi

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial T} = \frac{3}{2} kT\bar{n}. \quad (4.28)$$

Ideal gaz entropiyasi

$$S = \frac{E}{T} + k \ln \tilde{Z} = \frac{5}{2} k\bar{n}. \quad (4.29)$$

Boshqa termodinamik kattaliklarni ham shu yo'l bilan hisoblash mumkin bo'ladi.

#### 4.4. Nurlanish termodinamikasi

Termodinamika qonunlarini tatbiq qilish sohasi juda kengdir. U klassik va kvant sistemalarga, moddaga va maydonga, eng avval nurlanishning elektromagnit maydoniga tatbiq qilinadi. Nurlanish nazariyasi nazariy fizikaning eng katta mustaqil bo'limlaridan biri bo'lib hisoblanadi va uni to'la bayon qilish darslikning vazifasiga kirmaydi. Shuning uchun bu bo'limda nurlanish termodinamikasini o'rganish bilan chegaralanamiz. Termodinamika muvozanat holatdagi sistemalar bilan ish ko'rganligi uchun, muvozanatli nurlanish masalalarini ko'rib chiqamiz.

Agar nurlanish o'zini o'rab olgan muhit bilan termodinamik muvozanatda bo'lsa, u muvozanatli nurlanish deyiladi. Muvozanatli nurlanish temperaturasi muvozanat holatda bo'lgan jism temperaturasiga teng bo'ladi. Bu fikrni (1893- y.) Galitsin bildirgan.

Termodinamikada muvozanatli nurlanish: hajm, temperatura va bosim bilan xarakterlanuvchi sistema ko'rinishida tasavvur qilinadi. Shunga ko'ra, holat tenglamasi  $F(p, V, T) = 0$  bo'ladi.

Devorlarining temperaturasi  $T$  bo'lgan berk kovak idishni ko'ramiz. Idish devorlarining nurlanishi hisobiga kovakning ichi turli yo'nalishda tarqalayotgan, mumkin bo'lgan chastota va qutblanishga ega bo'lgan elektromagnit to'lqinlari bilan



to'lgan bo'ladi. Muvozanatda idishning barcha nuqtalari nurlanish energiyasining zichligi bir xil bo'lib, faqat temperaturaga bog'liq bo'ladi. Bundan tashqari nurlanish muvozanatli va statsionar bo'lganligi uchun idishning barcha nuqtalari nurlanish energiyasining chastota bo'yicha taqsimoti bir tekis bo'ladi. Termodinamikada bunday nurlanish elektromagnit to'lqinlarning to'plami deb qaraladi. Agar  $\nu$ ,  $\nu + d\nu$  chastota intervalida nurlanishning spektral zichligi  $p_\nu d\nu$  bo'lsa, u vaqtda nurlanish energiyasi zichligi

$$u = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu. \quad (4.30)$$

Nurlanish hajm bo'yicha tekis taqsimlanganligi uchun  $V$  hajmdagi nurlanish to'la energiyasi  $E = uV$ .

Solishtirma entropiya

$$s = \int_0^\infty s_\nu d\nu, \quad (4.31)$$

to'la entropiya esa  $S = sV$ .

Agar jismga  $\nu$ ,  $\nu + d\nu$  chastota intervalida tushadigan nurlanish energiyasi  $I_\nu d\nu$  bo'lsa, nurlanish energiyasining  $I_{\nu A} d\nu$  qismi jism tomonidan yutiladi,  $I_{\nu R} d\nu$  qismi qaytadi va  $I_{\nu D} d\nu$  qismi jismdan o'tib ketadi. Bu holatni quyidagicha yozish mumkin:

$$I_{\nu A} d\nu + I_{\nu R} d\nu + I_{\nu D} d\nu = I_\nu d\nu \quad (4.32)$$

yoki

$$\frac{I_{\nu A}}{I_\nu} + \frac{I_{\nu R}}{I_\nu} + \frac{I_{\nu D}}{I_\nu} = 1, \quad (4.33)$$

bu yerda  $\frac{I_{\nu A}}{I_\nu} = A_\nu$ ,  $\frac{I_{\nu R}}{I_\nu} = R_\nu$ ,  $\frac{I_{\nu D}}{I_\nu} = D_\nu$  - mos ravishda jismning yutish, qaytarish va o'tkazish qobiliyatlari.

Agar  $R_\nu + D_\nu = 0$  va  $A_\nu = 1$  bo'lsa, bunday jism absolut qora jism deyiladi; agar  $A_\nu + D_\nu = 0$  va  $R_\nu = 1$  bo'lsa, jism qaytarish ko'rsatkichi 100% bo'lgan ko'zgu bo'ladi;  $A_\nu + R_\nu = 0$  va  $D_\nu = 1$  bo'lsa, jism absolut shaffof bo'ladi. Tabiatda absolut

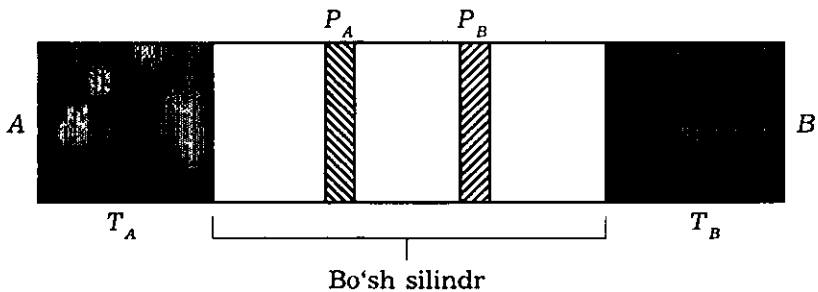
qora, to'liq qaytaruvchi ko'zgu va butunlay shaffof jismlar bo'lmaydi, ammo yuqoridagi shartlarni taxminan qanoatlantiruvchi jismlar mavjud.

Amaliy nuqtayi nazardan absolut qora jismni hosil qilish metodi 1895- yil Vin va Lummer tomonidan taklif qilingan. Bu metodga ko'ra ichi g'ovak izolatsiyalangan tirqishli jism olib, bu tirqish orqali yuborilgan nur idish ichida ko'p marta qaytish natijasida tamoman yutiladi, nurning hamma energiyasi issiqlik energiyasiga aylanadi. G'ovak ichida muvozanatli nurlanish hosil bo'ladi. Endi teskari holni ko'ramiz, ya'ni berk g'ovak olib, uni  $T$  temperaturagacha qizdiramiz va undan tirqish ochamiz. Tirqishdan chiqadigan nurlanish yana muvozanatli bo'ladi. Bunday nurlanishni absolut qora jismning nurlanishi deb qabul qilish mumkin.

Termodinamikaning umumiy qonunlarini muvozanatli nurlanishga tatbiq qilish natijasida quyidagi qonuniyatlarni aniqlash mumkin:

1. **Nurlanish bosimining mavjudligi (yorug'lik bosimi).** Nazariy jihatda nurlanish bosimining mavjudligini birinchi marta (1876- yil) Bartoli tomonidan termodinamikaning ikkinchi qonuniga asoslanib isbot qilingan. Tajribada yorug'lik bosimini (1901- yil) birinchi bo'lib Lebedev aniqlagan.

Nurlanish bosimi borligini quyidagi faraziy tajribada aniqlash mumkin. Temperaturalari  $T_A$  va  $T_B$  ( $T_A > T_B$ ) bo'lgan ikkita absolyut qora jism bir-biriga oq devorli bo'sh silindr bilan birlashtirilgan (4.1- rasm). Silindr ichiga devorlari oq  $P_A$  va  $P_B$  porshen joylashtirilgan.  $P_B$  porshenni silindr ichidan olamiz va  $P_A$  porshenni  $A$  jismga zich qilib yaqinlashtiramiz. Bu holda silindrning ichi  $B$  jism bilan muvozanatda bo'lgan nurlanish bilan to'ladi. Endi  $P_A$  porshenni olib tashlab,  $P_B$  porshenni kiri-



4.1- rasm.

tamiz va  $A$  jism tomon unga zich yaqinlashguncha suramiz. Silindr ichidagi nurlanish  $A$  jism tomonidan to'liq yutiladi. Bu jarayonni birnecha marta takrorlaymiz. Natijada temperaturasi yuqori bo'lishiga qaramasdan  $A$  jism qiziydi, ya'ni issiqlik sovuq jismdan issiq jismga o'tadi. Bunday bo'lishi uchun, termodinamikaning ikkinchi qonuniga asosan, ish bajarilishi kerak. Qanday kuchga nisbatan ish bajariladi? Bu yerda faqat bitta kuch bo'lishi mumkin, u ham bo'lsa nurlanishning porshenga bosim kuchidir. Shunday qilib, nurlanishning bosimi borligi isbotlandi. Bosimni termodinamika qonunlari orqali hisoblab bo'lmaydi. Nurlanishning kvant nazariyasida uning bosimi borligi oson tushintiriladi. Nurlanish foton gazidan iborat ekanligini eslasak yetarli. Hisoblashlar natijasida bosim  $p = u/3$  ekanligi aniqlangan.

2. **Kirxgof qonuni.** Bu qonunga asosan, nurlanish intensivligining yutish koeffitsiyentiga nisbati jismlar tabiatiga bog'liq bo'lmasdan, barcha jismlar uchun temperatura va chastotaning universal funksiyasidir.

Izolyatsiyalangan yopiq kovakda biri absolut qora va ikkinchisi «oddiy» (absolut qora bo'lmagan) bo'lgan ikkita jism bor bo'lsin. Sistema yopiq bo'lganligi uchun kovak ichida nurlanish va jismlar termodinamik muvozanatda bo'ladi. Demak, birinchidan, ularning temperaturalari bir xil bo'ladi, ikkinchidan, birlik vaqt ichida jismlar yutadigan energiya ularning nurlanish energiyasiga teng bo'ladi, uchinchidan, nurlanish izotrop va bir jinsli bo'lganligi uchun jismlarning birlik sirtga birlik vaqt ichida tushadigan nurlanish energiyasi ham o'zgarmas bo'ladi. Kovakdagi nurlanish intensivligi  $I_\nu$  bo'lsin. U vaqtda birlik sirtga tushayotgan nurlanish energiyasining zichligi  $I_\nu d\nu$  ga teng. Absolut qora jismning nurlanish qobilyati  $\epsilon_\nu^k$  bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$I_\nu d\nu = \epsilon_\nu^k d\nu, \quad I_\nu = \epsilon_\nu^k. \quad (4.34)$$

«Oddiy» jism sirtga tushayotgan nurlanish energiyasi yana  $I_\nu d\nu$  ga teng. Bu energiyaning  $A_\nu$  qismi yutilganligi uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'lishi kerak:

$$A_\nu I_\nu d\nu = \epsilon_\nu d\nu, \quad A_\nu I_\nu = \epsilon_\nu. \quad (4.35)$$

(4.34) va (4.35) ifodalarni solishtirib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\frac{\varepsilon_\nu}{A_\nu} - \varepsilon_\nu^k - f(\nu, T). \quad (4.36)$$

Bu tenglik Kirxgof qonunini ifodalaydi. Bu qonunni hisoblab topishda «oddiy» jismning xossalari to'g'risida hech qanday fikr bildirmadik. Shu sababli  $f(\nu, T)$  funksiya universal bo'lib, jismlarning tabiati va boshqa parametrlariga bog'liq emas. U faqat absolut qora jismni xarakterlaydi. Universal funksiyaning oshkora ko'rinishini aniqlash uchun izlanishlar olib borilgan (Bolsman, Vin, Jins, Plank). Bu yo'nalishdagi urinishlar bir qator qonuniyatlarning ochilishiga sababchi bo'lgan. Fizikaga yangi – energiya kvanti tushunchasini kiritish bilan Plank bu masalaga nuqta qo'ydi. Plank formulasini olishni keyinroq ko'rib chiqamiz.

**3. Stefan-Bolsman qonuni.** Tajriba natijalariga asoslanib Stefan (1879- y.) va termodinamika ikkinchi qonuniga va yorug'likning bosimi mavjudligiga asoslanib Bolsman (1884- y.) tomonidan absolut qora jismning muvozanatli nurlanish to'liq (integral) energiyasining zichligi temperaturaning to'rtinchi darajasiga proporsional ekanligi aniqlangan.<sup>3</sup>

Ushbu qonunni termodinamikaning ikkinchi qonuniga asoslanib keltirib chiqarishni ko'rib chiqamiz. Muvozanatli nurlanishga holatning termik va kalorik kattaliklarini bog'lovchi tenglamani

$$T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \quad (4.37)$$

tatbiq qilamiz. Yorug'lik bosimi  $p = u/3$  nurlanish energiyasi  $E = uV$  ekanligini hisobga olib, yuqoridagi tenglamani qayta yozamiz:

$$T \frac{du}{dT} = 4u. \quad (4.38)$$

Bu tenglamani integrallab Stefan–Bolsman qonunini hosil qilamiz:

$$u = \sigma T^4, \quad (4.39)$$

---

<sup>3</sup> Ushbu qonunni Stefan ixtiyoriy jismning issiqlik nurlanishi uchun ta'riflagan, lekin keyingi o'tkazilgan o'lchashlar bu fikr noto'g'ri ekanligini ko'rsatdi.

bu yerda  $\sigma$  o'zgarmas kattalik Stefan-Bolsman doimiysi deyiladi va tajribadan yoki statiistik fizika yordamida topiladi:

$$\sigma = 7,64 \cdot 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{grad}^4 \cdot \text{m}^3} = 1,82 \cdot 10^{-23} \frac{\text{kkal}}{\text{grad}^4 \cdot \text{m}^3}.$$

Stefan-Bolsman qonunidan foydalanib, muvozanatli nurlanish uchun termodinamik kattaliklarni aniqlaymiz. Buning adiabatik jarayon uchun entropiya tenglamasini yozamiz:

$$dS = \frac{dE + pdV}{T}. \quad (4.40)$$

Ushbu tenglamadagi nurlanish energiyasi va bosimini temperatura va hajm orqali yozib quyidagini olamiz:

$$dS = d\left(\frac{4}{3}\sigma T^3 V\right). \quad (4.41)$$

Yuqoridagi tenglamani integrallash natijasida muvozanatli nurlanish entropiyasini topamiz:

$$S = \frac{4}{3}\sigma T^3 V + S_0, \quad (4.42)$$

bu yerda  $S_0$  - integrallash doimiysi. Adiabatik jarayonda  $S - S_0 = \text{const}$  bo'lganligi uchun muvozanatli nurlanish adiabatata tenglamasini bosim, temperatura, hajm va energiya zichligi orqali quyidagicha yozish mumkin:

$$T^3 V = \text{const} \quad \text{yoki} \quad pV^{4/3} = \text{const} \quad \text{yoki} \quad uV^{4/3} = \text{const}. \quad (4.43)$$

Muvozanatli nurlanishda bosim hajmga bog'liq bo'lmaydi, ya'ni hajm o'zgarmas bo'lganda bosim ham o'zgarmaydi. Demak, muvozanatli nurlanishda o'zgarmas bosimdagi issiqlik sig'imi  $C_p = \infty$  bo'ladi. Shunga ko'ra nurlanish uchun muvozanatning

barqarorlik shartlari  $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T < 0$  va  $\frac{T}{C_p} > 0$  tatbiq qilinmaydi. Ammo

nurlanishning muvozanatda bo'lishi adiabatik koeffitsiyent qo'yiladigan quyidagi shart bilan xarakterlanadi:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = -\frac{4}{9} \frac{\sigma T^4}{V} < 0. \quad (4.44)$$

Quyida muvozanatli nurlanish termodinamik kattaliklar – erkin energiya, entalpiya, Gibbs termodinamik potentsiali va kimyoviy potentsiallar uchun ifodalarni keltiramiz:

$$F = -\frac{1}{3}\sigma T^4 V, \quad \chi = \frac{4}{3}\sigma T^4 V, \quad \Phi = 0, \quad \mu = 0.$$

4. *Vin qonuni.* Muvozanatli nurlanish energiyasi zichligining spektral taqsimotining maksimumi temperatura ortishi bilan katta chastotalar tomoniga siljiydi.

Stefan-Bolsman qonuni muvozanatli nurlanishning to'la energiyasiga taalluqli bo'lib, uning spektr bo'yicha taqsimoti haqida hech narsa aytolmaydi. Bo'shliqda nurlanish masalasini o'rganish natijasida Vin (1893- y.) muvozanatli nurlanish energiyasi zichligining spektrini aniqlovchi funksiya xususiyatini topdi. Spektral taqsimot  $f(\nu/T)$  aniq ko'rinishi no'malum bo'lib, u chastota va temperaturaga mustaqil ravishda emas, balki ularning nisbati  $\nu/T$  orqali bog'langan bo'lishi kerak degan fikrni ilgari suradi. Shu bilan birga Stefan-Bolsman qonunidagi temperaturaning to'rtinchi darajasini olish uchun nurlanish energiyasining spektral taqsimot funksiyasini

$$\rho_\nu(T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (4.45)$$

ko'rinishda yozishni taklif qiladi. Haqiqatan ham (4.45) ifodada  $x = \nu/T$  yangi o'zgaruvchiga o'tsak, (4.30) Stefan-Bolsman qonuniga o'tadi va u yerdagi doimiy

$$\sigma = \int_0^{\infty} f(x)x^3 dx \quad (4.46)$$

ifoda bilan aniqlanishini topamiz.

Nurlanish energiyasining spektral taqsimot funksiyasidan chastota bo'yicha hosila olamiz va uni nolga tenglashtirish natijasida quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$3f\left(\frac{\nu}{T}\right) + \frac{\nu}{T} f'\left(\frac{\nu}{T}\right) = 0. \quad (4.47)$$

Bu ifodaga ko'ra  $p_\nu(\nu/T)$  maksisum nuqtasida chastota va temperatura quyidagicha bog'langanligi kelib chiqadi:

$$\frac{\nu_{max}}{T} = \text{const.} \quad (4.48)$$

Shunday qilib, absolut qora jismning (muvozanatli) nurlanish energiyasi spektral taqsimotining maksimumi temperatura oshishi bilan katta chastotalar tomoniga siljir ekan. Bu Vinning siljish qonuni deyiladi. Bu qonunni nurlanish to'liq uzunligi orqali ham yozish mumkin, ya'ni

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (4.49)$$

bu yerda  $b = 2,98 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$  bo'lib, u Vin doimiysi deyiladi. Vin qonunini to'liq uzunligi tilida ham ta'riflash mumkin, nurlanish energiyasi spektral taqsimotining maksimumiga to'g'ri keluvchi to'liq uzunlik  $\lambda_{\max}$  temperaturaga teskari proporsional bo'ladi.

#### 4.5. Termodinamik sistemalarning muvozanati va barqarorlik shartlari

Termodinamik sistemalarda muvozanat nazariyasi Gibbs tomonidan, statistik mexanikadagi kichik qo'zg'alishlar prinsipini umumlashtirish va yoyish yo'li bilan, ishlab chiqildi. Bu nazariyaga ko'ra, sistemaning muvozanat holatdan chetga chiqishi, uning ichki parametrlari muvozanat holatidagi qiymatlaridan kichik chetlashish natijasi deb qaraladi va (4.50) dan foydalanib, termodinamik sistemalarda muvozanat va barqarorlikning umumiy shartlari topiladi. Nokvazistatik jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy tengsizligi

$$TdS > dE + pdV - \sum_i \mu_i dN_i, \quad (4.50)$$

muvozanat va barqarorlikning umumiy shartlarini tiklash mumkinligini ko'rsatadi. Bu shartlar termodinamika nuqtayi nazaridan yetarli hisoblanadi. Lekin sistemalarda fluktuatsiyalarning mavjudligi esa, zaruriy shart bo'lib hisoblanadi. Bu masalani aniq misollarda qaraylik.

1. Qaytmas adiabatik jarayon yuz beruvchi izolatsiyalangan berk sistemada muvozanat shartini qarab chiqaylik. Bunday sistemada  $E = \text{const}$ ,  $V = \text{const}$  va  $N = \text{const}$  bo'ladi. Bu holda (4.50) dan  $dS > 0$  kelib chiqadi. Demak, nokvazistatik jarayonlarda izolatsiyalangan berk sistemalarda entropiya o'sib borar ekan. Bunday sistemalarda muvozanatning umumiy sharti

$$\Delta S < 0 \text{ yoki } \delta S = 0, \delta^2 S < 0 \quad (4.51)$$

bo'ladi. Bu yerda  $\Delta S = S - S_0$ ,  $S$  - boshlang'ich muvozanatda bo'lmagan holatdagi,  $S_0$  - muvozanat holatdagi entropiya,  $\delta S$  - birinchi variatsiyasi,  $\delta^2 S$  - ikkinchi variatsiyasi. Sistema muvozanat holatida  $S = S_{\max}$  bo'lishi kerak ekan.

Aniq misol sifatida, bir komponentli ikki fazali sistemada (suv-bug') muvozanat shartini ko'rib chiqaylik. Agar fazalar-dagi kattaliklar: temperatura, bosim, zarralar soni, bitta zarraga to'g'ri kelgan energiya, entropiya va hajmi belgilab olib, birinchi fazadagi (suv) solishtirma energiya, hajm, zarralar soni  $N$  bog'lanmagan parametrlar deb qabul qilsak, u holda sistemaning muvozanat sharti  $\delta S = 0$  ni sistemadagi kichik o'zgarishni aniqlovchi  $\delta E = 0$ ,  $\delta V = 0$ ,  $\delta N = 0$  tenglamalar bilan birga yechish va

$$\delta S - \frac{\delta E + p \delta V}{T}, \quad \delta S - \frac{\delta E + p \delta V}{T}$$

ifodalarni hisobga olish natijasida quyidagi tenglamani olamiz:

$$N' \left( \frac{1}{T'} - \frac{1}{T''} \right) \delta E' + N' \left( \frac{p'}{T'} - \frac{p''}{T''} \right) \delta V' + \left[ \left( S' - \frac{\delta E' + p' V'}{T'} \right) - \left( S'' - \frac{\delta E'' + p'' V''}{T''} \right) \right] \delta N' = 0. \quad (4.52)$$

Qaraladigan sistema muvozanat holatda bo'lishi uchun bu ifodadan temperatura, bosim va kimyoviy potentsiallari muvozanat nuqtasida demak, muvozanat egriligida teng bo'lishi kerak, ya'ni  $T' = T''$ ,  $p' = p''$ ,  $\mu'(T, p) = \mu''(T, p)$ .

Kimyoviy potentsiallarining tengligidan, ya'ni  $\mu'(T, p) = \mu''(T, p)$  dan bosimning temperaturaga bog'liqlik ifodasini olish mumkin. Bu esa muvozanat egriligi grafigini chizish imkonini beradi. U muvozanat egriligi  $p = p(T)$  ga asosan chiziladi.

2. O'zgarimas hajmli sistema termostatda bo'lsin, ya'ni  $T = \text{const}$ ,  $V = \text{const}$ ,  $N = \text{const}$ . Bu holda (4.50) tengsizlikdan Lejandr metodidan foydalanib, erkin energiya differensial uchun

$$dF < -SdT - p dV + \mu dN \quad (4.53)$$

ni olamiz. Bu esa sistema muvozanat holatda bo'lishi uchun erkin energiyasi minimum bo'lishi kerak ekan, ya'ni

$$\Delta F > 0 \text{ yoki } \delta F = 0, \quad \delta^2 F > 0. \quad (4.54)$$



3. Xuddi shuningdek,  $T = \text{const}$ ,  $p = \text{const}$ ,  $N = \text{const}$  bo'lganda  $\Delta\Phi > 0$  yoki  $\delta\Phi = 0$ ,  $\delta^2\Phi > 0$  bo'ladi.

4.  $S = \text{const}$ ,  $V = \text{const}$ ,  $N = \text{const}$  bo'lganda  $\Delta E > 0$  yoki  $\delta E = 0$ ,  $\delta^2 E > 0$  bo'ladi.

5.  $S = \text{const}$ ,  $p = \text{const}$ ,  $N = \text{const}$  bo'lganda  $\Delta\chi > 0$  yoki  $\delta\chi = 0$ ,  $\delta^2\chi > 0$  bo'ladi.

6.  $T = \text{const}$ ,  $V = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$  bo'lganda  $\Delta B > 0$  yoki  $\delta B = 0$ ,  $\delta^2 B > 0$  bo'ladi.

Shunday qilib, termodinamik sistemada muvozanat holatining umumiy sharti aniq hollar uchun termodinamik potensiallarning maksimum yoki minimum shartidan keltirib chiqariladi.

#### 4.6. Gomogen sistemaning muvozanati

Turli komponentli sistemalarda uning tashkil etuvchi qismlari o'rtasida kimyoviy reaksiyalar va boshqa jarayonlar o'tishi mumkin. Bu jarayonlar to'g'ri va teskari yo'nalishda o'tadi, ya'ni umumiy zarralar soni o'zgarmagan holda turli komponentdagi zarralar soni uzluksiz ravishda bir-biriga o'tib o'zgarib turadi. O'zgarishlar sistemada muvozanat holat yuz berganda to'xtaydi. To'g'ri va teskari reaksiyalar bir xil tezlikda o'ta boshlaganda muvozanat barqaror topadi. Bunday sistemalar gomogen deyiladi. Har qanday kimyoviy reaksiya quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\sum_i \nu_i g_i = 0. \quad (4.55)$$

Bu yerda  $g_i$  -reaksiyada qatnashuvchi moddalarning kimyoviy belgisi,  $\nu_i$  - reaksiyada qatnashuvchi moddalarning molekulari soni.

Endi kimyoviy reaksiya uchun muvozanat shartini yozaylik. Agar sistemada kimyoviy reaksiya o'zgarmas temperatura va o'zgarmas bosim ostida o'tayotgan bo'lsa, u holda Gibbs termodinamik potentsiali minimum bo'lishi kerak, ya'ni

$$\delta\Phi = V\delta p - S\delta T + \sum_i \mu_i \delta N_i = 0.$$

Bu ifodadan

$$\sum_i \mu_i \delta N_i = 0. \quad (4.56)$$

Bu yerda  $\delta N_i$  kimyoviy reaksiyada ishtirok etuvchi komponentlar molekularining o'zgarish soni bo'lib, ular molekular soniga proporsional bo'lganligi uchun kiyoviy muvozanat sharti (4.56)ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\sum_i v_i \mu_i = 0 \quad (4.57)$$

(4.55) va (4.57) tenglamalarni solishtirib, quyidagi xulosaga kelamiz. Birinchi tenglamadagi modda belgisini shu modda kimyoviy potentsiali bilan almashtirsak, kimyoviy reaksiyalarda termodinamik muvozanat shartini olar ekanmiz. (4.57) ifoda kimyoviy muvozanat sharti deyiladi. Demak, termodinamik muvozanat shartini topish uchun kimyoviy potentsialni bilish kerak ekan.

Ideal gazlar uchun kimyoviy reaksiyalarda muvozanat shartini ko'rib chiqamiz. Ideal gazlar aralashmasidagi har bir komponent o'zini mustaqil ravishda tutadi. Shu sababli ularning kimyoviy potentsiallari parsial bosim orqali aniqlanadi. Kimyoviy potentsialning oshkora ko'rinishi termodinamik metod yordamida ideal gazlar uchun olinadi:

$$\mu = kT \ln p + \mu_0(T), \quad (4.58)$$

bu yerda  $\mu_0(T)$  - entropiya bilan bog'liq bo'lgan o'zgarmasdir. Agar gazlar aralashmasi berilgan bo'lsa, u holda  $i$ - komponenti uchun

$$\mu_i = kT \ln p_i + \mu_{0i}(T). \quad (4.59)$$

Bu yerda

$$p_i = p \frac{N_i}{\sum N_i} = pc_i$$

parsial bosim,  $c_i$  - gaz komponentining konsentratsiyasi. Bu holda kimyoviy potentsial

$$\mu_i = kT \ln pc_i + \mu_{0i}(T). \quad (4.60)$$

(4.59) va (4.60) ifodalarni (4.56) dagi  $\mu_i$  ni o'rniga qo'yish va kimyoviy reaksiyaning to'g'ri va teskari yo'nalishda o'tishini hisobga olish natijasida, parsial bosim  $p_i$  va moddalar konsentratsiyasi uchun ta'sir etuvchi massalar qonuni olinadi:

$$\frac{\prod_j p_j^{\nu_j}}{\prod_p p_p^{\nu_p}} - K_c(T) \quad \text{va} \quad \frac{\prod_j c_j^{\nu_j}}{\prod_p c_p^{\nu_p}} - K_c(T, p).$$

bu yerda  $K_c(T)$  va  $K_c(T, p)$  lar kimyoviy muvozanat konstantalari deyiladi va ularni nazariy holda va eksperiment orqali aniqlash mumkin.

#### 4.7. Geterogen sistemalarda muvozanat sharti

Ma'lumki, ko'p fazali sistema geterogen sistema deb yuritiladi.  $k$  ta komponentli  $n$  ta fazadan tashkil topgan sistemada fazalar muvozanatini tekshiraylik.

Yuqoridan shu narsa ko'rinadiki: ikkita fazali bir komponentli sistemada (suv-bug') muvozanatda bo'lishi uchun temperaturalari, bosimlari va kimyoviy potentsiallari har ikkala fazada teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$T = T, \quad p = p, \quad \mu(T, p) = \mu(T, p). \quad (4.61)$$

Agar ikki fazali ikki komponentli sistemada (suv-kerosin) muvozanatini qarasaq, bu holda temperaturalari va bosimlari teng bo'lib, ammo kimyoviy potentsiallari teng bo'lmaydi. Chunki muvozanat holatda har xil moddalar orasida zarralar almashinishi yuz bermaydi.

Biz yuqorida ko'rganimizdek,  $n$  ta fazali va  $k$  komponentli sistemaning muvozanatda bo'lishining umumiy sharti – Gibbs potentsialining birinchi variatsiyasi  $\delta\Phi = 0$  bo'lishi kerak. Bu potentsial additiv kattalik bo'lganligi uchun to'liq potentsial har bir fazadagilarning yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi^i(T, p, N_1^i, \dots, N_k^i)$$

bo'ladi. Bu yerda

$$\sum_{i=1}^n N_j^i - N_j, \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Bu tenglamalarga asosan minimum sharti, to'liq Gibbs potentsialidan olingan birinchi variatsiyaga teng bo'lishi kerak, ya'ni



Bu shartlardan birinchisi – termik, ikkinchisi – mexanik, qolganlari kimyoviy muvozanatni ta’minlab beradi. Bu tengliklar  $k$  ta komponentli,  $n$  ta fazadan tashkil topgan geterogen sistemalarda muvozanat sharti deb yuritiladi.

#### 4.8. Gibbsning fazalar qoidasi. Uchlamchi nuqta

Olingan  $k$  ta komponentli  $n$  ta fazadan iborat bo’lgan geterogen sistemalarda muvozanat sharti (4.66), bir vaqtning o’zida fazalardan qancha qismi muvozanat holatda bo’la olishini yoki geterogen sistemaning muvozanat holatini buzmasdan, unda o’zaro bog’lanmagan o’zgaruvchanlar sonini o’zgartirishni aniqlash mumkinligini beradi. Bu masala Gibbs (1875–1878) tomonidan hal qilingani uchun Gibbsning fazalar qoidasi deb yuritiladi.

Ana shu qoidaning tiklanishini qarab chiqaylik. (4.66) ga asosan, muvozanat holatda har bir komponentning kimyoviy potentsiallari hamma fazalarda bir xilda bo’lishi kerak:

$$\mu_j^i - \mu_j^s \quad (j = 1, 2, \dots; i, s = 1, 2, \dots, n). \quad (4.67)$$

Geterogen sistemalarda muvozanat shartini ifodalovchi bunday tenglamalar soni  $k(n - 1)$  ta bo’ladi. Geterogen sistemaning holati temperatura, bosim va har bir fazada o’zaro bog’lanmagan  $(k - 1)$  ta konsentratsiya bilan aniqlanadi (har bir fazadagi barcha komponentlar konsentratsiyalarining yig’indisi birga teng). Demak, geterogen sistemada temperatura va bosimni o’zgaruvchi deb hisoblasak, u vaqtda sistemadagi hamma o’zgaruvchanlar soni  $n(k - 1) + 2$  ta bo’ladi.  $k(n - 1)$  ta tenglama yechimga ega bo’lishi uchun  $k(n - 1) \leq n(k - 1) + 2$  bo’lishi kerak. Bundan

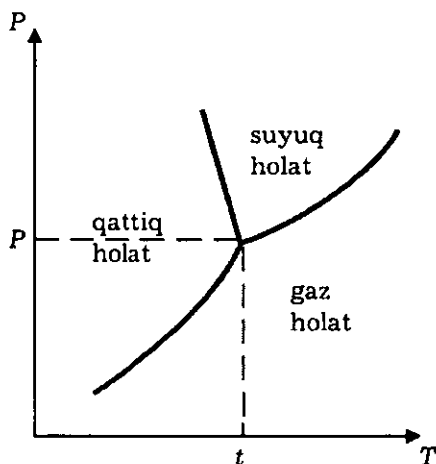
$$n \leq k + 2 \quad (4.69)$$

shart kelib chiqadi. Bu «Gibbsning fazalar qoidasi» deyiladi. Demak, geterogen sistemalarda bir vaqtning o’zida eng ko’pi bilan  $k + 2$  faza muvozanat holatda bo’la olar ekan.

Agar  $n > k + 2$  bo’lsa, u holda farqi

$$f = k + 2 - n. \quad (4.69)$$

(4.69) tenglik ham Gibbsning fazalar qoidasi deyiladi. Bu qoida geterogen sistema holatini, ya’ni (4.69) shartni buzmasdan



4.2- rasm. Uchlamchi nuqta.

komponent  $k$  va fazalar soni  $n$  ni istalgancha o'zgartirish mumkinligini ko'rsatadi. Shuning uchun,  $f$  ga sistema termodinamik erkinlik darajasining soni deb yuritiladi.

Agar geterogen sistemaga umumlashgan  $q$  ta kuch ta'sir etayotgan bo'lsa, u holda Gibbsning fazalar qoidasi (4.68) va (4.69) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$n \leq k + q + 1; \quad f = k + q + 1 - n.$$

Agar sistema bir komponentli bo'lsa, bu holda sistemaning muvozanat holatida bir vaqtning o'zida uchta faza muvozanat holatda bo'la oladi. Haqiqatan ham,  $n = k + 2$  dan  $n = 3$ . Bu nuqta *uchlamchi nuqta* deyiladi (4.2- rasm). Uchlamchi nuqta quyidagi tenglamalar asosida chizilgan uchta egri chiziqning – fazalarning muvozanat egri chiziqlarining kesishgan nuqtasidir:

$$\mu(T, p) - \mu(T, p), \quad \mu(T, p) - \mu(T, p).$$

$$\mu(T, p) = \mu(T, p)$$

– bu tenglama birinchi ikki tenglama natijasidir.

Suv uchun uchlamchi nuqtada bosim  $p = 509 \text{ Pa} = 4,58 \text{ mm. sim. ust.}$ , temperatura  $t = 0,0100 \text{ }^\circ\text{C}$  tengligi tajribada olingan.

Binar sistemalar uchun ham faza egri chiziqlari olish mumkin. Ikki komponentli binar sistemada Gibbs fazalar qoidasiga asosan bir vaqtning o'zida to'rtta faza muvozanatda bo'lishi

mumkin. Bunday sistemalar kimyo va metallurgiyada asosiy rol o'ynaydi. Bu sohalarda binar sistemada bir vaqtning o'zida ikkita fazaning muvozanatda bo'lishi katta ahamiyat kasb etadi. Chunki qolganlarini shunga keltirish mumkin. Bunday holda muvozanatni ikkita parametr, masalan, temperatura va birorta fazaning konsentratsiyasi orqali nazorat qilish mumkin. Bu kerakli tarkibli qotishmalar yoki eritmalar olishning imkonini beradi. Bir vaqtning o'zida faqat ikkita faza muvozanatda bo'lishi Gibbs-Dyugem tenglamasi

$$SdT - Vdp + \sum N_i d\mu_i = 0$$

yordamida o'rganiladi.

#### 4.9. Sirt hodisalar termodinamikasi

Sirt hodisalar termodinamikasi Gibbs tomonidan ishlab chiqilgan. Gibbs sirt qatlamini yangi «sirt faza» deb qabul qiladi. Fazalar muvozanatini qarashda sirtida mavjud bo'lgan ikkita narsani:

1) ikkita fazaning o'zaro ta'sir energiyasini,

2) fazalarni chegaralovchi sirt yaqinida moddaning holati modda ichidagi holatidan farq qilishligini hisobga olmadik.

Hisobga olinmagan bu ikkala faktor ta'siri, fazalarni chegaralovchi sirtning ko'payishi bilan yanada oshadi. Shuning uchun chegaraviy sirtning yana bir faza deb muvozanat shartlarini chiqaraylik.

Agar sirt o'zgarishi izotermik-izoxorik jarayon ostida o'tsa, u holda sirtning o'zgartirishdagi ish erkin energiyaning kamayishi hisobiga bajariladi, ya'ni  $dF = -SdT + pdV + \gamma d\Sigma$  dan

$$\delta A = -(dF_\Sigma)_{T,V} = -\gamma d\Sigma$$

kelib chiqadi. Bu yerda  $\gamma = dF_\Sigma/d\Sigma$  birlik sirtga to'g'ri kelgan erkin energiya bo'lib, sirt tarangligi deyiladi. Sirtidagi erkin energiya  $F_\Sigma = \gamma\Sigma$ ,  $\Sigma$  - chegaraviy sirtning yuzasi.

Agar sirt fazasini hisobga olgan holda, bir komponentli ikki fazali (suv-bug') sistema uchun muvozanat shartini yozsak, u holda (4.61) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$T = T, \mu = \mu, \text{ ammo } p \neq p.$$

Muvozanat holatda erkin energiya minimum bo'lishidan ( $\delta F = 0$ ), izotermik jarayonda

$$-p dV - p dV + \gamma d\Sigma = 0$$

bo'ladi. Sistema berk bo'lganligi uchun  $V + V = V$ ,  $dV = dV$  bo'ladi, natijada

$$p = p + \gamma \frac{d\Sigma}{dV}.$$

$\frac{d\Sigma}{dV}$  - chegaraviy sirtning egriligini aniqlaydi. Agar chegaraviy sirt sfera bo'lsa, u holda

$$p = p + \frac{2\gamma}{r}. \quad (4.70)$$

Agar sirt ixtiyoriy bo'lsa,

$$p = p + \gamma \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right). \quad (4.71)$$

Bu yerda  $r, r, r$  - chegaraviy sirtning asosiy egrilik radiuslari.

(4.70) va (4.71) ga Laplas formulasi,  $\frac{2\gamma}{r}$  - Laplas bosimi deyiladi.

Fazalarning muvozanatda bo'lishini belgilovchi kimyoviy potentsiallarga qo'yilgan shartlar va Laplas formulasi suyuqlik tomchisi radiusi va uning ustidagi to'yingan bug' bosimi orasidagi bog'lanishni aniqlash imkonini beradi.

Faraz qilaylik,  $r$  radiusli suyuqlik tomchisi bug'i bilan muvozanatda bo'lsin, ya'ni

$$\mu(p, T) = \mu(p, T).$$

Bunday shartni chegaraviy sirt uchun ham yozamiz:

$$\mu(p, T) = \mu(p, T).$$

Yuqoridagi ikkita shartni birlashtirib, quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\mu(p, T) - \mu(p, T) - \mu(p, T) = \mu(p, T), \quad (4.72)$$



bu yerda ( ) kattaliklarning suyuqlikka, ( ) esa bug'ga tegishli ekanligini ko'rsatadi. Suyuqlik bug'ini ideal gaz deb, (4.72)ning o'ng tomonini quyidagicha yozamiz:

$$\mu''(p'', T) - \mu''(p, T) = kT \ln p'' - kT \ln p = kT \ln \frac{p''}{p}. \quad (4.73)$$

Suyuqlik kam siqilishini hisobga olsak, (4.72) ning chap tomonini esa,

$$\begin{aligned} \mu'(p', T) - \mu'(p, T) &= \mu'(p + \Delta p, T) - \mu'(p, T) = \\ &= \Delta p \frac{\partial \mu'(p, T)}{\partial p} = \Delta p v' \end{aligned} \quad (4.74)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda  $\mu'(p + \Delta p, T)$   $\Delta p$  ning darajalari bo'yicha qatorga yoyilgan.  $v$  suyuqlik fazasida bitta zarraga to'g'ri keluvchi hajm. (4.70) tenglikka asosan, (4.74) ni sirt taranglik koeffitsiyenti orqali yozamiz:

$$\mu'(p', T) - \mu'(p, T) = \frac{2\gamma}{r} v'. \quad (4.75)$$

Yuqoridagi (4.73) va (4.75) ifodalarni solishtirib, bug' bosimining tomchi radiusiga bog'lanishini topamiz:

$$p'' = p \exp\left(\frac{2\gamma v'}{rkT}\right). \quad (4.76)$$

#### 4.10. Faza o'tishlar. Birinchi xil faza o'tishlar

Kritik nuqta mavjudligini ilk bor Endryu (1869)  $\text{CO}_2$  ni o'rganganda kuzatgan. Bir qancha vaqtdan keyin Van-der-Vaals o'zining mashhur tenglamasini taklif qiladi. Van-der-Vaals holat tenglamasi kondensatsiya nazariyasi tarixiy rol o'ynagan. Bu tenglamaning muhim xossasi, bitta tenglama bir vaqtning o'zida ham gaz, ham suyuq holatni tavsiflay olgan. Bizga umumiy fizika kursidan ma'lumki, bu tenglama ma'lum temperaturalar intervalida nomuvozanat sohaga ega. Bunday holdan qutilish uchun Maksvell teng yuzalar qoidasini kiritadi. Van-der-Vaals tenglamasi va Maksvell teng yuzalar qoidasi birgalikda kondensatsiya hodisasini tushuntirib bergan. O'sha vaqtda moddaning bir agregat holatdan ikkinchisiga o'tishi

faza o'tishi degan nom olgan. Shunday qilib, fazalar o'tishining nazariyasiga asos solingan. Turli sistemalar ustida olib borilgan tadqiqotlar faza o'tish gaz holatdan suyuqlik holatiga o'tish bilan chegaralangan, juda ko'p qirrali ekanligi namoyon bo'ldi.

Muvozanat holatdagi geterojen sistemada tashqi ta'sirlarning o'zgarishida modda bir fazadan boshqa fazaga o'tishi mumkin. Masalan: suyuq holatdan gaz holatga, bir kristall modifikatsiyadan boshqasiga, normal o'tkazgich holatdan o'ta o'tkazgich holatga, ferromagnit holatdan paramagnit holatga va h.k. Bu faza o'tishlarning qisqacha ro'yxati bo'lib, uni yana davom ettirish mumkin. Faza o'tishlar nazariyasi hozirgi kunda juda rivojlangan bo'lib, ushbu darslik doirasida barcha nazariyalarni qamrab olish mumkin emas.

Faza o'tishlar nazariyasini avval termodinamik nuqtayi nazardan ko'rib chiqamiz. Faza o'tishlar har doim ba'zi bir termodinamik kattaliklar uzluksizligining buzilishi bilan bog'langandir. O'tish nuqtasida Gibbs termodinamik potentsialining birinchi yoki ikkinchi tartibli hosilalarining uzilishga duchor bo'lishiga qarab, faza o'tishlar birinchi va ikkinchi xil faza o'tishlarga bo'linadi. Agar Gibbs termodinamik potentsialidan olingan birinchi tartibli hosila uzilishga duchor bo'lsa, ikkinchi tartibli hosila esa uzluksiz bo'lsa, bunday faza o'tish birinchi xil faza o'tishlar deb yuritiladi. Agar aksincha bo'lsa, u holda ikkinchi xil faza o'tishlar deb yuritiladi.

Birinchi xil faza o'tishlarda solishtirma hajm, solishtirma entropiya o'tish nuqtasida uzilishga duchor bo'ladi. Birinchi xil faza o'tishlarda yashirin issiqlikning yutilishi yoki ajralishi kyzatiladi. Bunday o'tishga erish, bug'lanish, sublimatsiya, bir kristall holatdan ikkinchi kristall holatga o'tish kiradi.

Birinchi xil faza o'tishlar tenglamasi Klapeyron-Klauzius tomonidan berilgan. Bu tenglamani olishda fazalar muvozanatida ikkala fazadagi kimyoviy potentsiallarning tenglik sharti  $\mu(T, p) = \mu(T, p)$  dan foydalanamiz. Buning uchun ushbu tenglikning har ikkala tomonidan to'liq differensial olamiz:

$$\begin{aligned} d\mu &= -s dT + v dp, \\ d\mu &= -s dT + v dp, \\ \therefore d\mu(T, p) &= d\mu(T, p). \end{aligned} \tag{4.77}$$

Mos differensiallarni solishtirib quyidagi ifodani olamiz:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s - s}{v - v} \quad (4.78)$$

Bu yerda  $s$  va  $v$  – bitta zarraga to'g'ri kelgan entropiya va hajm. (4.78) muvozanat egriligining differensial tenglamasi bo'lib, u *Klayperon–Klauzius tenglamasi* deyiladi. Ko'pincha bu tenglama quyidagi ko'rinishda ham yoziladi:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v - v)} \quad (4.79)$$

yoki

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V - V)}. \quad (4.80)$$

Bu yerda  $\lambda$  yoki  $L = \lambda N$  – o'tish issiqligi yoki yashirin issiqlik deb yuritiladi,  $\Delta v = v - v$  yoki  $\Delta V = V - V$  – mos ravishda molyar solishtirma hajm yoki molyar hajm o'zgarishi. (4.79) yoki (4.80) tenglamalarning

$$\frac{dT}{dp} - \frac{T\Delta v}{\lambda} \quad \text{yoki} \quad \frac{dT}{dp} - \frac{T\Delta V}{L}$$

ko'rinishda yozilishi – faza o'tishda, bosim o'zgarishiga qarab o'tish temperaturasining o'zgarishini aniqlaydi (masalan, muzlash yoki qaynash nuqtasi).

Suyuqlikning bug'ga o'tishida issiqlik beriladi va hajm har doim ortadi, va demak,

$$\frac{dT}{dp} > 0$$

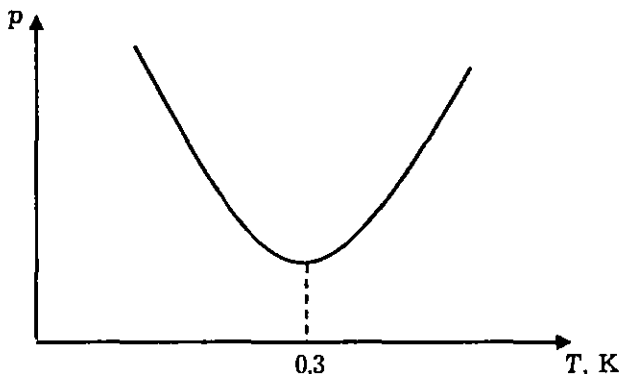
bo'ladi, ya'ni bosim oshganda qaynash temperaturasi har doim ortadi. Ammo, erishda esa ikki hol uchraydi:

1)  $\Delta v = v - v > 0$  bo'lsa, u holda  $\frac{dT}{dp} > 0$  bo'ladi, demak,

bosim ortishi bilan erish temperaturasi ko'tariladi. Bunday hol deyarli barcha qattiq jismlar uchun bajariladi.

2)  $\Delta v = v - v < 0$  bo'lsa, u holda  $\frac{dT}{dp} < 0$  bo'ladi, demak,

bosim ortishi bilan erish temperaturasi pasayadi. Bunday hol



4.3- rasm. Qattiq geliyning erish egri chizig'i.

qoidadan istesno bo'lib, qattiq fazadagi suv, cho'yan, vismut, germaniy va galliy uchun bajariladi. Bu moddalar erishda hajmi kamayadi. Shuning uchun  $\frac{dT}{dp} < 0$  bo'ladi, ya'ni bosim oshishi bilan erish temperaturasi pasayadi.

3) Bosim oshishi bilan erish temperaturasining pasayishi tajribada geliy izotopi  $^3\text{He}$  da kuzatilgan. Buning sababi ikkinchi holdan farq qiladi.  $T < 0,3$  K da geliy izotopi  $^3\text{He}$  da  $v > v'$  bo'lsada, bosim oshishi bilan erish temperaturasi kamayadi. Sababi shuki,  $T < 0,3$  K da solishtirma erish issiqligi  $\lambda - T(s - s') < 0$ , chunki suyuq  $^3\text{He}$  ning entropiyasi qattiq  $^3\text{He}$  ning entropiyasidan kichik. Bunga Pomeranchuk effekti deyiladi.  $T = 0,3$  K da erish solishtirma issiqligi ishorasini o'zgartiradi va demak, bu temperaturada erish egriligi minimumga ega bo'ladi (4.3- rasm).  $T < 0,3$  K da suyuq  $^3\text{He}$  qotishida issiqlik yutiladi. Demak, bu temperaturalar intervalida  $^3\text{He}$  qotishi uchun uni adiabatik holda siqish kerak ekan, bu esa erish (qotish) temperaturaning pasayishiga olib keladi.

Birinchi xil faza o'tishlariga termodinamikaning uchinchi qonunini tatbiq qilamiz. Absolut nol temperatura yaqinida, termodinamikaning uchinchi qonuniga asosan,

$$\lim_{T \rightarrow 0} (S - S') = 0.$$

Bu shart bajarilishi uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi  $T\Delta S = \Delta E + p\Delta V$  dan ikkita hol kelib chiqadi. Birinchi

hol: temperatura nolga intilganda bir vaqtda ichki energiya va hajmning o'zgarishi nolga teng bo'lishi kerak. Bunda qattiq faza suyuq fazadan farq qilmay qoladi. Ikkinchi hol: yuqoridagi shart bajarilish uchun  $\Delta E = -p\Delta V$  bo'lishi kerak. Tajribalar ko'rsatadiki, geliyda ikkinchi hol amalga oshadi. Demak,

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{dp}{dT} = 0$$

bo'ladi. Haqiqatan ham,  $T \rightarrow 0$  da termodinamikaning uchinchi qonuniga asosan,  $\Delta S = S'' - S = 0$  bo'ladi va muvozanat egriligi ( $p, T$ ) diagrammada temperatura o'qiga parallel yotadi.

Muvozanat egriligining temperaturaga ana shunday bog'liqligi haqiqatan ham suyuq geliy-II uchun o'rinli ekanligini tajribalar isbotladi. Suyuq geliy-II  $T \rightarrow 0$  K da va  $p > 30$  atm da barqaror faza bo'ladi.  $p \sim 30$  atm dan yuqori bosimlarda barqaror faza qattiq geliy bo'ladi. Qattiq geliyning suyuq holatga va aksincha suyuq holatdan qattiq holatga o'tishida fazalar muvozanat egriligi absissa o'qiga parallel holda yotadi va  $T \rightarrow 0$

K da uning burchak koeffitsiyenti  $\frac{dp}{dT} \rightarrow 0$ . Demak,  $\Delta S \rightarrow 0$  va erish yashirin issiqligi ham  $L \rightarrow 0$ .

Muvozanat egriligini oshkora ko'rinishda umumiy holda topish mumkin emas. Agar tajribalardan faza o'tish yashirin issiqligi va molar hajm o'zgarishi temperatura va bosimga bog'liqligi ma'lum bo'lsa, u holda Klapeyron-Klauzius tenglamasini integrallash mumkin va natijada muvozanat egriligining oshkora ko'rinishini va muvozanat egriligi formasini topish mumkin. Ammo bu kattaliklarning temperaturaga bog'liqligi murakkab, shuning uchun integral sonli hisoblanadi.

O'tish yashirin issikligi  $L$  ni topishni soddalashtirish mumkin, buning uchun muvozanatdagi fazalardan birortasi bug' bo'lishi kerak. Bu holda kondensatsiyalangan fazaning hajmi bug' hajmidan juda kichik bo'lganligi uchun  $\Delta V = V'' - V' \approx V''$  deb yozish mumkin va Klapeyron-Klauzius tenglamasi

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{TV''}$$

ko'rinishni oladi. Agar muvozanatda bo'lgan bug' yetarli dara-

jada siyrak bo'lsa, uni ideal gaz deb qarash mumkin bo'ladi. U

$$\text{holda } V = \frac{NkT}{p} \text{ va}$$

$$\frac{dp}{dT} - \frac{Lp}{kNT^2} \text{ yoki } \frac{dp}{p} - \frac{L}{kNT^2} dT. \quad (4.81)$$

Endi o'tish yashirin issiqligi  $L$  ning temperaturaga bog'lanishini topaylik.  $L = \Delta S T$  dan

$$\frac{dL}{dT} = \Delta S + T \left( \frac{\partial \Delta S}{\partial T} \right)_p + T \left( \frac{\partial \Delta S}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dT}.$$

(4.81)dagi ifodalarni hisobga olib,

$$\frac{dL}{dT} = \Delta C_p$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglamani integrallash natijasida o'tish yashirin issiqligi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$L = \int_0^T \Delta C_p dT + L_0. \quad (4.82)$$

Bu yerda  $L_0 - T = 0$  K dagi yashirin issiqlik bo'lib, kondensatsiyalangan faza molekulari orasidagi bog'lanishni uzib, o'zaro ta'sirda bo'lmagan molekularlarga aylantirish uchun

bajarilgan ishni beradi.  $\int_0^T \Delta C_p dT$  esa suyuq faza va bug'da issiqlik

harakat energiyalari farqini kompensatsiyalashda sistemaga berilgan energiya.

(4.82) ifodani (4.81) ifodaga qo'yib integrallash natijasida quyidagilarni olamiz:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L_0}{kN T^2} + \frac{dT}{kNT^2} \int_0^T \Delta C_p dT \text{ va}$$

$$p = \exp \left[ -\frac{L_0}{kNT} + \int_0^T \frac{dT}{kNT^2} \int_0^T \Delta C_p dT + i \right]. \quad (4.83)$$

Bu yerda  $i$  o'zgarimas kattalik bo'lib, bug' elastiklik doimiysi deb yuritiladi. (4.83) ifoda temperatura pasayishi bilan muvozanatdagi to'yingan bug' bosimining keskin kamayishini ko'rsatadi. Bug'lanish holi uchun

$$p = \exp \left[ -\frac{L_0}{kNT} \right] + i.$$

Chunki bu holda  $L \sim L_0$  bo'ladi.

Agar kondensatsiyalangan faza kristall bo'lsa,  $i$  va  $\Delta C_p = C_p'' - C_p'$  kattaliklarni statistik metod yordamida hisoblash mumkin. Bu holda to'yingan bug' bosimi kichik bo'ladi va bug'ni ideal gaz deb hisoblab kimyoviy potentsiallarni hisoblash mumkin. Natijada kimyoviy potentsiallarning tenglik sharti  $\mu'(p, T) = \mu''(p, T)$  dan yuqori va past temperaturalarda ( $p, T$ ) diagrammada  $p = p(T)$  muvozanat egriligining oshkora ko'rinishini olish mumkin.

#### 4.11. Ikkinchi xil faza o'tishlar.

##### Erenfest tenglamalari

Bir qator metallar va qotishmalar absolut nol temperatura yaqinida, ya'ni juda past temperaturalarda o'ta o'tkazuvchan holatga o'tadi va faza o'tishlarga duchor bo'ladi. Bu holatda moddaning muhim xususiyatlaridan biri elektr tokiga qarshilikning to'la yo'qolishidir. Bu hodisa birinchi marta Komerling-Onnes (1911- y.) tajribalarida kuzatilgan. Bundan tashqari normal fazadan o'ta o'tkazuvchan fazaga o'tish yaqin-yaqinlargacha faqat absolut nol temperatura yaqinida kuzatilar edi. Hozirgi kunda juda ko'p materiallarda bunday faza o'tishlar suyuq azot va undan yuqori temperaturalarda kuzatilmoqda.

Metallarning o'ta o'tkazuvchanlik va normal holatlari birbiridan faqat o'ta o'tkazuvchanlik xossasi bilan emas, balki sof termodinamik kattaliklarning turli fazalarda o'zini tutishi bilan ham farq qiladi. Bu farq modda turli termodinamik fazalarda bo'lishidan dalolat beradi. Shunga o'xshash holat suyuq geliyda kuzatiladi - o'ta oquvchanlik hodisasi.

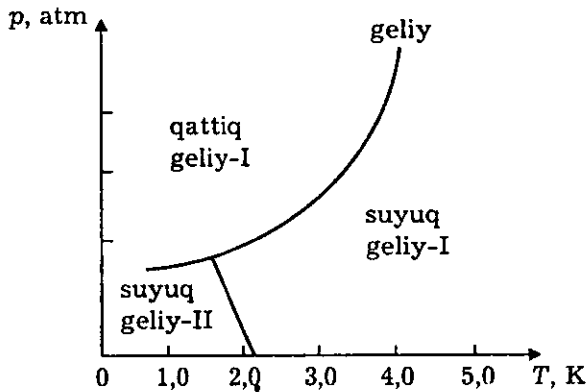
Metallning normal holatdan o'ta o'tkazuvchan holatga o'tishi uning magnit xususiyatlarining o'zgarishi bilan birga bo'ladi.

Bu o'zgarish shundan iboratki, massiv o'ta o'tkazgichning ichiga magnit maydon kirolmaydi, aniqrog'i magnit maydon faqat  $10^{-5}$  sm qatlamda mavjud bo'ladi. Demak, o'ta o'tkazgich ichida magnit maydon induksiyasi nolga teng bo'ladi. Magnit induksiya vektorining normal tashkil etuvchisi uzluksiz va u nolga teng bo'lganligi uchun o'ta o'tkazgich ichida magnit induksiya vektori sirtga o'tkazilgan urinma bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Bu Veys qonuni deb yuritiladi.

Oldingi mavzuda eslatdikki, agar bir fazadan ikkinchi fazaga o'tish nuqtasida Gibbs termodinamik potensialidan olingan birinchi tartibli hosila uzluksiz bo'lib, ikkinchi tartibli hosilasi uzilishga duchor bo'lsa, bunday faza o'tishlar ikkinchi xil faza o'tishlar deyiladi. Bu holda issiqlik sig'imi  $C_p$  issiqlikdan kengayish koeffitsiyenti  $\alpha$ , termik siqiluvchanlik koeffitsiyenti  $\beta$  va boshqalar o'tish nuqtasida sakrab o'zgaradi. Agar ikkinchi tartibli hosilalar o'tishda cheksizlikka aylansa - kritik o'tishlar deyiladi. Bunda modda xususiyatining anomal tabiati kritik hodisalar deb yuritiladi.

«Ikkinchi xil faza o'tishlar» tushunchasi (1933- y.) Erenfest tomonidan kiritilgan. Erenfest ikkinchi xil faza o'tishlarni suyuq He - I ni suyuq He - II ga (o'ta oquvchanlik holati) o'tishida kuzatadi.

Tajriba natijalari shuni ko'rsatadiki (4.4- rasm) qattiq geliy  $T = 4,22$  K va normal atmosfera bosimida suyuq holatga o'tadi (geliy-II) va 0 yaqinida suyuq holatda qoladi. Suyuq geliy-I  $T = 2,19$  K da suyuq geliy-II ga o'tadi, ya'ni geliy-II da ikkinchi



4.4- rasm. Past temperaturalarda geliy-I faza diagrammasi.



tur faza o'tish yuz beradi. Suyuq geliy-II  $T \rightarrow 0$  K gacha suyuq holatda qoluvchi va kvant xossaga ega bo'lgan makroskopik sistemadir. Boshqa hamma sistemalar kvant effektlar namoyon bo'lgunga qadar temperaturalarda qattiq holatga o'tib bo'ladi. Suyuq geliy-II va geliy-I o'zining fizik xususiyatlari bilan bir-biridan farq qiladi. 4.4- rasmdan ko'rinib turibdiki, 30 atm dan katta bosimda, yuqori temperaturali modifikatsiyadagi suyuq geliy-I temperatura pasayishi bilan qattiq holatga o'tadi. Ammo 30 atm bosimdan kichik bosimda  $T \rightarrow 0$  K temperaturada ham suyuqligicha qoladi. Lekin,  $T = 2,19$  K temperaturada suyuq geliy-I boshqa modifikatsiya, suyuq geliy-II ga o'tadi. Bunda o'tish yashirin issiqligi nolga teng bo'ladi. Bunday faza o'tish ikkinchi xil faza o'tish deyiladi.

Shuning uchun ham ikkinchi xil faza o'tishlar Erenfest tenglamalari bilan ifodalanadi. Erenfest tenglamalari birinchi xil faza o'tishlarni ifodalovchi Klayperon-Klauzius tenglamasi (4.78)ni Lapital qoidasi bo'yicha o'zgartirish natijasida quyidagi ko'rinishda olinadi:

$$\Delta C_p = -T \left( \frac{dp}{dT} \right)^2 \Delta \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T, \quad (4.84)$$

$$\Delta \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = -\frac{dp}{dT} \Delta \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T. \quad (4.85)$$

Agar sistemaga umumlashgan kuch  $f_i$  ta'sir etayotgan bo'lsa, u holda Erenfest tenglamalari umumiy ko'rinishni oladi:

$$\Delta C_{f_i} = -T \left( \frac{df_i}{dT} \right)^2 \Delta \left( \frac{\partial \lambda_i}{\partial f_i} \right)_T, \quad (4.86)$$

$$\Delta \left( \frac{\partial \lambda_i}{\partial T} \right)_{f_i} = -\frac{df_i}{dT} \Delta \left( \frac{\partial \lambda_i}{\partial f_i} \right)_T. \quad (4.87)$$

(4.84)–(4.87) tenglamalar solishtirma kattaliklar uchun yozilgan.

O'ta o'tkazuvchanlik faza o'tish termodinamikasida hajmning o'zgarishini va  $H_c$  ning bosimga bog'liqligini hisobga olib, issiqlik hajmiy kengayishi va elastiklik modulining o'zgarishlarini topamiz. Bu masalani sodda yechish uchun o'ta o'tkazgich  $V$  hajmli

kvazicheksiz silindrdan iborat bo'lsin. Silindr o'qiga parallel yo'nalgan magnit maydonga joylashtirilgan bo'lsin. Bu holda maydon mavjud bo'lgan va u yo'q bo'lgandagi Gibbs termodinamik potensialining farqi

$$\Phi_s(H, T) - \Phi_s(0, T) = \frac{V_s H^2}{8\pi} \quad (4.88)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu ifodadan o'zgarimas  $H$  va  $T$  da bosim bo'yicha hosila olib, hajmlar farqi uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$V_s(H, T) - V_s(0, T) = \frac{H^2}{8\pi} \left( \frac{\partial V_s}{\partial p} \right)_{H, T}. \quad (4.89)$$

O'ta o'tkazuvchanlik uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi

$$\Phi_n(H_c, T) - \Phi_s(0, T) = \frac{V_s H_c^2}{8\pi} \quad (4.90)$$

dan o'zgarimas  $T$  da bosim bo'yicha hosila olib, kritik maydonda hajmlar farqi quyidagiga tengligini topamiz:

$$V_n(H_c, T) - V_s(0, T) = \frac{H_c^2}{8\pi} \left( \frac{\partial V_s}{\partial p} \right)_T + \frac{V_s H_c}{4\pi} \left( \frac{\partial H_c}{\partial p} \right)_T. \quad (4.91)$$

(4.91) dan (4.89) ni ayirib, o'ta o'tkazuvchan va normal fazalarda hajmlar farqi

$$V_n(H_c, T) - V_s(H, T) = \frac{V_s H_c}{4\pi} \left( \frac{\partial H_c}{\partial p} \right)_T \quad (4.92)$$

tenglama bilan aniqlanishini topamiz. Bu tenglamaning har ikkala tomonidan  $T$  va  $p$  bo'yicha hosilalar olib, mos ravishda, issiqlik hajmiy kengayish va elastiklik modulining o'zgarishlari uchun ifodalarni topamiz:

$$\alpha_n - \alpha_s = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial H_c}{\partial T} \frac{\partial H_c}{\partial p}, \quad (4.93)$$

$$K_n - K_s = \frac{K_c^2}{4\pi} \left( \frac{\partial H_c}{\partial p} \right)^2. \quad (4.94)$$

Bu ifodalarni olishda  $H = H_c$  deb hisoblangan.

## 4.12. O'ta o'tkazuvchanlik holatda faza o'tish. Rutgers formulasi

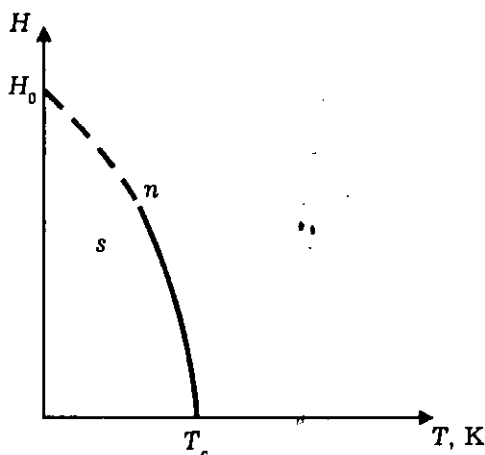
Erenfest tenglamalarini magnit maydon qatnashmaganda ( $H = 0$ ), o'tkazgichning normal holatdan o'ta o'tkazuvchan holatga o'tishiga tatbiq qilaylik. Ana shunday o'tishlar ba'zi o'tkazgichlarda aniq  $T_c$  temperaturada amalga oshadi. Agar kuchli magnit maydon  $H_c$  qo'yilsa, u holda o'ta o'tkazuvchanlik holatini buzish mumkin. Kritik maydon kuchlanganligi  $H_c$  ning temperaturaga bog'liqligi parabola ko'rinishida bo'ladi (4.5- rasm):

$$H_c(T) = H_0 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right].$$

Agar o'tkazgich magnit maydonda bo'lsa ( $H \neq 0$ ), u holda uning o'ta o'tkazuvchanlik holatiga o'tishida issiqlik ajralishi kuzatiladi. Demak, bu o'tish birinchi xil faza o'tish bo'ladi va Klayperon-Klauzius tenglamasi yordamida aniqlanadi. Magnit maydoni qatnashmaganda o'tish issiqligi nolga teng bo'ladi va normal ( $n$ ) holatdan o'ta o'tkazgich ( $s$ ) holatiga o'tishi ikkinchi xil faza o'tish bo'ladi.

Tashqi magnit maydonda o'ta o'tkazuvchan o'zini diamagnit kabi tutadi va Maycner hodisasiga asosan magnit induksiya vektori nolga teng bo'ladi:

$$B_s = H + 4\pi M_s = 0.$$



4.5- rasm. Magnit maydonda normal holatdan o'ta o'tkazuvchan holatga o'tishning temperaturaga bog'liqligi.

Bu ifodadan

$$M_s = -\frac{1}{4\pi} H$$

$B_s$  – magnit induksiyasi,  $M_s$  – magnit momenti. Agar normal o'tkazgich uchun

$$M_n = \frac{\mu-1}{4\pi} H$$

ekanligini hisobga olsak, u vaqtda (4.87) tenglamadan ( $f_i = H$  va  $\lambda_i = M$ ,  $\mu = 1 + 4p \approx 1$  – magnit qabul qiluvchanlik) magnit maydon qatnashmaganda holatdan holatga o'tishda issiqlik sig'imi o'zgarishini quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$\Delta C = C_s - C_n = \frac{T_c}{4\pi} \left( \frac{dH_c}{dT} \right)_{H_c=0}^2.$$

Bu ifoda Rutgers formulasi deyiladi. Bu formula yordamida olingan natijalar qalay, galliy, indiy ustida olib borilgan tajriba natijalari bilan juda katta aniqlikda mos keladi.

### 4.13. Faza o'tishlar Landau va Yang-Li nazariyalari

Biz yuqorida birinchi va ikkinchi faza o'tishlar mavjudligini termodinamika nuqtayi nazaridan ko'rib chiqdik. Faza o'tishlarning mavjud bo'lishi statistik fizika uchun kutilmagan hodisa bo'lgan. Chunki, statistik yig'indi sistema holatini xarakterlovchi termodinamik kattaliklar: bosim, temperatura, hajm va boshqa parametrlarning uzluksiz funksiyasidir. Bu masalaning mohiyatini ochish va tahlil qilish uchun bir qator nazariyalar yaratilgan. Bularning hammasini bayon qilish murakkab vazifa. Chunki, ular nazariy fizikaning alohida bo'limlari bo'lib, maxsus matematik va fizik bilimlarni talab qiladi. Bu yerda faza o'tishlar hodisasining ba'zi sodda nazariyalari bilan tanishib chiqamiz.

Erenfest tomonidan ikkinchi xil faza o'tishlar tushunchasi kiritilgandan so'ng uning termodinamik nazariyasi Landau tomonidan (1937- y.) berilgan. Bu nazariya jism simmetriyasining o'zgarishi bilan yoki atomlarning joylashishidagi tartib-

lanishga bog'liq bo'lgan faza o'tishlarga taaluqlidir. Ikkinchi xil faza o'tishlarda ma'lum bir temperaturada bir simmetriyaga bo'lgan fazadan boshqa simmetriyaga ega bo'lgan fazaga sakrab o'tiladi. Bu nuqtada birinchi xil faza o'tishlardan farqli ravishda turli fazalar muvozanatda bo'lmaydi, balki ular orasidagi farq yo'qoladi. Bu temperatura  $T_c$  bilan belgilanadi va kritik temperatura deyiladi. Bunday faza o'tishlar, asosan, kristallarda ro'y beradi. Xulosa qilib, shunday yozish mumkin: Agar faza o'tishi qandaydir temperaturada sodir bo'lsa, u holda:

1.  $T > T_c$  dagi faza tartiblashmagan faza deyiladi.
2.  $T < T_c$  dagi faza tartiblashgan faza deyiladi.
3.  $T = T_c$  da ikkala faza orasidagi farq yo'qoladi.

Ikkinchi xil faza o'tishlar matematik nuqtayi nazardan termodinamik kattaliklar uchun maxsus nuqta hisoblanadi. Bu nuqta mavjudligini bosim, temperatura, hajm va shu kabi termodinamik kattaliklar yordamida tushuntirib bo'lmaydi. Shu sababli ikkinchi xil faza o'tishlarni tushuntirish uchun yangi musbat ichki parametr «tartib» parametri  $\eta$  kiritiladi. Bu parametrning traditsion termodinamik kattaliklardan farqi shundaki, uni nazariyaga «qo'l» bilan kiritiladi va u turli fazalarda qanday qiymatlar qabul qilishi kerakligi oldindan beriladi. Ya'ni, tartiblashmagan fazada tartib parametri  $\eta = 0$  deb olinadi. Termodinamik potensiallar, xususan, Gibbs energiyasi  $\Phi(T, p, \eta)$  shu parametrga bog'liq deb olinadi. Kritik nuqtadan o'tishda  $\Phi(T, p, \eta)$  ning uzluksiz o'zgarishini ta'minlash uchun tartiblangan fazada kritik nuqta yaqinida  $\eta$  yetarlicha kichik qiymatlarni qabul qilishi kerak. Shuning uchun  $\Phi(T, p, \eta)$ ni o'tish nuqtasi yaqinida, ya'ni tartiblashgan fazada  $\eta$  ning darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$\Phi(T, p, \eta) = \Phi_0(T, p) + \alpha(T, p)\eta + \beta(T, p)\eta^2 + \dots \quad (4.95)$$

Muvozanat holatda Gibbs energiyasi  $\eta$  bo'yicha ekstremumga ega bo'lishidan (4.95) ga asosan

$$\eta = -\frac{\alpha(T, p)}{2\beta(T, p)} \quad (4.96)$$

kelib chiqadi. Bu holat barqaror bo'lishi uchun  $\eta$  ning bu qiymati  $\Phi(T, p)$  minimum qiymat qabul qilishini, ya'ni  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} > 0$

ekanligini ta'minlab berishi kerak. Buning uchun  $\beta(T, p) > 0$  bo'lishi kelib chiqadi. Nazariya tajriba natijalari bilan mos kelishi uchun quyidagi postulatni qabul qilish kerak. Unga asosan, berilgan har bir bosimda shunday temperatura  $T_c$  mavjudki:

1.  $T > T_c$  da  $\alpha(T, p) \equiv 0$ .
2.  $T < T_c$  da  $\alpha(T, p) \neq 0$ .
3.  $T = T_c$  da  $\alpha(T, p) = 0$  shartlar o'rinli bo'ladi.

Boshqacha qilib aytganda  $T < T_c$  da tartiblashgan faza mavjud va  $T > T_c$  da tartiblashmagan faza mavjud bo'ladi deb qabul qilish kerak. Bu qoidani ushbu nazariya doirasida keltirib chiqarib bo'lmaydi, balki tajriba natijalari asosida shunday qoida nazariyaga kiritilgan. Shuning uchun  $T \leq T_c$  da  $\alpha(T, p)$  ni  $T - T_c$  ning darajalari bo'yicha qatorga yoyish mumkin, ya'ni

$$\alpha(T, p) = \alpha(T_c, p) + (T - T_c) \left( \frac{\partial \alpha(T, p)}{\partial T} \right)_{T=T_c} + \dots$$

Yuqoridagi shartga ko'ra,  $\alpha(T_c, p) = 0$  bo'lganligi uchun

$$\alpha(T, p) = (T - T_c) \left( \frac{\partial \alpha(T, p)}{\partial T} \right)_{T=T_c} \quad (4.97)$$

Shunday qilib o'tish nuqtasi yaqinida (4.95)–(4.97) ifodalarga asosan tartiblashgan fazada Gibbs termodinamik potensialini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{\alpha^2}{2\beta} = \Phi_0 - \frac{(T - T_c)^2}{4\beta} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_{T=T_c}^2 \quad (4.98)$$

Shunga o'xshash entropiya uchun ifodani topamiz:

$$S = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_p = S_0 + \frac{(T - T_c)}{2\beta} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_{T=T_c}^2 \quad (4.99)$$

Bu yerda  $\Phi_0$  va  $S_0$  mos ravishda Gibbs termodinamik potensialini va entropiyaning tartibga solinmagan fazadagi qiymatlari. (4.99) ga asosan ikkinchi xil faza o'tish nuqtasida issiqlik sig'iminining o'zgarishini topamiz:

$$\Delta C_p = C_p - C_p^{(0)} = \frac{T_c}{2\beta} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_{T=T_c}^2 \quad (4.100)$$

Bu yerda  $C_p$  tartibga solingan holatdagi issiqlik sig'imi. (4.100) da  $\beta > 0$  bo'lganligi uchun  $C_p > C_p^{(0)}$  kelib chiqadi. Demak, tartibga solingan fazadagi issiqlik sig'imi, tartibga solinmagan fazadagiga qaraganda katta bo'lar ekan. Bu hol tajriba natijalariga mos keladi  $\alpha(T, p)$  va  $\beta(T, p)$  funksiyalar bir qiymatli bo'lganligi uchun  $\eta$  ham bir qiymatli bo'ladi. Bu metastabil holat bo'lmasligiga olib keladi:

1.  $T < T_c$  da faqat bitta tartibga solingan faza mavjud bo'lib, tartibga solinmagan faza bo'lmaydi (faza barqaror).

2.  $T > T_c$  da esa aksincha, ya'ni tartibga solinmagan faza mavjud bo'lib, tartibga solingan faza bo'lmaydi.

Boshqacha qilib aytganda, ikkinchi xil faza o'tishlarda o'ta sovitish va o'ta qizdirish mumkin bo'lmaydi. Bu ushbu nazariya-ning muhim xulosasi bo'lib hisoblanadi.

Yuqorida keltirilgan nazariya fenomenologikdir, chunki nazariy kiritilgan  $\alpha(T, p)$  va  $\beta(T, p)$  larni aniqlay olmaydi. Ushbu nazariyada olingan (4.100) formulani Erenfest formulasi (4.86)

bilan solishtirish natijasida  $\alpha = f_i$  va  $\beta = -\Delta \left( \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_i} \right)$  ekanligini

aniqlaymiz. Bu esa Erenfest formulasi muhim termodinamik formula ekanligini ko'rsatadi. Chunki, o'tkazgichni o'ta o'tkazgich fazaga o'tish holi uchun bu formuladan Rutgers formulasi

$$\Delta C = C_s - C_n = \frac{T_c}{4\pi} \left( \frac{dH_c}{dT} \right)_{H_c=0}^2$$

kelib chiqadi. Bu yerdagi  $\left( \frac{dH_c}{dT} \right)_{H_c=0}^2$  kattalikni tajribadan o'lchab

issiqlik sig'imining sakrash kattaligini aniqlash imkoniyatini beradi. Vaholanki Landau nazariyasi bunday natijani bera olmaydi. Chunki, (4.100) formuladan Rutgers formulasi olinadi. Rutgers formulasi noma'lum bo'lgan  $\alpha(T, p)$  va  $\beta(T, p)$  kattaliklarni topish imkonini beradi. Bu formulalarni solishtirish  $\alpha(T, p) = H$  va  $\beta(T, p) = 4\pi$  ekanligini ko'rsatadi. Ushbu nazariya bunday kamchiliklarga ega bo'lishiga qaramasdan Erenfestning sof termodinamik nazariyasiga qaraganda ikkinchi faza o'tishlarni tahlil qilishda qulaydir.

Shu vaqtgacha faza o'tishlar mavjudligini fenomenologik termodinamika nuqtayi nazaridan o'rgandik. Endi faza o'tishlarni statistik fizika metodlari yordamida ko'rib chiqamiz.

Biror  $V$  hajmdagi ideal gazni ko'ramiz, shu bilan birga molekularlar orasidagi o'zaro itarish kuchi yaqin masofalarda juda tez o'sadi deb hisoblaymiz. U holda berilgan hajmda molekularlar soni juda katta, lekin chekli bo'lgan  $N$  dan oshmaydi, ya'ni biror ichki yoki tashqi sabablarga ko'ra zarralar soni cheksiz bo'la olmaydi. Bunday sistema uchun katta statistik yig'indi quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$\tilde{Z} = \sum_{n=1}^N z^n Z_n, \quad (4.101)$$

bu yerda  $z$  - aktivlik,  $Z_n$  - molekularlari soni  $n$  ta bo'lgan sistemachaning statistik yig'indisi. Statistik yig'indi ma'lum bo'lsa, u orqali ixtiyoriy termodinamik parametrlarni topish mumkin. Masalan, bosim

$$p = \frac{kT}{V} \ln \tilde{Z}, \quad (4.102)$$

molekularlarning zichligi yoki solishtirma hajmi

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{v} = \frac{kT}{V} \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \mu} \quad (4.103)$$

ifodalar bilan aniqlanadi. Bu yerda  $\mu$  - bo'yicha hosiladan aktivlik bo'yicha hosilaga o'tsak,

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{V} \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \ln z} = \frac{\partial p}{\partial \ln z} \quad (4.104)$$

hosil qilamiz. (4.102) va (4.104) tenglamalardan holat tenglamasi  $f(p, N, v)$  ni aniqlash mumkin.

Katta statistik yig'indi (4.101) dan ko'rinib turibdiki,  $z$  ning  $N$  darajali polinomi ekan, ya'ni

$$\tilde{Z} = zZ_1 + z^2Z_2 + z^3Z_3 + \dots + z^NZ_N. \quad (4.105)$$

Ushbu polinomning koeffitsiyentlari musbat, shuning uchun statistik yig'indi  $z > 0$  ning monoton o'suvchi funksiyasi bo'ladi.



Demak, (4.102) bilan aniqlanuvchi bosim ham monoton o'suvchi funksiya bo'ladi. Umuman (4.105) bilan aniqlanuvchi ixtiyoriy termodinamik kattalik  $z > 0$  ning uzluksiz va monoton funksiyasi bo'ladi. Faza o'tish nuqtalarida esa, birorta termodinamik kattalik yoki uning hosilalarining uzluksizligi buzilishi kerak, ya'ni uzilish, sakrab o'zgarish kabi maxsus nuqtaga ega bo'lishi kerak.

Katta statistik yig'indi uchun aniq ifoda birorta ham real sistemalar uchun topilmagan, ammo sodda modellar uchun bu masala hal qilingan.<sup>3</sup> Shunga qaramasdan umumiy holda masalani o'rganish mumkin ekan. Haqiqatan ham, matematik izlanishlar shuni ko'rsatadiki, faza o'tishlar katta statistik yig'indining nollari bilan uzviy bog'liq ekan. Bunday tahlilni avval  $N$  va  $V$  chekli bo'lganda tekshirib chiqamiz. Termodinamik kattaliklar maxsus nuqtalarga ega bo'lishi uchun  $\tilde{Z}$ :

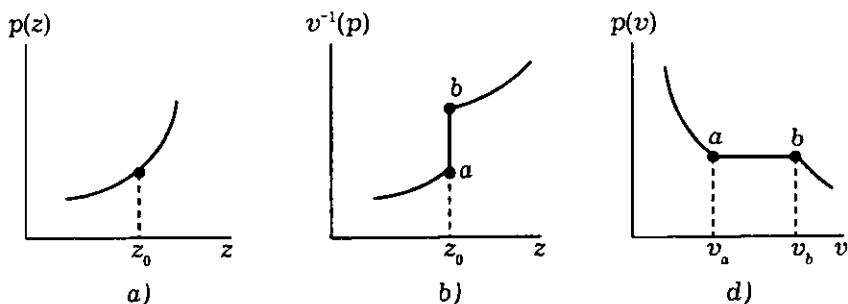
1. Maxsus nuqtalarga ega bo'lishi kerak. Lekin  $Z_n$  va  $z$  musbat bo'lganligi uchun katta statistik yig'indi maxsus nuqtalarga ega bo'la olmaydi.

2. Nolga teng bo'lishi kerak. Bu holda termodinamik kattaliklar logorifmik maxsus nuqtaga ega bo'ladi. Katta statistik yig'indi  $N$ -darajali polinom bo'lganligi uchun  $\tilde{Z}(z) = 0$  tenglama  $N$  ta ildizga ega. Bu ildizlardan biri  $z = 0$ , qolganlari o'zaro qo'shma kompleks ildizlar bo'ladi. Lekin  $z > 0$  sohada ildizlarga ega emas. Aktivlik nol yoki kompleks qiymatlarni qabul qila olmaydi. Shuning uchun katta statistik yig'indining bunday nollaridan paydo bo'ladigan maxsus nuqtalar fizik ma'noga ega emas.

Yang va Li tomonidan termodinamik chegaraviy holda, ya'ni solishtirma hajmni o'zgarimas ushlab turib,  $V$  va  $N$  cheksizga intilgan holda katta statistik yig'indi o'rganilgan. Statistik yig'indi  $z$  haqiqiy o'qda analitik funksiya bo'lganligi uchun uni  $\tilde{z}$  kompleks tekislikka analitik davom ettiramiz va u yerda uning xossalarini va nollarini tahlil qilamiz. Molekulalar soni cheksizga intilganligi uchun polinomning darajasi ham cheksizga intiladi, demak, ildizlarning soni ham cheksizga intiladi. Ular  $z$  tekislikni egallaydilar. Lekin, Yang va Li o'tkazgan tadqiqotlar shuni ko'rsatdiki, ildizlar  $z$  tekislikni bir tekis qoplamas ekan, ya'ni  $\frac{1}{V} \ln \tilde{Z}(z)$  haqiqiy o'qni o'z ichiga olgan biror  $R$

---

<sup>3</sup> Ferromagnetikning Izing modeli aniq yechimga ega.



4.6- rasm. Birinchi xil faza o'tishining yuzaga kelishi.

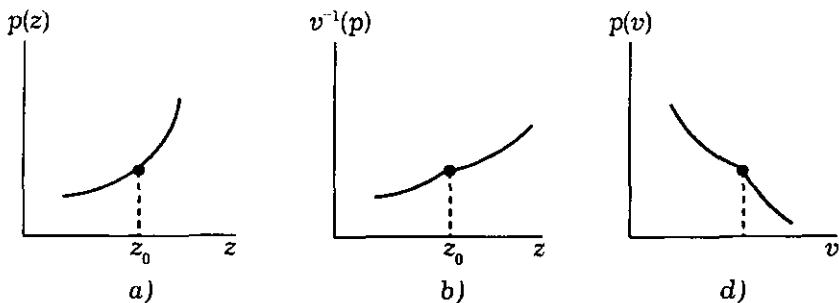
kompleks sohada analitiklik xossasini saqlab qolar ekan. Bunga asosan shu sohada bosim maxsus nuqtalarga ega bo'lmaydi, demak, faza o'tishlari yo'q.

Ammo  $N$  chekli bo'lgan sistemadan farqli ravishda  $N \rightarrow \infty$  va  $V \rightarrow \infty$  sistemada  $\bar{z}_i$  ildizlar soni cheksiz ko'p bo'ladi. Ular kompleks tekislikni to'ldirib, ba'zi nuqtalarda haqiqiy o'qqa istalgancha yaqinlashib kelishi mumkin.  $z_0$  nuqta shundaylardan bo'lsin.  $z = z_0$  ga juda yaqin nuqtalarda  $\tilde{Z}$  ning nollari yotadi. Bosim  $p(v)$  analitik bo'lganligi uchun  $z = z_0$  nuqta atrofida uzluksiz bo'ladi (4.6-a rasm). Lekin teskari solishtirma hajm (4.104) ga asosan bosim  $p$  dan  $\ln z$  bo'yicha olingan hosilaga teng va u  $z = z_0$  nuqtada uzilishga ega bo'lishi mumkin (4.6-b rasm). Uzilish kattaligi

$$\Delta \frac{1}{v} = \Delta \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \ln z}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Agar bunday uzilish o'rinli bo'lsa, bosimning solishtirma hajmga bog'lanishida bosim o'zgarimas bo'ladigan soha paydo bo'ladi (4.6-d rasm). Bunday bog'lanish birinchi xil faza o'tishi mavjudligidan dalolat beradi. Bu sohada solishtirma hajm  $v_a$  dan  $v_b$  gacha o'zgarishida bosim o'zgar olmay qoladi. Yuqorida ta'kidlaganimizdek, hosiladagi uzilish paydo bo'lishi mumkin, lekin shart emas.

Bosimdan olingan birinchi tartibli hosila uzilishga ega bo'lmasa, ikkinchi tartibli hosila uzilishga ega bo'lishi mumkin. Bunda  $v^{-1}$  ning  $z$  bog'lanish grafigida sinish paydo bo'ladi (4.7-b rasm). Mos ravishda, holat tenglamasida paydo bo'ladigan sinish ikkinchi tartib faza o'tishlari uchun xosdir.



4.6- rasm. Birinchi xil faza o'tishining yuzaga kelishi.

Yuqorida ko'rib chiqilgan nazariya faza o'tishlari mavjudligi ko'rsata oladi, lekin faza o'tishi aniq qaysi nuqtada bo'lishini va uning xilining xarakterini ko'rsata olmaydi.

#### 4.14. IV bobga oid masala va savollar

1. Katta kanonik taqsimotning umumiy xossalaridan foydalanib  $pV = kT \ln \tilde{Z}$  ekanligini isbotlang. Bu yerda  $\tilde{Z}$  katta statistik yig'indi.

2. O'zgarmas tashqi bosim ostida adiabatik holda izolatsiyalangan porshenli silindrda ideal gaz mavjud. To'g'ridan-to'g'ri entropiya variatsiyalari  $\delta S$  va  $\delta^2 S$  ni hisoblab, muvozanat holatda entropiya maksimaligi ko'rsatilsin.

*Yechish.* Sistema muvozanatida  $\Delta S < 0$   $\delta S = 0$  yoki  $\delta^2 S < 0$  bo'lishi kerak. Termodinamikaning asosiy tenglamasiga ko'ra ideal gaz uchun

$$dS = \frac{C_v}{T} dT + \frac{R}{V} dV \quad \text{va} \quad \delta Q = C_v dT + p_0 dV.$$

Silindr adiabatik izolatsiyalanganligidan  $C_v dT = -p_0 dV$ . Shuning uchun entropiya differensial

$$dS = \frac{1}{T} \left( \frac{RT}{V} - p_0 \right) dV = \frac{1}{T} (p - p_0).$$

Bu yerda  $p = \frac{RT}{V}$  - gaz bosimi,  $p_0$  - tashqi bosim. Bundan shu ko'rinadiki, muvozanat holat ( $dS = 0$ ) faqat  $p = p_0$  da bo'lishi mumkin bo'ladi. Bu holda entropiya maksimal bo'lib

$$S = C_v \ln T + R \ln V + S_0$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik, gaz hajmi  $\delta V$  ga, temperaturasi esa  $\delta T$  ga o'zgarsin. U holda

$$\begin{aligned} \Delta S &= C_v \ln \frac{T+\delta T}{T} + R \ln \frac{V+\delta V}{V} = \\ &= C_v \frac{\delta T}{T} + R \frac{\delta V}{V} - \frac{1}{2} \left( C_v \frac{\delta^2 T}{T^2} + R \frac{\delta^2 V}{V^2} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left( \frac{RT}{V} - p_0 \right) \delta V - \frac{1}{2} \left( C_v \frac{\delta^2 T}{T^2} + R \frac{\delta^2 V}{V^2} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (p - p_0) \delta V - \frac{1}{2} \left( C_v \frac{\delta^2 T}{T^2} + R \frac{\delta^2 V}{V^2} \right). \end{aligned}$$

Bundan entropiyaning birinchi va ikkinchi variatsiyalari uchun quyidagilarni olamiz:

$$\delta S = \frac{1}{T} (p - p_0) \delta V, \quad \delta^2 S = -\frac{1}{2} \left( C_v \frac{\delta^2 T}{T^2} + R \frac{\delta^2 V}{V^2} \right).$$

Shunday qilib, har qanday  $\delta T$  va  $\delta V$  da  $\delta^2 S < 0$  bo'lishi kelib chiqadi. Demak, muvozanat vaqtida entropiya maksimal qiymat qabul qilar ekan.

3. Turli xil moddali ikkita fazaning muvozanat sharti, ya'ni har bir komponent bitta faza tarkibiga kiruvchi ikki fazali ikki komponentli sistemaning muvozanat sharti aniqlansin.

*Yechish.* Turli xil moddalardan tashkil topgan (masalan: suv va kerosin) ikki fazali sistema muvozanat holatda bo'lishi uchun  $\Delta S < 0$ ,  $\delta S = 0$  yoki  $\delta^2 S < 0$  bo'lishi kerak. Ikki fazali ikki komponentli bunday sistema entropiyasi  $S = N's' + N''s''$  bo'ladi. Ichki parametrlari  $N'$ ,  $N''$ ,  $\nu'$ ,  $\nu''$ ,  $E'$  va  $E''$  quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:  $N' = \text{const}$ ,  $N'' = \text{const}$ ,  $E = E'N' + E''N'' = \text{const}$ ,  $V = \nu'N' + \nu''N'' = \text{const}$ . O'zaro bog'lanmagan parametrlar deb  $\nu'$ ,  $E'$  ni qabul qilamiz. Muvozanat sharti  $\delta S = 0$  bo'lganligi uchun yozilgan ifodalarning birinchi variatsiyalari orqali termodinamika asosiy tenglamasining yozamiz. Hosil bo'lgan tenglamani

$$N' \frac{\delta E' + p' \delta v'}{T'} + N'' \frac{\delta E'' + p'' \delta v''}{T''} = 0$$

tenglama bilan birgalikda yechish natijasida

$$\left( \frac{1}{T'} - \frac{1}{T''} \right) \delta E' + \left( \frac{p'}{T'} - \frac{p''}{T''} \right) \delta v' = 0 \quad \text{va} \quad T = T'', \quad p' = p''$$

natijani olamiz. Kimyoviy potensialga hech qanday shart qo'yilmaydi.

4. Tashqi maydondagi sistemaning muvozanat sharti aniqlansin.

5. Muvozanatning barqarorlik sharti  $\frac{\partial p}{\partial V} < 0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial S} = \frac{T}{C_p} > 0$

bir jinsli sistemaning kichik qismi uchun chiqarilgan. Butun tizim uchun ular qaysi hollarda to'g'ri va qaysi hollarda noto'g'ri?

6. Agar bir jinsli sistema barqarorlik holatida  $\frac{\partial p}{\partial V} = 0$  bo'lsa,

bu holatda  $\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = 0$  va  $\frac{\partial^3 p}{\partial V^3} < 0$  ligi ko'rsatilsin.

7. Agar ba'zi barqaror holatlarda  $\frac{\partial T}{\partial V} = 0$  bo'lsa, bunday

holatlarda  $\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^3 T}{\partial V^3}$  esa musbat ham, manfiy ham bo'lishi

ko'rsatilsin. *Ko'rsatma:*  $\Delta T \Delta S - \Delta p \Delta V > 0$ .

8. Bir jinsli sistemaning ba'zi holatlarida  $\frac{\partial p}{\partial V} = 0$ . Bu holatning

barqarorlik sharti qanday bo'ladi?

9. Moddaning gaz va qattiq jism holatlarining muvozanat shartiga asoslanib, ideal gazning entropiya doimiyligini hisoblash uchun ifoda topilsin.

*Yechish.* Muvozanat shartiga asosan, agar qattiq jism gaz bilan muvozanatda bo'lsa, uning kimyoviy potensiallari teng bo'ladi:

$$\mu'(T, p) = \mu''(T, p),$$

$$\mu(T, p) = \frac{\Phi}{N} = \frac{E - TS + pV}{N} = E_0 - TS_0 + p\nu,$$

$\mu(T, p) = E_0 - T(C_p \ln T - R \ln p + S_0) + p\nu$  - ideal gaz uchun

$\mu(T, p) = E_0 - TS + p\nu$  - qattiq jism uchun.

Bu ifodalardan:

$$RT \ln p = [E_0 - E_0 + p(\nu - \nu)] + C_p T \ln T - T\Delta_0,$$

$$\Delta_0 = -\frac{Q}{T} - C_p \ln T + \Delta + R \ln p.$$

Bu yerda termodinamikaning uchinchi qonuniga ko'ra -

$$\Delta = \int \frac{C_p}{T} dT, \text{ quruq haydash issiqligi } - Q = E_0 - E_0 + p(\nu - \nu),$$

$Q$ ,  $C_p$ ,  $p$  va  $T$  larni tajribada aniqlab, gaz entropiya doimiysi  $\Delta_0$  ni aniqlash mumkin.

10. Sirt tarangligining temperaturaga bog'liqligini bilgan holda, pardaning adiabatik kengayishida temperatura o'zgarishi va uning izotermik kengayishida yutilgan issiqlik miqdori topilsin.

11. Juda kichik zaryadlangan tomchi faqat o'ta to'yingan bug'da o'sib qolmasdan, balki to'yinishga yetmagan bug'da ham o'sib borishi ko'rsatilsin.

12. Faza o'tish issiqligining temperaturaga bog'liqligi  $\frac{d\lambda}{dT}$  topilsin.

13. To'yingan bug' issiqlik sig'imi uchun ifoda olinsin. 100 °C da to'yingan suv bug'ini adiabatik siqqanda nima uchun kondensatsiyalanmasligi tushuntirilsin.

14. Past temperaturada metallarning issiqlik sig'imi  $C_p$  temperaturaga proporsional. Agar metall o'ta o'tkazuvchan holatga o'tsa, uning issiqlik sig'imi  $C_s$  temperaturaning kubiga proporsional. Kritik temperaturada  $C_s = 3C_p$  bo'lishi ko'rsatilsin.

15. Kritik maydon kuchlanganligi egriligini  $H_c = H_0 \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right)$

parabola ko'rinishida aniq tasavvur qilish mumkin. Shu ifodadan foydalanib, solishtirma entropiya va solishtirma issiqlik sig'imi qiymatlari farqi  $n$ - va  $s$ -holatlarda topilsin.

16. Kritik nuqtada termodinamik sistema bosimidan hajm va temperatura bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaning noldan farqli ekanligi ko'rsatilsin.

17. Kritik nuqtada Joule-Tomson koeffitsiyenti aniqlansin.

18. Kritik nuqtadan tovush tezligi uchun ifoda topilsin.

19. Zarralar soni o'zgaruvchan bo'lgan sistemalarga misollar keltiring.

20. Kimyoviy potensial va uni aniqlash.

21. Katta kanonik taqsimot, uning fizik ma'nosi.  $\bar{n}$  ni hisoblash formulasi.

22. Zarralar soni o'zgaruvchan bo'lgan sistema entropiyasi.

23. Zarralar soni o'zgaruvchan sistemada kimyoviy potensial qiymati.

24. Muvozanatli nurlanish deb qanday nurlanishga aytiladi.

25. Vinni siljish qonunining termodinamik isboti.

26. Bartolining fikran tajribasini tushuntiring.

27. Termodinamik sistemalarda muvozanatning umumiy sharti.

28. Geterogen sistemalarda muvozanat sharti.

29. Gibbsning fazalar qoidasi.

30. Sistemaning termodinamik erkinlik darajasining soni.

31. Laplas formulasi. Laplas bosimi.

32. Faza o'tishlar. Birinchi va ikkinchi xil faza o'tishlar.

33. Klapeyron–Klauzius tenglamasi qanday olinadi?

34. Erenfest tenglamasi va uning isboti.

35. Rutgers formulasi. Maysner hodisasi.

36. Landau nazariyasining mohiyati nimadan iborat?

## V bob

### IDEAL SISTEMALARNING STATISTIK NAZARIYASI

#### 5.1. Bir atomli kvant ideal gazlar

Biz ikkinchi bobda statistik fizika metodlari yordamida makroskopik sistemaning asosiy termodinamik kattaliklarini topishning asosiy prinsiplarini ko'rib chiqdik. U yerda misol tariqasida ideal gazlarda bir atomli holatlari uchun statistik

yig'indi yoki holat funksiyasi  $z = \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} V$  bo'lishligini ko'r-

satdik. Gaz  $N$  ta atomdan tashkil topganligini hisobga oluvchi va uni bir butun sistema sifatida holatlarini aniqlovchi statistik yig'indini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$Z = \sum_{n=1}^N \exp\left(-\frac{\epsilon_n}{kT}\right) \Omega(\epsilon_n). \quad (5.1)$$

Bu yerda  $\epsilon_n$  – gazning  $n$ - kvant holat energiyasi,  $\Omega(\epsilon_n)$  – shu energiyaga ega bo'lgan holatlar (soni) vazni. Yig'indi barcha energetik holatlar bo'yicha olinadi. Holat funksiyasini topishda asosiy masala (5.1) dagi yig'indini hisoblashdir.  $N$  ta atomdan tashkil topgan ideal gaz uchun kvant mexanika masalasi yechimga ega bo'lsa, yig'indini hisoblash muammo bo'lmaydi. Ammo, bu masalani yechish hattoki ideal gazlar uchun ham amalga oshirib bo'lmaydi. Shuning uchun holat funksiyasini hisoblashni turli sharoitlarda amalga oshiramiz. Birinchi navbatda nisbatan yuqori temperaturalarni ko'rish bilan cheklanamiz. Bu holda energetik sathlar orasidagi masofa issiqlik energiyasidan juda kichik bo'ladi ( $\Delta\epsilon_n \ll kT$ ), demak, (5.1) da yig'indini integral bilan almashtirish mumkin, ya'ni

$$Z = \int \exp\left(-\frac{\epsilon}{kT}\right) d\Omega(\epsilon). \quad (5.2)$$



Bu yerda  $\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$ ,  $d\Omega = \prod' d\Omega_i = \prod' dp_i dq_i / h^{3N}$ . Shtrix belgisi

ko'paytmada faqat turli holatlar ishtirok etishini ko'rsatadi. Endi holatlar soni  $\Omega(\varepsilon)$  ni hisoblashni ko'rib chiqamiz. Kvant nazariyasi nuqtayi nazaridan gazdagi barcha atomlar aynan bir xilligi holat sonini aniqlashda va integralni hisoblashda muhim rol o'ynaydi. Ana shu kvant holatlar sonini topish kerak.

Bu masalani avval ikkita atomli holat misolida ko'rib chiqamiz. Fazalar fazosida ikki atomli holatni aks ettiruvchi  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$  va  $(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)$  tasviriy nuqtalar bilan aniqlanadi. Shu ikki zarra  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2)$  va  $(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1)$  holatda ham bo'lishi mumkin. Bu ikki holat zarralar aynan bo'lganligi uchun energetik ma'noda va, umuman, bir-biridan farq qilmaydi. Demak, impulslar bo'yicha integral olganimizda bitta holatni ikki marta hisobga olmoqdamiz. Agar sistema uchta zarradan iborat bo'lsa, (5.1)ni hisoblashda bitta holatni 3! marta hisobga olayotgan bo'lib chiqmoqdamiz. Bunday hisoblarni davom ettirsak, sistemaning  $N$  ta zarrali holat funksiyasini hisoblashda har bir holat bir marta inobatga olinishini ta'minlash uchun (5.2) ifodaning o'ng tomonini tasviriy nuqtalarning fazalar fazosida o'zaro o'rin almashtirish soni  $N!$  ga bo'lish kerak va holatlar sonini aniqlovchi ko'paytmada «shtrix» belgisini olib tashlash mumkin. Natijada

$$Z = \frac{1}{N!} \int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \prod_i \frac{dp_i dq_i}{h^{3N}}. \quad (5.3)$$

Bu yerda  $\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$ ,  $\varepsilon_i = \frac{p_i^2}{2m}$  - erkin zarra energiyasi. Zarralar aynan ekanligini inobatga olsak, (5.3) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$Z = \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \prod_i \int \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) dp_i dq_i = \frac{z^N}{N!}, \quad (5.4)$$

bu yerda  $z$  - bitta molekula uchun holat integrali. Uni o'rniga qo'yish natijasida  $N$  ta zarradan tashkil topgan bir atomli kvant ideal gaz holat funksiyasini olamiz:

$$Z_{\text{id}} = \frac{1}{N!} \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} V^N. \quad (5.5)$$

Bu yerda holat funksiyasini  $N!$  ga bo'lish kvant statistik fizikasida zarralarning aynanligi prinsipi asosida bevosita kelib chiqadi.

## 5.2. Termodinamik kattaliklarni hisoblash

Atomlari asosiy holatda yotgan bir atomli kvant ideal gazlar termodinamik kattaliklarini hisoblashni ko'raylik.

Termodinamik kattaliklarni hisoblash III bob (3.39) da keltirilgan formulalar asosida amalga oshiramiz. Ideal gaz ichki energiyasi (5.5) ga asosan

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{3}{2} NkT, \quad (5.6)$$

issiqlik sig'imi

$$C_V = \frac{3}{2} Nk. \quad (5.7)$$

Gaz erkin energiyasini hisoblashda (5.5) ifoda va Stirling formulasi  $N! = N^N (2\pi N)^{1/2} \cdot \exp(-N)$  ni hisobga olsak, u holda

$$F = -kT \ln Z = -NkT \ln \left[ \frac{eV}{N} \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \right] \quad (5.8)$$

bo'ladi. Ideal gaz bosimi esa

$$p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \frac{NkT}{V}. \quad (5.9)$$

Ushbu tenglama bizga juda yaxshi tanish bo'lgan holat tenglamasidir. Bu tenglama ilgari tajriba natijalari asosida yozilgan edi. Bu yerda uni toza nazariy yo'l bilan hosil qildik. Ideal gaz entropiyasini (5.8) ga asosan

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = Nk \ln \frac{V}{N} + C_V \ln kT + \frac{5}{2} Nk + Nkj \quad (5.10)$$

yoki  $V = \frac{NkT}{p}$  bilan almashtirish natijasida

$$S = C_p \ln kT - Nk \ln p + \frac{5}{2} Nkj$$

ko'rinishda olamiz. Bu yerda  $j = \ln \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2}$  - kimyoviy doimiy

deb yuritiladi. Bu yerda (5.10) dan foydalanib, gazlar aralashmasi uchun entropiya o'zgarishini va Gibbs paradoksini ko'rsatish mumkin (Gibbs paradoksiga qarang). Gibbs termodinamik potentsiali uchun  $\Phi = F + PV = F + NkT$  ifodadan quyidagi tenglikni olamiz:

$$\Phi = -\frac{5}{2} NkT \ln kT + NkT \ln p - NkTj.$$

Gaz kimyoviy potentsiali esa  $\mu = \Phi/N$  dan quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\mu = kT \ln \left[ \frac{N}{V} \left( \frac{h^2}{2\pi m kT} \right)^{3/2} \right]. \quad (5.11)$$

Misol sifatida bir atomli ultrarelyativistik gaz uchun holat funksiyasini va termodinamik kattaliklarni hisoblashni ko'rib chiqamiz. Bu misolda holat funksiyasi uchun aniq ifodani topish mumkin. Relativistik zarraning energiyasi  $\varepsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$  ifoda bilan aniqlanadi. Ultrarelyativistik holda  $pc \gg mc^2$  bo'lganligi uchun  $\varepsilon \simeq pc$  bo'ladi. Ultrarelyativistik atomlardan tashkil topgan gazning holat funksiyasi

$$Z = \frac{z^N}{N!} = \frac{1}{N!} \left[ \int \exp \left( -\frac{pc}{kT} \right) \frac{dp}{h^3} \right]^N. \quad (5.12)$$

Ushbu ifodadagi integral oson hisoblanadi. Natijada

$$Z = \left[ 8\pi e \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 \frac{V}{N} \right]^N. \quad (5.13)$$

Bu yerda  $N!$  ni hisoblashda Stirling formulasidan foydalandik.

Endi holat funksiyasi (5.13) yordamida ultrarelativistik gaz uchun termodinamik kattaliklarni hisoblaymiz.

Gaz erkin energiyasi

$$F = -kT \ln Z = -kTN \ln \frac{AVT^3}{N}, \quad (5.14)$$

entropiyasi

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = kN \ln \frac{AVT^3}{N} + 3Nk, \quad (5.15)$$

ichki energiyasi

$$E = F + TS = 3NkT, \quad (5.16)$$

ifodalar orqali aniqlanadi.  $F$  – doimiy kattalik. Ichki energiya (5.16)dan ultrarelativistik gaz issiqlik sig‘imini topamiz:

$$C_V^{ur} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = 3Nk = 2C_V^{nr}. \quad (5.17)$$

Demak, ultrarelativistik gaz issiqlik sig‘imi norelativistik gaz issiqlik sig‘imidan ikki marta katta ekan.

### 5.3. Maksvell va Maksvell–Bolsman taqsimotlarining Gibbs taqsimoti ko‘rinishida yozilishi

Biz bu va keyingi mavzuda kvant statistikasida statistik taqsimotlarni yana bir bor ko‘rib chiqamiz. Buning uchun kvant mexanikasining ikkita muhim tushunchasidan foydalanamiz.

*Birinchi tushuncha:* kvant fizika qonunlari bilan tavsiflanuvchi sistemalar klassik sistemalardan tubdan farq qiluvchi xususiyatga ega, ya’ni ularning holatlarini aniqlovchi kattaliklar diskret (uzlukli) qiymatlarni qabul qiladi. Qisqacha qilib gapirsak sistema diskret holatlarda bo‘ladi. Demak, termodinamik sistemani statistik fizika yordamida o‘rganar ekanmiz, holatlarning diskret ekanligini albatta inobatga olishimiz kerak. Sistemaning bunday xususiyatini statistik yig‘indini hisoblashda inobatga olish kerakligi to‘g‘risida fikr bildirdik. Ammo, yuqori temperaturalar sohasini ko‘rish bilan cheklanganligimiz sababli bu holatni muhim emas deb chetlab o‘tdik, masalani izchillik bilan amalga oshirmadik.

*Ikkinchi tushuncha:* elementar zarralarning aynanlik prinsipi – ya'ni elementar zarralarni bir-biridan tamoman farq qilmaslik prinsipi. Bu prinsipni qat'iylik bilan hisobga olganimiz yo'q. Xolos zarralar o'rinlarini almashinishi tufayli farqlanuvchi holatlarni bitta fizikaviy holat deb qarab hisobga oldik va 5.1- badda holat funksiyasini hisoblashda  $N$  ta zarradan tashkil topgan sistema uchun kvant holatlar sonini  $N!$  ga bo'ldik. Bu kvant mexanikaga qadar ham shunday qilingan. Klassik statistik yig'indi yordamida termodinamik kattaliklar uchun to'g'ri ifoda olish uchun shu yo'l tutilgan edi. Ammo o'tkazilgan bu hisoblash izchillikka ega emasligi aniq. Shuning uchun boshdanoq zarralarni bir-biridan farq qilishdan voz kechamiz, chunki zarralarni aynan bir-biriga o'xshashligini qat'iylik bilan hisobga olish yangi statistik taqsimotlarga olib keladi.

Zarralarning aynanlik prinsipi asosida eng avvalo Maksvellning klassik taqsimoti isbotini qarab chiqaylik.

Faraz qilaylik, gaz molekulari ilgarilanma harakat energiyasi  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots$  bo'lgan kvant holatlarda yotgan bo'lsin. Gazda zarralarning holatlar bo'yicha qandaydir taqsimoti mavjud bo'lsin, ya'ni  $\varepsilon_1$  energiyaga ega bo'lgan zarralar soni  $n_1, \varepsilon_2$  energiyaga ega bo'lgan zarralar soni  $n_2, \dots, \varepsilon_k$  energiyaga ega bo'lgan zarralar soni  $n_k, \dots$ . Shular ichidan ixtiyoriy tanlangan  $\varepsilon_k$  energiyali kvant holatlarda yotgan hamma zarralarni sistema sifatida tanlab olaylik. Boshqa energetik sathlarda yotgan zarralar esa termostatni tashkil qilsin. Sistemadagi zarralarning o'zaro va termostatdagi zarralar bilan ta'sirlashishi tufayli ular boshqa energetik holatlarga o'tib turadi. Shu vaqtning o'zida termostatdagi zarralar  $\varepsilon_k$  energetik holatga o'tishi mumkin. Shu sababli sistemadagi zarralar soni  $n_k$  o'zgarib turadi. Bu yerda shuni ta'kidlash lozimki,  $\varepsilon_k$  energiyali zarralar tom ma'noda fazoviy alohida joy egallamagan. Ular sistema va termostat bo'ylab tarqoq holda joylashgan. Sistema energiyasi  $\varepsilon = \sum \varepsilon_k n_k$  ekanligini hisobga olsak, u holda zarralar sonining o'rtacha qiymati  $\bar{n}_k$  ni (4.17) ifodaga asosan quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n_k} \left( \exp \left( \frac{\mu - \varepsilon_k}{kT} \right) \right)^{n_k} \Omega(n_k). \quad (5.18)$$

Bu ifoda yordamida Maksvell, Maksvell-Bolsman, Fermi-Dirak va Boze-Eynshteyn taqsimotlarini keltirib chiqarish mumkin. Bu taqsimotlarni olishda kvant holatlar soni  $\Omega(n_k)$  ni hisoblashda yondashish turlicha bo'ladi. Bu ham bo'lsa zarralarning aynanligini hisobga olish bilan bog'langan.

Eng avval Maksvell taqsimotini olaylik. Bu holda  $n_k$  ta zarralarning fazoviy o'rnini almashtirish natijasida hosil bo'ladigan sistema almashtirishgacha bo'lgan sistemadan farq qilmaydi. Shu sababli bunday sistemaning holatlari  $n_k!$  karrali aynigan bo'ladi. Kvant holatlar soni

$$\Omega(n_k) = \frac{1}{n_k!} \frac{d\Gamma}{h^3} = \frac{1}{n_k!} \frac{h^3}{h^3} = \frac{1}{n_k!}$$

bo'ladi. Natijada

$$\begin{aligned} \bar{n}_k - kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n_k=0}^N \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}\right)^{n_k} \frac{1}{n_k!} - \\ - kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{x^{n_k}}{n_k!} - kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \exp(x). \end{aligned}$$

Demak,

$$\bar{n}_k = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}\right). \quad (5.19)$$

Agar sistemadagi zarralarning holati va energiyasi uzluksiz holda o'zgarsa, u holda energiyali holat o'rniga energiyasi intervalda yotgan holat qaraladi:

$$dn = \bar{n} d\Omega \quad \text{yoki} \quad dn = \bar{n} \frac{d\gamma}{h^3} = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{kT}\right) \frac{d\gamma}{h^3}. \quad (5.20)$$

Bu yerda  $d\gamma$  - energiya intervali  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon + d\varepsilon$  ga mos keluvchi fazalar fazosining hajmi,  $d\gamma/h^3$  shu energiyali holatlar soni va  $\mu -$  parsial potensial bo'lib, (5.11) bilan ifodalanadi. (5.20) ifoda ilgari olingan Maksvell taqsimoti bilan mos tushadi.

Agar ko'rilayotgan sistema tashqi maydon ta'siri ostida bo'lsa, u holda (5.20) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dn = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon - U}{kT}\right) \frac{d\gamma}{h^3}.$$

(5.21) ifoda Maksvell-Bolsman taqsimoti deyiladi.

#### 5.4. Boze–Eynshteyn va Fermi–Dirak taqsimotlari

Gazning berilgan zichliklarida yetarlicha past temperatura-larda klassik taqsimot funksiyasidan foydalanib bo'lmaydi. Bu holda kvant holatlari orasidagi masofani issiqlik energiyasidan kichik deb bo'lmaydi va statistik taqsimotni qaytadan ko'rib chiqish kerak. Bu taqsimot  $N$  ta zarradan tashkil topgan sistema qanday toifadagi to'lqin funksiyasining aniqlanishiga bog'liq ekan. Kvant mexanikasidan ma'lumki, to'lqin funksiyasi ixtiyoriy ikkita zarraning o'rnini almashtirishga nisbatan simmetrik yoki antisimmetrik bo'ladi. Simmetrik to'lqin funksiya bilan aniqlanuvchi sistema zarralarining spinlari butun, antisimmetrik to'lqin funksiya holida esa yarimga toq karrali bo'ladi. Ikkinchi holdagi zarralar Pauli prinsipiga bo'ysunadi, ya'ni bitta kvant holatda faqat bitti zarra yotishi mumkin. Kvant statistikasini alohida ideal gazlar misolida ko'rib chiqamiz.

Bir atomli kvant ideal gazlar uchun statistik taqsimotlarni chiqarishda, zarralarning aynanlik prinsipini izchillik bilan hisobga olaylik. Buning uchun turli xil energetik sathlarda yotgan zarralarni nomerlab, butun gaz holatini ko'rsatish o'rniga shu holatlardagi zarralar sonini ko'rsatish zarur deb qaraymiz, ya'ni boshqacha qilib aytganda:

$\varepsilon_1$  energiyali holatda  $n_1$  ta zarra;

$\varepsilon_2$  energiyali holatda  $n_2$  ta zarra va h.k. zarra bo'lishligini ko'rsatish zarur deb hisoblaymiz. Bu holda har bir holat teng statistik vaznga ega bo'ladi, ya'ni  $\Omega(n_k) = d\gamma/h^3 = h^3/h^3 = 1$  bo'ladi. Natijada (5.18) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n_k} \left[ \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}\right) \right]^{n_k}.$$

Kvant mexanikasidan bizga ma'lumki elementar zarralar, jumladan, atom yoki molekularlar spin momentiga qarab ikki xil toifaga bo'linadi. (5.22) ifodadagi yig'indini shu ikki xil toifadagi zarralar uchun turlicha hisoblanishi kerak: birinchisi, Paulining ta'qiqlash prinsipiga bo'ysunmaydigan (spinlari butun) zarralar va ikkinchisi (spinlari 1/2 toq karrali) unga bo'ysunuvchi zarralar.

Ta'qiqlash prinsipiga bo'ysunmovchi zarralar uchun har bir holatdagi zarralar soniga hech qanday shart qo'yilmaydi. Shu sababli (5.22) ifodadagi yig'indida  $n_k$  0 dan  $N$  gacha bo'lgan qiymatlarni qabul qiladi, ya'ni

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n_k=0}^N \left[ \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}\right) \right]^{n_k} \simeq$$

$$\simeq kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n_k=0}^{\infty} \left[ \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}\right) \right]^{n_k},$$

bu yerda  $N \gg 1$  bo'lganligi uchun yig'indining yuqori chegarasi  $\infty$  bilan almashtirildi. Ixtiyoriy energetik holatda zarralarning o'rtacha soni chekli bo'lganligi uchun qator yaqinlashuvchi bo'lishi kerak, ya'ni

$$\mu < \varepsilon_k \quad (5.23)$$

shart o'rinli bo'lishi kerak. Bu holda qator cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaga bo'lib oson hisoblanadi:

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \frac{1}{1 - \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}\right)} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT}\right) - 1}.$$

Demak,

$$\bar{n}_k = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT}\right) - 1}. \quad (5.24)$$

Ushbu ifoda zarralari Pauli ta'qiqlash prinsipiga bo'sunmaydigan ideal gazda  $\varepsilon_k$  energiyali zarralarning o'rta soni bo'lib, Boze-Eynshteyn taqsimoti deb yuritiladi. Bu taqsimot spinlari  $s = 0, 1, 2, \dots$  bo'lgan zarralar uchun o'rinlidir. Odatda, spinlari nol va butun bo'lgan elementlar zarralarga «bozon»lar deb yuritiladi. Bunday elementlar zarralar kvant mexanikasida simmetrik to'lqin funksiyasi bilan ifodalanadi.

Agar  $\varepsilon_k = 0$  energiya uchun ham (5.23) yoki  $\exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}\right) < 1$

tengsizlik o'rinli bo'lishini hisobga olsak,  $\exp\left(\frac{\mu}{kT}\right) < 1$  bo'ladi.

Bu tengsizlikdan parsial (kimyoviy) potensial  $\mu < 0$  ligi kelib chiqadi.

Endi ta'qiqlanish qoidasiga bo'ysunuvchi elementar zarralar uchun statistik taqsimotni qarab chiqaylik. Bu hol uchun har



bir energetik sathlardagi zarralar soni  $n_k > 1$  bo'lmisligi kerak, ya'ni  $n_k \ll 1$  yoki «1» qiymatlarini qabul qilishi mumkin. U holda (5.22) ifodadan foydalanib, quyidagi ko'rinishdagi statistik taqsimotni olish mumkin:

$$\bar{n}_k = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT}\right) \pm 1}. \quad (5.25)$$

Bu Fermi-Dirak taqsimoti deyiladi va spinlari  $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$  yarim va yarim butun elementar zarralar uchun o'rinli bo'ladi. Bunday zarralarni «fermion»lar deb yuritiladi va kvant mexanikada antisimmetrik to'lqin funksiya bilan ifodalanadi (elektronlar, pozitronlar, neytronlar, protonlar,  $\mu$ - mezon va h.k.).

Amalda  $\Delta\varepsilon \ll kT$  bo'lganligi sababli, energiyali sathdagi o'rtacha zarralar soni o'rniga  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon + d\varepsilon$  energiya intervalidagi o'rtacha zarralar soni  $dn = \bar{n}d\Omega$  yoki

$$dn = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT}\right) \pm 1} \cdot \frac{d\gamma}{h^3} \quad (5.26)$$

qidiriladi. Umuman

$$dn = gf(\varepsilon)d\Omega \quad (5.27)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerda  $g = 2s + 1$ ,  $s$  - zarra spini.

Agar  $\exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT}\right) \gg 1$  shart bajarilsa, (5.26)dagi har ikkala

taqsimot Maksvellning klassik taqsimoti (5.20)ga o'tadi. Shu sababli bu shartni klassik taqsimotning tatbiq qilish sharti sifatida qabul qilish mumkin. Shartda ikkita kattalik  $\varepsilon$  va  $\mu$  ishtirok etmoqda. Berilgan gaz uchun energiya ixtiyoriy qiymatlarini qabul qilishi mumkin, lekin kimyoviy potensial aniq qiymat qabul qiladi. Shu sababli klassik taqsimotni o'rinli bo'lish chegarasini kimyoviy potensialga nisbatan yozish to'g'ri bo'ladi. Buning uchun birinchi navbatda taqsimot funksiyasining normirovka shartidan  $\mu$  ni aniqlaymiz. Maksvell taqsimotining fazalar fazosi bo'yicha integrali bir tomondan berilgan hajmdagi

zarralar soniga teng bo'ladi. Ikkinchi tomondan integral ostidagi  $\varepsilon$  o'rniga erkin zarra energiyasi qo'yib integralni hisoblasak, quyidagi natijani olamiz:

$$N = V \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right).$$

Bu natijaga asosan klassik taqsimotning tatbiq qilish chegarasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\exp\left(-\frac{\mu}{kT}\right) = \frac{V}{N} \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \gg 1. \quad (5.28)$$

Ushbu ifodaga ko'ra klassik taqsimotning tatbiq qilish chegarasi bir vaqtning o'zida gaz zarralarining massasi, temperaturasi va zichligi bilan belgilanadi. (5.28) shart bajarilishi uchun zarra massasi katta, gaz temperaturasi yuqori va zichligi kichik bo'lishi kerak.

Agar (5.28) shartning teskarisi bajarilsa, u holda gaz aynigan holatda bo'ladi. Aynish chegarasi

$$\frac{V}{N} \left( \frac{2\pi mkT_0}{h^2} \right)^{3/2} = 1$$

dan boshlanadi. Bu ifoda aynish temperaturasini aniqlab beradi:

$$T_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{mk} n^{2/3}.$$

Shunday qilib zarralarning aynanligini izchillik bilan inobatga olish, asosida Gibbs taqsimoti yotgan, bir-biridan sifat jihatdan tubdan farq qiladigan taqsimotlarga olib keldi. Bu taqsimotlar yordamida bir qator muhim masalalarni hal qilish mumkin.

## 5.5. Absolut nol temperaturalarda Fermi-gaz

Past temperaturalarda  $V$  hajmdagi erkin fermionlardan tashkil topgan gaz – Fermi-gaz tabiatini o'rganish muhim ahamiyatga egadir. Bu modelni metallardagi elektron gazga tatbiq qilish bir necha taxminga asoslangan.

Birinchidan, metalldagi barcha atomlar bir karra ionlash deb qaralsa, berilgan hajmda elektronlar soni atomlar soni

$N$  ga teng bo'ladi. Pauli prinsipiga asosan bitta energetik holatda ikkita elektron bo'lishi mumkinligini hisobga olsak, ular eng quyi  $N/2$  ta holatni egallagan bo'ladi. Yuqori holatlar quyi holatlardan issiqlik energiyasi  $kT$  bilan ajralib turadi.

Ikkinchidan, metallidagi elektron gaz xossalarini izotrop model doirasida o'rganamiz, ya'ni ularni erkin deb qabul qilamiz. U holda elektronlar energiyasi kvaziuzluksiz spektrni tashkil qiladi. U holda dispersiya qonuni  $\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}$  bilan aniqlanadi. Bu yerda  $m_0$  - elektronning effektiv massasi bo'lib, metallar uchun erkin elektronning massasiga yaqin qiymatlarni qabul qiladi.<sup>1</sup>

Uchinchidan, metallidagi elektronlarning zichligi juda katta ( $10^{22}$ – $10^{23}$   $\text{sm}^{-3}$ ) bo'lishiga qaramasdan elektronlarning o'zaro va ionlar bilan ta'sirlashishini hisobga olmaymiz. Bunday taxmin ikki toifadagi ta'sir bamisoli o'zaro bir-biri kompensatsiyalaydi degan fikrga asoslangan bo'lib, past temperaturalarda nazariy va eksperimental tasdig'ini topgan.

Shunday qilib, past temperaturalarda metallidagi elektron gazni - siyrak ideal Fermi gaz deb hisoblab, uning xossalarini o'rganamiz.

Faraz qilaylik,  $V$  hajmda  $N$  ta elektron bo'lsin. Elektronlar soni Fermi-Dirak taqsimoti bilan quyidagicha bog'langan:

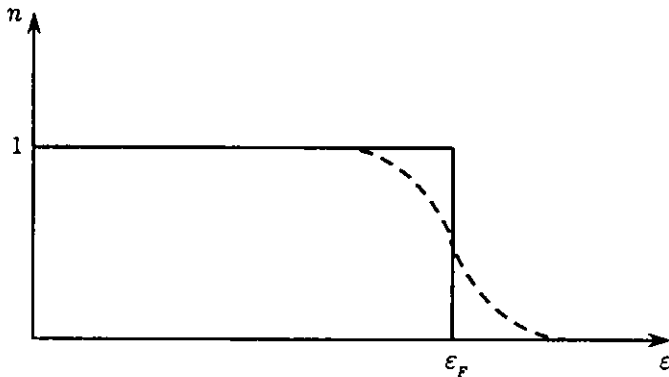
$$N = \int dn = \int gf(\varepsilon)d\Omega = \int \frac{g}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kt}\right)+1} \cdot \frac{d\gamma}{h^3}.$$

Bu yerda  $g = 2S + 1$ , elektronlar uchun  $g = 2$ ,  $d\gamma = d\mathbf{p}d\mathbf{r}$ . Natijada metall hajmidagi to'la elektronlar soni quyidagi ko'rinishni oladi:

$$N = 4\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} V \int \frac{\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right)+1}. \quad (5.29)$$

---

<sup>1</sup> Kristallarda, xususan, metallarda, dispersiya qonuni kristall panjaraning simmetriyasiga bog'liq bo'lib, murakkab ko'rinishga ega bo'ladi. Hattoki, kub simmetriyasiga ega bo'lgan kristallarda ham murakkab bo'ladi, chunki elektron davriy maydonda harakat qiladi. Parabolik dispersiya qonuni faqat izoenergetik sirtlarning ekstremal nuqtalari yaqinida o'rinli bo'ladi.



5.1- rasm. Fermi-Dirak taqsimoti: absolut nolda – uzluksiz chiziq, absolut nol yaqinida – punktir chiziq.

Hisoblashlarni davom ettirishdan avval past temperaturalar sohasida elektronlarning taqsimotini ko‘rib chiqamiz. Birinchi navbatda  $T \rightarrow 0$  da Fermi-Dirak taqsimotini o‘rganamiz:

$$f(\varepsilon, T \rightarrow 0) = \theta(\mu_0 - \varepsilon) = \theta(-\varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon < \mu_0, \\ 0, & \varepsilon > \mu_0. \end{cases} \quad (5.30)$$

Bu yerda

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Xevisayd funksiyasi,  $\mu_0 = \mu(T \rightarrow 0) = \varepsilon_F$  – Fermi energiyasi. (5.30) ifoda bilan aniqlanuvchi taqsimot 5.1- rasmda tasvirlangan (uzluksiz chiziq). Bu taqsimotning fizik ma‘nosi aniq. Har bir energetik sathda ikkitadan ortiq elektron bo‘lmasligini hisobga olsak va metalldagi elektronlar soni  $N$  ga teng bo‘lsa, u holda birinchi  $N/2$  ta energetik sath egallangan bo‘ladi, ya‘ni  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F$  intervaldagi sathlar elektronlar bilan band bo‘ladi. Boshqa  $\varepsilon > \varepsilon_F$  energetik sathlar esa elektronlardan holi bo‘ladi. Shuning uchun (5.29) dagi integral chegarasi  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F$  tengsizlik bilan belgilanadi. Natijada  $V$  hajmdagi elektronlar soni uchun quyidagi ifodani topamiz:

$$N = \frac{8\pi}{3} V \left( \frac{2m\varepsilon_F}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8\pi V}{3h^3} p_{\max}^2. \quad (5.31)$$

Metallardagi elektron gazining energiyasi esa

$$E = \int \varepsilon dn = 4\pi \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} V \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^{\frac{3}{2}} d\varepsilon = \frac{3}{5} N \varepsilon_F \quad (5.32)$$

bo'ladi. (5.32) ifodadan bitta elektronga to'g'ri kelgan energiya

$$E_0 = \frac{E}{N} = \frac{3}{5} \varepsilon_F$$

va (5.31) dan

$$\mu_0 = \varepsilon_F = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{N}{V} \cdot \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}}$$

tengliklar bilan aniqlanishini topamiz. Agar elektron gazning zichligi ma'lum bo'lsa, u holda  $\varepsilon_F$  ning qiymati aniq bo'ladi. Yuqoridagi ifodalardan foydalanib, elektronlarni o'rtacha kvadratik tezligini, elektron gaz bosimini hisoblash mumkin, ya'ni

$$p_0 = \frac{1}{5} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{m} \left( \frac{N}{V} \right)^{\frac{5}{3}}$$

Bu yerda  $p_0$  - absolut nol temperaturada elektron gazning bosimi. Shunday qilib hatto absolut nolda ham metalldagi elektronlarning bosimi noldan farqli ekan. Bundan tashqari u ideal gaz bosimiga nisbatan juda katta qiymatlarni qabul qiladi. Agar  $\frac{N}{V} \sim (10^{22} + 10^{23} \text{ sm}^{-3})$  tartibida bo'lsa,  $p_0 \sim (10^4 + 10^5) \text{ atm}$ .

Haqiqatan ham, bu ideal gaz bosimidan juda kichikdir. Buning asosiy sababi absolut nolda ham elektronlar tinch holatda bo'lmaydi. O'rtacha kvadratik tezlik

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3}{5} \frac{p_{\max}}{m}} = \sqrt{\frac{3}{5} \left( \frac{3N}{8\pi V} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{h}{m}}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bunga son qiymatlarni qo'yib tezlik son qiymatining tartibi  $\sqrt{v^2} \sim (10^7 + 10^8) \text{ sm/s}$  ekanligini topamiz.

Absolut nolda elektron gazining issiqlik sig'imi  $C_V^{\text{el}} = 0$  bo'ladi.

## 5.6. Metallarda elektron gaz. Issiqlik sig'imi

Metallarning issiqlik sig'imini Maksvell–Bolsman taqsimotidan foydalanib hisoblangandagi nazariy natijalar tajriba natijalaridan jiddiy farq qilgan. Bu masalaga to'g'ri javob issiqlik sig'imini hisoblashda metallardagi kuchsiz bog'langan valent elektronlarni Fermi–Dirak taqsimotiga bo'ysunuvchi erkin elektron deb qarash yetarli ekan.

Shu sababli yuqorida olingan natijalarni  $T = 0$  dan farqli past temperaturalarda ham metallardagi elektron gazning tabiatini o'rganishga tatbiq qilish mumkin. Past temperatura sharti:  $kT/\mu \ll 1$  yoki  $kT/\varepsilon_F \ll 1$ . Bu shart issiqlik ta'sirida  $E_F$  Fermi sathidan pastdagi elektronlar chegaradan yuqoridagi qo'shni energetik sathlarga o'tishi mumkinligini ko'rsatadi. Bu holda fermi taqsimoti 5.1-rasmdagi punktir chiziqqa o'tadi. Taqsimotdagi yoyilishning yarim kengligi (5.25) dan  $\Delta\varepsilon \sim kT$  ekanligini aniqlash mumkin. Bu energetik intervalda elektronlarning soni juda kichik bo'ladi, ya'ni elektron gazini siyrak Fermi gaz deb qarash mumkin.

Bu hol uchun termodinamik kattaliklarni topishda quyidagi ko'rinishdagi

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^n d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT}\right) + 1} - \int_0^{\infty} f(\varepsilon) \varepsilon^n d\varepsilon \quad (5.33)$$

integralni hisoblashni ko'raylik. Ushbu integral aniq olinmaydi. Shuning uchun (5.33) da  $(\varepsilon - \mu)/kT = x$  deb belgilab, bir marta bo'laklab integrallaymiz. Natijada quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$I_n = -\frac{\mu^{n+1}}{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{kT}{\mu} x\right)^{n+1} \frac{\partial f}{\partial x} dx.$$

Bu yerda  $\frac{\partial f}{\partial x}$  funksiya  $\Delta x \sim \frac{kT}{\mu}$  oraliqda noldan farqli bo'lganligi uchun integralning quyi chegarasi  $-\frac{\mu}{kT}$  ni  $-\infty$  bilan almashtirdik. Shu sababli integral ostidagi  $\left(1 + \frac{kT}{\mu} x\right)^{n+1}$  funk-

siyani qatorga yoyib, birinchi ikkita had bilan chegaralanamiz. U yerdagi integrallarni hisoblab, nihoyat quyidagi ifodani olamiz:

$$I_n \simeq \frac{\mu^{(n+1)}}{n+1} \left[ 1 + \frac{n(n+1)\pi^2}{6} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]. \quad (5.34)$$

Metallardagi elektronlar sonini va elektron gaz energiyasini hisoblashda (5.34) ifodadan foydalanamiz. (5.39) ifodadan elektronlar sonini hisoblashda, biz qaraydigan hol uchun (5.34) da  $n = 1/2$ . Natijada elektronlar soni:

$$N = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} V \cdot \mu^{\frac{3}{2}} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]. \quad (5.35)$$

$T = 0$  da (5.35) ifoda (5.31) ifodaga o'tadi.  $T \neq 0$  oxirgi ifodani kimyoviy potensialga nisbatan echish uchun ketma-ket yaqinlashish metodidan foydalanamiz, natijada potensialning temperaturaga bog'lanishi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\mu = \mu_0 \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\mu_0} \right)^2 \right]. \quad (5.36)$$

Bu yerda yana  $(kT/\mu_0)^2$  tartibidagi hadlar bilan chegaralandik. Elektron gaz energiyasini hisoblashda (5.35) va (5.36)dan foydalanib, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} E = \int \varepsilon dn &= 4\pi V \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}} d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) + 1} = \\ &= \frac{3}{5} N \mu_0 \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\mu_0} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

(5.37) dan  $T \neq 0$  temperaturada, ya'ni past temperaturada elektron gazning issiqlik sig'imi

$$C_v^{el} = \frac{Nk\pi^2}{2} \cdot \frac{kT}{\mu_0} = \frac{Nk\pi^2}{2T_0} \cdot T = \alpha T. \quad (5.38)$$

Bu yerda  $T_0 = \mu/k$  – elektron gazning aynish temperaturasi. (5.38) formula yordamida hisoblangan issiqlik sig‘imi tajriba natijalari bilan mos kelib, juda kichik qiymat qabul qiladi. Elektronlarning issiqlik sig‘imiga qo‘shgan hissasi kichik ekanligini tushuntirish mumkin. Past temperaturalarda, ya‘ni  $kT \ll \varepsilon_F$  bo‘lganda Fermi–Dirak taqsimotidagi «zina» yoyilgan bo‘ladi (5.1- rasmdagi punktir chiziq). Issiqlik harakatida Fermi sirtiga yaqin sohadagi elektronlar ishtirok etadi va metallning xossalarini aniqlashda asosiy rol o‘ynaydi. Ularning soni yoyilgan soha kengligi ( $2kT$ ) ning Fermi energiyasiga nisbati tartibida bo‘ladi. Issiqlik sig‘imi additiv kattalik – ichki energiyadan temperatura bo‘yicha olingan hosila bilan aniqlanganligi uchun yuqoridagi fikrni matematik ifodaga aylantirsak,

$$C_v^{el} \sim N \frac{2kT}{\varepsilon_F} \text{ hosil bo‘ladi. Bu ifoda temperaturaga chiziqli}$$

bog‘lanadi va tartib jihatidan (5.38) bilan mos keladi. Issiqlik sig‘imi uchun (5.38) ifodani  $kT \ll E_F$  o‘rinli bo‘lgan hol uchun Fermi–Dirak taqsimotidagi yoyilish sohasiga to‘g‘ri keluvchi elektronlarning effektiv soni orqali ham yozish mumkin (15- masala).

Metallardagi elektron gazning holatini aniqlash uchun termodinamik kattaliklarni hisoblash kerak. Buning uchun eng qulay katta termodinamik potensialni bilish kerak. Chunki katta termodinamik potensialning o‘zgarishi

$$dB = -SdT - PdV - Nd\mu \quad (5.39)$$

yordamida bir qator termodinamik kattaliklarni hisoblash mumkin. Katta termodinamik potensial quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$B = F - \Phi = -PV = -\frac{2}{3}E$$

yoki

$$B = \pm gkT \int \ln \left[ 1 \mp \exp \left( \frac{\mu - \varepsilon}{kT} \right) \right] d\Omega.$$

Katta termodinamik potensial orqali quyidagi termodinamik kattaliklar uchun ifodalarni keltiramiz:



entropiya

$$S = - \left( \frac{\partial B}{\partial T} \right)_{V, \mu} = \frac{2}{3} \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V, \mu},$$

bosim

$$p = - \frac{B}{V} = \frac{2}{3} \frac{E}{V},$$

zarralar soni

$$N = - \left( \frac{\partial B}{\partial \mu} \right)_{T, V} = \frac{2}{3} \left( \frac{\partial E}{\partial \mu} \right)_{T, V},$$

erkin energiya

$$F = E - TS = E - \frac{2}{3} T \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V, \mu}.$$

Bu ifodalarda ichki energiya (5.37) ifoda bilan almashtirilsa, yuqoridagi termodinamik kattaliklar uchun aniq ifodalarni hosil qilish mumkin.

### 5.7. Fermi–Dirak taqsimoti tatbig'i

Fermi–Dirak taqsimotini tatbiq qilish sohasi juda keng. Kvant mexanika qonuniyatiga bo'ysunuvchi va spinlari yarim va butun yarim bo'lgan sistemalar (metallardagi elektron gazi, yarimo'tkazgichlardagi elektron va teshik gazlari, ultrarelativistik elektron gazi va h.k.) holatini va unda o'tayotgan jarayonlarni aniqlashda Fermi–Dirak taqsimoti tatbiq qilinadi. Bu yerda eng oddiy hol, metalldan chiqish ishi ma'lum bo'lgan elektronlarning termoelektron emissiya tokini aniqlashni ko'raylik.

Faraz qilaylik, elektronning chiqish ishi  $A = e\varphi$  bilan aniqlansin va  $A - \mu \gg kT$  bo'lsin. Elektronlarning harakat yo'nalishi « $x$ » o'qi bilan mos tushsa, emissiya toki

$$J_x = en\overline{v_x} \quad (5.40)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu yerda  $e$  – elektron zaryadi,  $n$  – elektronlarning zichligi. O'rtacha tezlik esa quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$\begin{aligned} \overline{v_x} &= g \frac{m^3}{h^3} \int dv_y dv_z \int \frac{v_x dv_x}{\exp\left[\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - 2\mu}{2kT}\right] + 1} - \\ &= 4g \frac{kT}{m} \frac{m^3}{h^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \ln\left[1 + \exp\left(\frac{\mu - e\varphi}{kT}\right) \exp\left(-\frac{m(v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right)\right] dv_y dv_z. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Integralni hisoblash natijasini (5.40)ga qo'yib, tok zichligi uchun Richardson kvant formulasini olamiz:

$$j_x = \frac{4\pi enm}{h^3} (kT)^2 \exp\left(-\frac{w}{kT}\right), \quad (5.42)$$

bu yerda  $w = e\varphi - \mu$  - effektiv chiqish ishi.

### 5.8. Past temperaturalarda Boze-gaz. Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi

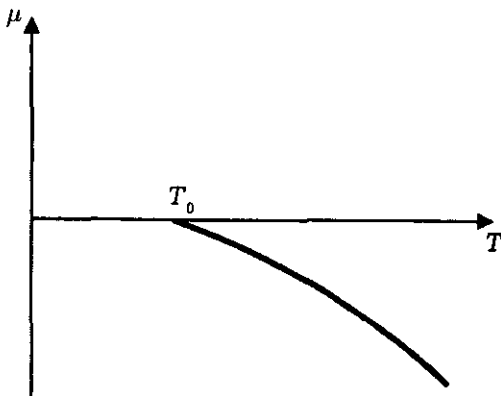
Past temperaturalarda Boze-gaz xususiyatidan Fermi-gaz xususiyati tubdan farq qiladi. Bozonlardan tashkil topgan Boze-gaz tabiatini o'rganish uchun zarralar sonini va energiyasini hisoblash formulalarini yozaylik:

$$\frac{N}{V} = A \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) - 1}, \quad (5.43)$$

$$E = AV \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon^3} d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) - 1}. \quad (5.44)$$

Bu yerda  $A = 2\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ ,  $g = 1$ ,  $V$  - Boze-gaz egallagan hajm.

(5.43) ifoda oshkormas ko'rinishda kimyoviy potensial  $\mu$  ning temperatura va zarralar zichligi  $N/V$  ga bog'lanishini aniqlaydi (5.2-rasm). Bu ifoda barcha temperaturalarda o'rinli bo'lishi uchun  $\mu \leq 0$  bo'lishi kerak. Agar gaz zichligini o'zgarmas saqlab, uning temperaturasini pasaytirsak, (5.43) asosan  $\mu$  manfiy bo'lgan holda absolut qiymati kamaya boradi va ma'lum  $T = T_0$  temperaturada u nolga teng bo'ladi.



5.2- rasm. Boze-gazda kimyoviy potentsialning temperaturaga bog'lanishi.

Bu temperaturani aniqlash uchun (5.43) da  $\mu = 0$  deb olib, integralni hisoblaymiz:

$$\frac{N}{V} = A(kT_0)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\exp(\varepsilon/kT)-1} = AV(kT_0)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right). \quad (5.45)$$

Bu yerda  $\zeta(x)$  - zeta,  $\Gamma(x)$  - gamma funksiyalar. (5.45) dagi maxsus funksiyalarning son qiymatlarini qo'yib quyidagini hosil qilamiz:

$$T_0 = 0,084 \frac{h^2}{km} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Odatda,  $T_0$  temperaturani kondensatsiya temperaturasi deb yuritiladi.

Gazning temperaturasini  $T_0$  dan ham pasaytirish natijasida (5.43) ga ko'ra  $\mu > 0$  bo'lib qoladi, lekin Boze statistikasida  $\mu \leq 0$  bo'lishi kerak. Birinchi qarashdagi bunday qarama-qarshilik  $N$  va  $E$  ni hisoblashda yig'indidan integralga o'tishdan kelib chiqadi. Haqiqatan ham, bunday o'tishda yig'indidagi birinchi ( $\varepsilon_k = 0$ ) had  $\sqrt{\varepsilon}$  ga ko'paytiriladi, ya'ni yig'indidan tushib qoladi. Shu vaqtda temperaturani pasaytirish natijasida zarralar eng kichik energiyali holatga  $T_0 = 0$  da ularning hammasi tushguncha yig'ila boradi.  $\mu \rightarrow 0$  yig'indidagi barcha hadlar chekli qiymat qabul qiladi, lekin birinchi had ( $\varepsilon = 0$ ) cheksizga

intiladi. Cheksizdan qutilish uchun  $\mu$  ni nolga emas, balki qandaydir chekli juda kichik qiymatga intiltirish kerak. Bu esa mumkin emas.

Bu holatni quyidagicha tahlil qilish kerak. Energiyasi  $\varepsilon > 0$  zarralar  $\mu = 0$  da quyidagicha taqsimlangan bo'ladi:

$$dN_{\varepsilon} = AV \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\exp(\varepsilon/kT)-1}. \quad (5.46)$$

Demak, energiyasi noldan katta bo'lgan zarralarning to'liq soni

$$N_{\varepsilon>0} = \int dN_{\varepsilon} = N \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2}. \quad (5.47)$$

Qolgan qismi ( $\varepsilon = 0$ ) quyidagiga teng bo'ladi:

$$N_{\varepsilon=0} = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \right],$$

$N$  – bozonlar soni doimiy kattalik.

Boze-gaz ichki energiyasi faqat  $\varepsilon > 0$  energetik sathlardagi zarralar bilan aniqlanadi. Demak,  $T_0$  shunday chegaraviy kichik temperatura ekanki,  $T < T_0$  temperaturadan boshlab zarralar  $\varepsilon > 0$  holatlardan  $\varepsilon = 0$  holatga o'ta boshlaydi. Ya'ni, shu narsa ko'rinadiki  $T = 0$  da hamma bozonlar  $\varepsilon = 0$  energetik sathda to'planar ekan. Bu hodisa gaz-suyuqlik kondensatsiyasi kabi *Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi* deb yuritiladi. Real fazoda yuz beruvchi oddiy kondensatsiyadan farqli ravishda bunday kondensatsiya *fazalar fazosida* yuz beradi. Eng quyi holatdagi ( $\varepsilon = 0$ ) zarralar «*kondensat*», qo'zg'algan holatdagilari ( $\varepsilon > 0$ ) esa «*kondensat usti*» deb yuritiladi. (5.44) dan Boze-Eynshteyn gazining energiyasi

$$E^{boze} = 1,78AV(kT)^{5/2} = 31,6 \frac{m^{3/2} (kT)^{5/2} V}{h^3},$$

issiqlik sig'imi

$$C_V^{boze} = \frac{5}{2} \frac{E}{T} = 4,45AV(kT)^{3/2} = 79 \frac{m^{3/2} (kT)^{3/2} V}{h^3},$$

katta termodinamik potesial

$$B^{\text{boze}} = -\frac{2}{3} E = -1,15AV(kT)^{5/2} = -21 \frac{m^{3/2} (kT)^{5/2} V}{h^3},$$

entropiya

$$S^{\text{boze}} = \frac{5}{2} \frac{B}{T} = 2,86AV(kT)^{3/2} = 52,5 \frac{m^{3/2} (kT)^{3/2} V}{h^3},$$

bosim

$$p^{\text{boze}} = -\frac{B}{V} = 1,15A(kT)^{5/2} = 21 \frac{m^{3/2} (kT)^{5/2}}{h^3}$$

tengliklar bilan aniqlanishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, Boze-Eynshteyn gazi entropiyasi va issiqlik sig'imi, Nernst teoremasiga mos holda, temperatura absolut nolga intilganda nolga intilar ekan va bosim hajmga bog'liq bo'lmaydi. Bu tomondan Boze-Eynshteyn gazi to'yingan bug' bilan o'xshashdir. Bu o'xshashlik shu bilan tushuntiriladiki,  $\varepsilon = 0$  bo'lgan holatda kondensat zarralari impulsga ega bo'lmaydi va bosimga hissa qo'sha olmaydi.

Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi zarralar soni o'zgarmas bo'lgan sistemalar dagina yuz beradi. Foton gazida kondensatsiya tushunchasi umuman yo'q, chunki bu sistemada muvozanat holatda ham zarralar - fotonlar soni o'zgarib turadi. Foton gaz masalasini keyingi mavzularda muhokama qilamiz.

## 5.9. Boze-gaz va Fermi-gaz holat tenglamalari

Boze- va Fermi-gazlarining termodinamik xarakteristikalaridan eng ko'rgazmalisi - holat tenglamasidir. Bizga ma'lumki katta termodinamik potensial holat funksiyasi bilan quyidagi ko'rinishda bog'langan:

$$B = -kT \ln \tilde{Z}$$

yoki holat tenglamasi

$$pV = kT \ln \tilde{Z} \quad (5.48)$$

ko'rinishda yoziladi. Demak holat tenglamasini yozish uchun birinchi navbatda holat funksiyasini topish kerak. Bu kattalik Gibbs mikrokanonik taqsimoti yordamida topiladi, ya'ni

$$\tilde{Z} = \sum_{n_0} \sum_{n_1} \dots \exp\left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k - \varepsilon_k) n_k}{kT}\right) = \prod_{k=0}^{\infty} \sum_n \exp\left(\frac{(\mu_k - \varepsilon_k) n}{kT}\right). \quad (5.49)$$

Bu yerda  $n_k$  - « $k$ »- holatda bo'lishi mumkin bo'lgan zarralar soni.

Fermi-gaz uchun  $n_k = 0, 1$  qiymatlarni qabul qilishini hisobga olsak,

$$\tilde{Z} = \prod_{k=0}^{\infty} \left\{ 1 + \exp\left(\frac{\mu_k - \varepsilon_k}{kT}\right) \right\}. \quad (5.50)$$

Boze gaz uchun  $n_k = 0, 1, 2, \dots$  qiymatlarni qabul qilishini inobatga olib, quyidagini olamiz:

$$\tilde{Z} = \prod_{k=0}^{\infty} \left\{ 1 - \exp\left(\frac{\mu_k - \varepsilon_k}{kT}\right) \right\}^{-1}. \quad (5.51)$$

Fermi va Boze-gazlar uchun olingan holat funksiyasining logarifmini simmetrik ko'rinishda yozib (5.48)ga qo'yamiz:

$$pV = \pm kT \sum_{k=0}^{\infty} \ln \left\{ 1 \pm \exp\left(\frac{\mu_k - \varepsilon_k}{kT}\right) \right\}. \quad (5.52)$$

Bu yerda «+» ishora Fermi-gazga, «-» ishora Boze gazga tegishli. Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, agar gaz turli navli molekulalardan tashkil topgan bo'lsa, holat funksiyasi har bir navli molekulalardan tashkil topgan sistema holat funksiyalarining yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$\tilde{Z} = \sum \tilde{Z}_i, \quad (5.53)$$

bu yerda  $\tilde{Z}_i$  (5.49) ifoda bilan aniqlanadi.

Zarralar soni juda katta bo'lganda uzluqli holatlar orasidagi masofa juda kichik bo'ladi va uni uzluksiz deb, yig'indini integral bilan almashtirish mumkin, ya'ni

$$pV = \pm kTg \int \ln \left\{ 1 \pm \exp \left( \frac{\mu_k - \varepsilon_k}{kT} \right) \right\} d\Omega. \quad (5.54)$$

Bu yerda  $g = 2s + 1$ ,  $s$  - zarracha spini,  $d\Omega = \frac{dpdV}{h^3}$  - fazaviy hajm elementi. Integral ostidagi ifoda fazoviy koordinatalarga bog'liq bo'lmaganligi uchun integralning bu qismi  $V$  ga teng bo'ladi. Energiya impulsiga kvadratik bog'liq bo'lganligi uchun impuls fazosida sferik koordinatalarga o'tamiz. Natijada

$$\begin{aligned} pV &= \pm kTg \frac{4\pi V}{h^3} \int \ln \left\{ 1 \pm \exp \left( \frac{\mu_k - \varepsilon_k}{kT} \right) \right\} p^2 dp = \\ &= \pm 2\pi V kTg \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \ln \left\{ 1 \pm \exp \left( \frac{\mu - \varepsilon}{kT} \right) \right\} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Bu yerdagi integralni bir marta bo'laklab integrallasak, ko'riylotgan gazning holat tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$pV = \frac{2}{3} E. \quad (5.56)$$

Bu yerda

$$E = \pm kTgV \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \left\{ \exp \left( \frac{\mu - \varepsilon}{kT} \right) \pm 1 \right\}^{-1} \varepsilon^{3/2} d\varepsilon. \quad (5.57)$$

(5.57) ifodaga Fermi- va Boze-gaz holat tenglamasi deyiladi. Bu tenglamaga asosan shu narsa ko'rinib turibdiki, Fermi- va Boze-gaz bosimlari va energiyalari orasidagi bog'lanish xuddi klassik ideal gazdagi kabi ko'rinishda bo'lar ekan.

Juda yuqori temperaturalarda, qaysiki

$$e^{-\mu/kT} = \frac{gV}{N} \left( \frac{\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \ll 1$$

shart bajarilganda integral ostidagi ifodani qatorga yoyamiz va integralni hisoblash natijasida holat tenglama quyidagi ko'rinishga o'tadi:

$$pV = gV \left( \frac{\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{\mu/kT} \left( 1 \pm \frac{1}{4\sqrt{2}} e^{\mu/kT} \right). \quad (5.58)$$

Agar bu ifodaga kimyoviy potensial  $\mu = kT \ln \left[ \frac{N}{gV} \left( \frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \right]$  ni

qo'ysak, quyidagi holat tenglamani olamiz:

$$pV = NkT \left[ 1 \pm \frac{N}{16gV} \left( \frac{h^2}{\pi mkT} \right)^{3/2} \right]. \quad (5.59)$$

Bu yerdagi ikkinchi had kvant statistikani klassik ideal gaz holat tenglamasiga qo'shgan birinchi tuzatmasidir. Ammo bu tuzatma atomlar orasidagi o'zaro ta'sir bilan bog'langan tuzatmaga nisbatan juda kichik.

### 5.10. Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi

Boze-Eynshteyn kondensatsiyasini ishqor metall atomlarining siyrak gazida birinchi marta kuzatganligi va bu sohada birinchi fundamental tatqiqotlar olib brganliklari uchun 2001 yil Nobel mukofoti E.A. Kornell (AQSh), V. Ketterle (AQSh) va K.E. Viman (AQSH, Germaniya)larga topshirildi. Past temperaturalar o'tgan asr fiziklarining doimo diqqat-e'tiborida bo'lib kelgan va absolut nolga har bir yaqinlashish fizikada katta yangi kashfiyotlarning ochilishiga sababchi bo'lgan. Bir tasavvur qilib ko'raylik, agar biz yerda emas quyosh sirtida yashagan bo'lsak nima bo'lar edi. Sovitgichsiz suyuq va kristal- lar to'g'risida hech narsa bilmas edik.

Temperatura bo'yicha 1 K ga erishish o'tao'tkazuvchanlik (1911) va geliy-4 ning o'taoquvchanlikning (1938) kashf qilinishiga olib keldi. Millikelvinlargacha sovitish geliy-3 o'tao'tkazuvchanlikni (1972) kuzatishga imkon berdi. Lazer yordamida sovitish yangi o'tapast temperaturalar sohasini ochib berdi. Siyrak gazlarda Boze-Eynshteyn kondensatsiyasini kuzatish uchun nanokelvinlar diapazoniga tushishni (1995) talab qildi. Bu sovitishlarning har qaysisi Nobel mukofoti bilan taqdir- langan. Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi uzoq tarixga ega bo'lib XX asrning 20- yillaridan boshlangan.

Boze-statistika tushunchasi Shatendranataning Boze absolut qora jismning nurlanish spektrini o'rganish uchun statiskani tatbiq qilgan ilmiy ishida (1924) tug'ilgan. Shatendranataning



bu maqolani o'zi e'lon qilishga imkoni bo'lmaganligi uchun Eynshteynga yuborgan. U o'z navbatida maqolani e'lon qilishni tashkil qilgan.

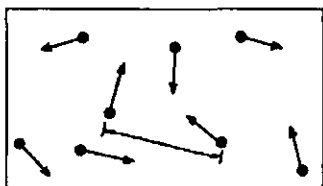
Eynshteyn bu g'oyani o'zaro ta'sirlashmaydigan atomlarga tatbiq qilgan. Natijada Boze–Eynshteyn statistikasi paydo bo'ldi. Eynshteyn bu statistikaga ko'ra kvant holatlardagi atomlarning ko'p qismi chekli, lekin juda past temperaturalarda eng pastki energetik holatlarga o'tishiga e'tibor bergan. Bu hodisa bug'–suv kondensatsiyasiga o'xshatib, hozir Boze–Eynshteyn kondensatsiyasi sifatida ma'lum. Juda ko'p moddalar uchun aynish temperaturasi shunday pastki, ular kondensatsiyalanishga ulgurmasdan suyuq yoki qattiq holatga o'tib ketadi.

Yaqin–yaqinlargacha Boze–Eynshteyn kondensatsiyasi faqat geliy izotoplaridagi o'taoquvchanlik, o'tao'tkazuvchanlik (kuper juftlarining kondensatsiyasi) va yarimo'tkazgichlardagi eksiton (elektron va teshikning bog'langan holati) tomchilari bilan bog'langan edi. Bu misollarning hammasida bozonlar bir–birlari bilan ta'sirlashadilar. O'zaro ta'sirlashmaydigan zarralarning kondensatsiyasi – «haqiqiy» Boze–Eynshteyn kondensatsiyasi nazariy mavjud bo'lib, tajribalarda erishib bo'lmaydigan hodisa bo'lib ko'rinar edi.

Boze–atomlarni ma'lum  $T_c$  temperaturadan pastgacha sovit–sak, atomlarning ko'p qismi eng kichik energiyali kvant mexanik holatga o'tadi.  $m$  massali atomlarni  $T_c$  temperaturadagi o'lchami de Broyl to'liqini tartibidagi issiqlik harakati bilan bog'liq bo'lgan kvant mexanik to'liqin paketi deb qarash mumkin:

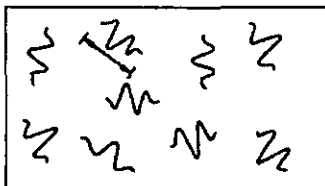
$$\lambda_B = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{2mkT}} \sim \begin{cases} 10^{-12} \text{ sm}, & T = 300 \text{ K}, \\ 10^{-8} \text{ sm}, & T = 10^{-6} \text{ K}. \end{cases}$$

Agar  $\lambda_B \ll a$  bo'lsa gaz Bolsman statistikasiga bo'ysunadi, agar  $\lambda_B \sim a$  bo'lsa, gaz kvant xossaga ega bo'lib, Boze–Eynshteyn statikasiga bo'sunadi ( $a$  – atomlar orasidagi masofa). Kattalik  $\lambda_B$  issiqlik natijasida impuls qiymatlarining tarqoqligi sababli paydo bo'ladigan koordinataning noaniqligini ko'rsatadi. Bu noaniqlik temperatura pasayishi bilan kattalashadi va atomlar orasidagi masofa tartibida bo'lganda atomlarining to'liqin paketlari bir biriga kirishib ketadi. Natijada gaz atomlari bir biridan farq qilib bo'lmaydigan bir butun sistemaga aylanadi (5.3–rasm). Bu holda gazda kvant mexanik faza o'tishi sodir bo'ladi, ya'ni



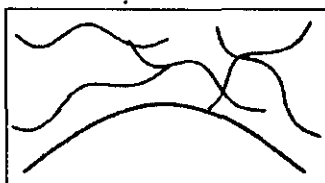
Yuqori temperaturalar:

«Bilyard sharlari;  
 $v$  – issiqlik tezligi,  
 $d^3$  – zichlik



Past temperaturalar:

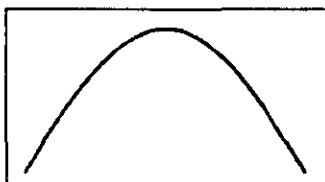
«To'liqin paketlari  
 de Broyl to'liqin uzunligi  
 $\lambda_B = h/mv \sim T^{-1/2}$



$T = T_c$ ; BEK

$\lambda_B \sim d$

«Materiya to'liqlarining  
 kirishishi»



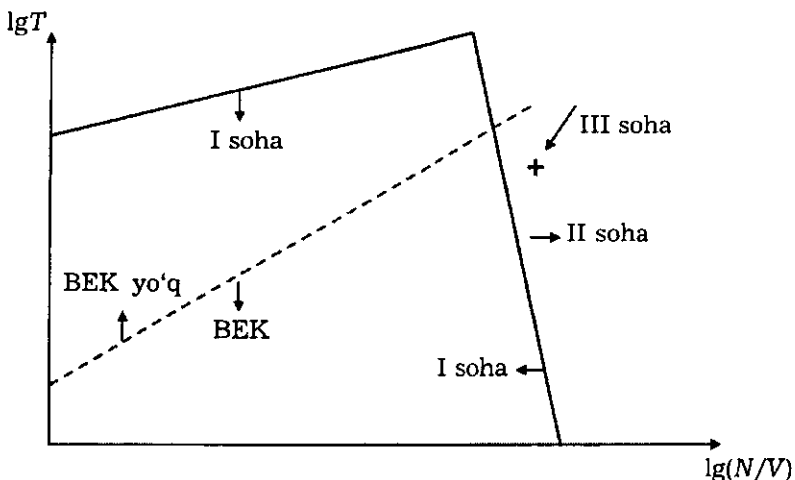
$T = 0$

Toza BEK

«Materiyaning gigant  
 to'liqini»

5.3- rasm.

hamma atomlar bir holatda bo'lgan atomlar buluti – Boze-Eynshteyn kondensati paydo bo'ladi. Bu jarayon  $T_c$  temperaturadan boshlab sodir bo'la boshlaydi. Boze-Eynshteyn kondensatida  $T_c$  da impulsi nolga teng bo'lgan (sistema bir butun holda tinch turgan bo'lsa) asosiy holatda atomlarning  $N_0/N = 1 - (T/T_c)^{3/2}$  qismi to'planadi. Yuqoridagi fikrlarga asosan Boze-Eynshteyn kondensatini olish juda oson bo'lib, gazni  $T_c$  dan past temperaturalarigacha sovitish yetarli ekan. Ammo juda ko'p hollarda Boze-Eynshteyn kondensati paydo bo'lgunga qadar sistemada odatdagi, ya'ni gaz-suyuqlik yoki gaz-kristall faza o'tishlari sodir bo'ladi va Boze-Eynshteyn kondensatga erishib bo'lmaydi. Demak, Boze-Eynshteyn konden-



5.4- rasm. Faza diagrammasi: I – man etilgan soha; II – oddiy kondensatsiya sohasi, III – suyuq geliy.

satini olish uchun odatdagi faza o'tishlarni chetlab o'tish kerak. Bu asosiy muammo hisoblanadi. Boze-Eynshteyn kondensatini olish uchun temperatura va zichlik 5.4- rasmda ko'rsatilgan sohaga to'g'ri kelishi kerak. Diagrammada punktir chiziq bilan Boze-Eynshteyn kondensati mavjud bo'lish sohasi ajratilgan. Uzlüksiz chiziqlar «temperatura-zichlik» tekisligida termodinamik mumkin va man qilingan sohalar ajratilgan. Diagrammaga asosan Boze-Eynshteyn kondensat past temperaturalarda va oraliq zichliklarda man etilgan sohada hosil qilish mumkinligini ko'rsatadi. Bu sohadan chiqish uchun o'ta past temperaturalar va zichliklar sohasiga o'tish kerak. Bunday holat metastabil bo'ladi va sistema uzoq yashamaydi. Sistemani bunday holatda ushlab turish uchun magnit tutqichlardan foydalaniladi. Boze-Eynshteyn kondensatini amalda olishda o'ta past temperaturalar «lazer sovitgichlari»dan foydalanilgan.

### 5.11. Muvozanatli nurlanish. Plank formulasi

Muvozanatli nurlanishni termodinamik nuqtayi nazardan 4.4- bandeda batafsil ko'rib chiqqan edik. Reley-Jins va Vin nazariyalari absolut qora jismning nurlanishini hamma chashtotalar oralig'ida tushuntirib bera olmaydi. Endi ushbu masalani kvant statiskasi yordamida ko'rib chiqamiz.

Absolut qora jism nurlanishining Plank nazariyasida (1900) birinchi marta kvant to'g'risida tasavvur paydo bo'lgan, ya'ni atomlar nurlanishda energiyani ma'lum miqdorda chiqaradi va shunday miqdordagi nurlanish energiyasini yutadi deb faraz qilingan. Energiya tushunchasidagi bunday faraz fizikada klassikadan tubdan farq qiladigan yangi g'oya bo'lib, avvaliga kvaziklassik, keyinchalik rivojlanib, mikrojarayonlar nazariyasi kvant nazariyasiga aylangan.

Muvozanatli nurlanish, ya'ni absolut qora jism nurlanishining energiya zichligini  $\nu$ ,  $\nu + d\nu$  chastota intervalida  $p(\nu, T)d\nu$  bo'lsin. Klassik fizika nuqtayi nazaridan muvozanatli nurlanish chastotasi 0 dan  $\infty$  gacha bo'lgan va o'zaro perpendikular turg'un to'lqinlar sistemasini, ya'ni elektromagnit maydonni garmonik ossillatorlar maydoni bilan almashtirib, energiya zichligini hisoblagan edik. Bu elektromagnit maydon energiyasi – garmonik ossillatorlar energiyalarining yig'indisiga to'g'ri keladi. U vaqtda  $\nu$ ,  $\nu + d\nu$  chastota intervalida birlik hajmga to'g'ri kelgan turg'un to'lqinlar energiyasi

$$\rho(\nu, T)d\nu = \varepsilon(\nu, T)g(\nu)d\nu,$$

bu yerda  $g(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 d\nu$  ifoda ( $\nu$ ,  $\nu + d\nu$ ) chastota intervalidagi turg'un to'lqinlar yoki ossillatorlar soni ekanligini hisobga olsak,

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi\bar{\varepsilon}}{c^3}\nu^2 d\nu. \quad (5.60)$$

Plank nazariyasi bo'yicha,  $\overline{\varepsilon(\nu, T)}$  ni hisoblashda energetik holat energiyalarini garmonik ossillator energiyasi emas, balki kvant ossillator energiyasi deb qarashni taklif qildi. Bu energiyani hisoblaylik:

$$\bar{\varepsilon} = \sum \varepsilon W(\varepsilon) = \frac{\sum \varepsilon \exp\left(-\frac{\bar{\varepsilon}}{kT}\right) \Omega(\varepsilon)}{\sum \exp\left(-\frac{\bar{\varepsilon}}{kT}\right) \Omega(\varepsilon)} = \frac{\sum \left[ h\nu \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] \exp\left(-\frac{h\nu \left( n + \frac{1}{2} \right)}{kT}\right) \Omega(\varepsilon)}{\sum \exp\left(-\frac{h\nu \left( n + \frac{1}{2} \right)}{kT}\right) \Omega(\varepsilon)}.$$

Kvant ossillator energiyasi  $\varepsilon = h\nu(n + 1/2)$ ni hisoblashni  $\frac{h\nu}{2}$  dan va kvant holatlar soni  $\Omega(\varepsilon) = 1$  ekanligini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (5.61)$$

Natijada  $\nu, \nu + d\nu$  chastota intervalida absolut qora jism nurlanish energiya zichligi, ya'ni muvozanatli nurlanish energiyasining zichligi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3 d\nu}{c^3 \left( \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right)}$$

yoki

$$\rho(\lambda, T)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}. \quad (5.62)$$

(5.62) ifoda Plank formulasi deyiladi.

Plank formulasini ikki chegaraviy holda ko'rib chiqamiz.

a)  $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ . Bu holda Plank formulasidagi eksponentani

$\frac{h\nu}{kT}$  ning darajalari bo'yicha qatorga yoyib nurlanish energiya-sining spektral taqsimoti uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 d\nu. \quad (5.63)$$

Bu formula 4.4- bandeda olingan Reley-Jins formulasi bilan mos keladi.

b)  $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$ . Bu holda Plank formulasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) d\nu. \quad (5.64)$$

Ushbu taqsimotning maksimumi  $\left. \frac{\partial \rho(\nu, T)}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_{\max}} = 0$  shartga asosan nurlanish energiyasi maksimumi  $\nu_{\max} \sim T$  chastotaga to'g'ri kelishini topamiz. Bundan ko'rinib turibdiki, temperatura oshishi bilan maksimum katta chastotalar tomoniga siljiydi. Ushbu natija bizga klassikadan ma'lum bo'lgan Vin siljish qonunini beradi.

## 5.12. Foton gazi statistikasi

Fotonlardan tashkil topgan gaz, ya'ni muvozanatli nurlanish Boze-gazga misol bo'la oladi. Shuning uchun foton gazining holatini Boze-Eynshteyn taqsimoti yordamida aniqlashni ko'ramiz. Izolatsiyalangan berk bo'shliqdagi muvozanatli nurlanishni foton gazi deb qabul qilsa bo'ladi. Chunki muvozanatli nurlanish fotonlardan tashkil topgandir. Hamma fotonlar bir xil « $c$ » tezlik bilan harakat qiladi. Ammo turli xil fotonlar har xil energiya va impuls ga ega bo'ladi va ular  $\varepsilon = pc$  ko'rinishda bog'langan. Foton energiyasi  $\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$ , impulsi esa  $p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}$ . Nurlanishda sistema mexanik momenti butun  $\hbar$  ga karrali kattalikka kamayadi. Chunki bu moment sistemadan uchib chiquvchi fotonlar tomonidan olib ketiladi. Fotonlar orasida o'zaro ta'sir bo'lmaganligi uchun foton gazini ideal gaz deb qarash mumkin. Foton momenti butun bo'lganligi uchun foton gazi Boze-Eynshteyn statistikasiga bo'ysunadi.

Termodinamik muvozanat yuzaga kelishida gaz molekularining o'zaro ta'siri asosiy rol o'ynaydi. Fotonlar orasida o'zaro ta'sir yo'q bo'lishiga qaramasdan muvozanat holat mavjud bo'lib, ular impuls va energiya bo'yicha qandaydir taqsimotga bo'ysunadi. Foton gazida muvozanat yuzaga kelishi uchun zarralar ta'siriga ekvivalent bo'lgan – bir chastotadagi (energiyali) foton boshqa chastotadagi fotonga aylanib turishi kerak. Boshqa tomondan sistema bir butun holda berk bo'lganligi uchun ichki energiyasi o'zgarmas bo'lishi kerak. Demak, energiya balansini saqlash uchun foton gazida zarralar soni berilgan deb bo'lmas ekan. Mana shu xususiyati bilan foton gazi molekular gazdan farq qiladi.

Faraz qilaylik,  $\nu, \nu + d\nu$  chastota intervalida yoki bunga to'g'ri kelgan  $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$  fotonlar energiyasi intervalidagi birlik hajmidagi fotonlarning kvant holatlar soni  $d\Omega$  bo'lsin. Agar har bir kvant holatdagi o'rtacha fotonlar soni  $\bar{n}(\varepsilon)$  bo'lsa, u holda  $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$  energiya intervalidagi fotonlarning soni

$$dn(\varepsilon) = \bar{n}(\varepsilon)d\Omega$$

va o'rtacha energiyasi esa  $\varepsilon\bar{n}(\varepsilon)d\Omega$ . Bu energiya  $\nu, \nu + d\nu$  chastota intervalidagi nurlanish energiyasi zichligiga teng:

$$\rho(\nu, T)d\nu = \varepsilon\bar{n}(\varepsilon)d\Omega. \quad (5.65)$$

(5.65) ifodada  $\varepsilon = h\nu$  ekanligini va Boze-Eynshteyn taqsimotiga asosan

$$dn(\varepsilon) = \bar{n}(\varepsilon)d\Omega = \frac{2}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) - 1} \cdot \frac{4\pi\rho^2 d\rho}{h^3}$$

tenglikni hisobga olsak, u vaqtda  $\nu, \nu + d\nu$  chastota intervalida foton gazi energiya zichligi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\rho(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^3 \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]}. \quad (5.57)$$

(5.66) ifoda muvozanat nurlanish uchun Plank formulasining o'zidir. Bu ifoda kichik chastotalarda esa Vinni siljish qonuniga o'tadi.

Birlik hajmdagi foton gaz energiyasi:

$$u = \int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu = \alpha T^4,$$

$V$  hajmdagi ichki energiyasi esa,

$$E = uV$$

bo'ladi. Bu yerda  $\alpha = \pi^3 k^4 / 15(\hbar c)^3$ .

Foton gazining erkin energiyasi

$$F = -T \int_0^T \frac{E dT}{T^2} = -\frac{\alpha V}{3} T^4,$$

entropiyasi esa

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_v = \frac{4\alpha V}{3} T^3,$$

katta termodinamik potentsiali

$$B = -PV = -\frac{2}{3} E = -\frac{2\alpha V}{3} T^4,$$

kimyoviy potentsiali

$$\mu = \frac{\Phi}{N} = \frac{F+pV}{N} = \frac{0}{N} = 0$$

ifodalar bilan aniqlanadi.

### 5.13. Qattiq jismlar issiqlik sig'imi. Eynshteyn nazariyasi

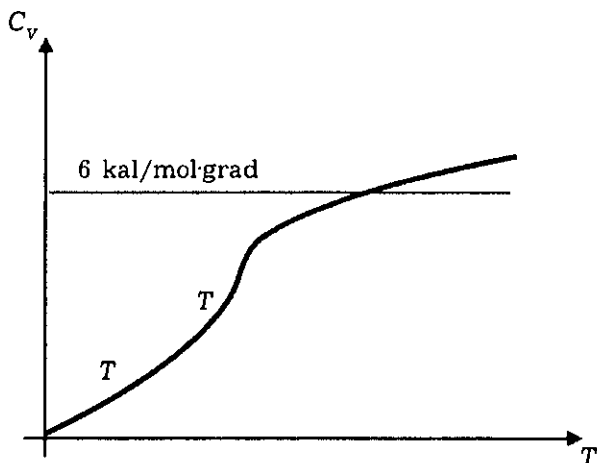
Qattiq jismlarda atomlar kristall panjaralari tugunlarida joylashgan bo'ladi va o'zlarining muvozanat holati atrofida tebranma harakatda bo'ladilar. Past temperaturalarda tebranish uncha katta bo'lmaydi va potensial energiya atomlarning muvozanat holatlariga nisbatan siljishining kvadratiga proporsional bo'ladi. Bu holda panjara tugunlaridagi har bir atomning tebranma harakatini garmonik ossillyator deb qarash mumkin. Bu esa qattiq jism energiyasining garmonik ossillatorlar energiyasiga teng deyish imkonini beradi. Agar kristalladagi atomlar soni  $N$  ta bo'lsa, u holda sistema  $(3N - 6) \simeq 3N$  erkinlik darajasiga ega bo'ladi. Garmonik ossillatorning bitta erkinlik darajasiga to'g'ri kelgan o'rtacha energiya  $\bar{\epsilon} = kT$  bo'ladi.

Shunday qilib, klassik nazariya bo'yicha qattiq jism energiyasi  $E = 3NkT$  va issiqlik sig'imi esa  $C_v = 3Nk = 6 \text{ kal/mol} \cdot \text{grad}$  bo'ladi. Bu Dyulong-Pti qonuni deb yuritiladi. Bu qonun ko'pchilik qattiq jismlar uchun uy temperatura sohasida o'rinli bo'ladi. Ammo past temperaturalarda bu qonun umuman yaroqsiz bo'lib qoladi.

Past temperaturalarda barcha kristallarning issiqlik sig'imi temperatura pasayishi bilan kamayadi.

Bundan tashqari olmos kristallining issiqlik sig'imi yuqori temperaturalarda ham Dyulong-Pti qonuniga bo'ysunmaydi.





5.5- rasm. Qattiq jismlarda issiqlik sig'ining temperatura bo'yicha o'zgarishi.

Demak, kristall misolida biz yana klassik statistikadagi tekis taqsimlanish qonunining o'rinsiz bo'lishiga duch keldik.

1906- yilda Eynshteyn qattiq jismlar issiqlik sig'imini past temperaturalarda Dyulong–Pti qonunidan chetga chiqishini ko'rsatadi va uni quyidagicha tushuntiradi. Kristall panjara tugunlaridagi tebranuvchi har bir atomni uchta erkinlik darajasiga ega bo'lgan kvant ossillator deb qarash kerak. Bir xil tanlangan atomlardan tashkil topgan kristall panjaralaridagi hamma atomlar teng xuquqli bo'ladi va bir xil « $\nu$ » chastota bilan muvozanat holat atrofida tebranadi. Agar qattiq jism  $N$  ta atomdan tashkil topgan bo'lsa, u holda o'rtacha energiya

$$E = 3N \frac{h\nu}{2} + \frac{3Nh\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

bo'ladi. Bu yerda  $3Nh\nu/2 = E_0$  ifoda  $T = 0$  dagi energiya bo'lib, nolinci energiya deyiladi. Bu ifoda kichik chastota sohasida klassik formula, ya'ni Dyuling–Pti qonuniga o'tadi. Katta chastota va past temperaturalar sohasida

$$E = E_0 + 3Nh\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

ko'rinishni oladi. Bu ifodadan qattiq jism issiqlik sig'imi

$$C_v^k = 3Nk \left( \frac{h\nu}{kT} \right)^2 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

ko'rinishni oladi. Bu bir qarashda tajriba natijasi bilan mos tushganday, lekin bunday emas ekan (5.5- rasm), chunki past temperaturalar sohasida  $C_v \sim T^3$  bo'lishi kerak.

### 5.14. Debay nazariyasi

Qattiq jismlarning issiqlik sig'imi nazariyasi 1912- yilda Debay tomonidan hal qilingan deb hisoblanadi. Debay nazariyasiga yaqinroq nazariya Born va Karman tomonidan ham berilgan. Debay nazariyasiga ko'ra, qattiq jismda ikkita ko'ndalang va bitta bo'ylama to'lqin tarqaladi. Qattiq jismlarda bu to'lqinlarning tarqalishi kristall panjara diskretligiga ko'ra chastota bo'yicha chegaralangan bo'ladi. To'lqin uzunligi kristall panjara doimiysidan kichik bo'lgan to'lqinlar qattiq jism bo'ylab tarqala olmaydi. Shunga ko'ra qattiq jismda chastotalari  $\nu = 0$  va  $\nu = \nu_{\max}$  intervalda bo'lgan to'lqinlarga tarqala oladi.

Agar  $V$  hajmdagi qattiq jism  $N$  ta atomdan tashkil topgan bo'lsa, u holda qattiq jism  $3N$  ta garmonik kvant ossillatorlar to'plamidan iborat deb qaraladi. Bu ossillatorlar xususiy  $\nu_k$  chastota bilan tebranadi.

Har bir kvant ossillatorning o'rtacha energiyasi

$$E_k = \frac{h\nu_k}{2} + \frac{h\nu_k}{\exp\left(\frac{h\nu_k}{kT}\right) - 1}$$

va  $V$  hajmdagi qattiq jismning o'rtacha energiyasi

$$E = E_0 + \sum_{k=1}^{3N} \frac{h\nu_k k}{\exp\left(\frac{h\nu_k}{kT}\right) - 1} \quad (5.67)$$

bo'ladi. Bu yerda

$$E_0 = \sum_{k=1}^{3N} \frac{h\nu_k}{2}$$

nolinchi energiya.  $N$  juda katta son ekanligini hisobga olsak,  $\nu$ ,  $\nu + d\nu$  chastota intervalidagi kvant ossillatorlar uchun (5.67) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$E = E_0 + \int_0^{\nu_{\max}} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} g(\nu) d\nu. \quad (5.59)$$

Bu yerda  $g(\nu)d\nu$  – chastota intervali  $\nu, \nu + d\nu$  dagi kvant ossillatorlar soni yoki ko'ndalang va bo'ylanma tebranishlar soni.

Kvant ossillatorlar soni  $3N = \sum_k g(\nu_k)$ . Bu yerda summa

mumkin bo'lgan hamma chastotalar bo'yicha olingan. Agar  $g(\nu)$  ma'lum bo'lsa, u holda bu tenglikdan  $\nu_{\max}$  chastotani hisoblash mumkin. Vazifa  $g(\nu_k)$  ni hisoblashdan iborat.  $g(\nu_k)$   $k$ -moddaga tegishli ko'ndalang va bo'ylanma tebranishlar soni. Faraz qilaylik,  $\nu, \nu + d\nu$  chastota intervalidagi ko'ndalang to'lqinlar soni

$$g(\nu_t) d\nu_t = 2 \cdot \frac{4\pi V}{c_t^3} \nu_t^2 d\nu_t,$$

$\nu_e, \nu_e + d\nu_e$  chastota intervalidagi bo'ylama tebranishlar soni

$$g(\nu_l) d\nu_l = \frac{4\pi V}{c_l^3} \nu_l^2 d\nu_l,$$

bo'lsa, u holda  $\nu_t = \nu_l$  bo'lgan hol uchun  $\nu, \nu + d\nu$  chastota intervalidagi turg'un va bo'ylanma tebranishlar soni, ya'ni kvant ossillatorlar soni

$$g(\nu) d\nu = \begin{cases} 4\pi V \left( \frac{2}{c_t^3} + \frac{1}{c_l^3} \right) \nu^2 d\nu, & \nu \leq \nu_{\max} \\ 0, & \nu > \nu_{\max} \end{cases}$$

bo'ladi. Bu yerda  $c_t$  va  $c_l$  – turg'un va bo'ylanma tebranishlarning tarqalish tezligi,  $\nu_t$  va  $\nu_l$  lar esa tebranish chastotalari. Natijada

$$3N = \int_0^{\nu_{\max}} 4\pi V \left( \frac{2}{c_t^3} + \frac{1}{c_l^3} \right) \nu^2 d\nu$$

ifodadan  $\nu, \nu + d\nu$  chastota intervalidagi kvant holatlar soni

$$g(\nu)d\nu = 4\pi V \frac{c_1^3 + c_2^3}{c_1^3 \cdot c_2^3} \nu^2 d\nu$$

ni (5.68) ifodaga qo'yib, turg'un va bo'ylanma tebranishlarni tarqalish tezliklari teng bo'lgan holi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$E = E_0 + \frac{12\pi V}{c^3} \int_0^{\nu_{\max}} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu.$$

$h\nu/kT = x$  yangi o'zgaruvchi kiritish natijasida:

$$E = E_0 + \frac{12\pi k^4 V}{c^3 h^3} T^4 \int_0^{h\nu_{\max}/kT} \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} \quad (5.69)$$

ifodani olamiz. Bu qattiq jism energiyasini ifodalaydi. Past temperaturalar sohasida, ya'ni  $T \ll h\nu_{\max}/k$  da integralning yuqori chegarasini cheksiz bilan almashtirish mumkin. Natijada qattiq jismlarning energiyasi

$$E = E_0 + \alpha T^4 \quad (5.70)$$

ko'rinishini oladi. Bu yerda  $\alpha = 4\pi^5 k^4 V / 5c^3 h^3$ . Past temperaturalarda qattiq jism issiqlik sig'imi  $C_V = \beta T^3$  ko'rinishni oladi. Agar  $h\nu_{\max}/k = T_D$  - Debay temperaturasi kiritsak va yuqoridagi ifodalardan  $c^3 = \frac{4\pi V}{3N} \nu_{\max}^3$  ekanligini hisobga olsak, u holda past temperaturalar sohasida qattiq jismlarning issiqlik sig'imi (goloid tuzlar yoki okislar uchun) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$C_V = \frac{12\pi^4 N k T^3}{5 T_D^3}. \quad (5.62)$$

(5.71) formula tajriba natijasi bilan miqdoriy tomonidan mos tushadi.

Qattiq jismlarning holatini aniqlash uchun katta termodinamik potensial  $B = -2E/3$  dan foydalanib aniqlash mumkin. Chunki katta termodinamik potensialning o'zgarishidan foydalanib, termodinamik kattaliklarni hisoblash mumkin bo'ladi.

## 5.15. Kristall panjara holat funksiyasi

Qattiq jismning holatini aniqlovchi termodinamik kattaliklarni hisoblashni katta termodinamik potensialdan foydalanib aniqlash mumkinligini yuqorida eslatdik. Ammo termodinamik kattaliklarni kristall holat funksiyasini bilgan holda hisoblashni ko'raylik va kristall holat tenglamasini yozaylik.  $N$  ta atomdan tashkil topgan kristalda issiqlik harakat chastotasi 0 dan  $\nu_{\max}$  oraliqda yotgan  $3N$  bog'lanmagan kvant ossillatorlari to'plami bilan xarakterlanadi. Butun kristallning holat tenglamasini topish uchun  $3N$  ta bog'lanmagan ossillatordan tashkil topgan sistema holat funksiyasini topish kerak. Ossillatorlar bog'lanmagan bo'lgani uchun, bu holat funksiya hamma ossillatorlar holat funksiyalari ko'paytmasi ko'rinishida yoziladi:

$$Z = \prod_{n=1}^{3N} z_n. \quad (5.72)$$

Atomlar kvant ossillatorlari bilan almashtirilgani uchun  $n$  – atomning holat funksiyasi

$$z_n = \frac{\exp\left(-\frac{h\nu_k}{2kT}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu_k}{kT}\right)} \quad (5.73)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Termodinamik kattaliklarni hisoblash uchun, odatda, holat funksiyasi emas, balki uning logarifmi kerak bo'ladi. Shuning uchun (5.72) ifodani logarifmlaymiz va (5.73) ning o'rniga qo'yamiz:

$$\ln Z = \sum_{n=1}^{3N} \ln \frac{\exp\left(-\frac{h\nu_k}{2kT}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu_k}{kT}\right)}. \quad (5.74)$$

Bu yig'indini hisoblash uchun kristall panjaraning hamma mumkin bo'lgan tebranish chastotalarini bilish zarur. Bu yerda Debay yaqinlashishi bilan chegaralanamiz va yig'indini integral bilan almashtiramiz:

$$\ln Z = \int_0^{\nu_{\max}} \ln \frac{\exp\left(-\frac{h\nu}{2kT}\right)}{1 + \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} g(\nu) d\nu =$$

$$-\frac{9N}{\nu_{\max}^3} \int_0^{\nu_{\max}} \left\{ -\frac{h\nu}{2kT} - \ln \left[ 1 + \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] \right\} \nu^2 d\nu. \quad (5.75)$$

Bu integralni hisoblash uchun  $x = \frac{h\nu}{2kT}$  yangi o'zgaruvchi kiritamiz. Natijada  $\ln Z$  uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\ln Z = -\frac{9NT_D}{8T} - 9N \left( \frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^{T_D/T} \ln [1 - e^{-x}] x^2 dx. \quad (5.76)$$

Bu yerda  $T_D$  bizga ma'lum bo'lgan Debay temperaturasi yoki kristallning xarakteristik temperaturasidir. (5.76) ifodani umumiy holda integrallab bo'lmaydi. Shuning uchun fizika nuqtayi nazaridan muhim bo'lgan yuqori va past temperaturalarda tahlil qilamiz. Boshqa tomondan bu temperaturalarda (5.76) dagi integralni analitik ko'rinishgacha keltirish mumkin.

a) Yuqori temperaturalar sohasi  $T \gg T_D$  da integral  $x \ll 1$  sohani o'z ichiga oladi. Bu holda (5.76) ning o'rniga quyidagini olamiz:

$$\ln Z = -\frac{9NT_D}{8T} - 9N \left( \frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^{T_D/T} x^2 \ln x dx.$$

Bu yerdagi integralni hisoblab,  $\ln Z$  uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\ln Z = -\frac{9NT_D}{8T} + N - 3N \ln \frac{T_D}{T}. \quad (5.77)$$

b) Past temperaturalar sohasi  $T \ll T_D$  da (5.76) dagi integralning yuqori chegarasini cheksiz bilan almashtirish mumkin. Integralni hisoblab, quyidagi natijani olamiz:

$$\ln Z = -\frac{9NT_D}{8T} + \frac{\pi^4 N}{5} \left( \frac{T_D}{T} \right)^3. \quad (5.78)$$

(5.77) va (5.78) ifodalar yordamida yuqori va past temperaturalarda kristall termodinamik potentsiallarini topish va holat tenglamasini yozish mumkin.

Yuqori temperaturalarda (5.77) ifodaga asosan kristall panjara energiyasi

$$E = 3NkT + \frac{9}{8} NkT_D, \quad (5.79)$$

issiqlik sig'imi

$$C_V = 3Nk, \quad (5.80)$$

entropiyasi

$$S = 4Nk + 3Nk \ln \frac{T}{T_D}, \quad (5.81)$$

erkin energiyasi

$$F = \frac{9}{8} NkT_D + 3NkT \ln \frac{T}{T_D} - NkT \quad (5.82)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Past temperaturalarda kristall panjara energiyasi

$$E = \frac{9}{8} NkT_D + \frac{3\pi^4}{5} \frac{NkT^4}{T_D^3}, \quad (5.83)$$

entropiyasi

$$S = \frac{4\pi^4}{5} Nk \left( \frac{T}{T_D} \right)^3, \quad (5.84)$$

erkin energiyasi

$$F = -\frac{\pi^4 kT}{5} Nk \left( \frac{T}{T_D} \right)^3 + \frac{9NkT_D}{8} \quad (5.85)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu holda issiqlik sig'imi uchun (5.71) ko'rinishdagi ifoda hosil bo'ladi. Oraliq temperatura sohasida energiya va issiqlik sig'imi murakkab formula bilan ifodalanadi va (5.76) formulani sonli integrallash natijasida olinadi.

Kristall entropiyasi  $T \rightarrow 0$  K da temperaturaning uchinchi darajasiga proporsional holda nolga intiladi. Bu esa termodinamika uchinchi qonuni (Nernst teoremasi) talabiga mos keladi. Kristall issiqlik sig'imi ham  $T \rightarrow 0$  K da kamayib boradi.

Yuqori temperaturada kristall holat tenglamasi:

$$p = - \frac{3NkT}{T_D} \frac{\partial T_D}{\partial V} \quad (5.86)$$

bo'ladi. Kristall holat tenglamasi (5.86) amaliy nuqtayi nazardan katta qiziqishga ega emas, chunki Debay temperaturasini hajmga bog'lanishini nazariy va sodda tajribalardan aniqlab bo'lmaydi.

Past temperaturalarda qattiq jismda birlik energiyaga to'g'ri kelgan kvant energetik holatlar soni  $\Omega(\varepsilon)$  topamiz. Holatlar soni entropiya orqali quyidagicha yoziladi:

$$\Omega(\varepsilon) = \exp\left(\frac{S(\varepsilon)}{k}\right).$$

Bunga (5.84)dan entropiya uchun ifodani qo'ysak, birlik energiyaga to'g'ri kelgan holatlar soni quyidagiga teng bo'ladi:

$$\Omega(\varepsilon) = \exp\left[\frac{4\pi^4 Nk}{5} \left(\frac{T}{T_D}\right)^3\right]$$

ifodaga teng bo'ladi.

### 5.16. Ko'p atomli molekullardan tashkil topgan ideal gazlar issiqlik sig'imining klassik nazariyasi

Ko'p atomli molekullardan tashkil topgan gazni ko'ramiz. Bunda molekullar ilgarilanma harakatdan tashqari aylanma va tebranma harakatda bo'ladi. Molekula energiyasi shuning uchun uch qismdan iborat bo'ladi:

$$\varepsilon = \varepsilon_{ilg} + \varepsilon_{ayl} + \varepsilon_{teb}. \quad (5.87)$$

Bu yerda elektron va yadro holatlariga to'g'ri kelgan ichki energiyani (5.87) da hisobga olmadik. Bunday gaz holatini o'rganishda quyidagi ikkita farazni qabul qilamiz:



1. Molekular sistemalarga umumiy statistik qonunlarni tatbiq qilish mumkin.

2. Ayrim olingan molekulalarning harakatini xarakterlashda klassik mexanika qonunlari o'rinli.

Gaz issiqlik sig'imi energiya kabi uch qismdan iborat bo'ladi, ya'ni

$$C_V = C_{ilg} + C_{ayl} + C_{teb}.$$

Issiqlik sig'imini hisoblash uchun gaz ichki energiyasini hisoblash kerak. Biz eng avvalo ikki atomli molekulalardan tashkil topgan gazni olib qaraylik. Ikki atomli molekulani va massali cheksiz kichik sharlardan iborat bo'lgan miniatyur gantel ko'rinishda tasavvur etamiz. Bunda uchta erkinlik darajasiga ega bo'lgan ilgariylanma harakat: gantel o'qiga perpendikular o'qlar atrofida ikkita aylanma harakat va atomlarni bog'lovchi o'q bo'yicha tebranma harakat mavjud bo'ladi. Bunday ikki atomli molekula holati 12 o'lchovli fazalar fazosida aniqlanadi, ya'ni oltita koordinata va oltita impuls yordamida aniqlanadi. Bu koordinatalar va impulslar – molekulalarning ilgariylanma, aylanma va tebranma harakatlarini xarakterlovchi koordinata va impulslardir.

Molekulani kvaziberk sistema deb qarab, unga Gibbsning kichik kanonik taqsimotini qo'llaylik. U holda

$$dW = dW(\varepsilon_{ilg})dW(\varepsilon_{ayl})dW(\varepsilon_{teb}). \quad (5.88)$$

Bu yerda:

$$dW(\varepsilon_{ilg}) = \frac{1}{h^3 z_{ilg}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{ilg}}{kT}\right) d\Gamma(\varepsilon_{ilg}), \quad (5.89)$$

$$dW(\varepsilon_{ayl}) = \frac{1}{h^2 z_{ayl}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{ayl}}{kT}\right) d\Gamma(\varepsilon_{ayl}), \quad (5.90)$$

$$dW(\varepsilon_{teb}) = \frac{1}{h z_{teb}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{teb}}{kT}\right) d\Gamma(\varepsilon_{teb}). \quad (5.91)$$

(5.88) ifoda shuni anglatadiki, molekulaning ilgariylanma, aylanma va tebranma harakatlari o'zaro bog'lanmagan harakatlar ekan. (5.89)–(5.91) ehtimolliklarni hisoblashni qaraylik. Bularni

hisoblash uchun ilgarilanma, aylanma va tebranma harakat energiyalarini yozaylik:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{ilg}} &= \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2\mu}, \\ \varepsilon_{\text{ayl}} &= \frac{I\omega_1^2}{2} + \frac{I\omega_2^2}{2}, \\ \varepsilon_{\text{teb}} &= \frac{p_q^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega_q^2}{2}.\end{aligned}\quad (5.92)$$

Bu yerda  $I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2$  - molekulaning inersiya momenti;  $a$  - atomlar orasidagi masofa;  $\omega_1$  va  $\omega_2$  - molekulaning aylanma harakat burchak tezliklari;  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  - keltirilgan massa;  $p_q$  - tebranma harakat impuls.  $z_{\text{ilg}}$ ,  $z_{\text{ayl}}$ ,  $z_{\text{teb}}$  - ilgarilanma, aylanma va tebranma harakatlarning holat integrallari.

Ilgarilanma, aylanma va tebranma harakatni xarakterlovchi ehtimolliklardagi doimiylik normirovka shartidan topiladi. Natijada quyidagi ifodalarni olamiz:

$$dW(\varepsilon_{\text{ilg}}) = \left(\frac{1}{2\pi\mu kT}\right)^3 \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2\mu kT}\right) dp_x dp_y dp_z, \quad (5.93)$$

$$dW(\varepsilon_{\text{ayl}}) = \frac{I}{2\pi kT} \exp\left(-\frac{I(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2kT}\right) d\omega_1 d\omega_2, \quad (5.94)$$

$$dW(\varepsilon_{\text{teb}}) = \frac{\omega}{2\pi kT} \exp\left(-\frac{p_q^2 + \mu^2 \omega_q^2}{2\mu}\right) dp_q dq. \quad (5.95)$$

Ikki atomli molekulaning o'rtacha energiyasi

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{\text{ilg}} + \bar{\varepsilon}_{\text{ayl}} + \bar{\varepsilon}_{\text{teb}}. \quad (5.96)$$

Bu yerda

$$\bar{\varepsilon}_{\text{ilg}} = \int \varepsilon_{\text{ilg}} dW(\varepsilon_{\text{ilg}}) = 3 \cdot \frac{1}{2} kT,$$

$$\bar{\varepsilon}_{\text{ayl}} = \int \varepsilon_{\text{ayl}} dW(\varepsilon_{\text{ayl}}) = 2 \cdot \frac{1}{2} kT,$$

$$\bar{\varepsilon}_{\text{teb}} = \int \varepsilon_{\text{teb}} dW(\varepsilon_{\text{teb}}) = 2 \cdot \frac{1}{2} kT.$$

Demak, (5.96) ifodani quyidagicha yozish mumkin bo'ladi:

$$\bar{\varepsilon} = 3 \cdot \frac{1}{2} kT + 2 \cdot \frac{1}{2} kT + 2 \cdot \frac{1}{2} kT = 7 \cdot \frac{1}{2} kT.$$

Bu shuni anglatadiki, agar ilgarilanma, aylanma va tebranma harakatdagi molekula energiyasi ifodasidagi kvadratik hadlar sonini «erkinlik darajasi» deb hisoblasak, u vaqtda har bir kvadratik hadga  $kT/2$  energiya to'g'ri kelar ekan. Bu energiyaning erkinlik darajalari bo'yicha teng taqsimot qonuni deb yuritiladi. Bu qonun har qanday sondagi atomlardan tashkil topgan molekulalar uchun ham o'rinli bo'ladi. Gaz uch atomli molekulalardan tashkil topgan bo'lsin. Bu holda atomlarning fazoviy joylashishiga qarab molekula chiziqli yoki nochiziqli bog'langan bo'ladi. Birinchi holda molekula atomlari bir to'g'ri chiziqda joylashgan bo'lib, ilgarilanma harakat erkinlik darajasi 3 ta, molekula o'qiga perpendukular bo'lgan o'q atrofida aylanma harakat uchun 2 ta va tebranma harakat uchun 4 ta erkinlik darajasiga ega bo'ladi. Ikkinchi holda molekula atomlari bir to'g'ri chiziqda yotmaydi. Nochiziqli bog'lanish uchun erkinlik darajasi teng va 3 tadan bo'ladi.

Agar  $n$  ta atomli molekuladan tashkil topgan gaz bo'lsa, u holda chiziqli bog'langan molekulaning o'rtacha energiyasi

$$\bar{\varepsilon}_r = 3 \cdot \frac{kT}{2} + 2 \cdot \frac{kT}{2} + (3n - 5)kT$$

va nochiziqli bog'langan molekula o'rtacha energiyasi

$$\bar{\varepsilon}_{n,r} = 3 \cdot \frac{kT}{2} + 3 \cdot \frac{kT}{2} + (3n - 6)kT$$

bo'ladi.

Agar gaz molekulasi energiyasidagi kvadratik hadlar sonini  $r$  bilan belgilasak, u holda molekula o'rtacha energiyasi  $\bar{\varepsilon} = r \frac{kT}{2}$  ga teng bo'ladi. Agar gaz  $N$  ta ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan bo'lsa, u holda energiya  $E = r \frac{kT}{2} N$  bo'ladi. Issiqlik

sig'imi esa  $C_v = r \frac{Nk}{2} = r \frac{R}{2}$  bo'ladi. Bu esa ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan gazlar issiqlik sig'imi o'zgarmas bo'lishini ko'rsatadi. Tajriba natijalari esa issiqlik sig'imi faqat yuqori temperaturalarda o'zgarmas bo'lib, past temperaturalarda temperaturaga bog'liq ekanligini ko'rsatadi. Temperatura pasayishi bilan issiqlik sig'imi kamayib boradi, avvalo tebranma harakatga va keyin aylanma harakatga to'g'ri keluvchi issiqlik sig'imi nolga intilib borar ekan. Bu esa erkinlik darajasi bo'yicha energiyani teng taqsimot qonuni past temperaturalarda o'rinsiz ekanligini ko'rsatadi. Boshqacha qilib aytganda, ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan gazlar uchun issiqlik sig'imi klassik nazariya tajriba dalillariga javob bera olmasligini, ya'ni tushuntira olmasligini ko'rsatadi.

### 5.17. Erkinlik darajalari bo'yicha kinetik energiyaning teng taqsimot teoremasi.

#### Virial teorema

Muvozanat holat klassik statistik nazariyasidagi bir qator masalalar Gibbs statistikasining umumiy masalalari – kinetik energiyani erkinlik darajalari bo'yicha teng taqsimot va virial teorema yordamida juda sodda yechiladi. Energiyani erkinlik darajalari bo'yicha teng taqsimot qonunini oldingi mavzuda isbotladik, har bir erkinlik darajasiga  $kT/2$  energiya to'g'ri kelishini ko'rdik.

Bu qonuniyat klassik statistik mexanikaning umumiy teoremasidan xususiy hol sifatida kelib chiqishini ko'rsatamiz.

Kanonik ansambl (o'zaro bog'lanmagan sistemachalar) bo'yicha

$\Gamma_n \frac{\partial H}{\partial \Gamma_i}$  kattalikning fazaviy o'rtachasini ko'rib chiqamiz, ya'ni

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma_i \frac{\partial H}{\partial \Gamma_k}} &= \int \Gamma_i \frac{\partial H}{\partial \Gamma_k} dW = \int \Gamma_i \frac{\partial H}{\partial \Gamma_k} \exp\left(\frac{F-H}{\theta}\right) d\Gamma = \\ &= -\theta \int \Gamma_i \frac{\partial}{\partial \Gamma_k} \exp\left(\frac{F-H}{\theta}\right) d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Bu yerda  $\Gamma = \{q_i, p_i\}$ , ( $i = \overline{1, 3N}$ ). Eng avval bitta  $\Gamma_k$  bo'yicha integralni ko'raylik:

$$\int \Gamma_i \frac{\partial H}{\partial \Gamma_k} \exp\left(\frac{F-H}{\theta}\right) d\Gamma_k =$$

$$= \Gamma_i \exp\left(\frac{F-H}{\theta}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \frac{\partial \Gamma_k}{\partial \Gamma_i} \exp\left(\frac{F-H}{\theta}\right) d\Gamma_k. \quad (5.98)$$

Bu ifodadagi birinchi had nolga teng, chunki  $H(\Gamma_k \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \infty$ .

Bundan tashqari  $\frac{\partial \Gamma_k}{\partial \Gamma_i} = \delta_{ik}$  ( $\delta_{ik}$  - Kroneker belgisi) ekanligini hisobga olsak, (5.98) quyidagicha yoziladi:

$$\int \Gamma_i \frac{\partial H}{\partial \Gamma_k} \exp\left(\frac{F-H}{\theta}\right) d\Gamma_k = \int \exp\left(\frac{F-H}{\theta}\right) \delta_{ik} d\Gamma_k. \quad (5.99)$$

Bu ifodani (5.97) ga qo'yish natijasida quyidagini olamiz:

$$\overline{\Gamma_i \frac{\partial H}{\partial \Gamma_k}} = \theta \delta_{ik}. \quad (5.100)$$

Bu umumiy ifodadan impuls va koordinata uchun ikkita xususiy natija olinadi. Birinchisi

$$\overline{p_k \frac{\partial H}{\partial p_k}} = \theta \quad (5.101)$$

teng taqsimot haqidagi teorema deyiladi. Ikkinchisi esa

$$\overline{q_k \frac{\partial H}{\partial q_k}} = \theta \quad (5.102)$$

virial haqidagi teorema deyiladi. (5.101) tenglamaning chap tomoni haqiqatan ham  $k$ - nomerli bitta erkinlik darajasiga to'g'ri kelgan energiya. Mexanikadan ma'lumki, agar kinetik energiya impulsning kvadratik funksiyasi bo'lsa,

$$2K = \sum p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (5.103)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu ifodaga mos holda

$$\overline{K_k} = \frac{1}{2} \overline{p_k \frac{\partial H}{\partial p_k}} = \frac{\theta}{2} = \frac{kT}{2}. \quad (5.104)$$

Demak, har bir erkinlik darajasining o'rtacha kinetik energiyasi  $kT/2$  ga teng bo'ladi. (5.102) munosabatdan

$$\sum q_k \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\sum q_k f_k, \quad (5.105)$$

bu yerda  $f_k$  - kuch. (5.104) Klauzius tomonidan virial deb atalgan. Demak, (5.102) ga ko'ra bitta erkinlik darajasining o'rtacha viriali

$$-\frac{1}{2} \overline{q_k f_k} = \frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum q_k f_k = \frac{\theta}{2} = \frac{kT}{2}. \quad (5.106)$$

Bu teoremlarni sodda sistemalarga tatbig'ini ko'rib chiqamiz.

1. *Garmonik ossillator*. Garmonik ossillatorning Gamilton funksiyasi quyidagicha:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa q^2}{2}.$$

Demak, uning viriali quyidagiga teng:

$$\frac{q}{2} \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\kappa q^2}{2} = U.$$

Shunday qilib (5.101) va (5.102) ga asosan

$$\bar{K} = \frac{\theta}{2}, \quad \bar{U} = \frac{\theta}{2}, \quad \bar{H} = \bar{E} = \bar{K} + \bar{U} = \theta = kT,$$

ya'ni garmonik ossillatorning o'rtacha energiyasi teng ekan.

2. *Angarmonik ossillator*. Gamilton funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'lgan angarmonik ossillatorni qaraylik:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa q^2}{2} - \beta q^4.$$

Bu sistema uchun virial quyidagiga teng bo'ladi:

$$\frac{q}{2} \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\kappa q^2}{2} - 2\beta q^4 = \frac{\theta}{2}.$$

Bundan

$$\bar{U} = \frac{\theta}{2} + 2\overline{\beta q^4}, \quad \bar{E} = \theta + 2\overline{\beta q^4}.$$

Demak, berilgan hol uchun virial haqida teorema angarmonik ossillatorning o'rtacha energiyasini hisoblashga imkon bermaydi. Ammo angarmoniklik koeffitsiyenti  $\beta > 0$  bo'lganda o'rtacha energiyaning ortishini ko'rish mumkin. Angarmonik qo'shimchalarning virialini hisoblash mumkin emasligining asosiy sababi virial haqidagi teorema faqat chiziqli sistemalar uchun, ya'ni sistemaning Gamilton funksiyasi koordinata va impulsning kvadratik funksiyasi bo'lishi kerak.

3. *Siyrak gazlarning issiqlik sig'imi.* Bir atom siyrak gaz atomlar orasidagi o'zaro ta'sir potensial energiyasi juda kichik bo'lganligi uchun uning energiyasi alohida olingan atomlarning kinetik energiyalarining yig'indisidan tashkil topgan bo'ladi, ya'ni (5.101) ga asosan

$$\bar{E} = 3N \frac{\theta}{2} = \frac{3}{2} RT,$$

bundan

$$C_v = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{3}{2} R.$$

Bu ifodalarda bir atomli gaz molekulari uchta erkinlik darajasiga ega ekanligi namoyon bo'ldi.

Agar gaz ikki atomli molekulalardan tashkil topgan bo'lsa, erkinlik darajasi beshta bo'ladi. U holda

$$\bar{E} = \frac{5}{2} RT,$$

bundan

$$C_v = \frac{5}{2} R.$$

Bir atomli gazlar uchun olingan ifodalar tajriba natijalari bilan juda yaxshi mos tushadi. Ammo ikki atomli molekular uchun olingan ifodalar tajriba natijalari bilan temperaturaning cheklangan sohasida mos tushadi. Gazni tashkil qilgan molekular qancha murakkab bo'lsa, farq shunchalik sezilarli bo'ladi. Tajriba bilan mos keladigan ifodalar faqat kvant statistik fizika yordamida olinadi.

## 5.18. Ikki kvant holatli sistema issiqlik sig'imi

Oldingi mavzuda eslatilgan tajriba natijalarini tushuntirish uchun ikkita kvant holatli sistema hususiyatini qarab chiqaylik. Amalda ikki kvant holatli sistemalar bo'lmaydi, lekin shunday sistemalar mavjudki, ularda kvant holatlardan ikkitasi qolganlaridan ajralib turadi. Masalan bunday holatli sistemalardan lazer nurlarini generatsiya qiluvchi ishchi muhit sifatida foydalaniladi. Demak, quyida olinadigan natijalarni shunday sistemalarga tatbiq qilish mumkin. Bundan tashqari, bunday sistemalarni o'rganish metodik jihatdan ham muhim. Ma'lumki, sistemaning bitta atomi uchun holat funksiyasi

$$z = \sum_{i=1,2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) g(\varepsilon_i) \quad (5.107)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerda  $g(\varepsilon_i)$  -  $\varepsilon_i$  energiyali sathning statistik vazni. Bu holda (5.107) dagi yig'indini ochib yozamiz:

$$z = g_1 \exp\left(-\frac{\varepsilon_0}{kT}\right) \left[1 + \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)\right].$$

$N$  ta o'zaro bog'lanmagan bir xil zarralardan tashkil topgan sistema holat funksiyasi (5.4) va (5.107) ga asosan

$$Z = \frac{1}{N!} \left[ g_1 \exp\left(-\frac{\varepsilon_0}{kT}\right) \right]^N \left[ 1 + \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right) \right]^N \quad (5.108)$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda  $g_1 = g(\varepsilon_1)$ ,  $g_2 = g(\varepsilon_2)$  va  $\Delta\varepsilon_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = = KT_c$  deb qabul qilingan.  $T_c$  - xarakteristik temperatura deb yuritiladi.

Holat funksiyasining oshkora ko'rinishidan foydalanib, sistema ichki energiyasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$E = N\varepsilon_1 + Nk \left( \frac{g_2}{g_1} \right) \cdot T_c \frac{\exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)}{1 + \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)}. \quad (5.109)$$

Bu ifodani past temperatura ( $T \ll T_c$ ) va yuqori temperatura ( $T \gg T_c$ ) larda tahlil qilamiz:



1)  $T \ll T_c$  da

$$E \approx N\varepsilon_1, \quad (5.110)$$

energiya temperaturaga bog'liq emas, demak, issiqlik sig'imi  $C_v = 0$ . Bunday natija termodinamikaning uchinchi qonuniga mos keladi.

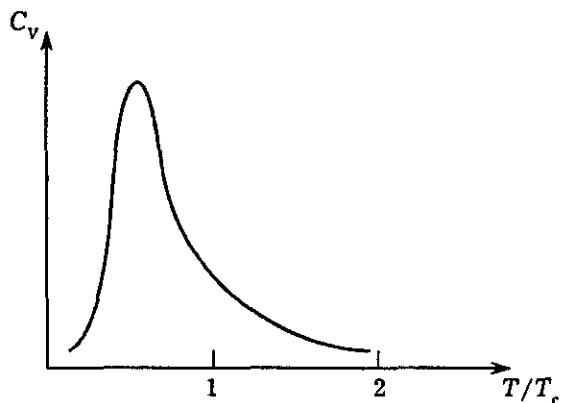
2)  $T \gg T_c$  da esa

$$E \approx N\varepsilon_1 + \frac{NkT_c}{\left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right)^2} \left(\frac{g_2}{g_1}\right) \left(1 + \frac{g_2}{g_1} - \frac{g_2}{g_1} \frac{T_c}{T}\right) \quad (5.111)$$

va issiqlik sig'imi

$$C_v = Nk \left(\frac{g_2}{g_1}\right) \left(\frac{T_c}{T}\right)^2. \quad (5.112)$$

Oxirgi ifoda chekli energetik sathli sistemada  $T \rightarrow \infty$  da issiqlik sig'imi nolga intilishini ko'rsatadi. Chunki ikki energetik holat energiyalarining farqi sistemaning issiqlik energiyasidan juda kichik bo'lganda sistema deyarli klassik bo'lib qoladi va zarraning ichki energiyasi sistemaning to'liq ichki energiyasiga deyarli hissa qo'shmaydi. Demak, yuqori temperaturalarda



5.6- rasm. Ikki kvant holatli sistema issiqlik sig'imining temperaturaga bog'lanishi.

energiya o'zgarmas ekan. Shuning uchun  $C_v = 0$  bo'ladi. Bu hol energetik sathlari chekli sohada joylashgan sistemalar uchun o'rinli. 5.6- rasmda shunday sistemalarning issiqlik sig'imining temperaturaga tipik bog'lanishi keltirilgan. Agar energetik sathlar tarqoq joylashgan bo'lsa, biz ko'rgan model to'g'ri natija bermaydi. Chunki, yuqori temperaturalarda biz ko'rayotgan ikki holat issiqlik sig'imiga hissa qo'shmasada, ulardan uzoqda joylashgan boshqa energetik holat rol o'ynay boshlaydi.

### 5.19. Ikkita atomli kvant ideal gaz

Oldingi mavzuda issiqlik sig'imining temperaturaga bog'lanishini oddiy hol uchun nazariy tomondan ko'rsatdik. Ko'p atomli molekullardan tashkil topgan kvant ideal gaz issiqlik sig'imini aniqlashda avval ikkita atomli kvant ideal gaz issiqlik sig'imini hisoblashni ko'raylik. Buning uchun gaz ichki energiyasini hisoblaylik. Gaz ichki energiyasini hisoblash uchun holat funksiyasi

$$z = \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) g(\varepsilon_i) \quad (5.113)$$

ni hisoblash kerak. Bu yerda  $\varepsilon_i$  alohida olingan molekulaning energiyasi bo'lib, uch qismdan: bir butun holdagi ilgari lanma, aylanma va molekulani tashkil qilgan atomlarning nisbiy tebranma harakat energiyalaridan tashkil topgandir:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ilg} + \varepsilon_{ayl} + \varepsilon_{teb}.$$

Energiyaning uch qismdan iborat ekanligini hisobga olsak, (5.113) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$z = z_{ilg} \cdot z_{ayl} \cdot z_{teb}. \quad (5.114)$$

Agar gaz  $N$  ta ikki atomli molekullardan tashkil topgan bo'lsa, u holda gaz holat funksiyasi

$$Z = \frac{1}{N!} (z_{ilg})^N (z_{ayl})^N (z_{teb})^N. \quad (5.115)$$

Gaz molekullarining harakat turlariga mos ravishda uning ichki energiyasi va issiqlik sig'imi ham uch qismdan iborat bo'ladi, ya'ni

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = E_{\text{ilg}} + E_{\text{ayl}} + E_{\text{teb}}, \quad (5.116)$$

$$C_V = C_V^{\text{ilg}} + C_V^{\text{ayl}} + C_V^{\text{teb}}. \quad (5.117)$$

Bu ifodalarni yozishda elektron va yadro harakatlari energiyasi va u bilan bog'liq bo'lgan issiqlik sig'imi hisobga olinmadi. Asosiy masala (5.115) ifodaga kirgan holat funksiyalarini hisoblashdan iborat. Molekulaning ilgari holat funksiyalarini hisoblashdan iborat. Molekulaning ilgari holat funksiyasi hisoblangan. Shunga ko'ra  $E_{\text{ilg}}$  ham ma'lum.

Tebranma harakat holat funksiyasi  $z_{\text{teb}}$  ni hisoblash uchun ikki atomli molekulani massasi keltirilgan massaga teng bo'lgan chiziqli kvant ossillyator deb qarash mumkin. Garmonik ossilyator energiyasi

$$\varepsilon_n = h\nu(n + 1/2) \quad (5.118)$$

diskret qiymatlar qabul qiladi. Garmonik kvant ossilyator energiya sathlari aynimagan bo'ladi va tebranma harakatdagi qo'shni energiya sathlari orasidagi farq har doim  $\Delta\varepsilon_{\text{teb}} = \varepsilon_n^{\text{teb}} - \varepsilon_{n-1}^{\text{teb}} = h\nu$  bo'ladi va kvant soni  $n$  ga bog'liq bo'lmaydi.

Aylanma harakatdagi molekula holat funksiyasi  $z_{\text{ayl}}$  ni hisoblash uchun, ikki atomli molekulani  $I = \mu a^2$  inersiya momentli og'irlik markazi atrofida aylanuvchi rotator deb qarash mumkin. Bunday rotator energiyasi

$$\varepsilon_{\text{ayl}} = Bhj(j+1) \quad (5.119)$$

bo'ladi. Bu yerda  $B = h/8\pi^2 I$ .  $j = 0, 1, 2, \dots$  orbital kvant son,  $\mu$  - keltirilgan massa,  $a$  - atomlar orasidagi masofa. Rotator energiya sathlari  $(2j + 1)$  karrali aynigan holatda bo'ladi va qo'shni energiya sathlari orasidagi farq

$$\Delta\varepsilon_{\text{ayl}} = Bh(j+1)$$

bo'ladi. Bu yerda shu narsani hisobga olish kerakki, tebranma harakatdagi qo'shni energiya sathlari orasidagi farq har doim aylanma harakatdagi qo'shni energiya sathlari orasidagi farqdan juda katta bo'ladi, ya'ni  $\Delta\varepsilon_{\text{teb}} \gg \Delta\varepsilon_{\text{ayl}}$  bo'ladi.

Shunday qilib, (5.117) va (5.119) ifodalar yordamida

$$z_{\text{teb}} = \sum \exp\left(\frac{\varepsilon_{\text{teb}}}{kT}\right) g(\varepsilon_{\text{teb}}) \quad \text{va} \quad z_{\text{ayl}} = \sum \exp\left(\frac{\varepsilon_{\text{ayl}}}{kT}\right) g(\varepsilon_{\text{ayl}})$$

holat funksiyalarini va natijada ikki atomli  $N$  ta molekuladan tashkil topgan gaz ichki energiyasini, issiqlik sig'imini va termodinamik kattaliklarni hisoblash mumkin bo'ladi. Har bir turdagi harakat bilan bog'liq bo'lgan masalani alohida ko'rib chiqamiz.

## 5.20. Tebranma harakatning issiqlik sig'imiga qo'shgan hissasi

Ikki atomli molekulani  $E_n = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right)$  energiyali garmonik kvant ossillator deb qaradik. Shu sababli energiya sathlari aynimagan bo'ladi, demak, statistik vazn yoki kvant holatlar soni  $g(\varepsilon_{\text{teb}}) = 1$  bo'ladi. U holda holat funksiyasiga kiruvchi yig'indi kamayuvchi geometrik progressiya bo'ldi:

$$\begin{aligned} Z_{\text{teb}} &= \sum \exp\left(\frac{\varepsilon_{\text{teb}}}{kT}\right) g(\varepsilon_{\text{teb}}) = \exp\left(\frac{h\nu}{2kT}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{h\nu n}{kT}\right) = \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{h\nu}{2kT}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)}. \end{aligned}$$

Agar  $\frac{h\nu}{k} = T_c$  - xarakteristik temperatura ekanligini hisobga olsak, tebranuvchi molekula holat funksiyasi

$$z_{\text{teb}} = \frac{\exp\left(-\frac{T_c}{2T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)} \quad (5.120)$$

va o'rtacha energiya

$$\bar{\varepsilon}_{\text{teb}} = kT^2 \frac{\partial \ln z_{\text{teb}}}{\partial T} = \frac{kT_c}{2} \frac{T_c}{2T} = \frac{h\nu}{2} \frac{h\nu}{2T} \quad (5.121)$$

bo'ladi. Agar gaz  $N$  ta ikki atomli molekulalardan tashkil topgan bo'lsa, u holda gaz ichki energiyasi

$$E_{\text{teb}} = N\bar{\epsilon}_{\text{teb}} = \frac{NkT_c}{2} \frac{T_c}{2T} = \frac{Nh\nu}{2} \frac{h\nu}{2T}. \quad (5.122)$$

Tebranma harakatning gaz issiqlik sig'imga qo'shgan hissasi esa quyidagi ifoda bilan ifodalanadi:

$$C_V^{\text{teb}} = \frac{Nk}{4} \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \frac{1}{\text{sh}^2 \frac{T_c}{2T}} = \frac{Nk}{4} \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{1}{\text{sh}^2 \frac{h\nu}{2kT}}. \quad (5.123)$$

(5.122) va (5.123) ifodalardan shu narsa ko'rinadiki, tebranma harakatga to'g'ri kelgan energiya va issiqlik sig'imi temperatura va xarakteristik temperatura  $T_c$  ning murakkab funksiyasi ekan. Ikkita chegaraviy hol uchun qaraylik:

1. Yuqori temperatura yoki kichik chastotalarda  $E_{\text{teb}} \simeq NkT$  va  $C_V^{\text{teb}} \simeq Nk$  bo'ladi. Bu klassik qonun asosida olingan natija bilan mos tushadi.

2. Past temperatura yoki katta chastotalarda:

$$E_{\text{teb}} \simeq \frac{NkT_c}{2} + NkT_c \cdot \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right), \quad (5.124)$$

$$C_V^{\text{teb}} \simeq Nk \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right) \quad (5.125)$$

ifodalarni olamiz. Bu ifodalardan shu narsa ko'rinadiki, past temperaturalarda energiya va issiqlik sig'imi uchun olingan (5.124) va (5.125) ifodalar klassik qonun asosida olingan ifodalardan tamoman farq qiladi. Temperatura  $T \rightarrow 0$  K intilishi bilan tebranish energiyasi o'zgarimas kattalik  $E_0 = NkT_c/2 = Nh\nu/2$  ga intiladi. Bu energiya nolinci energiya deb yuritildi. Nolinci energiyaning mavjudligi kvant harakat xarakterli xususiyatga ega ekanligini ko'rsatadi. Tebranma harakat issiqlik sig'imi esa

$T \rightarrow 0$  K da  $\left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \exp(-T_c/T)$  ga proporsional holda nolga intiladi.

Bu esa tajriba natijasiga mos tushadi, ya'ni temperatura pasayishi bilan tebranma harakatga to'g'ri keluvchi issiqlik sig'imi kamayib boradi va  $T \rightarrow 0$  K da gaz issiqlik sig'imga qo'shgan hissasi yo'qoladi.

Tebranma harakatga to'g'ri kelgan boshqa termodinamik kattaliklar (holat funktsiya (5.120) ni bilgan holda) berilgan ma'lum formulalar yordamida hisoblaniladi.

### 5.21. Aylanma harakatning gaz issiqlik sig'imiga qo'shgan hissasi

Ikkita erkinlik darajasiga ega bo'lgan ikki atomli molekula aylanma harakat energiyasi (5.119) bilan ifodalanadi. Agar aylanma harakat xarakteristik temperaturasi  $T_c = \frac{h^2}{8\pi^2Ik}$  ni kiritsak, u holda aylanma harakatning holat funktsiyasi

$$z_{\text{ayl}} = \sum \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\text{ayl}}}{kT}\right) g(\varepsilon_{\text{ayl}})$$

quyidagi ko'rinishni oladi:

$$z_{\text{ayl}} = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \exp\left(-\frac{T_c j(j+1)}{T}\right). \quad (5.126)$$

(5.117) qatorni ikkita chegaraviy hol uchun qarab chiqaylik:

1. Yuqori temperaturada ( $T \gg T_c$ ) aylanma harakatdagi energiya sathlari orasidagi masofa o'rtacha energiyaga nisbatan kichik bo'ladi, ya'ni

$$\frac{\Delta\varepsilon_{\text{ayl}}}{kT} \sim \frac{T_c}{T} \ll 1.$$

Bu holda aylanma harakatdagi energiyani uzluksiz o'zgaruvchi kattalik deb hisoblab, uning kvantlanishini hisobga olmasak ham bo'ladi. (5.126) ifodani hisoblash uchun Eylerning yig'indi formulasidan foydalanamiz:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \int_0^{\infty} f(j) dj + \frac{1}{2} [f(0) + f(\infty)] + \frac{1}{12} [f'(\infty) - f'(0)] + \dots \quad (5.127)$$

Biz qaraydigan hol uchun

$$f(j) = (2j+1) \exp\left(-\frac{T_c j(j+1)}{T}\right).$$

Agar biz birinchi uchta had bilan chegaralansak, hisoblashlar aylanma harakatlar funksiyasi quyidagi ko'inishda ekanligini ko'rsatadi:

$$z_{\text{ayl}} \simeq \frac{T}{T_c} \left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{T_c}{T} + \frac{1}{15} \left( \frac{T_c}{T} \right)^2 \right]. \quad (5.128)$$

Juda katta temperaturada

$$z_{\text{ayl}} \simeq \frac{T}{T_c} = \frac{8\pi^2 IkT}{h^2},$$

bu esa klassik ifoda bilan mos tushadi.  $N$  ta ikki atomli molekuladan tashkil topgan gaz aylanma harakat ichki energiyasi:

$$E_{\text{ayl}} = N\bar{\epsilon}_{\text{ayl}} = NkT^2 \frac{\partial \ln z_{\text{ayl}}}{\partial T} \simeq NkT \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{T_c}{T} - \frac{2}{15} \left( \frac{T_c}{T} \right)^2 \right]$$

Issiqlik sig'imi esa  $C_V^{\text{ayl}} \simeq Nk$  bo'ladi.

2. Past temperaturada ( $T \ll T_c$ ) holat funksiyasi (5.126) yig'indi ostidagi ifoda oshishi bilan tez kamayib boradi. Shuning uchun birinchi ikki had bilan chegaralanish kifoya:

$$z_{\text{ayl}} \simeq 1 + 3 \exp\left(-\frac{2T_c}{T}\right).$$

Gaz ichki energiyasi:

$$E_{\text{ayl}} = NkT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \left[ 1 + 3 \exp\left(-\frac{2T_c}{T}\right) \right] \simeq 6NkT_c \exp\left(-\frac{2T_c}{T}\right)$$

Issiqlik sig'imi:

$$C_V^{\text{ayl}} \simeq 12Nk \left( \frac{T_c}{T} \right)^2 \exp\left(-\frac{2T_c}{T}\right).$$

Nernst teoremasi bilan mos holda  $T \rightarrow 0$  da  $C_V^{\text{ayl}}$  va  $E_{\text{ayl}}$  nolga intilar ekan.

Aylanma harakat holatini aniqlovchi termodinamik kattaliklar olingan formulalar asosida yuqori va past temperaturalarda hisoblanadi.

Yuqori va past temperatura tushunchasi tebranma va aylanma harakatlar uchun turlichadir. Masalan uy temperaturasi aylanma harakat uchun yuqori temperatura bo'lsa, tebranma harakat uchun past temperaturadir. Bu narsani quyidagi jadvaldan ko'rish mumkin:

Molekula	Tebranma harakat uchun xarakteristik temperatura, K da	Aylanma harakat uchun xarakteristik temperatura, K da
H <sub>2</sub>	6000	85,4
N <sub>2</sub>	3340	2,85
O <sub>2</sub>	2230	2,07
HCl	4140	15,1
HJ	3200	9,0

Yuqorida olingan ifodalardan shu narsani ko'rish mumkinki,  $z_{\text{ayl}}$  va demak, boshqa termodinamik kattaliklarni hisoblash uchun molekulaning inersiya momentini topish kifoya ekan. Bu esa aksariyat molekulalar uchun spektroskopik yo'l bilan aniqlangan.

Vodorod va deytiriy atomlari holi uchun aylanma harakatga yadro spinini ta'sirini hisobga olish kerak. Chunki yadro spini bir xil atomlardan tashkil topgan molekulaning aylanma harakat holat xarakteriga katta ta'sir o'tkazar ekan. Xususan, yadro spini qiymatiga qarab molekulasi ikkita tipdagi aylanma holatlarda bo'lishi mumkin.

Ikkala yadro spinlarining yig'indisi nolga teng bo'lgan holga javob beruvchi birinchi tip holatlarda aylanma kvant son juft qiymatlar ( $j = 0, 2, 4, 6, \dots$ ) qabul qiladi. Ikkala yadro spinlari qiymatlari yig'indisi noldan farqli bo'lgan holga javob beruvchi ikkinchi tip holatlarda aylanma kvant soni toq qiymatlar ( $j = 1, 3, 5, 7, \dots$ ) qabul qiladi. Birinchi tip molekulalar paravodorod va ikkinchi tip molekulalar ortovodorod deb yuritiladi. Oddiy sharoitlarda ular orasida o'tish mavjud bo'lmaydi.



Uch va undan ko'p zarralardan tashkil topgan sistema masalasi hatto klassik fizikada ham aniq yechimga ega emas. Bunday masala faqat xususiy hollardagina yechimga ega. Shu sababli ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan gaz uchun holat funksiyasini va termodinamik kattaliklarni topish murakkab masala hisoblanadi. Aniq berilgan molekuladan tashkil topgan gaz uchun masalani turli chegaraviy hollarda o'rganish yoki kompyuterda modellashtirish mumkin.

## 5.22. Ideal sistemalarning magnit va elektr xususiyatlari

O'zgarmas magnit momenti  $M_0$  bo'lgan  $N$  ta zarralardan tashkil topgan gazning xossalarini ko'rib chiqamiz. Gaz molekularining magnit momentlari tashqi magnit maydon yo'q bo'lganda tartib orientatsiyalangan bo'ladi. Shunday gazni kuchlanganligi  $H$  bo'lgan bir jinsli magnit maydonga joylashtiramiz.

Magnit maydoni ta'sir etmasdan avval, gaz zarralari bir xil o'rtacha issiqlik harakat energiyasiga ega bo'ladi. Tashqi maydon ta'siridan so'ng turli xil magnit orientatsiyaga ega bo'lgan zarralar har xil energiyaga ega bo'ladi. Bu holda energiya taqsimoti o'zgaradi, ya'ni notekis bo'lib qoladi. Zarralar magnit maydonidagi potensial energiyasi

$$U(\theta) = (M_0, H) = M_0 H \cos \theta$$

tenglik bilan aniqlanadi, bu yerda  $\theta$  – magnit momenti va magnit maydon yo'nalishlari orasidagi burchak.

Potensial energiya faqat  $M_0$  ning yo'nalishiga bog'liq bo'lganligi uchun, fazoda zarralar taqsimoti bir jinsliliigi o'zgar olmaydi.

Paramagnetizm va dielektriklarning qutblanishi klassik nazariyasi fransuz olimi Lanjeven tomonidan berilgan.

Faraz qilaylik, magnit momenti yo'nalishi fazoda uzluksiz o'zgarsin. Bu holda magnit momenti  $M_0$  ning istalgan orientatsiyasi mavjud bo'ladi va uning taqsimot funksiyasi Bolsman taqsimoti bo'yicha beriladi:

$$\frac{dN(\theta)}{N} = \frac{\exp\left(-\frac{U(\theta)}{kT}\right) d\Omega_0}{\int \exp\left(-\frac{U(\theta)}{kT}\right) d\Omega_0} = \frac{\exp[\beta M_0 H \cos \theta] \sin \theta d\theta d\varphi}{\int \exp[\beta M_0 H \cos \theta] \sin \theta d\theta d\varphi}$$

Bu yerda  $d\Omega_0 = \sin\theta d\theta d\varphi$ ;  $\beta = 1/kT$ ;  $\theta - 0$  dan  $\pi$  gacha o'zgaradi.

Maydon yo'nalishi bo'yicha magnit momenti proeksiyasining o'rtacha qiymati

$$\overline{M_z} = \overline{M_0 \cos\theta} = \int M_0 \cos\theta \frac{dN(\theta)}{N} = M_0 \frac{\int_0^\pi \exp[\beta M_0 H \cos\theta] \cos\theta \sin\theta d\theta}{\int_0^\pi \exp[\beta M_0 H \cos\theta] \sin\theta d\theta},$$

$$\overline{M_0 \cos\theta} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \frac{(\beta M_0 H)}{\beta} = M_0 \left[ (\beta M_0 H) - \frac{1}{\beta M_0 H} \right].$$

$N$  ta zarralardan tashkil topgan ideal gaz magnit momenti:

$$\mathcal{M} = \overline{M_0 \cos\theta} \cdot N = ML \left( \frac{M_0 H}{kT} \right). \quad (5.123)$$

Bu yerda  $M = M_0 N$  magnitlanishning maksimal qiymati bo'lib,  $|\mathbf{H}| \rightarrow \infty$  da yoki  $T \rightarrow 0$  K da erishadi.

$$L \left( \frac{M_0 H}{kT} \right) = (\beta M_0 H) - \frac{1}{\beta M_0 H} - \text{Lanjeven funksiyasi.}$$

Shunday qilib, (5.129) ifodadan shu narsa ko'rinadiki:

1) kuchli maydon va past temperaturada Lanjeven funksiyasi birga intiladi va to'yinish yuzaga keladi. Natijada magnitlanish maksimal qiymatga ega bo'ladi;

2) kuchsiz maydon va yuqori temperaturada magnitlanish

$$\mathcal{M} = M L \left( \frac{M_0 H}{kT} \right) = MH \frac{1}{3} \frac{M_0 H}{kT} = \frac{1}{3} \frac{M_0^2 H N}{kT} < M_0 N$$

bo'ladi.

Ammo statistik nazariya atom va molekullarni magnit momentga ega bo'lish farazini isbotlay olmaydi. Bu masala faqat kvant mexanikada hal qilindi. Shuning uchun paramagnetizm nazariyasi kvant nazariyasi bo'lishi kerak. Chunki magnit momentning maydon yo'nalishi bo'yicha proeksiyasini hisoblashda uning kvantlanishi hisobga olinishi kerak. Kvant mexanikasida shu narsa isbotlanadiki, magnit maydon yo'nalishida elektron magnit momentning proeksiyasi faqat diskret qiymatlar qabul qilishi mumkin. Masalan,  $j$ -spinli erkin zarra uchun magnit momenti quyidagiga teng bo'ladi:

$$-M_0, -M_0 \frac{j-1}{j}, \dots, M_0 \frac{j-1}{j}, M_0.$$

Bu yerda  $M_0$  – magnit momenti proeksiyasining maksimal qiymati bo‘lib,

$$M_0 = \frac{eh}{2\pi mc} j = 2\mu_B j$$

bo‘ladi,  $\mu_B = \frac{eh}{4\pi mc}$  – Bor magnitoni,  $j$  – spin kvant soni bo‘lib,

butun va yarim butun bo‘lishi mumkin. Endi  $\overline{M}_z = \overline{M_0 \cos \theta}$  ni hisoblaylik:

$$\begin{aligned} \overline{M}_z = \overline{M_0 \cos \theta} &= \sum_{s=-j}^j M_0 \cos \theta W_s = \frac{M_0 \sum_{s=-j}^j \frac{s}{j} \exp\left(\beta M_0 H \frac{s}{j}\right)}{\sum_{s=-j}^j \exp\left(\beta \mu H \frac{s}{j}\right)} = \\ &= \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \ln \sum_{s=-j}^j \exp\left(\beta M_0 H \frac{s}{j}\right) \right]. \end{aligned}$$

Bu ifodadagi geometrik progressiya yig‘indisi

$$\sum_{s=-j}^j \exp\left(\beta M_0 H \frac{s}{j}\right) = \frac{\text{sh}\left[\beta M_0 H \left(1 + \frac{1}{2j}\right)\right]}{\text{sh}\left(\beta M_0 H \frac{s}{2j}\right)}$$

bo‘ladi. U holda  $N$  ta zarradan tashkil topgan gaz magnit momenti uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\mathcal{M} = ML_j (\beta M_0 H) N = M_0 L_j \left(\frac{M_0 H}{kT}\right). \quad (5.130)$$

Bu yerda  $L_j \left(\frac{M_0 H}{kT}\right)$  – Lanjevenning kvant funksiyasi (yoki Brilluen funksiyasi ham deb yuritiladi) quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$L_j(x) = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \text{cth} \left[ \left(1 + \frac{1}{2j}\right) x \right] - \frac{1}{2j} \text{cth} \left( \frac{x}{2j} \right). \quad (5.131)$$

Bu yerda  $x = \frac{M_0 H}{kT}$ . (5.131) dan shu narsa ko'rinadiki, katta maydon va past temperaturalarda Lanjeven kvant funksiyasi birga intiladi va to'yinish hodisasiga olib keladi. Bu holda magnitlanish maksimal qiymatiga erishadi. Kichik magnit maydon va katta temperaturalarda Lanjeven kvant funksiyasi birdan juda kichik qiymat qabul qiladi, ya'ni

$$L_j(x) = \frac{j+1}{3j} x \ll 1$$

bo'ladi va natijada magnitlanish kuchsiz bo'ladi.

Ideal sistemalar xususiyatlarining statistik nazariyasi yuqorida bayon qilingan metod asosida ishlab chiqiladi va bayon qilinadi.

### 5.23. Absolut manfiy temperatura

Energetik spektri yuqoridan chegaralangan sistemalar manfiy absolut temperaturaga ega bo'lishi mumkin. Manfiy absolut temperaturani mavjudligining termodinamika, statistik fizika va kvant mexanika nuqtayi nazaridan ko'rsatish mumkin.

1. Termodinamikaning asosiy tenglamasi (3.87) dan, ya'ni

$$TdS = dE + \sum_i f_i d\lambda_i$$

dan

$$\left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_{\lambda_i} < 0$$

bo'lganda  $T < 0$  bo'lishi mumkin. Manfiy absolut temperaturali sistema mavjudligini 1951-yilda E. Parsell va R. Paund tomonidan toza LiF kristalida yadro spinlar sistemasini xususiyatlarini o'rganish borasida o'tkazilgan tajribada ko'rsatildi. Bu tajriba LiF kristalida yadro magnit rezonansini kuzatish borasida o'tkazilgan. Tajriba natijasi shuni ko'rsatdiki, agar kristall kuchli magnit maydonga joylashtirilsa,  $T > 0$  past tempe-

raturada yadro spinlari qisman maydon bo'yicha orientatsiyalanadi, ammo temperatura oshishi bilan bu orientatsiyalanish kuchsizlana boradi va yetarli darajada yuqori temperaturada ( $T \rightarrow \infty$  da) kuchli magnit maydon bo'lsada, orientatsiyalanish yo'qoladi. Bu hollarda sistema chegaralangan juda katta energiya zaxirasiga ega bo'ladi. Chegaralangan energiya qiymatidan kattaroq energiyani sistemaga kiritishni davom ettirsak, hamma yadro spinlar yo'nalishi maydon yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lgan holat yuzaga keladi. Sistemaning bu holati manfiy absolut temperaturali holat deyiladi. Bunday real manfiy absolut temperaturali sistema sun'iy yo'l bilan olinadi. Manfiy absolut temperaturalar musbat absolut temperaturalaridan yuqori bo'ladi. Absolut nol temperaturaga etishish mumkin emaslik prinsipiga asoslanib, temperatura shkalasini quyidagi sxema bo'yicha ifodalash mukmin:

$$+0 \text{ K}, +1, +2, \dots, +\infty, -\infty, \dots, -2, -1, -0 \text{ K}.$$

(Bu ko'rinishdagi temperaturada shkalasini grafik holda (3.86)ga asoslanib, ko'rsatish mukmin.)

Jism  $T = +0 \text{ K}$  da o'ta sovuq,  $T = -0 \text{ K}$  da o'ta issiq bo'ladi. Agar  $< 0$  va  $0 >$  temperaturali ikkita sistemani kontaktga keltirsak, issiqlik har doim  $T < 0$  sistemadan  $T > 0$  sistemaga o'tadi. Agar ikkala jism ham turli xil manfiy temperaturali bo'lsa,  $|T_1| < |T_2|$  ga o'tadi.

Manfiy absolut temperaturali sistemalar uchun ham termodinamikaning qonunlari o'rinni bo'ladi. Ammo bunday sistemalarga  $\delta Q$  issiqlik berilganda entropiyasi kamayadi, chunki sistema eng tartiblangan holatga o'tadi. Agar Karno sikli bajarilayotgan bo'lsa, u holda foydali ish koeffitsiyenti  $\eta < 0$  bo'ladi. Chunki bu holda Karno mashinasi ishlashda ish sarf qilishga to'g'ri keladi. Solishtirma issiqlik sig'imi  $T = +0 \text{ K}$  da nolga teng bo'lgani kabi,  $T = -0 \text{ K}$  da ham nolga teng bo'ladi.  $T < 0$  da sistema adiabatik holda magnitsizlantirilsa, u holda sistema sovishi o'rniga qizishiga olib keladi.  $T < 0$  da sistema termodinamik barqaror holatda bo'ladi.

2. Statistik fizika nuqtayi nazaridan Gibbs taqsimotiga asosan, temperatura sistemani  $\varepsilon_i$  energiyali holatda topish ehtimolligini beradi:

$$W(\varepsilon_i) = A \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) \Omega(\varepsilon_i).$$

Ko'pchilik fizik normal sistemalar ikkita quyidagi xususiyatga ega bo'ladi:

1) ular yuqoridan chegaralanmagan energiya spektriga ega bo'ladi;

2) sistemada berilgan energiyali holatlar soni zichligi  $\Omega(\epsilon_i)$  energiya oshishi bilan darajali qonun bo'yicha oshib boradi:

$$\Omega(\epsilon_i) \sim \frac{d\Gamma}{d\epsilon} \sim \epsilon^{\frac{3N}{2}-1}.$$

Ana shunday sistemalar uchun temperatura musbat bo'ladi va  $0 \leq T \leq \infty$  intervalda istalgan qiymatni qabul qilishi mumkin. Bunday sistemalarda holat funksiyasi

$$Z = \sum \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT}\right) \Omega(\epsilon_i)$$

dagi qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun: 1)  $T \geq 0$  tengsizlik bajarilishi talab qilinadi; 2)  $T \geq 0$  shartni bajarilishi absolut temperaturaning har qanday qiymat qabul qilishini ko'rsatadi.

Chunki  $\Omega(\epsilon_i)$  ni o'sishi  $\exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT}\right)$  ko'paytmaning kamayishi bilan kompensatsiyalanadi. Ammo yuqorida eslatilgan 1) va 2) shartlar bajarila olmaydigan maxsus fizikaviy sistemalar bo'lishi mumkin. Tajribalar va nazariy tahlillar shuni ko'rsatadiki, «anamal» sistemalar manfiy absolut temperaturali holatda bo'la olar ekan. Bo'lishi mumkin bo'lgan «anamal» sistemalarni qarab chiqaylik.

A. Faraz qilaylik,  $\Omega(\epsilon_i)$  katta energiyalarda darajali qonun emas, balki ko'rsatkichli qonun bo'yicha o'zgarsin:  $\Omega(\epsilon_i) \sim \exp(a\epsilon_i)$  ( $a > 0$ ). Bu holda holat funksiyasi  $Z$  uchun ifodadagi umumiy

had katta  $\epsilon_i$  larda o'zini  $\exp\left(a - \frac{1}{kT}\right)$  kabi tutadi. Bu qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun  $0 \leq T < \frac{1}{ak}$  shart bajarilishi zarur.

Shunday qilib, temperatura musbat bo'lib, ammo chegaraviy temperatura  $T_{\text{cheg}} = \frac{1}{ak}$  mavjudligi bu temperaturadan katta qiymatlarda sistemaning qizishi mumkin emasligini ko'rsatadi.

B. Holatlar zichligi  $\Omega(\varepsilon_i)$  energiya oshganda o'smasdan, balki kamayuvchi bo'lgan sistemani olib qaraylik. Agar  $\Omega(\varepsilon_i)$  darajali qonun bo'yicha kamaysa, u holda bunday sistema xususiyati normal sistema xususiyati bilan mos tushadi va  $0 \leq T < \infty$  bo'ladi. Agar  $\Omega(\varepsilon_i)$   $\varepsilon_i$  ning katta qiymatlarida ko'rsatgichli qonun

$$\Omega(\varepsilon_i) \sim \exp(-a\varepsilon_i)$$

( $a > 0$ ) bo'yicha kamaysa, u holda qatorning umumiy hadi katta  $\varepsilon_i$  larda o'zini  $\exp\left[-\left(a + \frac{1}{kT}\right)\varepsilon_i\right]$  ko'rinishda tutadi. Bu holda qatorni yaqinlashish sharti quyidagi tengsizlikning bajari-lishini talab etadi:

$$a + \frac{1}{kT} = \frac{akT+1}{kT} \geq 0.$$

Bu tengsizlikdan yoki  $T \geq 0$ , yoki  $T < -\frac{1}{ak}$  bo'lishi kerakligini ko'ramiz, ya'ni bunday sistemalar uchun temperatura musbat ( $0 \leq T < \infty$ ) ham, manfiy ham bo'lishi mumkin ekan, keyingi holda manfiy chegaraviy temperatura  $T_{\text{cheg}} = -\frac{1}{ak}$  ning mavjudligini ko'rsatadi. Bu temperaturadan yuqori temperatura  $-\infty < T < T_{\text{cheg}}$  da sistema qizishi mumkin emas.

D. Energiya spektri yuqoridan chegaralangan va  $\varepsilon_{\text{max}}$  maksimal energiya mavjud bo'lgan sistemani olaylik. Bunday sistemani «B» sistemaning chegaraviy ( $a \rightarrow \infty$  va  $\Omega(\varepsilon_i)$   $\varepsilon_{\text{max}}$  dan boshlab nolga intilgandagi) holi deb qarash mumkin. Bu hol amaliy nuqtayi nazardan ancha qiziqarlidir. Bu holda  $z$  uchun qator aniq summaga aylanadi va  $z$  har qanday  $T$  da ham musbat, ham manfiy qiymatga ega bo'ladi va temperaturani o'zgarish sohasida  $-\infty < T < +\infty$  shartga ega bo'lamiz.

Chegaraviy va manfiy temperaturaning fizik ma'nosini aniqlash uchun temperaturaning o'zgarishiga qarab, statistik yig'indi  $z$  ni,  $\varepsilon_i$  energiyali holat ehtimol qiymati  $W(\varepsilon_i)$  va o'rtacha energiya  $\bar{\varepsilon}$  ni ham normal sistema va hamda A, B, D hollardagi sistemalar uchun kuzatish kerak.

$$z = \sum \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) \Omega(\varepsilon_i),$$

$$W(\varepsilon_i) = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) \Omega(\varepsilon_i)}{Z},$$

$$\bar{\varepsilon} = \sum_i \varepsilon_i W(\varepsilon_i)$$

ifodalarni normal sistemalar va A, B, D sistemalar uchun  $T \geq 0$  K va  $T < -0$  K intervalida va  $T_{\text{cheg}} = -1/ak$  da tahlil qilish natijasi shu narsaga olib keladiki, manfiy temperatura musbat temperaturaga nisbatan «yuqori» temperatura bo'lar ekan, sistema-ning o'rtacha energiyasi  $T < 0$  K da  $T > 0$  K dagi o'rtacha energiyadan katta bo'ladi.

3. Manfiy absolut temperaturali holatning mavjudligi 1915- yilda Eynshteyn tomonidan kvant mexanikasi metodi asosida ko'rsatilgan (IX bobga qarang).

## 5.24. V bobga oid masala va savollar

1.  $N$  ta molekuladan tashkil topgan bir atomli kvant ideal gaz erkin energiyasi, bosimi, entropiyasi va Gibbs termodinamik potentsiali topilsin.

2. Energiyasi impulsi bilan  $\varepsilon = cp^4$  munosabat orqali bog'langan zarralardan tashkil topgan bir atomli ideal gazning holat tenglamasi keltirib chiqarilsin.

*Yechish.* Bitta zarraning holat funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned} z &= \int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \frac{d\Gamma}{h^3} = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) p^2 dp = \\ &= \sqrt[3]{c^4} \frac{\pi V}{h^3} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \varepsilon^{-1/4} d\varepsilon = \sqrt[3]{c^3} \frac{\pi V}{h^3} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) (kT)^{3/4}; \end{aligned}$$

$$Z = \frac{z^N}{N!} = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3}\right)^N (kT)^{3N/4} \left[\sqrt[3]{c^3} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^N.$$



Ushbu holat funksiyasidan foydalanib holat tenglamasini yozamiz:

$$p = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{NkT}{N}.$$

Bu natija Mendeleyev-Klapeyron tenglamasi bilan mos keladi.

3. Energiyasi impulsi bilan  $\varepsilon = cp$  munosabat orqali bog'langan zarralardan tashkil topgan bir atomli ideal ultrarelativistik gazning erkin energiyasi va holat tenglamasi keltirib chiqarilsin.

4.  $N$  ta zarradan tashkil topgan bir atomli ideal gaz entropiyasi ichki energiyasi va hajmga qanday bog'langanligi topilsin.

5. Bir atomli ultrarelativistik bir mol kvant gazning issiqlik sig'imi  $C_v$  topilsin.

6. Gibbsning katta kanonik taqsimotidan foydalanib Fermi-Dirak va Boze-Eynshteyn taqsimot funksiyalari olinsin.

7. Fermi-Dirak va Boze-Eynshteyn statistikasiga bo'ysunuvchi  $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$  energiyali erkin zarralar uchun  $B = -\frac{2}{3}E$  o'rinli ekanligi isbotlansin. Bu yerda  $B$  - katta termodinamik potensial.

*Yechish.*

$$B = -kT \ln Z, \quad Z = \sum_{i,n} \exp\left(\frac{\mu n - \varepsilon}{kT}\right),$$

$$B_{iB} = -kT \ln \sum_{n_i=0}^{\infty} \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT} n_i\right) = kT \ln \left[1 - \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}\right)\right],$$

$$B_{iF} = -kT \ln \sum_{n_i=0}^1 \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT} n_i\right) = -kT \ln \left[1 + \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}\right)\right].$$

$i$ -holatdagi zarralar uchun bu ikkala ifodani birlashtirib yozamiz:

$$B_{iB,F} = \pm kT \ln \left[1 - \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}\right)\right].$$

Barcha holatlar bo'yicha yig'indini integral bilan almashtiramiz va natijada

$$B_{iB,F} = \pm kT \sum \ln \left[ 1 - \exp \left( \frac{\mu \epsilon_i}{kT} \right) \right] = \pm kT \int \ln \left[ 1 - \exp \left( \frac{\mu \epsilon_i}{kT} \right) \right] d\Omega.$$

Bu yerda  $d\Omega = g_s \frac{d\gamma}{h^3} = g_s \frac{4\pi^2 dp}{h^3} V$ ,  $p = \sqrt{2mE}$  ekanligini hisob-

ga olib, integrallash natijasida  $B_{B,F} = -\frac{2}{3} E$  ni olamiz.

8. Energiya bo'yicha taqsimot funksiyasiga asoslanib yarim spinli fermionlar uchun tezliklar bo'yicha taqsimot olinsin.  $T = 0$  K da bu funksiya grafigi chizilsin.

9. 8-masala natijasidan foydalanib,  $T = 0$  K da elektron gaz uchun  $\bar{v}$ ,  $\overline{v^2}$  va  $\left( \frac{1}{v} \right)$  kattaliklar aniqlansin.

10. Absolut nol temperaturada elektron gazning zarralar soni, bosimi va ichki energiyasi topilsin.

11. Absolut nol temperaturadan farqli temperaturada norelativistik aynigan elektron gazning energiyasi, Fermi sathi va issiqlik sig'imi aniqlansin.

12.  $T = 0$  K da metalldagi o'tkazuvchi elektronlarning qanday qismi  $0,5E_F$  dan katta kinetik energiyaga ega bo'lishi aniqlansin.

13.  $T = 0$  K temperaturada aynigan Fermi-gaz termodinamik potentsiali  $\Phi$ , erkin energiyasi  $F$  va entalpiyasi  $\chi$  aniqlansin.

14.  $g(\epsilon)$  bir zarrali holat zichligi bo'lsin deb faraz qilamiz. Fermi-Dirak statistikasiga bo'ysunuvchi gazning issiqlik sig'imi

$kT \ll E_F$  da  $C_v = \frac{\pi^2}{3} k^2 T g(E_F)$  formula bilan berilishi ko'rsatilsin.

15. Metallardagi aynigan elektron gazning issiqlik sig'imi  $kT \ll E_F$  shart o'rinli bo'lganda hisoblansin.

16. Boze gazining kondensatsiya temperaturasi  $T_0$  aniqlansin.

17.  $T < T_0$  da musbat energiyali  $\epsilon > 0$  holatlardagi bozonlar sonini aniqlovchi taqsimot funksiyasi

$$dN(\epsilon) = 2\pi V (2s + 1) \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{\exp \left( \frac{\epsilon}{kT} \right) - 1}$$

ekanligini hisobga olgan holda, energiya nolga teng bo'lgan holatdagi zarralar soni topilsin. Hamma zarralar soni  $N$ .

18.  $T < T_0$  temperaturada Boze gazining entropiyasi  $S$ , bosimi  $p$ , erkin energiyasi  $F$  va Gibbs termodinamik potentsiali  $\Phi$  ning temperaturaga bog'liqligi aniqlansin.

19.  $T < T_0$  temperaturada Boze-Eynshteyn gazi uchun qaytuvchi adiabatik jarayon tenglamasi olinsin.

20. Boze-Eynshteyn statistikasiga bo'ysunuvchi ideal gazning bosimi, hajmi va to'liq energiyasi orasidagi bog'lanish topilsin.

21. Ideal gaz holat tenglamasida kvant statistika bilan bog'langan birinchi tuzatma hisoblansin.

22. Ikkita kvant holatda yotgan  $N$  ta zarradan tashkil topgan bir atomli kvant ideal gaz ichki energiyasi va issiqlik sig'imi hisoblansin.

23. Har biri  $n + 1$  karrali aynigan  $\varepsilon_n = (n + 1)h\nu$  energetik sathlarga ega bo'lgan  $N$  ta o'zaro bog'lanmagan garmonik ossillatorlardan tashkil topgan sistemaning issiqlik sig'imi aniqlansin ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

24.  $N$  ta ikki atomli molekulalardan tashkil topgan kvant ideal gazning tebranma harakatiga to'g'ri kelgan issiqlik sig'imi aniqlansin.

*Yechish.*

$$C_v^{\text{tebr}} = \left( \frac{\partial E_{\text{tebr}}}{\partial T} \right)_v; \quad E_{\text{tebr}} = kT^2 \frac{\partial \ln Z_{\text{tebr}}}{\partial T};$$

$$Z_{\text{tebr}} = (z_{\text{tebr}})^N; \quad z_{\text{tebr}} = \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\text{tebr}}}{kT}\right) g(\varepsilon_{\text{tebr}}); \quad \varepsilon_{\text{tebr}} = h\nu \left(n + \frac{1}{2}\right);$$

$$z_{\text{tebr}} = \exp\left(-\frac{h\nu}{2kT}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{h\nu n}{kT}\right) = \frac{\exp\left(-\frac{T_c}{2T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)}.$$

Bu yerda  $T_c = \frac{h\nu}{k}$  - xarakteristik temperatura deyiladi.

$$E_{\text{tebr}} = \frac{NkT_c}{2} \frac{T_c}{2T}; \quad C_v^{\text{tebr}} = \frac{Nk}{4} \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \text{cosech}^2\left(\frac{T_c}{2T}\right).$$

25.  $N$  ta ikki atomli molekulalardan tashkil topgan kvant ideal gazning tebranma harakatiga to'g'ri kelgan erkin energiya va entropiya aniqlansin.

26. Past temperaturada ( $T \ll T_c$ )  $N$  ta ikki atomli zarralardan tashkil topgan kvant ideal gazining aylanma harakatiga to'g'ri keluvchi ichki energiya va issiqlik sig'imi aniqlansin.

$$27. T \ll T_c = \frac{h^2}{8\pi^2 kI} \text{ temperaturada orto- va paravodorod-}$$

ning muvozanat konsentratsiyalari nisbati qanday bo'ladi?  $I$  - vodorod molekulasining inersiya momenti.

28. Muvozanatli nurlanishning spektral energiya zichligining maksimumiga mos keluvchi to'lqin uzunligi  $\lambda_m$  va  $\nu_m$  biri-biriga mos kelmasligi, ya'ni  $\lambda_m \nu_m \neq c$  ekanligi ko'rsatilsin.

29.  $\lambda$ ,  $\lambda + d\lambda$  yoki  $\nu$ ,  $\nu + d\nu$  spektral oraliqda eng katta nisbiy nurlanish energiya zichligi to'g'ri keluvchi temperatura  $T_m$  aniqlansin.

30. Plank formulasidan foydalanib,  $V$  hajmdagi muvozanatli nurlanishning Gibbs termodinamik potentsiali aniqlansin.

31. Qattiq jismning elastik tebranishlarini Debay modelidagi Boze statistikasiga bo'ysunuvchi fononlar gazi deb, energiyasi va issiqlik sig'imini toping. Jism hajmi  $V$ , bo'ylama va ko'ndalang to'lqinlarning tarqalish tezliklari mos holda  $c_l$  va  $c_t$ . Kichik temperaturalar holi qarab chiqilsin.

32. Elektron gazining issiqlik sig'imi litiy kristall panjarasining issiqlik sig'imiga teng bo'lgandagi temperatura aniqlansin. Litiy uchun Debay temperaturasi  $T_D = 404$  K, undagi erkin elektronlar konsentratsiyasi  $n = 4,66 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

33. Atomlar tebranishini angarmonik deb hisoblab, qattiq jismning molar issiqlik sig'imi hisoblansin. Chiziqli angarmonik ossillatorning Gamilton funksiyasi quyidagi ko'rinishda olinsin:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \alpha q^2 - \beta q^4, \quad \beta \ll \frac{\alpha^2}{kT}.$$

Yechish.  $C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_v$ ,  $E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$ . Qattiq jismni o'zaro bog'-

lanmagan  $3N$  chiziqli angarmonik ossillatorlar to'plami deb qarash mumkin. Bu holda sistemaning holat integrali:

$$Z = \frac{z^N}{N!}, \quad z = \int \exp\left(-\frac{H(q, p)}{kT}\right) \frac{dq dp}{h^3} = \frac{1}{h^3} I_1 I_2.$$

Bu yerda

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) dp = \sqrt{2\pi mkT},$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha q^2 + \beta q^4}{kT}\right) dq = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha q^2}{kT}\right) \left(1 + \frac{\beta q^4}{kT} + \dots\right) dq = \\ = \sqrt{\frac{\pi kT}{\alpha}} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\beta kT}{\alpha^2} + \dots\right),$$

chunki  $\frac{q^2 \alpha}{kT} \leq 1$ , ammo shu sohada  $\frac{\beta q^4}{kT} \ll \frac{\alpha^2 q^4}{(kT)^2} \leq 1$ . Shuning uchun integral ostidagi ikkinchi eksponentani qatorga yoyildi. Demak, berilgan qattiq jismning holat integrali quyidagi ko'rishda yoziladi:

$$Z = \frac{1}{N! h^{3N}} \left(\frac{2m}{\alpha}\right)^{3N/2} \left[ \pi kT \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\beta}{\alpha^2} kT + \dots\right) \right].$$

Bir mol qattiq jism energiyasi

$$E = 3RT \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\beta}{\alpha^2} kT + \dots\right),$$

molar issiqlik sig'imi:

$$C_V = 3R \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\beta}{\alpha^2} kT + \dots\right).$$

**34.** Kuchlanganligi  $E$  bo'lgan tashqi o'zgarmas bir jinsli elektr maydonda yotgan  $p_0$  dipol momentli  $N$  ta molekuladan tashkil topgan ideal gazning qutblanishi  $P$  hisoblansin.

**35.** 34- masala shartidagi sistemaning dielektrik singdiruvchanligi aniqlansin.

**36.** Molekulalarning qutblanish koeffitsiyenti tashqi maydon kattaligiga bog'lanmagan deb, 35- masaladagi sistemaning dielektrik singdiruvchanlikligi aniqlansin.

**37.** Bir atomli ideal gaz ichki energiyasi. Holat funksiyasi.

**38.** Bir atomli ideal gaz erkin energiyasi.

39. Bir atomli ultrarelativistik gaz issiqliq sig'imi.
40. Maksvell taqsimotining Gibbs taqsimoti ko'rinishda yozilishi.
41. Boze-Eynshteyn va Fermi-Dirak taqsimotlari.
42. Aynish temperaturasi.
43.  $T = 0$  K da metallarda Fermi energiyasi. Elektron gaz ichki energiyasi.
44.  $T \neq 0$  temperaturada elektron-gaz issiqliq sig'imi.
45. Past temperaturada yoyilish zonasida effektiv elektron.
46. Past temperaturalarda metallardagi elektron gaz kimyoviy potensialining temperaturaga bog'liqligi.
47. Boze-gaz. Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi.
48. Reley-Jins qonuni.
49. Plank formulasi. Reley-Jins va Vin qonunlari bilan taqqoslang.
50. Stepan-Bolsman qonuni.
51. Foton gazi. Katta termodinamik potensial.
52. Nima uchun foton gazida kimyoviy potensial nolga teng bo'ladi?
53. Debay nazariyasi. Past temperaturali qattiq jismlarda issiqliq sig'imi.
54. Klassik ko'p atomli ideal gaz issiqlik sig'imi.
55. Nima uchun ikkita kvant holatli sistema issiqliq sig'imi past va yuqori temperaturalarda nolga teng bo'ladi.
56. Ko'p atomli tebranma va aylanma harakat holat tenglamalari.
57. Ideal magnetiklar uchun Lanjiven funksiyasi, grafigi.
58. Manfiy absolut temperatura va uni olish.

## VI bob

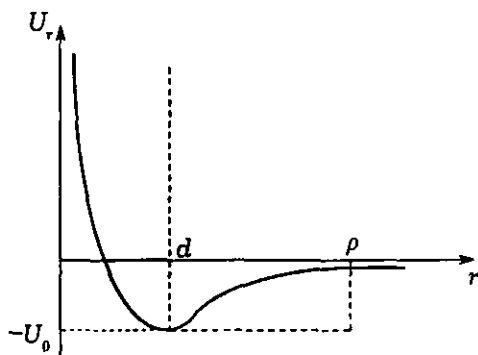
### NOIDEAL SISTEMALAR STATISTIK NAZARIYASI

#### 6.1. Noideal klassik bir atomli gaz. Holat funksiyasi

O'tgan boblarda ideal sistemalarning, xususan, ideal gazlar-ning tabiatini qarab chiqdik. Endi biz o'zaro ta'sirlashuvchi zarralar sistemasi, ya'ni real gazlar statistik nazariyasini qarashga o'taylik. Ideal gaz holat tenglamasini ko'p hollarda katta aniqlik bilan real gazlarga ham tatbiq qilish mumkin. Bu yaqinlashish yetarli bo'lmaganda molekulalar orasidagi o'zaro ta'sirlashish hisobiga *real gazning ideallikdan chetlashishini hisobga olishga to'g'ri keladi.*

Molekulalar orasidagi o'zaro ta'sirning xarakteri to'g'risida ideal gazlar mavzusida batafsil gapirgan edik. Agar molekulalar orasidagi masofa katta bo'lsa, o'zaro ta'sir kuchsiz bo'ladi va masofa ortishi bilan molekulalar orasidagi tortishish juda tez kamayib boradi. Agar molekulalar bir-biriga juda yaqin kelsa, ya'ni juda kichik masofalarda ularning elektron qobiqlari bir-biriga kirishishadi va natijada kuchli itarishish yuzaga keladi. Ana shunday ta'sirlashish tufayli molekulalarning bir-biriga kirishishida va to'qnashishlarida ularning deformatsiyalanishi sezilarli bo'lmaydi. Bundan tashqari gaz molekulari orasidagi uchtalab, to'rttalab o'zaro ta'sirlarni hisobga olmaslik uchun uni hali ham etarlicha siyrak deb olamiz, ya'ni faqat juft-juft ta'sirlarni hisobga olamiz.

Gaz molekulasi ko'p atomli bo'lsa, o'zaro ta'sir ular orasidagi masofadan tashqari ularning orientatsiyasiga ham bog'liq bo'ladi. Soddalik uchun, eng avval bir atomli noideal gazlarni qarab chiqamiz va ular orasidagi o'zaro ta'sir faqat atomlar orasidagi masofaga bog'liq deb qaraymiz. Olingan natijani ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan gazlarga tatbiq qilish mumkin bo'ladi.



6.1- rasm. Molekulalar orasidagi o'zaro ta'sir energiyasining masofaga bog'lanishi.

Molekulalar orasidagi o'zaro ta'sir potensial energiyasi 6.1- rasm- da keltirilgan. Gazlarda molekulalar orasidagi tortishish kuchi, odatda, juda kichik bo'ladi va molekulalar bir-biriga minimal masofa  $d$  gacha yaqinlashgan maksimumga erishadi. Lekin bu holatdagi potensial energiya  $U(d)$  hali ham molekulalarning issiqlik energiyasi  $kT$  dan ancha kichikdir. Potensial energiya molekulalar orasidagi masofa ortishi bilan juda tez nolga intilib, bir necha diametrga teng masofalarda deyarli nolga teng deyish mumkin. Shuning uchun keyinroq bajariladigan hisoblarni soddalashtirish maqsadida rasmda keltirilgan o'zaro ta'sir potensial energiyasini chuqurligi  $U_0 = U(d)$  bo'lgan o'ra bilan almashtiramiz. O'raning bir tomoni, ya'ni kichik masofalar tomoni cheksiz devordan iborat bo'lsin. Soddalashtirilgan potensial energiyani quyidagi ko'rinishda yozamiz (6.1- rasmda shtrix chiziq):

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r \geq \rho \\ -U_0, & d < r < \rho, \\ \infty, & r \leq d, \end{cases} \quad (6.1)$$

bu yerda  $\rho$  o'zaro ta'sir doirasining radiusi bo'lib, odatda molekula diametridan 3-4 marta katta bo'ladi.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Ba'zi kitoblarda potensial energiyaning masofaga bog'lanishida (6.1) dagi  $-U_0$  tez nolga intiluvchi  $u(r)$  funksiya bilan yoki potensial bir butun holda Lenard-Jons potentsiali bilan almashtiriladi. Qo'yilgan masala uchun o'zaro ta'sir potensial energiyasining oshkora ko'rinishining ahamiyati yo'q.



Agar gaz siyraklashtirilgan bo'lsa, molekulalar orasidagi o'rtacha masofa molekula o'lchamidan ancha katta bo'ladi. Ana shunday gaz holatini aniqlaylik. Ma'lumki, har qanday statistik sistema holatini aniqlash uchun holat funksiyasini bilish zarurdir. Holat funksiyasini hisoblash uchun molekulalar to'qnashishi yuqorida ta'kidlaganimizdek, juft-juft yuz beradi deb, boshqa uchtalab, to'rttalab va h.k. to'qnashishlarni hisobga olmaymiz. Bu holda gaz energiyasi molekulalarning kinetik va o'zaro ta'sir potensial energiyalaridan iborat bo'ladi:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{kin}} + U.$$

Natijada  $N$  ta molekuladan tashkil topgan siyrak gaz holat funksiyasi

$$Z = \frac{1}{N!h^{3N}} \left[ \int \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) d^3p \right]^N \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) dV_1 dV_2 \dots dV_N$$

yoki

$$Z = \frac{1}{N!} \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} I. \quad (6.2)$$

Bu yerda

$$I = \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) dV_1 dV_2 \dots dV_N \quad (6.3)$$

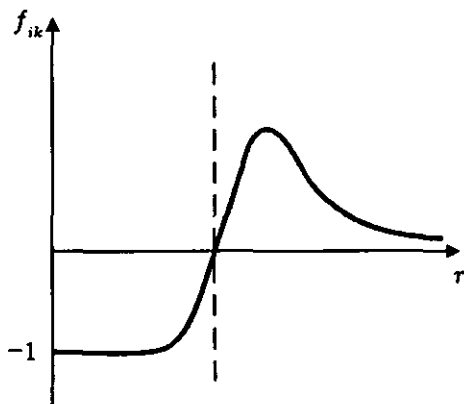
konfiguratsiya integrali deb yuritiladi.

Gazda juft-juft to'qnashishlar hisobga olinishi tufayli, o'zaro ta'sir energiyasi juft-juft to'qnashishlar energiyalarining yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$U = \sum u(r_{ik}), \quad (6.4)$$

bu yerda  $u(r_{ik})$  -  $i$ - va  $k$ - zarralarning o'zaro ta'sir energiyasi. Juft-juft to'qnashishlar soni  $N$  ta molekulaning ikkitadan tuzilgan kombinatsiyalari soniga teng bo'ladi, ya'ni  $N(N-1)/2! \simeq N^2/2$ . Bu yerda  $N \gg 1$  ekani hisobga olindi. Demak, (6.4)  $N^2/2$  ta hadlar yig'indisidan iborat bo'ladi. U holda

$$\exp\left(-\frac{U}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{\sum u(r_{ik})}{kT}\right) = \prod \exp\left(-\frac{u(r_{ik})}{kT}\right) = \prod (1 + f_{ik}), \quad (6.5)$$



6.2- rasm. Juft korrelyatsion funksiyani molekular orasidagi masofaga bog'lanishi.

bu yerda  $f_{ik} = \left[ \exp\left(-\frac{u(r_{ik})}{kT}\right) - 1 \right]$  juft korrelyatsion funksiya deb

yuritiladi. 6.1- rasmda keltirilgan potensial energiya asosida chizilgan  $f_k$  ning masofa  $r$  ga bog'lanishi 6.2- rasmda keltirilgan. Demak,  $r_{ik} > \rho$  da  $f_{ik} \rightarrow 0$ ,  $r_{ik} < \rho$  bo'lganda  $f_{ik} \neq 0$  bo'ladi.

Umuman olganda, (6.5) da ko'paytmaning hisobiga juft-juft ta'sirga mos keluvchi ( $f_{ik}$ ) hadlardan tashqari uchta ( $f_{12}f_{23}, \dots$ ), to'rtta ( $f_{12}f_{34}, f_{12}f_{23}f_{34}, \dots$ ) va h.k. ta'sirlarni hisobga oluvchi hadlar bor. Bunday hadlarni  $u_{ik}$  da juda kichik deb hisobga olmagan edik. Shu sababli, bu yerda ham bunday hadlarni hisobga olmaymiz. Gaz siyrak bo'lganligi uchun uchta va undan ortiq zarralarning bir vaqtning o'zida o'zaro ta'sir doirasida bo'lish ehtimolligi juda kichik bo'ladi. Shunday qilib (6.5) da faqat juft-juft ta'sirga mos keluvchi ( $f_{ik}$ ) hadlarni saqlab qolamiz, ya'ni

$$\exp\left(-\frac{U}{kT}\right) = 1 + \sum f_{ik}. \quad (6.6)$$

Yig'indidagi qo'shiluvchilar soni juftlar soni  $\frac{N^2}{2}$  ga teng bo'ladi. Gazdagi molekular bir-biridan farqlanmaganligi uchun  $f_{ik}$  lar ixtiyoriy juft uchun bir xil deb qarash mumkin, u holda, (6.6) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \leq 1 + \frac{N^2}{2} f_{ik}. \quad (6.7)$$

(6.7) ni (6.3) ga qo'yish natijasida quyidagi ifodani olamiz:

$$I = V^N \left( 1 + \frac{N^2}{2V^2} \int f_{ik} dV_i dV_k \right). \quad (6.8)$$

(6.8) dagi integralni hisoblash uchun koordinata boshi molekularlarning birida joylashgan sferik koordinatalar sistemasini kiritamiz, u holda

$$\begin{aligned} \int f_{ik} dV_i dV_k &= \int \left[ \exp\left(-\frac{u(r_{ik})}{kT}\right) - 1 \right] dV_i dV_k = \\ &= 4\pi \int dV \int \left[ \exp\left(-\frac{u(r)}{kT}\right) - 1 \right] r^2 dr = V\beta, \end{aligned} \quad (6.9)$$

bu yerda

$$\beta = 4\pi \int \left[ \exp\left(-\frac{u(r)}{kT}\right) - 1 \right] r^2 dr. \quad (6.10)$$

Natijada (6.8) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$I = V^N \left( 1 + \frac{N^2}{2V} \beta \right). \quad (6.11)$$

(6.11) ni (6.2) ga qo'yish natijasida bir atomli real gaz holat funksiyasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$Z = Z_{id} \left( 1 + \frac{N^2}{2V} \beta \right), \quad (6.12)$$

bu yerda

$$Z_{id} = \frac{1}{N!} \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} V^N$$

bir atomli kvant ideal gaz holat funksiyasi. (6.12) dagi ikkinchi had gazning ideallikdan chetlashishini aniqlaydi. Gaz siyrak bo'lganligi uchun qo'shimcha had  $N^2\beta/2V \ll 1$  shartni qanoatlantiradi.

## 6.2. Noideal gaz holat tenglamasi

Yuqoridagi mavzuda noideal gazlarning ideal gazlardan chetlashish darajasini aniqladik. Bu chetlashish (6.12) ifodadagi ikkinchi had bilan bog'langan. Noideal gazlarning holat tenglamasini yozish uchun gaz bosimini topaylik:

$$\begin{aligned}
 p &= kT \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T = kT \frac{\partial \ln Z_{id}}{\partial V} + kT \frac{\partial \ln \left( 1 + \frac{N^2 \beta}{2V} \right)}{\partial V} \\
 &= p_{id} + kT \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{N^2 \beta}{2V} \right) = \frac{NkT}{V} - \frac{N^2 kT \beta}{2V^2}. \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

(6.13) ifoda bir atomli molekullardan tashkil topgan siyrak noideal gazning holat tenglamasi hisoblanadi. Bu yerda asosiy masala parametr  $\beta$  ni hisoblashdan iborat. Buning uchun  $N$  ta bir atomli molekullardan tashkil topgan noideal gaz – Van-der-Vaals gazini ko‘rib chiqamiz. Van-der-Vaals gazining holat tenglamasi

$$\left( p + \frac{aN^2}{V^2} \right) (V - Nb) = NkT$$

yoki

$$p = \frac{NkT}{V} + \frac{N^2 kT b}{V^2} - \frac{aN^2}{V^2}. \quad (6.14)$$

(6.13) va (6.14) ifodalarni taqqoslab,  $\beta$  va  $a$ ,  $b$  lar orasidagi bog‘lanishni yozamiz:

$$\frac{\beta}{2} = \frac{a}{kT} - b, \quad (6.15)$$

bu yerda « $a$ » va « $b$ » molekullarning o‘zaro ta‘sirini va xususiy hajmini hisobga oluvchi parametrlardir. Parametr  $\beta$  ning ushbu kattaliklar bilan bog‘lanishini (6.10) asosida aniqlaymiz:

$$\beta = 4\pi \int_0^d \left[ \exp\left(-\frac{u(r)}{kT}\right) - 1 \right] r^2 dr + 4\pi \int_d^\infty \left[ \exp\left(-\frac{u(r)}{kT}\right) - 1 \right] r^2 dr. \quad (6.16)$$

Bu ifodaga molekullarning o‘zaro ta‘sir qonunini ko‘rsatuvchi (6.1) ni qo‘llash natijasida quyidagi ifodani olamiz:

$$\beta = -\frac{4\pi d^3}{3} + \frac{4\pi}{kT} \int_d^\infty |u(r)| r^2 dr. \quad (6.17)$$

(6.17) va (6.15) ifodalardan parametrlar  $a$  va  $b$  larni topamiz:

$$b = \frac{2\pi d^3}{3} = 4v_0,$$

bu yerda  $v_0 = \frac{4\pi}{3} r_0^3$  bitta molekulaning egallagan xususiy hajmi.

$$a = 2\pi \int_d^{\infty} |u(r)| r^2 dr$$

ikkita zarraning o'zaro ta'sir potensial energiyasini hisobga oluvchi parametr. Natijada

$$\beta = \frac{2a}{kT} - 8v_0. \quad (6.18)$$

(6.18) dan ko'rinadiki, temperaturaga qarab,  $\beta$  musbat va manfiy bo'lishi mumkin ekan. Past temperaturalarda ( $kT < a/4v_0$ )  $\beta > 0$  yuqori temperaturalarda ( $kT < a/4v_0$ ),  $\beta < 0$  bo'ladi.

Agar  $a$  va  $b$  uchun olingan qiymatlarni Van-der-Vaals tenglamasi (6.14) ga qo'ysak, Van-der-Vaals gaz holat tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$p = \frac{NkT}{V} \left( 1 + \frac{4v_0N}{V} - \frac{2\pi N}{VkT} \int_d^{\infty} |u(r)| r^2 dr \right). \quad (6.19)$$

(6.19) ko'rinishdagi bosimga topilgan birinchi (musbat) va ikkinchi (manfiy) tuzatmalar aniq fizik ma'noga ega. Bu ikki tuzatma noideal gazlarni ideal gazlardan chetlashish darajasini ko'rsatadi. Birinchi tuzatma real gaz molekulalarining xususiy hajmini hisobga oladi. Ikkinchi tuzatma esa birlik hajmda mavjud bo'lgan hamma juft molekulalar o'zaro ta'sir energiyasining o'rtacha qiymatini hisobga oladi. Demak, ikkinchi tuzatma real gaz molekulalarining o'zaro bir-biriga tortishi tufayli, gaz molekulalarining idish devoriga bergan bosimining kamayishini ko'rsatadi. Shuning uchun ham real gazlarning bosimi har doim ideal gazlar bosimidan kichik bo'ladi.

Van-der-Vaals tenglamasi nafaqat siyraklashtirilgan real gazlarning tabiatini emas, balki zichligi katta bo'lgan gazlarning va suyuqliklarning ham tabiatini xarakterlaydi. Ammo Van-der-Vaals tenglamasining (6.14) ko'rinishi katta zichlikdagi real gaz

holatini aniqlay olmaydi. Shuning uchun Van-der-Vaals tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$p = \frac{NkT}{V \left(1 - \frac{Nb}{V}\right)} - \frac{aN^2}{V^2}. \quad (6.20)$$

(6.20) quyidagi talablarga javob beradi:

- 1)  $V \rightarrow Nb$  da  $p$  chegaralanmagan holda ortadi;
- 2)  $V \gg Nb$  da (6.20) nazariy formula (6.14) ga o'tadi.

Tenglama (6.20) zichlikning keng intervalida gazlar holatini ifodalovchi Van-der-Vaals to'la tenglamasi bo'lib hisoblanadi. Katta zichlikdagi gazlarda  $a$  va  $b$  kattaliklar aniq emas, ular faqat gaz hajmi va o'zaro ta'sirni xarakterlovchi kattaliklar bo'lib qolaveradi, ammo endi ular o'zgarimas bo'lmasdan temperaturaning funksiyasi bo'ladi. Bu noqulaylikdan qutulish uchun holatning boshqa emperik tenglamalari taklif qilingan. Shunga qaramasdan Van-der-Vaals tenglamasining ustunligi shundaki, u gazlar tabiatini sifat jihatdan juda to'g'ri bera oladi va gazlarning suyuqlik holatiga o'tishini va kritik hodisani to'g'ri aks ettiradi.

Agarda siyrak real gazlarda uchtalab, to'rttalab va h.k. to'q-nashishlar hisobga olinsa, u holda holat tenglamasi

$$p = \frac{NkT}{V} \left(1 + \frac{B(T)}{V} + \frac{C(T)}{V^2} + \dots\right) \quad (6.21)$$

ko'rinishni oladi.

Agar bir atomli molekulalardan tashkil topgan siyrak real gaz holatini aniqlash kerak bo'lsa, u holda (6.12) ga asoslanib, termodinamik kattaliklar hisoblanadi. Bunday gazning ichki energiyasi

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{3}{2} NkT - \frac{aN^2}{V} = E_{id} + E_{int}.$$

Bu yerda  $E_{int} = -aN^2/V$  molekularning o'zaro ta'sir energiyasi. Demak,  $E < E_{id}$  bo'lar ekan.

### 6.3. Bir atomli noideal gaz termodinamik kattaliklarini hisoblash

Oldingi mavzuda olingan natijalarni Van-der-Vaals tenglamasiga bo'ysunuvchi bir atomli siyrak gaz holatini aniqlovchi termodinamik kattaliklarni hisoblashga tatbiq qilamiz.

Gazda zarralarning juft-juft to'qnashishi o'zaro ta'sir potensial energiyasi (6.1) ko'rinishga ega bo'lsin. Bu yerda hisoblash ishlari sodda va aniq bo'lishi uchun  $u(r) = U_0$  deb olamiz. U vaqtda gaz holatini xarakterlovchi statistik integral, ya'ni holat funksiyasi  $Z$  va parametr  $\beta$ , mos ravishda, (6.12) va (6.16) ifodalar bilan aniqlanadi. (6.16) dagi integrallarni hisoblab, (6.18) ga kiruvchi kattaliklar bitta zarra uchun  $b = 4v_0$ ,  $a = 4U_0v_0$  ga teng ekanligini topamiz. Bularni hisobga olsak,  $\beta$  quydagiga teng bo'ladi:

$$\beta = \frac{8U_0v}{kT} - 8v_0. \quad (6.22)$$

Ushbu ifodani (6.12) ga qo'ysak holat funksiya

$$Z = Z_{\text{id}} \left[ 1 + 4v_0 n N \left( \frac{U_0}{kT} - 1 \right) \right] \quad (6.23)$$

ko'rinishni oladi. Bunday real gaz ichki energiyasi:

$$E = E_{\text{id}} - \frac{nbU}{1 + nb \left( \frac{U}{kT} - 1 \right)}. \quad (6.24)$$

Bu yerda  $n = N/V$  - gaz zichligi,  $U = U_0N$ ,  $U_0$  - bitta zarra uchun o'rtacha ta'sir energiyasi,  $b = 4v_0N$  ifoda  $N$  ta zarraning xususiy hajmi. (6.24) ifodadan shu narsa ko'rinadiki, real gaz ichki energiyasi, molekulalar orasidagi tortishish kuchini ustunligi tufayli, ideal gaz ichki energiyasidan kichik bo'ladi. Chunki tortishish kuchining ustunligi tufayli (6.24) ifodadagi ikkinchi had xar doim manfiylikicha qoladi.

Van-der-Vaals gaziga bo'ysunuvchi real gaz erkin energiyasi (6.23) ni hisobga olib, quyidagicha yozamiz:

$$\begin{aligned} F &= -kT \ln Z_{\text{id}} - kT \ln \left[ 1 + 4v_0 n N \left( \frac{U}{kT} - 1 \right) \right] = \\ &= F_{\text{id}} - kT \ln \left[ 1 + nb \left( \frac{U}{kT} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Agar

$$nb\left(\frac{U}{kT} - 1\right) \ll 1 \quad (6.26)$$

shart bajarilsa,

$$F = F_{id} + nb(kT - U). \quad (6.27)$$

(6.25) ifodaga ko'ra, agar  $kT > U$  bo'lsa,  $F > F_{id}$  va agar  $kT < U$  bo'lsa,  $F < F_{id}$  bo'ladi. Ushbu natija molekular orasidagi o'zaro tortishish kuchi bilan bog'langan. Agar  $U = kT$  bo'lsa, bunday real gaz erkin energiyasi ideal gaz energiyasiga teng bo'lib qoladi. Quyida bir qator termodinamik kattaliklar uchun ifodalarni keltiramiz:

Gibbs termodinamik potentsiali

$$\Phi = F + pV = F_{id} + nb(kT - U) + pV. \quad (6.28)$$

Gaz bosimi

$$p = \frac{NkT}{V} \left[ 1 + \frac{b}{V} \left( 1 - \frac{U}{kT} \right) \right] \simeq p_{id} + \frac{nb}{V} (kT - U). \quad (6.29)$$

(6.29) ga asosan (6.28) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\Phi = \Phi_{id} + 2nb(kT - U). \quad (6.30)$$

Bu ifodaga ko'ra  $U$  issiqlik energiyasi  $kT$  dan katta bo'lsa, real gaz Gibbs potentsiali ideal gaz Gibbs potentsialidan kichik bo'ladi va aksincha. Agar  $U = kT$  bo'lsa, ular teng bo'lib qoladi.

Real gaz entropiyasi uchun ifodani yozamiz:

$$S = S_{id} + k \ln \left[ 1 + nb \left( \frac{U}{kT} - 1 \right) \right] - \frac{1}{T} \frac{nbU}{1 + nb \left( \frac{U}{kT} - 1 \right)}. \quad (6.31)$$

Agar (6.26) o'rinli bo'lsa, entropiya uchun ifoda sodda ko'rinishga o'tadi:

$$S = S_{id} - \frac{nbU}{T}. \quad (6.32)$$

Bu ifodalardan shunday xulosaga kelamizki, real gaz entropiyasi ideal gaz entropiyasidan kichik bo'lar ekan. Juda yuqori temperaturalarda real gaz entropiyasi ideal gaz entropiyasiga yaqinlashar ekan.



Real gaz issiqlik sig'imi:

$$C_v = C_v^{\text{id}} - k \left( \frac{nbU}{kT} \right)^2 \frac{1}{\left[ 1 + nb \left( \frac{U}{kT} - 1 \right) \right]}, \quad (6.33)$$

yoki (6.26) o'rinli bo'lsa, issiqlik sig'imi quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$C_v = C_v^{\text{id}} - k \left( \frac{nbU}{kT} \right)^2. \quad (6.34)$$

Ushbu ifodalardan shu ko'rinadiki, real gaz issiqlik sig'imi temperaturaga bog'liq bo'ladi va  $C_v < C_v^{\text{id}}$  bo'ladi.  $C_p$  esa temperatura va gaz hajmining funksiyasi bo'ladi.

#### **6.4. Juft korrelyatsion funksiyalar metodi. Bogolyubovning zanjir tenglamasi**

Klassik statistik fizikaning asosiy masalasi o'zaro ta'sirlashuvchi ta zarradan (molekula, atom va boshqalar) tashkil topgan sistemaning statistik yig'indisini topishdir. Yuqorida bu masalani o'ta siyrak gazlar uchun hal qilishga harakat qildik, ya'ni konfiguratsiya integrali (6.3) ni o'ta siyraklashtirilgan gazlar uchun hisoblashni ko'rdik. Bu masala siyrak gazlar uchun ancha murakkab masala ekanligi ravshan bo'ldi. Bu holda ham masalani echish uchun bir qator soddalashtirishlarni amalga oshirdik. Ammo katta zichlikdagi gazlar va suyuqliklar uchun konfiguratsiya integralini hisoblash masalasi etarli darajada murakkabdir. Bunday sistemalarning statistik xususiyatlarini o'rganishda turli xil metodlar taklif qilingan. Masalan statistik yig'indini virial qatorga yoyish. Bu formal qator bo'lib, uning yordamida o'z vaqtida uchlamchi nuqta va kritik hodisalarni o'rganish mumkin hisoblangan edi. Bunday umidlar amalga oshmadi, chunki virial qatorning bir necha hadi orqali termodinamik kattaliklarning o'tish nuqtasida uzluksizligini buzilishini aniqlab bo'lmaydi. Qo'yilgan masalani echish uchun Mayer guruhlar bo'yicha qatorga yoyish metodi mavjud, lekin bu metod ham katta zichliklarda kutilgan natijani bermaydi.

Bu metodlardan eng qulayi va samaralisi N.N.Bogolyubov tomonidan berilgan korrelyatsion funksiyalar metodi bo'lib hisoblanadi. Korrelyativ funksiyalar metodida konfiguratsiya

integralini hisoblash masalasini zarralarning fazoviy joylashishlarida ularning o'zaro korrelyatsiyasini karakterlovchi funksiyalar sistemasini o'zaro bog'lovchi integro-differensial tenglamalar zanjirini olish bilan almashtiriladi.

Korrelyativ funksiyalar metodi to'g'ridan-to'g'ri Gibbs statistikasining natijasi bo'lib hisoblanadi. Korrelyativ funksiyalar metodini qarashda o'zaro ta'sirdagi zarralarni fazoviy taqsimoti asosiy rol o'ynaydi.

Gibbs taqsimotini hamma impulslar bo'yicha integralash natijasida zarralar sistemasining berilgan konfiguratsiya ehtimolligi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$dW_r = \frac{1}{I} \exp\left(-\frac{U(r_1, r_2, \dots, r_N)}{kT}\right) dr_1 dr_2 \dots dr_N, \quad (6.35)$$

bu yerda konfiguratsiya integrali

$$I = \int \exp\left(-\frac{U(r_1, r_2, \dots, r_N)}{kT}\right) dr_1 dr_2 \dots dr_N \quad (6.36)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Agarda  $dW_r$  ni bitta zarradan boshqa qolgan hamma zarralar koordinatalari bo'yicha integrallasak, u holda (6.35) quyidagicha yoziladi:

$$dW_r^{(1)} = \frac{1}{I} dr_1 \int \exp\left(-\frac{U(r_1, r_2, \dots, r_N)}{kT}\right) dr_2 dr_3 \dots dr_N. \quad (6.37)$$

Bu yerda  $dW_r^{(1)}$  - sistemadagi  $N - 1$  ta zarralarning fazoda joylashishi qanday bo'lishidan qat'iy nazar «1» zarrani  $dr_1$  hajm elementida bo'lish ehtimolligini beradi. Bu ehtimollikni quyidagicha yozish mumkin:

$$dW_r^{(1)} = \frac{\rho_1(r_1) dr_1}{V}. \quad (6.38)$$

$\rho_1(r_1)$  - sistema hajmiga normalashtirilgan kattalik bo'lib,  $dr_1$  hajm elementida bitta zarrani topish ehtimolligi zichligini beradi va «ordinar» funksiya deb ataladi:

$$\frac{\rho_1(r_1)}{V} = \frac{1}{I} \int \exp\left(-\frac{U(r_1, r_2, \dots, r_N)}{kT}\right) dr_2 dr_3 \dots dr_N. \quad (6.39)$$

Yuqoridagi fikrni ikkita zarra uchun tatbiq qilamiz. (6.35) ifodani «1» va «2» zarralardan boshqa qolgan zarralar koordinatalari bo'yicha integrallash natijasida, «1» zarrani  $dr_1$  va «2» zarrani  $dr_2$  hajm elementida topish ehtimolligini olamiz:

$$dW_r^{(1,2)} = \frac{\rho_2(r_1, r_2)}{V^2} dr_1 dr_2.$$

Bu yerda

$$\frac{\rho_2(r_1, r_2)}{V^2} = \frac{1}{I} \int \exp\left(-\frac{U(r_1, r_2, \dots, r_N)}{kT}\right) dr_3 dr_4 \dots dr_N, \quad (6.40)$$

$\rho_2(r_1, r_2)$  binar yoki juft korrelatsion funksiya deb ataladi. Xuddi shunga o'xshash istalgan tartibdagi taqsimot funksiyalarni topish mumkin. Masalan,  $m$ - tartibdagi taqsimot funksiya «1» zarrani  $dr_1$  hajm elementida, «2» zarrani  $dr_2$  hajm elementida va h.k. zarrani  $dr_m$  hajm elementida bo'lish ehtimoligini beradi:

$$\frac{\rho_m(r_1, r_2, \dots, r_m)}{V^m} = \frac{1}{I} \int \exp\left(-\frac{U(r_1, r_2, \dots, r_N)}{kT}\right) dr_{m+1} \dots dr_N. \quad (6.41)$$

Agar bizni sistemaga kirgan hamma zarralarning tutgan o'rniga emas, balki ba'zi bir zarralar tutgan o'rnini bilan bog'liq bo'lgan sistema holati qiziqtirsa, u holda taqsimot funksiyasi (6.41) Gibbs taqsimoti rolini o'ynaydi. Chunki (6.41) yordamida bizni qiziqtirgan sistema holatini xarakterlovchi kattaliklarning o'rtacha qiymatini hisoblash mumkin:

$$\bar{L}(r_1, r_2, \dots, r_m) = \int \frac{\rho_m(r_1, \dots, r_m)}{V^m} L(r_1, r_2, \dots, r_N) dr_1 dr_2 \dots dr_m.$$

Bu yerdagi qiyinchilik shundaki, taqsimot funksiyalari  $\rho_1(r_1)$ ,  $\rho_2(r_1, r_2)$ , ...,  $\rho_m(r_1, \dots, r_m)$  konfiguratsiya integrali  $I$  ni hisoblash bilan bog'langan. Shuning uchun, taqsimot funksiyasini konfiguratsiya integraliga bog'liq bo'lmagan usul bo'yicha hisoblash qo'llaniladi.  $\rho_m$  taqsimot funksiyasini qanoatlantiruvchi differensial tenglamani tuzish mumkin ekan.

Birlamchi yoki ordinar funksiya qanoatlantiruvchi differensial tenglamani topish uchun (6.39) ifodani  $r_1$  koordinata bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{\partial \rho_1(\mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{V}{IkT} \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1} d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N. \quad (6.42)$$

Bu yerda

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} u(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \sum_{j=2}^N u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|), \quad (6.43)$$

chunki  $i$  bo'yicha olingan yig'indidagi «1» zarraga bog'liq bo'lmagan hamma hadlar  $\mathbf{r}_1$  ga bog'liq bo'lmaydi va differensiallashda nolga aylanadi. (6.43) ni (6.42) ga qo'yish natijasida:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1(\mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{r}_1} &= -\frac{V}{IkT} \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \left( \sum_{j=2}^N u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|) \right) d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N = \\ &= -\frac{V}{kT} \sum_{j=2}^N \int \frac{\partial u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|)}{\partial \mathbf{r}_1} d\mathbf{r}_j \frac{1}{I} \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_{j-1} d\mathbf{r}_{j+1} \dots d\mathbf{r}_N = \\ &= -\frac{V}{kT} \sum_{j=2}^N \int \frac{\partial u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|)}{\partial \mathbf{r}_1} d\mathbf{r}_j \frac{\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_j)}{V^2} = -\frac{N-1}{VkT} \int \frac{\partial u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|)}{\partial \mathbf{r}_1} \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_j) d\mathbf{r}_j. \end{aligned}$$

Agar  $N \gg 1$  ekanligini hisobga olsak, u holda

$$\frac{\partial \rho_1(\mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{N}{VkT} \int \frac{\partial u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|)}{\partial \mathbf{r}_1} \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_j) d\mathbf{r}_j \quad (6.44)$$

(6.44) ifoda ordinar funksiya  $\rho_1$  ni binar funksiya  $\rho_2$  bilan bog'laydi.  $\rho_1$  ni hisoblash uchun  $\rho_2$  ni topish kerak. Buning uchun binar funksiya  $\rho_2$  ni qanoatlantiruvchi differensial tenglamani tuzish kerak. Bu tenglamani olish uchun (6.40) ifodani  $\mathbf{r}_1$  bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{\partial \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{V^2}{IkT} \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \left( \sum_{j=2}^N u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|) \right) d\mathbf{r}_3 \dots d\mathbf{r}_N.$$

Natijada binar funksiya  $\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  uchun quyidagi integro-differensial tenglamani olamiz:

$$\frac{\partial \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} = \frac{\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{kT} \frac{\partial u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial \mathbf{r}_1} - \frac{N}{VkT} \int \frac{\partial u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|)}{\partial \mathbf{r}_1} \rho_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_j) d\mathbf{r}_j. \quad (6.45)$$

(6.45) ifoda binar taqsimot funksiyasi  $\rho_2$  ni uchlamli taqsimot funksiyasi  $\rho_3$  bilan bog'laydi. Xuddi shu usul asosida davom ettirish tufayli uchlamli taqsimot funksiyani to'rtlamchi taqsimot funksiya bilan va h.k.  $m$ - taqsimot funksiyasini  $m+1$ - taqsimot funksiyasi bilan va h.k.  $N - 1$ - taqsimot funksiyani  $N$ - taqsimot funksiyasi, ya'ni Gibbs taqsimot funksiyasi bilan bog'lanishini beruvchi integro-differensial tenglamalar sistemasini olish mumkin:

$$\frac{\partial \rho_m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m)}{\partial \mathbf{r}_1} = \frac{\rho_m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m)}{kT} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} [\sum u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_m|)] - \frac{N}{VkT} \int \sum_{j=m+1}^N \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}_1} \rho_{m+1}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{m+1}) d\mathbf{r}_{m+1}. \quad (6.46)$$

Olingan tenglamalar sistemasi (6.44)–(6.46) ga Bogolyubovning korrelatsion funksiyalar zanjir tenglamasi deb yuritiladi. Bu tenglamalar sistemasiga asosan, past tartibli taqsimot funksiyani topish masalasi butun sistemani, ya'ni  $N$  ta zarradan tashkil topgan sistemani xarakterlovchi Gibbs taqsimot funksiyasi bilan bog'langan ekan. Ammo olingan integro-differensial tenglamalar sistemasining muhim tomoni shundaki, integral ostidagi yuqori tartibli taqsimot funksiyasi har doim  $\sim \frac{N}{VkT} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}_1}$  ga proporsional koeffitsiyent bilan kiradi. Bu holda qaysiki ikkita zarra orasidagi o'zaro ta'sir potensial energiyasi  $u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|)$  masofaga qarab tezlik bilan kamaysa va molekula o'lchamlaridan katta masofalarda nisbatan kichik bo'lib qolsa,  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}_1}$  kattalik

$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j| \gg d$  da juda kichik bo'ladi ( $d$  – molekula diametri) bu esa integro-differensial tenglamalardagi integral ostidagi ifodalarni baholash mumkinligini ko'rsatadi. Masalan, (6.45) ifodadagi integralni quyidagicha baholash mumkin:

$$\frac{N}{V} \int \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}_1} \rho_3 d\mathbf{r}_j \equiv d^3 \frac{N}{V} \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}_1} \rho_3 \right)_d = \frac{d^3}{v} \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}_1} \rho_3 \right)_{,d}.$$

Agar bitta zarraga to'g'ri kelgan hajm  $v$ , zarra hajmi  $d^3$  ga nisbatan katta bo'lsa, u holda  $d^3/v$  koeffitsiyent kichik bo'ladi. Shunga ko'ra, integral ostidagi ifoda uchun taqribiy ifodadan foydalansa bo'ladi. Natijada  $N$  ta zarradan tashkil topgan sistema holatini xarakterlovchi taqsimot funksiyasi  $\rho_1(\mathbf{r}_1)$  ning oshkora ko'rinishini olish mumkin bo'ladi.

Zanjir tenglamasini uzish masalasi hozirga qadar to'liq yechilmagan. Bunga asosiy sabab zanjirni  $n$ - tenglamada uzish uchun  $(n + 1)$ - taqsimot funksiyasini bilish kerak, bu mumkin emas. Masalani yechish uchun zanjir tenglamani biror bo'g'inda uzish kerak, ya'ni  $(n + 1)$ - taqsimot funksiyani undan past tartibdagi taqsimot funksiyalari orqali taqriban yozish kerak. Bunday usullar ko'plab taklif qilingan.

Zanjirni uzishning chiroyli metodini Kirkvud taklif qilgan. Masalan,  $\mathbf{r}_3$  nuqta  $\mathbf{r}_1$  va  $\mathbf{r}_2$  nuqtalardan yetarlicha uzoqda bo'lsa, birinchi va ikkinchi zarralar uchinchi zarra bilan deyarli ta'sirlashmaydi, ya'ni

$$\rho_3 \rightarrow \rho_2 \rho_1.$$

Bunday fikrga tayanib, uchlamchi taqsimot funksiyasini quyidagicha yozishni taklif qiladi:

$$\rho_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \frac{\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \rho_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)}{\rho_1^3}. \quad (6.47)$$

Taqsimot funksiyasini bunday yozish Kirkvud yoki superpozitsiya yaqinlashishi deb ataladi. (6.47) ni (6.45) ga qo'yib binar taqsimot funksiyasini topish mumkin.

Eng muhimi shundaki, turli yaqinlashishlar beradigan natija qanchalik haqiqatga yaqinligini baholab bo'lmaydi. Shunga qaramasdan zanjir tenglamalar sistemasi ko'p hollarda yaxshi natijalarga olib keladi. Zanjir tenglamasi kvantlangan maydonlar nazariyasida ham o'z aksini topgan.

## 6.5. Katta zichlikdagi sistema holat tenglamasi va energiyasi

Katta zichlikdagi gazlarning xossalari o'rganishda korrelatsion funksiyalar metodidan foydalanamiz. Ayniqsa bunday sistemalarning holat tenglamasini olishda ikkinchi tartibli binar taqsimot funksiyasi  $\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  muhim ahamiyatga ega. Binar funksiya sistema bosimi

$$p = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = kT \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial V} = kT \frac{1}{Z_{id} I} \frac{\partial (Z_{id} I)}{\partial V} = \frac{kT}{I} \frac{\partial I}{\partial V} \quad (6.48)$$

va boshqa kattaliklar bilan bog'langanligini ko'rsatamiz. Konfiguratsiya integrali  $I$  (6.36) ifoda bilan aniqlanib, hajmga oshkor-mas holda bog'langan, shuning uchun undan hajm bo'yicha hosila olishda sistema chiziqli o'lchamlarini  $\lambda$  marta o'zgartiramiz, ya'ni  $\mathbf{r} \rightarrow \lambda \mathbf{r}$  va  $V^* \rightarrow \lambda^3 V$ . Oxirgi natijalarda  $\lambda \rightarrow 1$  intiltiramiz. Bu holda konfiguratsiya integrali

$$I = \lambda^{3N} \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N, \quad (6.49)$$

$$\frac{\partial I}{\partial V^*} = \frac{\partial I}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial V^*} = \frac{\partial I}{\partial \lambda} \frac{1}{3\lambda^3 V},$$

demak,

$$\left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_{\lambda=1} = \frac{1}{3V} \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1}.$$

(6.49) ifodadan  $\lambda$  bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{3NI}{\lambda} - \frac{\lambda^{3N}}{kT} \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \frac{\partial U}{\partial \lambda} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N. \quad (6.50)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum \sum u(\lambda |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = \sum \sum |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| u'$$

ekanligini hisobga olsak, u holda  $\lambda = 1$  da (6.50):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1} &= 3NI - \frac{1}{kT} \sum \int |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| u' \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \equiv \\ &\equiv 3NI - \frac{N^2}{2kT} \int |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| u' d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) d\mathbf{r}_3 \dots d\mathbf{r}_N \end{aligned}$$

yoki

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1} \cong 3NI - \frac{N^2}{2kTV^2} \int |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| u' \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

bo'ladi. Natijada sistema holat tenglamasi (6.48) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$p = \frac{NkT}{V} - \frac{N^2}{6V^3} \int |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| u' \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (6.51)$$

(6.51) formula sistema holat funksiyasini binar taqsimot funksiya bilan bog'laydi. Binar taqsimot funksiyasi  $\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  sistemada ajratib olingan ixtiyoriy ikkita zarraning o'zaro joylashish ehtimolligini xarakterlaydi. Izotrop fazalarda (gazlar va suyuqliklar) (6.51) tenglama yanada soddalashadi. Chunki izotrop fazalarda binar funksiya yo'nalishga bog'liq bo'lmasdan, faqat zarralar orasidagi masofaga bog'liq bo'ladi, ya'ni

$$\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \rho(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

Shuning uchun

$$p = \frac{NkT}{V} - \frac{N^2}{6V^3} \int \rho(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) u'(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2.$$

Yangi o'zgaruvchi kiritamiz:  $\mathbf{r} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  va  $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ , u holda

$$\int \rho(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) u'(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = 4\pi V \int_0^{\infty} \rho(r) u'(r) r^3 dr.$$

Natijada izotrop sistema holat tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$p = \frac{NkT}{V} - \frac{2\pi N^2}{3V^2} \int_0^{\infty} \rho(r) u'(r) r^3 dr. \quad (6.52)$$

Shunga o'xshash katta zichlikdagi sistema energiyasi uchun ifodani topish mumkin:



$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = kT^2 \frac{1}{Z_{id}} \frac{\partial Z_{id}}{\partial T} + \frac{kT^2}{I} \frac{\partial I}{\partial T} = \frac{3}{2} NkT + \frac{kT^2}{I} \frac{\partial I}{\partial T},$$

$$\frac{\partial I}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) dr_1 \dots dr_N \right) = \frac{N^2 I}{2V^2 kT^2} \int u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2.$$

O'rniga qo'yish natijasida sistema energiyasi

$$E = \frac{3}{2} NkT + \frac{2\pi N^2}{V} \int_0^\infty \rho(r) u(r) r^2 dr. \quad (6.53)$$

Shunday qilib, sistema energiyasi xuddi bosimi kabi binar taqsimot funksiyasi  $\rho(r)$  yordamida ifodalanadi. Binar taqsimot funksiyasi zichligini uncha katta bo'lmagan gazlar holi uchun (6.45) tenglama asosida ketma-ket yaqinlashish usuli asosida hisoblash mumkin.

## 6.6. Plazma. Plazma holat tenglamasi

Plazma – moddalarning to'rtinchi agregat holi bo'lib, unda gaz atomlarining asosiy qismi yuqori darajada ionlashgan bo'ladi. Modda plazma holatda yulduzlarda, yer ionasferasida, gazli razryadda, katta temperaturagacha qizdirilgan gazlarda, portlashdagi yong'inda, elektrolitda va h.k. uchraydi.

Plazma oddiy gazlardan tamoman farq qiladi. Ba'zi hodisalarda o'z xususiyati bilan elektrolit va qattiq o'tkazgichlarga (metallar, yarimo'tkazgichlar) o'xshab ketadi.

Plazma to'g'risidagi asosiy bilim gazdagi razryadlarni tekshirish natijasida olingan. Hozirgi vaqtda plazmaning xususiyatlarini o'rganishga qiziqish kattadir. Chunki plazma – yengil yadrolarni sintez qilish natijasida olinadigan termoyadro reaksiyasidan energetik maqsadlarda foydalanish masalasi bilan bog'langandir. Plazma molekular ion va elektronlardan (yoki teshik va elektronlardan) tashkil topgan bo'lib, neytral holatda bo'ladi. Termodinamik muvozanat holatidagi plazma amaliy holda to'la ionizatsiyalangan bo'lib, yuqori temperaturalarda kuzatiladi. Biz ana shu termodinamik muvozanat holatidagi plazmani qarab chiqaylik.

Plazma o'zaro ta'sir potentsiali Kulon qonuniga bo'ysunadi:  $U_m \sim 1/r$ , Van-der-Vaals gazi uchun esa o'zaro ta'sir potentsiali  $\sim 1/r^6$ , o'zaro ta'sir kuchi esa  $\sim 1/r^7$  bo'ladi. Plazmada har bir

zarra bir vaqtning o'zida qo'shni zarralar kollektivi bilan o'zaro ta'sirlashadi. Shuning uchun ham plazma asosan gaz emas, balki uzoqdan ta'sir etuvchi kuchlar bilan bog'langan sistema bo'lib hisoblanadi. Uzoqdan ta'sir etuvchi Kulon kuchlari va plazmadagi yengil elektronlarning katta harakatchanligi tufayli, plazmada kollektiv jarayonlar katta rol o'ynaydi, ya'ni tebranish va turli xil tipdagi to'lqinlar katta rol o'ynaydi.

To'la ionlashgan plazmani olish uchun gazni shunday temperaturagacha qizdirish kerakki, atomlar harakatining o'rtacha energiyasi  $k$  uning to'la ionizatsiya potensialidan katta yoki unga teng bo'lsin:

$$kT \geq I.$$

Vodorod yoki deytiriy holi uchun  $I = 13,595 \text{ eV}$ , shuning uchun to'la ionlashgan vodorod plazma  $T \simeq 16 \cdot 10^4 \text{ K}$  temperaturalarda olinadi. Ana shunday temperaturada plazmani faqat zaryadlangan zarralardan tashkil topgan sistema deb qarab bo'lmaydi. Bu holda undagi nurlanishni ham hisobga olish kerak.

Muvozanat nurlanish energiyasining zarralar harakatining issiqlik energiyasiga teng bo'lgandagi temperaturani topaylik, ya'ni

$$\sigma T^4 = \frac{3}{2} kTn$$

ifodadan temperaturani aniqlaymiz:

$$T = \left( \frac{3kn}{2\sigma} \right)^{1/3}.$$

O'ta siyraklashtirilgan plazma ( $n = 10^{15} \text{ sm}^{-3}$ ,  $\rho = 0,01 \text{ mmn}$ ) uchun bu temperatura  $T \simeq 3 \cdot 10^4 \text{ K}$  bo'ladi. Shu temperatura-dan boshlab nurlanish energiyasini hisobga olishga to'g'ri keladi. Shunga ko'ra, kichik zichlikdagi va past temperaturali termodinamik muvozanatdagi plazma holatini qarash kerak bo'ladi.

Siyraklashtirilgan kichik zichlikdagi bunday plazma  $\frac{e^2}{\langle r \rangle} < kT$

shart bilan aniqlanadi. Bu yerda  $\frac{e^2}{\langle r \rangle}$  - Kulon o'zaro ta'sir o'rtacha energiyasi,  $\langle r \rangle$  - zarralar orasidagi o'rtacha masofa.

$\frac{e^2}{\langle r \rangle} \sim e^2 n^{1/3}$  ekanligini hisobga olsak, u holda  $n < (kT/e^2)^3$  bo'ladi. Bu issiq siyraklashtirilgan plazma deb yuritiladi.

Qarama-qarshi zaryadlangan ikki navdagi  $+eZ_i$  va  $-eZ_i$  zaryadlardan tashkil topgan termodinamik muvozanatdagi siyraklashtirilgan plazmani qarab chiqaylik. Plazma ichki energiyasi

$$E = E_{id} + E_e, \quad (6.54)$$

bu yerda

$$E_{id} = C_V T + E_0$$

ideal gaz ichki energiyasi,

$$E_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} N_i eZ_i \varphi_i$$

zarralarning Kulon o'zaro ta'sir energiyasi,  $N_i = n_i^0 V$ ,  $n_i^0$  – birlik hajmdagi  $i$ - navdagi ionlar konsentratsiyasi,  $\varphi_i$  – boshqa zarralar tomonidan  $i$ - ion turgan nuqtada hosil qilingan o'rtacha potensial,  $Z_i$  – butun musbat son.

Termodinamik muvozanat vaqtida har bir ion atrofi qarama-qarshi ishorali zarralar buluti bilan o'ralgan bo'ladi. Bunday ekranlovchi ion hosil qilgan maydon potentsiali  $\varphi(r) \sim 1/r$  ga nisbatan tezroq kamayadi. U holda

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_i = \left( \varphi(r) - \frac{eZ_i}{r} \right),$$

bu yerda  $\frac{eZ_i}{r}$  –  $i$ - ion hosil qilgan potensial.  $\varphi(r)$  potentsialni topish uchun o'zaro moslashgan maydon usulini qo'llaymiz, bu holda masala elektostatik masala holiga keladi. Ion bulutidagi  $i$ - nav zarralar zichligi Bolsman taqsimotiga bo'ysunsin:

$$n_i = n_i^0 \exp\left(-\frac{eZ_i \varphi}{kT}\right).$$

Ion bulutlar potentsiali  $\varphi(r)$  undagi zaryadlar zichligi  $\sum n_i^0 eZ_i$  bilan Puasson tenglamasi orqali bog'langan:

$$\Delta \varphi(r) = -4\pi e \sum_i n_i^0 Z_i.$$

Bu tenglamaning yechimi

$$\varphi(r) = \frac{eZ_i}{r} e^{-\kappa r}$$

bo'ladi. Natijada  $i$ - ion turgan nuqtada barcha qolgan ionlar hosil qilgan maydon potentsiali

$$\varphi_i = eZ_i \kappa = 2e^2 Z_i \sqrt{\frac{\pi}{V k T} \sum_i N_i Z_i^2}$$

va zaryadlangan zarralarning o'zaro ta'sir energiyasi

$$E_e = \frac{1}{2} \sum_i N_i e Z_i \varphi = -e^3 \sqrt{\frac{\pi}{V k T} \left( \sum_{i=1}^{2N} N_i Z_i^2 \right)^{3/2}} \quad (6.55)$$

bo'ladi. Bu yerda

$$\kappa = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{k T} \sum_i n_i^0 Z_i^2}$$

bo'lib,  $d = 1/\kappa$  - Debay-Xyukellning ekranlovchi radiusi deb yuritiladi. Bu tashqi elektr maydonning plazmaga kirish chuqurligini beradi.  $N_i$  -  $i$ - navdagi ionlarning to'la soni. (6.55) ni (6.54) ga qo'yish natijasida plazma energiyasi

$$E = E_{id} - e^3 \sqrt{\frac{\pi}{V k T} \left( \sum_{i=1}^{2N} N_i Z_i^2 \right)^{3/2}} \quad (6.56)$$

ko'rinishni oladi. (6.56) ko'rinishda plazma ichki energiyasi termodinamik potentsial bo'la olmaydi. Plazma holatini aniqlashda termodinamik kattaliklarni hisoblash uchun plazma erkin energiyasini hisoblash kerak. Siyraklashgan plazma erkin energiyasi

$$F_{pl} = -T \int_0^T \frac{E_{pl}}{T^2} dE_{pl} = F_{id} - \frac{2}{3} e^3 \sqrt{\frac{\pi}{V k T} \left( \sum_{i=1}^{2N} N_i Z_i^2 \right)^{3/2}} \quad (6.57)$$

Plazma holatini xarakterlovchi termodinamik kattaliklar (6.57) yordamida hisoblanadi. Entropiyasi  $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ , bosimi

$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$ , Gibbs termodinamik potentsiali  $\Phi = F + pV$ , katta

termodinamik potentsiali  $B = -\frac{2}{3}E$ , issiqlik sig'imi  $C_v = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v$ .

Yuqorida yozilgan ifodalar asosida hisoblashlar shuni ko'rsatadiki, plazma holatini xarakterlovchi kattaliklar ideal gaz holatini xarakterlovchi kattaliklardan kichik bo'ladi:  $E_{pl} < E_{id}$ ,  $F_{pl} < F_{id}$ ,  $\Phi_{pl} < \Phi_{id}$ ,  $S_{pl} < S_{id}$  va h.k. Sababi plazmada asosan tortishish kuchining ustunligidadir. Ammo plazma issiqlik sig'imi har doim ideal gaz issiqligidan katta bo'ladi, chunki plazma temperaturasini oshirishda faqat plazma zaryadlangan zarralarning xaotik harakati kinetik energiyasini oshirishda energiya sarf qilinib qolmasdan, balki ion bulutini hosil qilgan zarralar orasidagi o'zaro ta'sir o'rtacha potensial energiyasini oshirishda ham sarf qilinadi.

Plazma holat tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$pV = RT\left(1 + \frac{A}{\sqrt{V}}\right),$$

bu yerda

$$A = -\frac{e^3}{3RT} \sqrt{\frac{\pi}{kT}} \left(\sum_{i=1}^{2N} N_i Z_i^2\right)^{3/2}.$$

Plazmada tebranish mavjudligi 1906- yilda Reley va 1929- yilda Lengmyur va Tonks tomonidan ko'rsatildi. Plazmadagi tebranishlar L.D. Landau tomonidan ishlab chiqilgan.

## 6.7. VI bobga oid masala va savollar

1.  $N$  ta molekuladan tashkil topgan siyraklashtirilgan gaz zarralari quyidagi qonun bo'yicha ta'sirlashadi:

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq d, \\ -U_0, & \rho > r > d, \\ 0, & r > \rho. \end{cases}$$

Ushbu gazning issiqlik sig'imi aniqlansin.  $\rho$  - o'zaro ta'sir doira radiusi.

*Yechish.*

$$C_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_v; \quad E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}.$$

Berilgan hol uchun real gazning holat funksiyasi

$$Z = Z_{id} \left( 1 + \frac{N^2 \beta}{2V} \right);$$

$$\beta = 4\pi \int_0^{\infty} \left[ \exp\left(-\frac{U(r)}{kT}\right) - 1 \right] r^2 dr = -8v_0 + \frac{8U_0 v_0}{kT};$$

$v_0 = 4\pi r_0^3/3$ ;  $r_0 = d/2$  - molekula radiusi. Agar  $n = N/V$  - zichlik va  $b = 4v_0 N$  - xususiy hajm ekanligini hisobga olsak, bu holda:

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = E_{id} - \frac{nbU_0}{1 + nb \left( \frac{U_0}{kT} - 1 \right)},$$

$$C_V = C_{vid} - k \left( \frac{nbU_0}{kT} \right)^2 \frac{1}{\left[ 1 + nb \left( \frac{U_0}{kT} - 1 \right) \right]^2}.$$

Demak, siyraklashtirilgan real gazlarda temperatura ortishi bilan issiqlik sig'imi kamayar ekan.

2. O'zaro ta'sir potensial energiyasi  $U(r) = \frac{\alpha}{r^n}$  ( $\alpha > 0$ ,  $n > 3$ ) bo'lgan gazlar uchun ikkinchi virial koeffitsiyent hisoblansin.

*Yechish.* O'zaro ta'sir potensial energiyasi  $u(r) = \frac{\alpha}{r^n}$  bo'lgan gazlar uchun ikkinchi virial koeffitsiyentni hisoblaymiz. Ikkinchi virial koeffitsiyent deb,

$$B(T) = -\frac{1}{2} \beta = 2\pi \int_0^{\infty} \left( 1 - \exp\left(-\frac{u(r)}{kT}\right) \right) r^2 dr$$

ifodaga aytiladi. Integral ostidagi ifodani bo'laklab integrallaymiz. Natijada quyidagi ifodani olamiz:

$$B(T) = \frac{2\pi}{3} \frac{\alpha n}{kT} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{kT r^n}\right) \frac{dr}{r^{n-2}}.$$

Bu integralni endi osongina hisoblash mumkin. Natijada ikkinchi virial koeffitsiyent

$$B(T) = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\alpha}{kT}\right)^{3/n} \Gamma\left(\frac{n-3}{n}\right)$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda  $\Gamma(x)$  – gamma fuksiya.

3. Gibbs termodinamik potentsiali Van-der-Vaals gazi uchun topilsin.

4. Van-der-Vaals gazi uchun entropiya ifodasi olinsin.

5. Zarralar orasidagi o'zaro ta'sir potentsial energiyasi

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq r \leq 2r_0, \\ -U_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^n, & 2r_0 < r < \infty \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lgan hol uchun Van-der-Vaals tenglamasidagi o'zgarmas parametr  $a$  hisoblansin. Bu yerda  $r_0$  – zarra radiusi.

6. Zarralari

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq r \leq d, \\ -\frac{\alpha}{r^n}, & r > d \end{cases}$$

qonun bo'yicha o'zaro ta'sirlashuvchi siyrak gaz uchun holat tenglamasiga tuzatma hisoblansin. Bu yerda  $d$  – zarra diametri,  $\alpha > 0$ ,  $n > 3$ .

7. Van-der-Vaals gaz holatining kalorik tenglamasi olinsin va erkin energiyasi hisoblansin.

8. Har qaysisi  $N$  tadan bo'lgan  $-e$  va  $+e$  zaryadlardan tashkil topgan va  $V$  hajmni egallagan siyrak plazma energiyasi hisoblansin.

9. Siyraklashtirilgan plazmaning erkin energiyasi, entropiyasi, bosimi va issiqlik sig'imi aniqlansin.

10.  $\varphi_0$  potentsialgacha zaryadlangan qandaydir jism elektronlardan (zaryadi  $-e$ ) va ionlardan (zaryadli  $+e$ ) tashkil topgan plazmaga joylashtirilgan. Elektronlar temperaturasi  $T_e$  va ionlar temperaturasi  $T_i$  har xil deb hisoblab, Debay ekranlash radiusi aniqlansin. Plazma kvazineytral deb hisoblansin, ionlar konsentratsiyasi  $n_0$ .

11. Real gaz holat funksiyasi.
12. Konfiguratsiya integrali.
13. Van-der-Vaals gazi uchun « $a$ » va « $b$ » faktorlar.
14. « $a$ » va « $b$ » lar hisobga olinganda Van-der-Vaals gaz tenglamasi qanday yoziladi? yozilishi.
15. Bogolyubov zanjir tenglamasi. Fizik ma'nosi.
16. Plazma. Plazma holatni qanday yuzaga keltirish mumkin.
17. Plazma holat tenglamasi.
18. Nima uchun plazma issiqliq sig'imi ideal gaz issiqliq sig'imidan katta bo'ladi.



## VII bob

### FLUKTUATSIYA NAZARIYASI

#### 7.1. Fluktuatsiyaning termodinamik nazariyasi

Oldingi boblarda makroskopik sistemani ifodalovchi fizik kattaliklar juda katta aniqlik bilan o'rtacha qiymatlariga teng ekanligini ko'p marta ta'kidlab keldik. Bu holatga fizik kattaliklar o'rtacha qiymatlari atrofida fluktuatsiyaga duchor bo'ladi. Bu chetlashishlar qanchalik kichik bo'lmasin, ular mavjud. Demak, ularning taqsimot funksiyasini topish kerak. Statistik fizika qonunlaridan fluktuatsiya mavjudligi kelib chiqadi. Fluktuatsiyaga duchor bo'lgan makroskopik sistema o'z holicha eng katta ehtimollik holatdan eng kam ehtimollik holatga o'tadi. Fluktuatsiya tufayli muvozanat holatdagi makroskopik sistemani xarakterlovchi kattaliklarning o'rtacha qiymatlaridan tasodifiy chetlanishi yuzaga keladi. Ana shu hodisaga fluktuatsiya hodisasi deb yuritiladi.<sup>1</sup>

Berk sistemalarda fluktuatsiyaning ehtimolligini Bolsman formulasi yordamida topish mumkin. Bu masalaga termodinamika ikkinchi qonunining statistik talqinini muhokama qilganimizda duch kelgan edik. Termodinamikaning ikkinchi qonuni hamma masalani hal qiladi degan fikr uzul-kesil o'rnashib qolgan davrda fluktuatsiyaning mavjudligi nazariy bashorat qilingan edi. Fizikadagi energetik maktabining vakillari moddiy atom va molekulalar borligini umuman rad etishgan. Klassik mexanika va statistika qonunlarining birgalikda ko'rishda ichki qarama-qarshilik mavjud bo'lishi (katta sondagi zarralardan

---

<sup>1</sup>Fizik kattaliklarning muvozanat holatdagi qiymatidan chetlashishi nisbatan katta bo'lganda, nochiziqli dispersiya, so'nish, nochiziqli effektlar kabilar vaqt o'tishi bilan to'planib borish xossasiga ega, ya'ni sistemani yetarlicha uzoq vaqt davomida kuzatish natijasida ular sistema xossalari ta'sir ko'rsata boshlaydi. Bunday fluktuatsiyalarni fizikaning maxsus sohalari o'rganadi. Biz esa, shunday fizik kattaliklarning fluktuatsiyalarini o'rganamizki, sistemaning o'zi ularni o'rtachalaydi. Boshqacha qilib gapirsak, makroskopika nuqtayi nazaridan bunday kattaliklarning faqat o'rtacha qiymatlari ma'noga egadir. Statistik fizika shunday kattaliklar bilan ish ko'radi.

tashkil topgan sistemada alohida olingan zarralar harakat qonunlarini o'rganib bo'lmalik) statistik fizikaga ko'pchilikning ishonchsizlik bilan qarashga olib kelgan. Lekin, bir qator fluktuatsiya jarayonlarining kashf qilinishi va ularni nazariyasining yaratilishi molekular nazariya mustahkam o'rnatishiga olib kelgan. Fluktuatsiya bir qator fizik hodisalarni – Broun harakatini, yorug'likning sochilishini, osmonning havo rangda bo'lishini va h.k. tushuntirishga yordam berdi.

Fluktuatsiya hodisasi amalda ikki holda kuzatilishi mumkin:

1) sistema o'lchami yetarli darajada kichik bo'lganda. Bu holda fluktuatsiya tez-tez sodir bo'ladi va nisbatan katta bo'ladi.

2) o'lchami uncha katta bo'lmagan sistemalarda. Bu holda kichik fluktuatsiyalar mavjud bo'ladi.

Fluktuatsiya qonunlarini o'rganishda bir qator yangi tushunchalar bilan ishlashga to'g'ri keladi. Agarda sistema holatini xarakterlovchi termodinamik kattalikni  $L$  va uning o'rtacha qiymatini  $\bar{L}$  bilan belgilasak, u holda fluktuatsiyani hisoblashda quyidagi ifodalar ishlatiladi:

$$\Delta L = (L - \bar{L}) - \text{o'rtacha qiymatdan chetlanish};$$

$$\overline{\Delta L} = \overline{(L - \bar{L})} = \bar{L} - \bar{L} = 0 - \text{chetlanishning o'rtacha qiymati};$$

$$(\overline{\Delta L})^2 = \overline{(L - \bar{L})^2} - \text{o'rtachadan kvadratik chetlanish};$$

$$\overline{(\Delta L)^2} = \overline{(L - \bar{L})^2} = \overline{L^2} - \bar{L}^2 - \text{kvadratik o'rtacha chetlanish};$$

$$\delta_L = \sqrt{\overline{(\Delta L)^2}} / \bar{L} - \text{nisbiy chetlanish (fluktuatsiya)}.$$

Biz eng avvalo ixtiyoriy makroskopik sistemada sodir bo'layotgan kichik fluktuatsiyalarning umumiy nazariyasini qarab chiqaylik. Entropiyasi  $S_0$  bo'lgan muvozanat holatdagi makroskopik berk sistemani olib qaraylik. Faraz qilaylik, sistema holati o'zgarib, entropiyasi  $S$  ga teng bo'lgan nomuvozanat holatga o'tsin. Sistema holatining o'zgarishini qandaydir ichki parametr  $\xi$  xarakterlaydi.  $\xi$  ning qiymati sistemaning hamma holatiga bog'liq bo'ladi (ichki parametr  $\xi$  uchun zarralar soni, zichligi, energiyasini va h.k. larni qabul qilish mumkin). Sistema entropiyasi  $S$  ham parametr  $\xi$  ga bog'liq bo'ladi.

Biz o'rganayotgan yopiq sistemaning  $\xi$ ,  $\xi + d\xi$  intervalidagi holatga tushish ehtimolligi Bolsman formulasiga asosan

$$dW = \text{const} \cdot \exp\left(\frac{\Delta S}{k}\right) d\xi. \quad (7.1)$$

Bu yerda const normirovka shartidan topiladi;  $\Delta S = S(\xi) - S(\xi_0) < 0$  bo'ladi.

Ko'pincha tajribada fluktuatsiya hodisasi berk sistemada emas, balki berk sistemaning bir bo'lagini tashkil qilgan kvaziberk sistema (sistemacha)da qaraladi. Bunday kvaziberk sistema uchun o'zgarmas temperaturali va o'zgarmas bosimli termostatga tushirilgan sistemachani olib qarash mumkin (sistemacha ham katta sondagi zarralardan tashkil topgani uchun uni sistema deb tushiniladi). Sistema holatini qandaydir tashqi parametrlar bilan xarakterlanadi.

Fluktuatsiya tufayli berk sistemaning (termostat+sistema) entropiyasi  $\Delta S$  ga o'zgaradi. Bu holda sistema ustida  $\Delta A(\lambda) = T\Delta S$  tashqi kuch tomonidan ish bajariladi. Fluktuatsiya vaqtida sistema termostat bilan muvozanat holatda yotmaydi. Muvozanat holatdan nomuvozanat holatga o'tganda  $\lambda$  ning qiymati ham o'zgaradi, natijada sistemani xarakterlovchi termodinamik kataliklar ham o'zgaradi.

Sistemaning  $\lambda$ ,  $\lambda + d\lambda$  holatga tashqi manba ishi  $\Delta A(\lambda)$  ta'sirida o'tish ehtimolligi

$$dW = \text{const} \cdot \exp\left(\frac{\Delta S}{k}\right) d\lambda. \quad (7.2)$$

Bu yerda  $\Delta S = \Delta S_0 + \Delta S_c$ . Makroskopik parametrlar sekin o'zgaradi deb, sistema entropiyasining o'zgarishi  $\Delta S_c$  ni topish uchun muvozanat holat tenglamasidan foydalansak bo'ladi. U holda

$$\Delta S_c = \frac{\Delta E_c + p_0 \Delta V_c - \Delta A}{T_0}. \quad (7.3)$$

Bu yerda  $T_0$  va  $p_0$  - termostatning muvozanat holatidagi temperatura va bosim,  $p_0 \Delta V_0$  - sistema ustida termostat bajargan ish.  $\Delta A$  sistema ustida tashqi kuchlarning bajargan ishi ekanligini yana bir marta ta'kidlab o'tamiz. Termostat entropiyasining o'zgarishi uchun odatdagidek

$$\Delta S_0 = \frac{\Delta E_0 + p_0 \Delta V_0}{T_0} \quad (7.4)$$

ifodani yozamiz. Termostat va sistema birgalikda berk sistemani tashkil qilganligi uchun to'liq ichki energiya va hajm

fluktuatsiyalari nolga teng bo'ladi, ya'ni  $\Delta V_0 + \Delta V_c = 0$  va  $\Delta E_0 + \Delta E_c = 0$ . Bularni hisobga olib termostat + sistema entropiyasining o'zgarishi uchun

$$\Delta S = \Delta S_0 + \Delta S_c = -\frac{\Delta A(\lambda)}{T_0} \quad (7.5)$$

ifodani hosil qilamiz. U holda (7.2) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dW = C \exp\left(-\frac{\Delta A(\lambda)}{kT_0}\right) d\lambda. \quad (7.6)$$

Demak, sistemada o'tayotgan kichik fluktatsiyalarning ehtimollik darajasi sistema ustida bajariladigan tashqi ish bo'lib hisoblanar ekan. Bu ish faqat fluktuatsiyaning miqdoriy xarakteristikasi bo'lib hisoblanadi.

(7.6) ga (7.5) ni keltirib qo'yib, kattaliklardagi indeksni tushirib qoldirsak, (7.6) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dW = C \exp\left\{\frac{T\Delta S - \Delta E - p\Delta V}{kT}\right\} d\lambda. \quad (7.7)$$

Bu yerda  $\Delta S$ ,  $\Delta E$  va  $\Delta V$  - sistemaga taaluqli entropiya, ichki energiya va hajm fluktuatsiyasi,  $T$  va  $p$  esa berk (termostat + sistemacha) sistemaga taaluqli bo'lib, muvozanat holatdagi qiymatlari tushuniladi.

Ayrim termodinamik kattaliklarning fluktuatsiyasi bir-biriga bog'liq bo'ladi. Termodinamikaning birinchi qonuniga asosan, (7.7) ning eksponentasidagi ifodalarning birinchi tartibli o'zaro qisqaradi. Masalan, ichki energiya fluktuatsiyasini ko'rib chiqamiz. Ichki energiya fluktuatsiyasini  $\Delta S$  va  $\Delta V$  fluktuatsiyalarining funksiyasi deb qarab, uni shu kattaliklarning darajasi bo'yicha qatorga yoyish natijasida quyidagi ifodani olamiz:

$$\begin{aligned} \Delta E - T\Delta S + p\Delta V = & \Delta E_0 + \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V \Delta S + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\right)_V \Delta S^2 + \\ & + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V}\right) \Delta S \Delta V + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\right)_S \Delta V^2 + \\ & + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V}\right) \Delta V \Delta S - T\Delta S + p\Delta V. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Termodinamikaning asosiy tenglamasiga asosan

$$\Delta E = T\Delta S - p\Delta V; \quad \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V = T; \quad \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S = -p, \quad (7.9)$$

natijada

$$\begin{aligned} \Delta E - T\Delta S + p\Delta V &= \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 E}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + 2 \frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V} \Delta S \Delta V + \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} (\Delta V)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \Delta S \Delta \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_V + \Delta V \Delta \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_S \right] = \frac{1}{2} (\Delta S \Delta T - \Delta p \Delta V) \quad (7.10) \end{aligned}$$

bo'ladi va (7.7) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dW = C \exp \left\{ \frac{\Delta p \Delta V - \Delta S \Delta T}{2kT} \right\} d\lambda, \quad (7.11)$$

bu yerda  $d\lambda = dpdVdSdT$ . (7.11) ifoda sistemada hajm, harorat, entropiya va bosim fluktuatsiyasilarining ehtimolligini beradi.

## 7.2. Bir jinsli sistemalarda termodinamik kattaliklar fluktuatsiyasi

Oldingi mavzuda fluktuatsiyaning miqdoriy o'lchovi ish ekanligini ko'rib chiqdik. Bajarilgan ish sistemani boshlang'ich muvozanat holatdan oxirgi fluktuatsiya holatiga o'tkazadi. Fluktuatsiyalar kichik bo'lganligi sababli bunday o'tishni qaytuvchi deb qarash mumkin. Bu holda termostatning bir bo'lagi bo'lgan sistema ustida bajarilgan ishning umumiy ko'rinishini, odatdagidek, quyidagicha yozish mumkin:

$$\Delta A = \Delta E - T_0 \Delta S + p_0 \Delta V. \quad (7.12)$$

Bu yerda  $\Delta E$ ,  $\Delta S$  va  $\Delta V$  - muvozanat holatdan fluktuatsiya holatiga o'tishda sistemaning energiyasi, entropiyasi va hajmining o'zgarishlaridir. O'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchilar sifatida qaysi kattaliklarni olishga bog'liq holda bajarilgan ishning aniq ko'rinishini olish mumkin. (7.11) natijadan foydalanib, turli termodinamik kattaliklarning fluktuatsiyasini topamiz.

I. O'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchanlar sifatida  $V$  va  $T$  ni olaylik:

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \Delta V = \frac{C_V}{T} \Delta T + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta V, \quad (7.13)$$

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \Delta V. \quad (7.14)$$

Bu ifodalarni (7.11) ga qo'yish natijasida

$$dW = C \exp \left\{ -\frac{C_V}{2kT^2} (\Delta T)^2 + \frac{1}{2kT} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T (\Delta V)^2 \right\} d\lambda. \quad (7.15)$$

Bu ifoda faqat  $\Delta T$  va  $\Delta V$  ga bog'liq bo'lgan ikkita ko'paytuvchiga ajraladi. Demak, temperatura va hajm fluktuatsiyasi statistik holda bog'lanmagan. Shuning uchun  $\overline{\Delta T \Delta V} = 0$ . (7.15) ifoda bir vaqtda hajm va temperaturaning fluktuatsiyaga duchor bo'lish ehtimolligini beradi. Bu ifoda  $V = \text{const}$  bo'lganda, sistema temperaturasining fluktuatsiyaga duchor bo'lish va uning temperaturasi  $T$ ,  $T + dT$  temperatura intervalida bo'lish ehtimolligini beradi:

$$dW_T = C_1 \exp \left\{ -\frac{C_V}{2kT^2} (\Delta T)^2 \right\} dT. \quad (7.16)$$

Shuningdek, temperatura o'zgarmas bo'lganda sistema hajmining fluktuatsiyaga duchor bo'lishi va uning hajmini  $V$ ,  $V + dV$  hajm intervalida bo'lish ehtimolligini beradi:

$$dW_V = C_2 \exp \left\{ -\frac{(\Delta V)^2}{2kT} \left| \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \right| \right\} dV. \quad (7.17)$$

Bu yerda  $C_1$  va  $C_2$  doimiylar normirovka shartlari

$$\int dW_T = 1 \quad \text{va} \quad \int dW_V = 1 \quad (7.18)$$

dan topiladi. O'zgarmlarni hisoblab, o'rinlariga qo'yish natijasida quyidagi ifodalarni olamiz:

$$dW_T = \sqrt{\frac{C_V}{2\pi kT^2}} \exp \left\{ -\frac{C_V (\Delta T)^2}{2kT} \right\} dT, \quad (7.19)$$

$$dW_V = \sqrt{\frac{1}{2\pi kT} \left| \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right|} \exp \left\{ -\frac{(\Delta V)^2}{2kT} \left| \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right| \right\} dV. \quad (7.20)$$

(7.19) va (7.20) ifodalar yordamida temperatura va hajmning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyalari uchun quyidagi ifodalarni olamiz:

$$\overline{(\Delta T)^2} = \frac{kT^2}{C_V}, \quad (7.21)$$

$$\overline{(\Delta V)^2} = -\frac{kT}{\left| \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right|}. \quad (7.22)$$

Bu ifodalardan, xususan, (7.16) dan  $C_V > 0$  va  $\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T < 0$  ekanliklari kelib chiqadi. Bu tengsizliklar bir jinsli termodinamik sistemalar barqarorligining yetarli shartini beradi.

(7.20) va (7.22) formulalar  $\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = 0$  bo'lgan hol uchun o'z kuchini yo'qotadi. Buning sababi ichki energiyani fluktuatsiyalarning funksiyasi deb qatorga yoyganimizda  $\Delta S$  va  $\Delta V$  bo'yicha kvadratik hadlarni saqlab qolgan edik. Agar  $\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = 0$  bo'lsa, qatorda  $\left( \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_T \neq 0$  bo'lishi kerak. Bu hol esa bir-biriga ziddir.

Demak, birinchi va ikkinchi tartibli hosilalar bir vaqtda nolga teng bo'lishi kerak. Bu shart kritik nuqta holatini aniqlaydi. Kritik nuqtada fluktuatsiyalar haqiqatan ham juda katta bo'ladi. Masalan, suyuqliklarning qaynash kritik nuqtasida yorug'likning kuchli sochilishi yuzaga keladi va suyuqlik tiniqligini yo'qotadi. Bu kritik opolesensiya deb yuritiladi.

II. O'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchilar sifatida  $p$  va  $S$  ni olaylik. U holda

$$\Delta V = \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S \Delta p + \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_p \Delta S, \quad (7.23)$$

$$\Delta T = \left( \frac{\partial T}{\partial S} \right)_p \Delta S + \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_S \Delta p = \frac{T}{C_p} \Delta S + \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_S \Delta p. \quad (7.24)$$

Bu ifodalarni (7.12) ga qo'yish natijasida

$$dW = C \exp \left\{ \frac{1}{2kT} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S (\Delta p)^2 - \frac{1}{2kC_p} (\Delta S)^2 \right\} d\lambda. \quad (7.25)$$

Bu esa bir vaqtda bosim fluktuatsiya ehtimolligini  $p$ ,  $p + dp$  intervalda, entropiya fluktuatsiya ehtimolligini  $S$ ,  $S + dS$  intervalida topish ehtimolligini beradi. (7.25) dan:

$$dW_p = C_3 \exp \left\{ -\frac{1}{2kT} \left| \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S \right| (\Delta p)^2 \right\} dp, \quad (7.26)$$

$$dW_S = C_4 \exp \left\{ -\frac{1}{2kC_p} (\Delta S)^2 \right\} dS \quad (7.27)$$

va  $\overline{\Delta S \Delta p} = 0$  ifodalarni olamiz.  $C_3$  va  $C_4$  doimiylar normirovka shartlaridan topiladi:

$$C_3 = \sqrt{\frac{1}{2\pi kT} \left| \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S \right|}, \quad C_4 = \sqrt{\frac{1}{2\pi kC_p}}.$$

$C_3$  va  $C_4$  doimiylklarni (7.26) va (7.27) ifodalarga qo'yish natijasida bosim va entropiyaning fluktuatsiyaga duchor bo'lish ehtimolliklarini olamiz:

$$dW_p = \sqrt{\frac{1}{2\pi kT} \left| \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S \right|} \exp \left\{ -\frac{\Delta p^2}{2kT} \left| \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S \right| \right\} dp, \quad (7.28)$$

$$dW_S = \sqrt{\frac{1}{2\pi kC_p}} \exp \left\{ -\frac{\Delta S^2}{2kC_p} \right\} dS. \quad (7.29)$$

Bu ifodalardan entropiya va bosimning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyalari uchun ifodalarni olamiz:

$$\overline{(\Delta S)^2} = kC_p, \quad \overline{(\Delta p)^2} = -kT \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_S. \quad (7.30)$$

III. Berilgan hajmdagi zarralar soni fluktuatsiyasini topaylik. Bitta zarraga to'g'ri kelgan hajm  $V/N$  ning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi ( $N = \text{const}$ ):



$$\overline{\left(\Delta \frac{V}{N}\right)^2} = \frac{1}{N^2} \overline{(\Delta V)^2} = \frac{1}{N^2} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right].$$

Endi  $V = \text{const}$  deb shu hajmdagi zarralar soni fluktuatsiyasini qarab chiqaylik:

$$\begin{aligned} \overline{\left(\Delta \frac{V}{N}\right)^2} &= V^2 \overline{\left(\Delta \frac{1}{N}\right)^2} = \frac{V^2}{N^4} \overline{(\Delta N)^2}, \\ \overline{(\Delta N)^2} &= \frac{N^4}{V^2} \overline{\left(\Delta \frac{V}{N}\right)^2} = \frac{N^2 kT}{V^2 \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right]}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Ideal gaz holi uchun zarralar sonining kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi  $\overline{(\Delta N)^2} = N$  bo'ladi. Bu esa ideal gazda zarra fluktuatsiyasining temperaturaga bog'liq emasligi, ideal gaz zarralarining bir-biriga bog'lanmaganligidadir. Ideal gazda temperatura oshishi faqat kvadratik o'rtacha tezlikning oshishiga olib keladi.

IV. Zichlikning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi:

$$\overline{(\Delta \rho)^2} = \overline{\left(\Delta \frac{m}{V}\right)^2} = \frac{m^2}{V^2} \overline{(\Delta V)^2} = \rho^2 \frac{kT}{\left[ \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right]} = \rho^2 \frac{kT}{V} \gamma_T, \quad (7.32)$$

zichlikning nisbiy fluktuatsiyasi:

$$\overline{\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)^2} = \frac{kT}{V} \gamma_T. \quad (7.33)$$

Bu yerda  $\gamma_T = V \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$  - izotermik siqiluvchanlik.

V. Endi Gibbs kanonik taqsimoti o'rinni bo'lgan termostatda yotgan sistemada energiya fluktuatsiyasini ko'raylik. Energiyaning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi:

$$\overline{(\Delta E)^2} = \overline{E^2} - (\overline{E})^2, \quad (7.34)$$

bu yerda

$$\bar{E} = \frac{1}{Z} \sum E_i \exp\left(-\frac{E_i}{\theta}\right) \Omega(E_i) = \frac{1}{Z} \left( \frac{\partial Z}{\partial \left(-\frac{1}{\theta}\right)} \right)_V = \frac{\theta^2}{Z} \left( \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)_V,$$

$$\overline{E^2} = \frac{1}{Z} \sum E_i^2 \exp\left(-\frac{E_i}{\theta}\right) \Omega(E_i) = \frac{2\theta^3}{Z} \left( \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)_V + \frac{\theta^4}{Z} \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \right)_V.$$

Bu ifodalarni (7.36) ga qo'yish natijasida quyidagi ifodani olamiz:

$$\overline{(\Delta E)^2} = \theta^2 \left( \frac{\partial \bar{E}}{\partial \theta} \right)_V = kT^2 C_V. \quad (7.35)$$

Energiyaning nisbiy fluktuatsiyasi

$$\delta_E = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta E)^2}}}{E} = \frac{\sqrt{C_V k T^2}}{E}. \quad (7.36)$$

Bu ifoda ham klassik, ham kvant sistema uchun o'rinli bo'ladi.

Xususan, klassik bir atomli gaz uchun  $\bar{E} = \frac{3}{2} NkT$  va  $C_V = \frac{3}{2} Nk$ .

Natijada

$$\delta_E = \sqrt{\frac{2}{3N}} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (7.37)$$

Past temperaturalarda Debay yaqinlashuvida qattiq jismlar uchun quyidagilarni yozish mumkin:

$$\bar{E} = \frac{3\pi^4 NkT^4}{5\theta_c^3}, \quad (7.38)$$

$$C_V = \frac{12\pi^4 NkT^3}{5\theta_c^3}, \quad (7.39)$$

$$\delta_E = \left( \frac{20}{3N\pi^4} \right)^{1/2} \left( \frac{\theta_c}{T} \right)^{3/2}. \quad (7.40)$$

Juda past temperaturalarda energiyaning nisbiy fluktuatsiyasi qattiq jismlarda ancha katta bo'lishi mumkin.

VI. Termostat ichiga tushirilgan va zarralar soni o'zgaruvchan bo'lgan sistemada zarralar soni fluktuatsiyasini qarab chiqaylik. Bu esa Gibbsning katta kanonik taqsimotidan foydalanib hisoblaniladi. (4.11) formulaga asosan

$$\bar{N} = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_i \sum_N \exp\left(\frac{\mu N - \varepsilon_i}{kT}\right) \Omega(\varepsilon_i, N) = \frac{kT}{Z} \left( \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \mu} \right)_{T,V}, \quad (7.41)$$

$$\overline{N^2} = \sum_i \sum_N N^2 \exp\left(\frac{\mu N - \varepsilon_i}{kT}\right) \Omega(\varepsilon_i, N) = \frac{(kT)^2}{Z} \left( \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial \mu^2} \right)_{T,V}, \quad (7.42)$$

bu yerda

$$\bar{Z} = \sum_i \sum_N \exp\left(\frac{\mu N - \varepsilon_i}{kT}\right) \Omega(\varepsilon_i, N).$$

Natijada zarralar soni kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi uchun quyidagi ko'rinishdagi ifodani olamiz:

$$\overline{(\Delta N)^2} = \overline{N^2} - (\bar{N})^2 = kT \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu} \right)_{T,V}. \quad (7.43)$$

Bu ifoda ham klassik, ham kvant sistemalar uchun o'rinli bo'ladi. Masalan, bir atomli gaz uchun

$$\bar{N} = \left( \frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/2} V \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right) \quad (7.44)$$

bo'ladi. (7.43) dan foydalanib, ideal gaz uchun  $\overline{(\Delta N)^2} = \bar{N}$  ekanligini topamiz. Nisbiy fluktuatsiya esa

$$\delta_N = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta N)^2}}}{\bar{N}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{N}}} \quad (7.45)$$

ifodaga teng bo'ladi.

### 7.3. Bajarilgan ish fluktuatsiyasi

Termodinamik sistemalarda fluktuatsiyani o'rganganimizda (7.6) ifodaga asosan shu xulosaga kelindiki, sistemada o'tayotgan kichik fluktuatsiyalarning ehtimol darajasi sistema ustida

bajariladigan tashqi ish bo'lib hisoblanar ekan. (7.6) dagi  $\Delta A(\lambda)$  qandaydir maydon bajargan ish bo'lib, fluktuatsiyani yuzaga kelish sababchisidir. Shu bilan birga bajarilgan ish ham fluktuatsiyaga duchor bo'ladi. Bajarilgan ishning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasini topishni ko'rib chiqamiz.

Bajarilgan ish fluktuatsiyasini  $S$  va  $p$  o'zgaruvchanlarda hisoblaylik. Sistema holatini xarakterlovchi termodinamik potensial – entalpiya entropiya va bosimning funksiyasidir –  $\chi(S, p)$ . Fluktuatsiya nazariyasiga asosan, sistemaning muvozanat holatida termodinamik potensial  $\chi_{\min}(S, p)$  minimal qiymat qabul qiladi. Demak, shu potensialning fluktuatsiyasi bajarilgan ish fluktuatsiyasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\Delta A(S, p) = \Delta \chi(S, p). \quad (7.46)$$

Ushbu ifodadan foydalanib, bajarilgan ishning kvadratik o'rtachasini hisoblash mumkin:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta A^2} &= \overline{\Delta \chi^2} = \overline{\left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial S} \right)_p \Delta S + \left( \frac{\partial \chi}{\partial p} \right)_S \Delta p \right]^2} - \\ &= \left( \frac{\partial \chi}{\partial S} \right)_p^2 \overline{\Delta S^2} + 2 \left( \frac{\partial \chi}{\partial S} \right)_p \left( \frac{\partial \chi}{\partial p} \right)_S \overline{\Delta S \Delta p} + \left( \frac{\partial \chi}{\partial p} \right)_S^2 \overline{\Delta p^2}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Bu ifodadan  $\overline{\Delta S \Delta p} = 0$ , chunki  $S$  va  $p$  o'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchilardir. Ikkinchidan, entalpiyaning o'zgarishi

$$\Delta \chi = T \Delta S - V \Delta p. \text{ Bu yerda } T = \left( \frac{\partial \chi}{\partial S} \right)_p \text{ va } V = \left( \frac{\partial \chi}{\partial p} \right)_S \text{ larni (7.47)}$$

ga quyish natijasida

$$\overline{\Delta A^2} = T^2 \overline{\Delta S^2} + V^2 \overline{\Delta p^2} \quad (7.48)$$

ifodani olamiz. Entropiya va bosim fluktuatsiyalarining kvadratik o'rtachalari uchun 7- masala natijalari  $\overline{\Delta S^2} = kC_p$ ,

$\overline{\Delta p^2} = -kT \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_S$  dan foydalanib, bajarilgan ish fluktuatsiyasining kvadratik o'rtachasi

$$\overline{\Delta A^2} = kT^2 C_p + kTV^2 \left| \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_S \right| \quad (7.49)$$

ifoda bilan aniqlanishini topamiz.

#### 7.4. Fluktuatsiyaning statistik nazariyasi

Ideal gazlarning kichik hajmida zarralar sonining katta fluktuatsiyasini qarab chiqaylik. 7.2- bandda ideal gazlarning berilgan hajmida zarralar sonining kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi  $\overline{\Delta N^2} = \overline{N}$  ga teng bo'lishini ko'rsatdik. Bu kattalik uchun mos kelgan fluktuatsiyaning Gauss ehtimollik taqsimotini quyidagicha yozish mumkin:

$$\rho_N dN = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp \left\{ -\frac{(N - \overline{N})^2}{2N} \right\} dN. \quad (7.50)$$

Ammo bu formula faqat kichik fluktuatsiyalar uchun o'rinli bo'lib, zarralar sonining o'rtachadan chetlashishi  $(N - \overline{N})$  zarralar soniga nisbatan kichik bo'lishi kerak. Agar ajratib olingan gazda hajm  $V$  yetarli darajada kichik bo'lsa, u vaqtda undagi zarralar soni unchalik katta bo'lmaydi. Bu holda  $N - \overline{N} \simeq \overline{N}$  o'rinli bo'ladigan katta fluktuatsiyalarni qarashga to'g'ri keladi. Bu hol faqat Bolsman gazlari uchun o'rinli bo'lib, Fermi-gaz va Boze-gazlar uchun o'rinsiz bo'ladi. Chunki Fermi-gaz va Boze-gazlarda ana shunday katta fluktuatsiyalar ehtimoli xalos kvant fluktuatsiyalar etarli darajada katta bo'lgan, juda kichik hajmida o'rinli bo'ladi. Qo'yilgan masalani oddiygina yechish uchun quyidagicha faraz qilaylik.  $V_0$  va  $N_0$  - gazning to'la hajmi va undagi zarralar soni bo'lsin,  $V$  esa  $V_0$  ga nisbatan juda kichik bo'lgan gaz bo'lagining hajmi bo'lsin. Gazni birjinsligi tufayli  $\frac{V}{V_0}$  berilgan zarraning  $V$  hajmida bo'lish ehtimolini beradi,

$\left( \frac{V}{V_0} \right)^N$  esa aniq  $N$  ta zarraning shu kichik hajmida bo'lish ehtimolidir. Xuddi shunga o'xshash berilgan zarraning  $V$  hajmida bo'lish ehtimoli  $\frac{V_0 - V}{V_0}$ ,  $(N_0 - N)$  aniq zarralarning shu kichik

hajmda bo'lmalik ehtimoli  $\left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right)^N$  bo'ladi. Natijada  $V$  hajmda qandaydir  $N$  ta zarraning bo'lish ehtimoli  $\rho_N N_0$  zarradan  $N$  tasini tanlashda mumkin bo'lgan usullar soniga teng bo'ladi:

$$\rho_N = \frac{N_0!}{N!(N_0 - N)!} \left(\frac{V}{V_0}\right)^N \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0 - N}. \quad (7.51)$$

Bizni qiziqtiruvchi hol ( $V \ll V_0$ ) hamda  $N$  son o'zining o'rtacha qiymati  $\bar{N}$  dan juda katta farq qilsada, gazdagi to'la zarralar soni  $N_0$  ga nisbatan kichik deb faraz qilinadi, u holda  $N_0! \approx (N_0 - N)! N_0^N$  ekanligini hisobga olsak, (7.51) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\rho_N = \frac{1}{N!} \left(\frac{N_0 V}{V_0}\right)^N \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0}, \quad (7.52)$$

bu yerda darajadagi  $N$  ni hisobga olmadik. Ammo  $\frac{N_0 V}{V_0}$  ifoda  $V$  hajmdagi zarralar sonining o'rtacha qiymati  $\bar{N}$  ni beradi, u holda (7.52)

$$\rho_N = \frac{\bar{N}^N}{N!} \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0}, \quad (7.53)$$

ko'rinishni oladi. Sistemadagi zarralar soni juda katta ekanligini hisobga olib  $N_0$  ni cheksizga intiltirsak

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0} = e^{-\bar{N}}.$$

Bu holda  $\rho_N$  quyidagi ko'rinishni qabul qiladi:

$$\rho_N = \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}}. \quad (7.54)$$

Bu Puasson formulasi deyiladi. Bu formula normalashtirish sharti

$$\sum_{N=0}^{\infty} \rho_N = 1$$

ni qanoatlantiradi.

Puasson formulasini to'g'ridan-to'g'ri Gibbsning katta kanoitik taqsimotidan keltirib chiqarish mumkin. Gibbsning katta taqsimotiga ko'ra, gazning  $N$  ta zarralarining har xil kvant holatlar bo'yicha taqsimot funksiyasi

$$\exp\left\{\frac{B+\mu N-\sum \varepsilon_k}{kT}\right\}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda  $B = -kT \ln \bar{Z}$  - katta termodinamik potensial,  $\sum \varepsilon_k$  - ayrim zarralar energiyalarining yig'indisi. Qidirilayotgan ehtimollikni olish uchun yig'indi berilgan  $V$  hajmdagi hamma zarralar holatlari bo'yicha olinadi. Yig'indida faqat turli holatlarni hisobga olish uchun  $N!$  ga bo'lamiz. Natijada

$$\begin{aligned} \rho_N &= \frac{e^{B/kT}}{N!} \left[ \sum_k \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}\right) \right]^N = \\ &= \frac{e^{B/kT}}{N!} \left( \sum_k n_k \right)^N = \frac{e^{B/kT}}{N!} \bar{N}^N. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Bu yerda  $B = -pV = -kT \bar{N}$ , natijada Puasson formulasini hosil qilamiz. Puasson formulasidan foydalanib, yuqorida olingan zarralar soni kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasini hisoblash mumkin:

$$\begin{aligned} \overline{N^2} &= \sum_{N=0}^{\infty} N^2 \rho_N = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{N e^{-\bar{N}} \bar{N}^N}{(N-1)!} = \\ e^{-\bar{N}} \sum_{N=2}^{\infty} \frac{\bar{N}^N}{(N-2)!} + e^{-\bar{N}} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\bar{N}^N}{(N-1)!} &= \bar{N}^2 + \bar{N}. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Bundan  $\overline{\Delta N^2} = \overline{N^2} - \bar{N}^2 = \bar{N}$ .

## 7.5. Zichlik fluktuatsiyasining korrelatsiyasi

Bir jinsli izotrop muhitlarda fazoning har bir nuqtasi teng huquqli bo'lganligi uchun alohida olingan zarra fazoda teng ehtimollik bilan ixtiyoriy nuqtada bo'lishi mumkin. Muhit zarralari o'rtasida o'zaro ta'sir mavjudligini hisobga olsak bu

holat buziladi. Buni ikki zarra misolida ko'ramiz. Ikki zarradan birining fazodagi holati aniq bo'lsin. Zarralar orasidagi ta'sir mavjud bo'lganligi uchun ikkinchi zarraning fazoning turli nuqtalarida bo'lish ehtimolligi teng bo'lmaydi, ya'ni ikkinchi zarraning fazodagi holati birinchi zarraning fazodagi o'rniga bog'liq bo'ladi. Bu holat fazoviy korrelatsiya deyiladi. Fazoviy korrelatsiyani bir atomli sistemalarni ko'rishdan boshlaymiz. Bu holda har bir zarraning holati uchta koordinata yordamida to'la holda aniqlanadi.

Zarralar sonining zichligi  $n(r)$  fluktuatsiyalanuvchi bo'lsin. Berilgan vaqt momentida  $dV$  hajm elementida yotgan zarralar sonini  $n(r)dV$  bilan belgilaylik. Hajm elementi  $dV$  ni cheksiz kichikligi tufayli unda bittadan ortiq bo'lmagan zarra yotadi. Unda bir vaqtning o'zida ikkita zarrani topish ehtimoli juda kichik bo'ladi. Shuning uchun zarralarning o'rtacha soni  $\overline{n(r)dV}$  fazoning  $r$  nuqtasida  $dV$  hajm elementida zarraning bo'lish ehtimolini beradi. Fazoning ikkita nuqtasida zarralar holati orasidagi bog'lanishni ifodalash uchun zichlik fluktuatsiyasining fazoviy korrelatsiya funksiyasini quyidagicha kiritamiz:

$$\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle = \overline{n_1 n_2} - \bar{n}^2. \quad (7.57)$$

Bu yerda  $\bar{n}$ ,  $\bar{n}_1$ ,  $\bar{n}_2$  bir jinsli muhitning hamma nuqtalaridagi zichlikning o'rtacha qiymati,  $n_1$ ,  $n_2$  - zarralar soni zichligining fazoning ikkita turli xil  $r_1$  va  $r_2$  nuqtalaridagi qiymati,  $\Delta n_1 = n_1 - \bar{n}_1$ ,  $\Delta n_2 = n_2 - \bar{n}_2$  esa fluktuatsiyasi. Bu kattalik korrelatsiya darajasini o'taydi. Bir jinsli izotrop muhitda korrelatsion funksiya fazodagi ikki nuqta orasidagi masofa  $r = |r_2 - r_1|$  ning absolut kattaligiga bog'liq bo'lib, fazoviy orientatsiyasiga bog'liq emas. Ikki zarra orasidagi masofa cheksizlikga intilganda birinchi va ikkinchi nuqtalarda fluktuatsiya statistik bog'lanmagan bo'lib qoladi va korrelatsiya nolga intiladi.

Zarralar sonining o'rtachasi  $\bar{n} dV$  bir vaqtning o'zida zarraning  $dV$  hajm elementida bo'lish ehtimolini ham beradi.  $\bar{n} w_{12} dV_2$  esa birinchi zarraning  $dV_1$  hajm elementida bo'lishi sharti bilan, ikkinchi zarraning  $dV_2$  hajm elementida bo'lish ehtimolini beradi. Bu yerda  $r \rightarrow \infty$  da  $w_{12} \rightarrow 1$ . Bu fikrlarga asosan



$$\langle n_1 dV_1 n_2 dV_2 \rangle = \bar{n} dV_1 \bar{n} w_{12} dV_2 \quad (7.58)$$

tenglikni olamiz. Bu ifodadan  $\langle n_1 n_2 \rangle = w_{12} \bar{n}^2$  kelib chiqadi. Bu tenglik  $r_1 \neq r_2$  da o'rinli bo'lib,  $r_2 \rightarrow r_1$  da limitga o'tish mumkin emas, chunki 1 va 2 nuqtalar mos tushsa,  $dV_1$  hajm elementida bo'lgan zarra bir vaqtning o'zida  $dV_2$  hajm elementida ham bo'ladi. Bu esa  $dV$  hajm elementida degan fikrga to'g'ri kelmaydi. Bu holatni hisobga oluvchi munosabat quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\langle n_1 n_2 \rangle = w_{12} \bar{n}^2 + \bar{n} \delta(r_2 - r_1). \quad (7.58)$$

Bu yerda  $\delta(x)$  – delta funksiya. Haqiqatan ham, qandaydir kichik  $\Delta V$  hajm ajratamiz va (7.58) ning har ikki tomonini  $dV_1 dV_2$  ga ko'paytirib, shu hajm bo'yicha integrallaymiz. O'ng tomondagi birinchi had bilan bog'liq bo'lgan integral  $\Delta V$  bo'yicha ikkinchi tartibli kichik miqdorni beradi. Ikkinchi had bilan bog'liq bo'lgan integral esa, birinchi tartibli kichik miqdor  $\bar{n} \Delta V$  ga teng bo'ladi. Bu esa kichik kattalik bo'lib, kichik hajm  $\Delta V$  da faqat 0 yoki 1 ta zarra bo'lishini ko'rsatadi.

Shuning uchun, (7.58) da  $\delta$ - funksiya ishtirok etgan hadni ajratib olish kerak, ya'ni

$$\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle = \bar{n} \delta(r_2 - r_1) + \bar{n} \nu(r), \quad (7.59)$$

bu yerda

$$\nu(r) = \bar{n} [w_{12}(r) - 1]. \quad (7.60)$$

Biz  $\nu(r)$  kattalikni  $\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle$  kabi korrelatsion funksiya deb ataymiz. Zarralar orasidagi masofa cheksizlikka intilganda korrelatsiya yo'qoladi, ya'ni  $\nu(\infty)$ .

Endi (7.59) tenglikni  $dV_1 dV_2$  bo'yicha qandaydir aniq hajm  $V$  bo'yicha integrallaymiz. Shu  $V$  hajmda to'liq zarralar soni  $N$  ni kiritamiz ( $\bar{n} V = N$ ), natijada quyidagi ifodani olamiz:

$$(\Delta N)^2 = N + n \int \nu(r) dV_1 dV_2$$

yoki  $dV_1 dV_2$  bo'yicha integrallashtan bitta zarra koordinatasi bo'yicha va nisbiy koordinata  $r$  bo'yicha integrallashtga o'tsak,

$$\int \nu(r)dV = \frac{\langle (\Delta N)^2 \rangle}{N} - 1 \quad (7.61)$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib, korrelyatsion funksiyadan qandaydir hajm bo'yicha olingan integral, shu hajmdagi to'la zarralar sonining kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi orqali ifodalanar ekan. Agar

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = -\frac{kTN^2}{V^2} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{kTN^2}{V^2 \left| \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right|} \quad (7.62)$$

tenglikni hisobga olsak, (7.62) integral termodinamik kattaliklar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\int \nu(r)dV = -\frac{kTN}{V^2} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T - 1 = \frac{kTN}{V^2 \left| \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right|} - 1. \quad (7.63)$$

Odatdagi klassik ideal gaz uchun  $\int \nu(r)dV = 0$  bo'ladi. Bu shuni anglatadiki, ideal gaz zarralari bir-birlari bilan o'zaro ta'sirda bo'lmaganliklari tufayli, turli xil zarralarning tutgan holatlari o'rtasida hech qanday korrelatsiya ham bo'lmaydi.

Aksincha, suyuqlikda (kritik nuqtadan uzoqda) (7.63) ifodadagi birinchi had, suyuqlikning kichik siqiluvchanligiga asosan birdan kichik bo'ladi va natijada  $\int \nu(r)dV$  minus birga yaqin bo'ladi. Suyuqlikni zich joylashtirilgan qattiq sharlar deb qarasaq, suyuqlik zarralari orasidagi o'zaro ta'sir doirasi molekullar o'lcham «a» ga yaqin bo'ladi. Bunday modelda korrelatsiya funksiya  $\nu(r)$  masofa ortishi bilan eksponential  $e^{-r/a}$  qonun bo'yicha kamayadi.

## 7.6. Foton gazida fluktuatsiya

Foton gazida energiya fluktuatsiyasini qarab chiqaylik. 1912-yilda A. Eynshteyn muvozanatli nurlanishda (absolut qora jismning nurlanishi) energiya fluktuatsiyasini hisoblash natijasida muhim fikrga keldi, ya'ni nurlanishning ikki tabiat-

liligi – korpuskular va to‘lqin xususiyati namoyon bo‘lishini aniqladi. Haqiqatan ham,  $\nu$ ,  $\nu + \Delta\nu$  chastota intervalida nurlanish spektrining o‘rtacha energiyasi

$$\bar{E}_\nu = \frac{8\pi h\nu^3 V \Delta\nu}{c^3 \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]}$$

dan foydalanib, energiyaning kvadratik o‘rtacha fluktuatsiyasini (7.35) ga ko‘ra hisoblash natijasida quyidagini olamiz:

$$\overline{(\Delta E_\nu)^2} = \frac{8\pi V h\nu^3 \Delta\nu}{c^3} \frac{h\nu \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]^2}. \quad (7.64)$$

Bu ifodani ikkiga ajratib yozamiz:

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta E_\nu)^2} &= \frac{8\pi V h^2 \nu^4 \Delta\nu}{c^3 \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]} + \frac{8\pi V h^2 \nu^4 \Delta\nu}{c^3 \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]^2} = \\ &= h\nu \bar{E}_\nu + \frac{c^3}{V 8\pi \nu^2 \Delta\nu} (\bar{E}_\nu)^2. \end{aligned} \quad (7.65)$$

(7.65) ifodaning birinchi hadi muvozanatli nurlanishning kvant korpuskular tabiatini, ikkinchi hadi esa muvozanatli nurlanishning klassik to‘lqin tabiatini beradi.

Haqiqatan ham, agar  $V$  hajmda  $N$  ta foton bo‘lsa, u holda uning energiyasi  $E_\nu = h\nu N$  bo‘ladi. Energiyaning kvadratik o‘rtacha fluktuatsiyasi  $\overline{(\Delta E_\nu)^2} = (h\nu \Delta N)^2 = (h\nu)^2 \overline{(\Delta N)^2} = (h\nu)^2 \bar{N} = h\nu \bar{E}_\nu$  bo‘ladi. Bu hol katta chastotalar intervaliga to‘g‘ri keladi ( $h\nu \gg kT$ ).

Klassik nurlanish maydoni uchun Reley–Jins qonuniga ko‘ra  $\nu$ ,  $\nu + \Delta\nu$  chastota intervalidagi o‘rtacha energiya

$$\bar{E}_\nu = \frac{8\pi kT \nu^2 \Delta\nu V}{c^3}.$$

Kvadratik o‘rtacha energiya esa

$$\overline{(\Delta E_\nu)^2} = kT^2 \left( \frac{\partial \bar{E}_\nu}{\partial T} \right)_\nu = kT^2 \frac{8\pi k \nu^2 \Delta\nu V}{c^3} = \frac{c^3 (\bar{E}_\nu)^2}{8\pi \nu^2 \Delta\nu V}. \quad (7.66)$$

Bu esa kichik chastotalar intervaliga to‘g‘ri keladi ( $h\nu \ll kT$ ).

## 7.7. Kvant gazlarda fluktuatsiya

Kuchli aynigan fermi-gaz va boze-gazlarda energiyaning fluktuatsiyasi va nisbiy fluktuatsiyasini qarab chiqaylik. Past temperaturalarda Fermi-gaz va Boze-gazlar aynigan holatda bo'ladi.

1. Past temperaturalarda metallardagi elektron gazining o'rtacha energiyasi (5.37) va issiqlik sig'imi (5.38) formulalar yordamida aniqlanadi. Energiya fluktuatsiyasi  $\overline{(\Delta E)^2} = kT^2 C$  ga teng bo'ladi. Nisbiy fluktuatsiyasi esa ( $T = 0$  dagi energiyasi hisobga olinmagan hol uchun) quyidagicha bo'ladi:

$$\delta_E = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{N}} \left( \frac{\mu_0}{kT} \right)^{1/2}.$$

Bu ifodadan ko'rinadiki, temperaturaning pasayishi bilan metallardagi elektron gaz energiyasining nisbiy fluktuatsiyasi ortib boradi. Past temperaturalarda Boze-gaz o'rtacha energiyasi

$$\bar{E} = 1,78AV(kT)^{5/2}, \text{ issiqlik sig'imi esa } C_V = \frac{5}{2} \cdot 1,78AVk(kT)^{3/2}$$

bo'ladi. Energiya fluktuatsiyasi  $\overline{(\Delta E)^2} = kT^2 C_V$  bo'ladi. Boze-gaz energiyasining nisbiy fluktuatsiyasi esa

$$\delta_E = \sqrt{\frac{0,702}{\pi V}} \left( \frac{h^2}{2mkT} \right)^{3/4}$$

bo'ladi.

2. Kvant ideal gazlarda zarralar soni fluktuatsiyasi va nisbiy fluktuatsiyasini qarab chiqaylik. Faraz qilaylik,  $k$  kvant holatdagi zarralar soni bo'lsin. Zarralar sonining o'rtacha kvadratik fluktuatsiyasi

$$\overline{(\Delta n_k)^2} = kT \frac{\partial \bar{n}_k}{\partial \mu}$$

formula yordamida hisoblanadi. Bu yerda  $\bar{n}_k$  muvozanatda  $\varepsilon_k$  energiyali holatdagi zarralarning o'rtacha soni.

a) Fermi-gaz uchun

$$\bar{n}_k = \frac{1}{\exp(\varepsilon_k - \mu)/kT + 1}.$$

Fermi-gaz zarralar sonining o'rtacha kvadratik fluktuatsiyasi

$$\overline{(\Delta n_k)^2} = \bar{n}_k(1 - \bar{n}_k), \quad (7.67)$$

nisbiy fluktuatsiyasi esa  $\delta_{n_k} = \sqrt{\frac{1}{\bar{n}_k} - 1}$  bo'ladi.

b) Boze-gaz uchun

$$\bar{n}_k = \frac{1}{\exp(\varepsilon_k - \mu)/kT - 1}.$$

Boze-gaz zarralar sonining o'rtacha kvadratik fluktuatsiyasi

$$\overline{(\Delta n_k)^2} = \bar{n}_k(1 + \bar{n}_k), \quad (7.68)$$

nisbiy fluktuatsiyasi esa  $\delta_{n_k} = \sqrt{1 + \frac{1}{\bar{n}_k}}$  bo'ladi.

d) Maksvell-Bolsman gazi uchun

$$\bar{n}_k = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}\right).$$

Bunday klassik gaz uchun zarralar sonining kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi

$$\overline{(\Delta n_k)^2} = \bar{n}_k, \quad (7.69)$$

nisbiy fluktuatsiyasi  $\delta_{n_k} = \sqrt{1/\bar{n}_k}$  bo'ladi.  $n_k \ll 1$  hol uchun (7.67) va (7.68) ifodalar (7.69) ifodaga o'tadi.

## 7.8. Turli xil o'lchov asboblarning sezgirligi

Har qanday fizik yoki mexanik kattaliklar fluktuatsiya tufayli o'zining o'rtacha qiymati atrofida uzluksiz ravishda o'zgaradi va natijada turli xil o'lchov asboblarning sezgirlik chegarasini aniqlaydi. Haqiqatan ham, agar fizik kattalikning qiymati asboddagi fluktuatsiyadan kichik bo'lsa, u holda fizik kattalikni bir marta o'lchash bilan aniqlash mumkin emas. Bir nechta misollarni qarab chiqaylik.

1. Temperaturani o'lchashda gaz termometridan foydalaniladi. Shuning uchun gaz termometrining sezgirligi gaz hajmi

fluktuatsiyasi orqali aniqlanadi. Termometrda gaz Klapeyron–Mendeleyev tenglamasini qanoatlantiradi. U holda gaz hajmining  $\Delta V$  ga o'zgarishi temperaturaning quyidagicha o'zgarishiga olib keladi:

$$\Delta T = \frac{p}{kN} \Delta V, \quad (7.70)$$

bu yerda  $\Delta T = T - \bar{T}$ ,  $\Delta V = V - \bar{V}$ . (7.22) ga asosan ideal gaz uchun  $\overline{\Delta V^2} = \frac{V^2}{N}$ , natijada temperaturaning o'zgarishi

$$\Delta T = \frac{p}{kN} \sqrt{\frac{V^2}{N}} = \frac{T}{\sqrt{N}}. \quad (7.71)$$

Agar gazda  $N \sim 10^{20}$  ta zarra borligini hisobga olsak, u holda hajm fluktuatsiyasi tufayli gaz termometri yordamida temperaturani o'lchashdagi xatolik

$$\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-10},$$

ya'ni juda kichik bo'ladi.

2. Ko'pincha fizik kattaliklarni o'lchash uchun asbob strelkasining chetlanishi yoki kvars ipining burilishidan foydalaniladi. Bu holda ip yoki strelka fluktuatsiyasi (issiqlikdan harakat) asbob sezgirligini chegaralaydi. Strelkali asbob issiqlik harakat o'rtacha energiyasi  $kT/2$  ga teng bo'lgan bitta aylanma erkinlik darajasiga ega deb hisoblab, strelkaning tasodifan chetlanish kattaligini baholash mumkin. Ip yoki strelka muvozanat holat atrofida kichik tebranishni bajaradi. Tebranishning o'rtacha kanetik energiyasi uning o'rtacha potensial energiyasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\overline{E}_{\text{pot}} = \frac{\overline{\kappa \varphi^2}}{2} = \frac{kT}{2}, \quad (7.72)$$

bu yerda  $\overline{\varphi^2}$  - muvozanat holatdan chetlanish burchagining kvadratik o'rtachasi va  $\kappa$  - elastiklik koeffitsiyenti. Bu ifodadan

$$\overline{\varphi^2} = \frac{kT}{\kappa}. \quad (7.73)$$

Demak, asbob qanchalik sezgir bo'lsa (asbob sezchirligi elastiklik  $\kappa$  ga teskari proporsionaldir), uning ko'rsatuvlarida fluktuatsiya shunchalik katta bo'ladi. Agar asbob strelkasining massasi katta bo'lsa, fluktuatsiya amaliy jihatdan uning ko'rsatuvlariga ta'sir ko'rsatmaydi, ammo u vaqtda asbob sezgirligi juda past bo'ladi. Shunday qilib, o'lchash aniqligi fluktuatsiya bilan chegaralanar ekan. Bu holning muhimligi shundaki, kvarsning burchak chetlanish kvadratik o'rtachasi orqali tajribada Bolsman doimiysini aniqlash mumkin.

3. Elektrik zanjirlarda ham zaryadlar taqsimoti fluktuatsiyasi bilan bog'langan issiqlik toki yuzaga keladi. Ammo zaryadlar zichligining har qanday o'zgarishi elektr maydoni ta'sirida o'tkazgich ichiga to'lqin ko'rinishida uzatiladi. Bu holda o'tkazgichda turg'un to'lqinlarni yuzaga keltiruvchi fluktuatsiyalar eng barqaror bo'ladi. Qutblanishni hisobga olgan holda  $l$  uzunlikdagi o'tkazgichda  $\nu$ ,  $\nu + d\nu$  chastota intervalidagi turg'un elektromagnit to'lqinlar soni

$$dn(\nu) = 2 \frac{2ld\nu}{c} \quad (7.74)$$

bo'ladi. Har bir turg'un to'lqinga, garmonik ossillator energiyasiga mos keluvchi,  $kT$  energiya to'g'ri keladi deb hisoblaymiz. U holda  $l$  uzunlikdagi zanjirda  $\nu$ ,  $\nu + d\nu$  chastota intervalidagi turg'un to'lqinlar energiyasi

$$dE(\nu) = \frac{4lkTd\nu}{c} \quad (7.75)$$

bo'ladi. Birlik uzunlikdagi zanjirda  $\nu$ ,  $\nu + d\nu$  chastota intervalidagi ana shunday fluktuatsiyalangan turg'un to'lqinlar quvvati

$$dW(\nu) = dE(\nu) \cdot \frac{c}{l} = 4kTd\nu \quad (7.76)$$

bo'ladi. Chunki fluktuatsiya toki, zaryadlarning issiqlik harakati natijasida, o'tkazgich ichida paydo bo'ladi, u vaqtda ularning hamma energiyasi qaytadan qarshilikda issiqlikka aylanadi. Birlik uzunlikdagi  $R$  qarshilikli o'tkazgichda quvvatning yo'qolishi Joul-Lens qonuniga asosan

$$\frac{dW(\nu)}{d\nu} = \frac{\overline{E^2(\nu)}}{R} \quad (7.77)$$

bo'ladi. Bu yerda  $\overline{\mathcal{E}^2} - \nu$  chastotali to'lqin uchun elektr yurituvchi kuch fluktuatsiyasi ning kvadratik o'rtachasi. Bundan bitta qarshilikda fluktuatsiya toklari ko'rinishda ajralib chiqqan quvvatning boshqa qarshiliklar tomonidan yutilishi kelib chiqadi. Issiqlik muvozanat holatda o'tkazgichning bir xil qarshilikli qismlarida yutilgan quvvat o'tkazgichlarning tabiatiga bog'lanmagan holda teng bo'lishi shart, aks holda, bitta qarshilik boshqalari hisobida qizigan bo'lar edi. Bu esa termodinamikaning ikkinchi qonuniga ziddir. (7.76) va (7.77) ifodalarga asosan elektr yurituvchi kuch fluktuatsiyasi uchun Naykvist formulasini quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$\overline{\mathcal{E}^2}(\nu) = 4kTR(\nu). \quad (7.78)$$

Bu formula shuni ko'rsatadiki, elektr yurituvchi kuch fluktuatsiyasining kvadratik o'rtachasi o'tkazgich temperaturasiga va qarshiligiga proporsional ekan. Bu esa tajribada juda yaxshi o'z isbotini topdi.

Naykvist formulasining fizik ma'nosi shundan iboratki, issiqlik fluktuatsiyasi garmonik tebranishlarning hamma mumkin bo'lgan chastotalarining xaotik aralashmalaridan iborat ekan.

Shu bilan birga, (7.75) formulani olishda klassik sistema uchun har bir tebranish energiyasi  $kT$  ga teng deb qabul qildik, ya'ni klassik garmonik ossillyatorning o'rtacha energiyaga teng dedik. Shuning uchun kvant sistemalarda fluktuatsiyani qarashda (7.75) formuladagi  $kT$  ni kvant ossillatorning o'rtacha energiyasi bilan almashtirish kerak:

$$E(\nu, T) = \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (7.79)$$

Natijada, umumlashgan Naykvist formulasini olamiz. Fluktuatsiya toklari hamda «kasr effekt» fluktuatsiyasi bilan bog'langan katoddan uchib chiquvchi elektronlar soni zamonaviy elektron asboblarning sezgirligini chegaralaydi.

## 7.9. Osmonning havo ranglilik nazariyasi

Yorug'lik nurining parallel dastasi atmosferadan o'tayotganda sochilishini ko'rib chiqamiz. Atmosfera zichligi hamma nuqtada bir xil deb faraz qilsak, uning sindirish ko'rsatkichi



ham hamma nuqtada bir xil bo'ladi va natijada yorug'likning sochilishi yuz bermaydi. Bu holda Yer sirtidan qopqora osmonni va ko'zni qamashtiradigan yorug' quyoshni ko'ramiz. Amalda esa biz osmonni zangori rangda ko'ramiz. Osmonning zangori bo'lib ko'rinishiga sabab, atmosfera zichligi fluktuatsiyasi tufayli yorug'likning havoda molekular sochilishidir.

Yorug'likning sochilishida chastotaning o'zgarishiga qarab ikki xil sochilish bir-biridan farqlanadi. Birinchisi fluktuatsiyaga bog'lanmagan bo'lib kombinatsion sochilish deyiladi. Bu holda sochilish spektrida asosiy chiziqqa nisbatan siljigan chiziqlar paydo bo'ladi. Bunday siljish molekularlar ichki holatining o'zgarishidan dalolat beradi. Ikkinchisi fluktuatsiyalar bilan bog'langan bo'lib, muvozanatli yoki Reley sochilishi deyiladi. Bunda sistemadagi kichik fluktuatsiyalar ahamiyatga ega bo'lib, ularning o'lchamlari yorug'lik to'lqin uzunligi tartibida bo'ladi. Muvozanatli sochilish fluktuatsiyalarda bo'lganligi uchun molekularlarning ichki holati o'zgarmaydi. Shu sababli bunday sochilishda yorug'likning to'lqin uzunligi deyarli o'zgarmaydi. Muvozanatli nurlanish nazariyasini Eynshteyn bergan.

Molekularlar issiqlik harakati statistik xarakterda bo'lgani tufayli, atmosferada zichlik fluktuatsiyalari paydo bo'ladi va ayrim kichik hajmlarda molekularlarning zichlanishi va siyraklanishi yuz beradi. Zichlikning  $\Delta\rho$  fluktuatsiyasi muhit dielektrik singdiruvchanligining  $\Delta\epsilon$  fluktuatsiyasiga yoki sindirish ko'rsatkichining  $\Delta n$  fluktuatsiyasiga ( $\epsilon = n^2$ ) sabab bo'ladi va yorug'lik nurlarining sochilishi yuzaga kelishiga sababchi bo'ladi. Sochilgan nurning spektral tarkibi sochuvchi muhit - atmosferaning rangini aniqlaydi.

Osmonning zangoriligini xarakterlovchi miqdoriy ifodani topish uchun dielektrik singdiruvchanlik fluktuatsiyasini zichlik fluktuatsiyasi orqali yozamiz:

$$\Delta\epsilon = \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \Delta\rho. \quad (7.80)$$

Dielektrik singdiruvchanlik fluktuatsiyasini yorug'likning sochilishiga ta'sirini aniqlash uchun qutblanish vektori va elektr maydon kuchlanganligi orasidagi bog'lanishdan foydalanamiz:

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon-1}{4\pi} \mathbf{E}, \quad (7.81)$$

bu yerda  $\mathbf{E}$  – elektr maydon kuchlanganligi,  $\mathbf{P}$  – qutblanish vektori. Tushayotgan yorug'likning elektr va magnit maydon kuchlanganliklari fluktuatsiyalanmaydi va fazoning har bir nuqtasida garmonik qonun bo'yicha o'zgaradi, ya'ni  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$  deb olamiz. Demak, dielektrik singdiruvchanlik fluktuatsiyasi faqat qutblanish vektorining fluktuatsiyasi bilan bog'langan bo'ladi. U holda (7.81) ifodaga ko'ra qutublanish vektorining o'zgarishi quyidagiga teng bo'ladi:

$$\Delta \mathbf{P} = \frac{\Delta \epsilon}{4\pi} \mathbf{E}_0 \cos \omega t = \Delta \mathbf{P}_0 \cos \omega t. \quad (7.82)$$

Bu yerda  $\Delta \mathbf{P}_0 = \frac{\mathbf{E}_0}{4\pi} \Delta \epsilon$ . Qutblanishning o'zgarishi o'z navbatida muhitda o'zgaruvchi dipol momentini hosil qiladi. Elektrodinamika kursidan ma'lumki, qutblanishi o'zgaruvchi bo'lgan sohani ikkilamchi elektromagnit (sochilgan) to'lqinlar tarqatuvchi dipol deb qarash mumkin. Dipolning tebranish chastotasi elektromagnit to'lqinining chastotasi bilan mos keladi. Dielektrik esa, shunday dipollarning to'plamidan iborat bo'ladi. Ularning soni va kattaligi zichlik fluktuatsiyasiga bog'liq bo'ladi. Bu dipollarda atmosferadan o'tayotgan yorug'likning bir qismi sochiladi. Shunday qilib, atmosferada yorug'likning sochilish masalasini elektrodinamika kursidan yaxshi tanish bo'lgan dipol nurlanish masalasiga olib keldik.

Yuqoridagi fikrlar asosida bir qator elektrodinamik hisoblarni amalga oshirib, sochilish energiyasi oqimining zichligi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$S = \frac{S_0}{(4\pi)^2} \frac{v^2}{r^2} \frac{\omega^4}{c^4} (\Delta \epsilon)^2 \sin^2 \theta, \quad (7.83)$$

bu yerda  $v$  – fluktuatsiyaga duchor bo'lgan hajm,  $\theta$  – dipol momenti va sochilish yo'nalishi orasidagi burchak,

$$S_0 = \frac{c}{4\pi} E^2$$

tushayotgan yorug'lik oqimining zichligi.

Agarda yorug'likning  $v$  hajmdan emas, butun  $V$  hajmdan sochilishini hisobga olsak, u holda (7.83) ni  $v$  elementar hajmlar soni  $V/v$  ga ko'paytirish natijasida  $V$  hajmdan sochilgan to'lqin intensivligini olamiz:

$$S = \frac{S_0}{(4\pi)^2} \frac{V\nu}{r^2} \frac{\omega^4}{c^4} (\Delta\epsilon)^2 \sin^2\theta. \quad (7.84)$$

Bu formuladan yorug'likning ko'rinish spektrida binafsha va ko'k nurlarning kuchli sochilishligi kelib chiqadi. Bu esa atmosferaning xarakterli bo'lishiga olib keladi. Aksincha, sochilmadan kelgan quyosh nurlari qizil va sariq spektrga boy bo'ladi (Quyoshning chiqishi va botishida). Bu esa quyoshning rangdorligini tushuntiradi.

Dielektrik singdiruvchanlik o'zgarishining kvadratik o'rtachasini zichlik o'zgarishining kvadratik o'rtachasi orqali ifodalaymiz:

$$\overline{(\Delta\epsilon)^2} = \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\right)^2 \overline{(\Delta\rho)^2} = \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\right)^2 \frac{\rho^2}{v^2} kT \left| \left(\frac{\partial\nu}{\partial\rho}\right)_{T,N} \right| = \left(\rho \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\right)^2 \frac{kT}{v} \gamma_T.$$

Bundan tashqari  $\epsilon = 1 + 4\pi\alpha\rho$  bog'lanishdan

$$\rho \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} = \epsilon - 1 = n^2 - 1 = (n+1)(n-1) \simeq 2(n-1)$$

ekanligini hisobga olsak, u holda (7.84) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{S}{S_0} = \frac{4\pi^2(n-1)^2 kTV \gamma_T \sin^2\theta}{r^2 \lambda^4}.$$

Bu yerda  $\lambda = 2\pi c/\omega$  — sochilgan (tushayotgan) yorug'likning

to'lqin uzunligi,  $n$  — muhitning sindirish ko'rsatkichi,  $\gamma_T = \frac{1}{K_T}$  — izotermik siqiluvchanlik. (7.85) Reley formulasi deb yuritiladi. Bu formula yorug'likning zichlik fluktuatsiyalarida sochilishida kuzatiladigan asosiy bog'lanish ( $S \sim \lambda^{-4}$ ) ni tushuntiradi. Bu formuladan shu narsa kelib chiqadiki, muhitning kritik sohasida

$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \sim 0$  bo'ladi va zichlik eng katta fluktuatsiyaga

duchor bo'ladi, shuning uchun yorug'likning eng katta sochilishi yuz beradi. Odatda, bu hodisa kritik opalessensiya deb yuritiladi. Kritik opalessensiyada yorug'lik muhit orqali juda yomon o'tadi va tomoman to'la holda hamma tomonga sochiladi.

## 7.10. VII bobga oid masala va savollar

1. Bir jinsli termodinamik sistemada hajmning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi aniqlansin.

2. Termostat ichida joylashtirilgan sistemada temperatura-ning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi aniqlansin.

3. O'zaro bog'lanmagan  $T$  va  $V$  o'zgaruvchilarda energiya-ning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi topilsin.

*Yechish.*

$$\Delta E = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T \Delta V,$$

$$\overline{(\Delta E)^2} = C_V^2 \overline{(\Delta T)^2} + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T\right]^2 \overline{(\Delta V)^2} + 2C_V \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T \overline{\Delta T \Delta V};$$

$$\overline{\Delta T \Delta V} = 0; \quad \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

va oldingi masalalar natijasidan foydalanib, quyidagi ifodani olamiz:

$$\overline{(\Delta E)^2} = C_V k T^2 + \left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right]^2 k T \left|\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right|.$$

4. O'zaro bog'lanmagan  $T$  va  $V$  o'zgaruvchilarda  $\overline{\Delta T \Delta p}$  topilsin.

5.  $T$  va  $V$  o'zgaruvchilarda  $\Delta V \Delta p$ ,  $\Delta S \Delta T$  va  $\Delta S \Delta V$  topilsin.

6. O'zaro bog'lanmagan  $p$  va  $S$  o'zgaruvchilarda  $(\Delta A)^2$  topilsin.

7.  $\overline{(\Delta S)^2} = k C_p$ ,  $\overline{\Delta S \Delta p} = 0$  va  $\overline{(\Delta p)^2} = -k T \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S$  ekanligi ko'rsatilsin.

8. Gibbs taqsimoti o'rinli bo'lgan termostatda yotgan sistema uchun energiya fluktuatsiyasi topilsin.

9. Past temperaturalarda metallardagi elektron gazi energiyasining nisbiy fluktuatsiyasi topilsin.

10. Past temperaturalarda qattiq jism energiyasining nisbiy fluktuatsiyasi topilsin.

11. Ikki sathli sistemada energiya fluktuatsiyasi hisoblansin.  
 12. Gibbsning katta kanonik taqsimotidan foydalanib,

$$\overline{(\Delta N)^2} = kT \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu} \right)_{T,V}$$

tenglik isbotlansin.

13. a) Bolsman; b) Fermi-Dirak; d) Boze-Eynshteyn taqsimotlari o'rinli bo'lgan ideal gazlardagi zarralar soni uchun nisbiy

fluktuatsiya topilsin.  $\delta_N = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta N)^2}}}{N}$ .

14. Fluktuatsiya hodisasi. Formulasi.

15. Termodinamik sistemalarda termodinamik kattaliklar fluktuatsiyasi: 1) hajm fluktuatsiya; 2) temperatura fluktuatsiya; 3) zarralar soni fluktuatsiyasi; 4) entropiya fluktuatsiyasi; 5) bosim fluktuatsiyasi, ichki energiya fluktuatsiyasi h.k.

16. Fluktuatsiyani yuzaga keltiruvchi maydon bajargan ishini-ning fluktuatsiyasi.

17. Foton gazida fluktuatsiya hodisasining yuzaga kelishi. Foton gazining ikki tabiatliligi.

18. Reley formulasi va fizik ma'nosi.

19. Puasson formulasi va tatbig'i.

## VIII bob

### NOMUVOZANAT JARAYONLAR TERMODINAMIKASI

Nomuvozanatdagi sistemalar termodinamikasi nazariy fizikaning nisbatan yosh va intensiv taraqqiy etayotgan bo'limi hisoblanadi. Nomuvozanatli jarayonlar termodinamikasi avvaliga kuchsiz nomuvozanat (muvozanatdan kichik chetlashgan) holatlar termodinamikasini o'rganishga klassik termodinamika natijalarini umumlashtirilgan ko'rinishda tatbiq qilishdan boshlangan. Keyinchalik kuchli nomuvozanat sistemalarda jarayonlar nazariyasini yaratishda foydalanilgan. Klassik termodinamika nostatistik jarayonlarni tahlil qilishda sistema holatini karakterlovchi kattaliklarni bog'lovchi tengsizliklar yordamida u yoki bu jarayonlarning yo'nalishini ko'rsatadi, ammo miqdoriy xulosalar olishga imkon bermaydi. Qaytmas jarayonlarning to'liq va chuqur nazariyasi statistik fizikaning kinetika bo'limida beriladi.

Nomuvozanat jarayonlarga klassik termodinamika natijalarini umumlashtirish eng avval lokal muvozanat tasavvuriga asoslanadi.

Muvozanatdagi sistema holat parametrlari har doim butun sistemaga taalluqli bo'lsa, qaytmas jarayonlar o'tayotgan sistemada esa termodinamik parametrlar faqat sistemaning ayrim bo'laklariga taalluqli bo'ladi deb qaraladi. Har qanday makroskopik jismni kichik makroskopik bo'laklarga bo'lish mumkin. Bu kichik makroskopik bo'laklar ham juda katta sondagi zarralardan tashkil topgan bo'ladi. Bunday bo'laklar o'zining tarkibi, fizik xossalari va boshqa ba'zi xususiyatlari bilan uni o'rab turgan sistemadan farqlanadi. Ya'ni kvazi berk yoki kvazi yakkalangan sistema deb ko'rish mumkin.

Butun termodinamik sistema muvozanat holatga kelgunga qadar muvozanat eng avvalo jismning ana shu kichik qismlarida tiklanadi. Bunday muvozanat lokal muvozanat deyiladi. Lokal muvozanatdagi qismlarga aniq temperatura, bosim, kimyoviy potensial va boshqa termodinamik kattaliklar to'g'ri keladi. Odatda, bu parametrlar lokal parametrlar deb yuritiladi.

Bunday muvozanat holatni xarakterlovchi termodinamik kataliklar fazoviy koordinatalar va vaqtning funksiyasi bo'ladi. Lokal muvozanatga kelish vaqti bo'lak o'lchamiga bog'liq bo'ladi.

Nomuvozanat termodinamikada, asosan, ochiq sistemada o'tishi mumkin bo'lgan jarayonlar to'la-to'kis o'rganiladi. Ochiq sistemada muhit bilan modda, issiqlik, ish va h.k. almashinishlar yuz berib turadi. Hamma real makroskopik sistemalar qandaydir darajada ochiq sistema bo'ladi.

Ochiq sistemalarda tashqi muhit bilan almashinish oqim shaklida amalga oshiriladi (modda oqimi, energiya oqimi, entropiya oqimi va h.k.). Shuning uchun oqim tushunchasi qaytmas jarayonlar termodinamikasida muhim tushuncha bo'lib hisoblanadi.

Bir jinsli bo'lmagan sistemada sodir bo'ladigan o'zgarishlar ikki sababdan paydo bo'ladi. Birinchisi, sistemani tashkil qilgan ayrim bo'laklar va zarralarning o'zaro ta'siri tufayli bo'lsa, ikkinchisi, tashqi maydon ta'sirida yuz beradi. Har ikkila xil jarayon o'zining tabiatiga ko'ra, bir-biridan tubdan farqlanadi. Sistema entropiyasining «paydo» bo'lishiga zarralarning o'zaro ta'siri tufayli holatning o'zgarishi sabab bo'ladi.<sup>1</sup> Xususan, gazlardagi qaytmaslikning sababi undagi zarralarning to'qnashuvidir. Erkin oqimlar o'rtacha maydon tufayli bo'ladigan effektlar entropiyasining paydo bo'lishiga sabab bo'lmaydi. Shunday qilib, qaytmaslik yuzaga kelishi uchun o'zaro ta'sirning bo'lishi shart.

Juda ko'p tipdagi qaytmas jarayonlar mavjud bo'lsada, ularni shartli ravishda ikki guruhga ajratish mumkin:

1. Turli fazalarning aralashishi bilan bog'liq bo'lgan qaytmas jarayonlar.

2. Dissipativ tipdagi qaytmas jarayonlar.

Birinchi tipdagi qaytmas jarayonga plazmaning qaytmas holati misol bo'la oladi. Plazmada yetarlicha uzoq vaqt zaryadlarning kollektivi (to'plami) lokal tebranib tura olishi mumkin. Bu tebranishlar, hatto to'qnashishlar sodir bo'lmasa ham so'nishi mumkin. (Bu Landau so'nishi deb ham yuritiladi.) Bunday tebranishlarning sodir bo'lishi boshlang'ich holatga bog'liqdir.

---

<sup>1</sup> Entropiya termodinamik sistemaning xossasini ifodalovchi ichki parametrlar bo'lib hisoblanadi. Shu sababli entropiyaning «o'zgarishi» degan so'zning o'rniga «paydo» bo'ladi degan atamani ishlatish noo'rindir. Entropiyaning o'sish qonuniga asosan, u hech qachon kamaymaydi, shu sababli nomuvozanatli termodinamikada entropiyaning «paydo» bo'lishi degan atama o'rnashib qolgan.

Ikkinchi misol. Boshlang'ich vaqtda devorlari ideal qaytargich bo'lgan quticha ichida bir-biri bilan o'zaro ta'sirda bo'lmagan zarralar dastasi bo'lsin. Qandaydir vaqt o'tgandan keyin zarralar bir jinsli holatga o'tadi. Jarayonning davom etishini ko'rsatadigan bu vaqt, sistema (dastalar)ning boshlang'ich holati «tayyorlanish»ga bevosita bog'liqdir. Bu ikkala misoldagi jarayonlarda, sistemaning ichki xususiyatlariga bog'liq bo'lgan, boshlang'ich shartga bog'liq bo'lmagan xarakterli vaqt mavjud emas.

Ikkinchi tipdagi qaytmas jarayonlarga misol sifatida diffuziya jarayonini ko'rib chiqish mumkin. Bu jarayonda nihoyatda betaritib va juda ko'p o'zaro ta'sir tufayli boshlang'ich holat esdan chiqariladi. Bundan ko'rinib turibdiki, diffuziya jarayoni fazaviy aralashmali jarayonlardan tubdan farq qiladi. Bundagi jarayon, bir tomondan o'zaro ta'sir dinamikasiga, ikkinchi tomondan, sistemaning umumiy makroskopik xossasi: zichlik, temperatura, bosim va shu kabilarga bog'liqdir. Dissipativ tipdagi jarayonga ma'lum mashtabli vaqt tegishli. Bu vaqt sistemaning boshlang'ich holatiga bog'liq bo'lmaydi. Umuman, dissipativ jarayonlar sistemaning muhim xususiyatini aks ettiradi.

Sistemaning makroskopik miqyosdagi evolutsiyasini xarakterlaydigan kattalik – nomuvozanatli termodinamikaning asoslaridan birini tashkil etgan entropiyadir. Nomuvozanatli termodinamika usulining markaziy qismi – termodinamikaning ikkinchi qonunidir. Bu qonun qaytmas jarayonlar bilan bevosita bog'liq. Bu qonunga ko'ra, sistemaning holat funksiyasi – entropiyaning mavjudligidir. Yakkalangan sistemada qaytmas jarayonlar borganda uning entropiyasi ortadi. Sistema muvozanat holatiga kelgandagina entropiyaning ortishi to'xtaydi va u maksimum qiymatga erishadi. Nomuvozanatli termodinamikaning asosiy vazifasi shu qaytmas jarayon entropiyasi (entropiya paydo bo'lish tezligi) bilan nomuvozanatli holatdagi qaytmas jarayonlar parametrlari orasidagi bog'lanishni aniqlashdan iborat.

## **8.1. Nomuvozanat jarayonlar termodinamikasining asosiy tenglamalari**

Ma'lumki, termodinamik muvozanatdagi sistemalarda temperatura va kimyoviy potensial butun sistema bo'ylab o'zgarmas bo'ladi:



$$\text{grad}T = 0, \text{ grad}\mu = 0.$$

Agar bu shartlar bajarilmasa, ya'ni  $\text{grad}T \neq 0$ ,  $\text{grad}\mu \neq 0$ , bo'lsa, u holda sistemada massa, energiya, elektr zaryadi va h.k. oqimlarni paydo qiluvchi qaytmas jarayonlar yuzaga keladi.

Faraz qilaylik, termodinamik parametrlar – massa, energiya, entropiya va shu kabilar zichligining lokal qiymatlari mavjud bo'lsin, ya'ni cheksiz kichik hajmda bu parametrlar ma'noga ega bo'lsin va bular uchun ma'lum termodinamik munosabatlar o'rinli bo'lsin.

Sistemaning lokal muvozanatdagi bo'lagining holati Gibbs tenglamasi yordamida aniqlanadi:

$$Tds = dE_0 + p dv - \sum \mu_i dc_i. \quad (8.1)$$

Bu yerda  $\mu_i$  –  $i$ - komponentning kimyoviy potentsiali,  $c_i = M_i/M$  – «solishtirma» massa,  $v = V/M$  – «solishtirma» hajm,  $s = S/M$  – «solishtirma» entropiya,  $E_0 = E/M$  – «solishtirma» energiya. Hamma kattaliklar lokal kattaliklar bo'lib hisoblanadi.

Qaytmas jarayonlar uchun adiabatik sistemalarning birlik hajmda entropiyaning paydo bo'lish tezligi:

$$\sigma = \frac{d(\rho s)}{dt} = \sum_i \frac{\partial(\rho s)}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt}, \quad (8.2)$$

bu yerda  $\rho s$  – birlik hajmga to'g'ri kelgan entropiya,  $a_i(\mathbf{r}, t)$  – termodinamik parametrlar,  $\partial(\rho s)/\partial a_i = X_i$  termodinamik kuch,  $da_i/dt = I_i$  termodinamik oqim deb yuritiladi. Termodinamik oqim termodinamik parametrlar  $a_i(\mathbf{r}, t)$  ning o'zgarish tezligini aniqlaydi. Entropiyaning yuzaga kelish tezligini ifodalovchi (8.2) ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$\sigma = \sum_i I_i X_i. \quad (8.3)$$

Sistema entropiyasi ayrim bo'laklar entropiyalari yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$S = \int \rho s dV.$$

## 8.2. Balans tenglamasi va saqlanish qonunlari

Balans tenglamasi va turli xil kattaliklarning saqlanish qonunlarini topaylik. Har qanday ekstensiv kattalik  $B(x, y, z, t)$  balans tenglamasiga bo'ysunadi:<sup>2</sup>

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{I}_B + \sigma_B, \quad (8.4)$$

bu yerda  $\mathbf{I}_B$  -  $B$  kattalikning oqim zichligi,  $B = \rho b$  ( $\rho$  - zichlik,  $b$  - birlik massaga to'g'ri kelgan qiymati),  $\sigma_B$  - shu kattalikning hajm va vaqtga nisbatan uning manbalari hisobiga o'zgarishi yoki  $B$  kattalik o'zgarishini yuzaga kelish tezligi. Agar (8.4) da  $\sigma_B = 0$  bo'lsa, u uzluksizlik tenglamasiga o'tadi va  $B$  ning saqlanish qonunini ifodalaydi:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{I}_B = 0.$$

Massaning saqlanish qonuni quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (8.5)$$

bu yerda  $\mathbf{v}$  -  $t$  vaqt momentida  $x, y, z$  nuqtadagi massa tezligi. Vaqt bo'yicha to'la hosilani kiritsak,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad}).$$

Bu holda massaning saqlanish qonuni

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Entropiyaning balans tenglamasi

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{I}_{s,n} + \sigma, \quad (8.6)$$

bu yerda  $\mathbf{I}_{s,n} = \mathbf{I}_s + s\mathbf{v}$  - entropiyaning to'la oqimi. (8.6) tenglamani termodinamikaning asosiy tenglamasidan keltirib chiqarish mumkin:

---

<sup>2</sup> Elektrodinamika kursidan bunday tenglama o'quvchilarga ma'lum bo'lib, elektromagnit maydon energiyasining saqlanish qonunini yoki balans tenglamasini ifodalagan edi.

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{dE_0}{dt} + P \frac{dv}{dt} - \sum_i \mu_i \frac{dc_i}{dt}.$$

Agar (8.5) formulani hisobga olsak

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{I}_s + \sigma, \quad \mathbf{I}_s = \mathbf{I}_{s,n} - s \rho \mathbf{v},$$

bu yerda  $s \rho \mathbf{v}$  – entropiya konvektiv oqimi.

Misol sifatida temperatura gradienti mavjud bo'lgan bir jinsli qattiq jismlarda entropiyaning balans tenglamasi va entropiyaning hosil bo'lish tezligi  $\sigma$  ni aniqlaylik. Faraz qilamiz,  $E_0$  – solishtirma ichki energiya bo'lsin. Issiqlikdan kengayish tufayli yuzaga kelgan o'zgarishlarni hisobga olmaymiz:

$$T ds = dE_0.$$

Energiyaning saqlanish qonuni

$$\frac{d}{dt} \int (\rho E + \rho \frac{v^2}{2}) dV = -\oint j_E ds, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho E + \rho \frac{v^2}{2}) = -\operatorname{div} j_E$$

ga ko'ra

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} j_E,$$

bu yerda  $\mathbf{I}_E$  – issiqlik oqimining zichligi.

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} \quad \text{va} \quad \rho \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{I}_E,$$

$$T \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial E_0}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{I}_E. \quad (8.7)$$

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{I}}{T} = \frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{I} + \left( \mathbf{I}, \operatorname{grad} \frac{1}{T} \right) = \frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{I} - \frac{1}{T^2} (\mathbf{I}, \operatorname{grad} T)$$

dan foydalanish natijasida (8.7) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{I}_s + \sigma. \quad (8.8)$$

Entropiyaning balans tenglamasi. Bu yerda  $\mathbf{I}_s = \frac{\mathbf{I}_E}{T}$  – entropiya oqimining zichligi.

$$\sigma = (I, -\frac{1}{T^2}(\text{grad}T)) = \sum_{i=1}^3 I_i X_i \quad (8.9)$$

$$X_i = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial X_i}$$

oqimga mos kelgan termodinamik kuch.

$$\sigma = \left( I, -\frac{1}{T^2} \text{grad}T \right) = \left( -\alpha \text{grad}T, -\frac{1}{T^2} \text{grad}T \right) = \frac{\alpha}{T^2} (\text{grad}T)^2.$$

Bundan  $\alpha > 0$  ligi kelib chiqadi, chunki  $\sigma \geq 0$  bo'lishi talab qilinadi ( $\alpha$  – issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti).

Yuqorida qaralgan masalaga o'xshash, Gibbs tenglamasi yordamida lokal muvozanat holatda bo'lgan turli xil nomuozanat sistemalar uchun entorpiya balans tenglamalarini olish mumkin.

### 8.3. Chiziqli qaytmas jarayonlar

Sistemaning muvozanat holatidan kichik chetlanishlarida u yoki bu qaytmas jarayonlarda «sabab» va «natija» orasida chiziqli bog'lanishlar yuzaga keladi. Boshqacha qilib aytganda, nomuozanat termodinamikada oqim («natija») berilgan maydon xususiyatini xarakterlovchi gradient («sabab») tufayli yuzaga keladi. Masalan, issiqlik oqimi temperatura gradienti tufayli yuzaga keladi (Fure qonuni):

$$I = -\alpha \text{grad}T,$$

bu yerda  $\alpha$  – issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti. Aralashma komponenti oqimining konsentratsiya gradientiga proporsionallik to'g'risidagi diffuziya qonuni (Fik qonuni):

$$I = -D \text{grad}C,$$

$D > 0$  bo'lib, diffuziya koeffitsiyenti deyiladi. Elektr zaryadlar oqimining maydon potentsiali gradientiga proporsionalligi to'g'risida qonun (Om qonuni):

$$I = -\sigma \text{grad}\varphi,$$

$\sigma > 0$  bo'lib, elektr o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti deyiladi va h.k. Boshqa bir qator qaytmas jarayonlarni xarakterlovchi qonuniyatlarni ko'rsatish mumkin.

Ba'zi hollarda «sabab» va «natija» o'rinlarini almashtirish mumkin. Masalan, adiabatik yopiq sistemalarda qaytmas jarayon o'tayotgan bo'lsa, u holda sistema entropiyasi o'sadi. Qaytmas jarayonlar va entropiya o'sishi o'zaro bog'langan hodisalar bo'lgani uchun, bu yerda sistema entropiyasining o'sishi («sabab») tufayli qaytmas jarayon o'tadi.

Agarda bir vaqtning o'zida bir nechta qaytmas jarayonlar birga o'tsa, u holda yangi hodisa yuzaga keladi. Masalan, issiqlik o'tkazuvchanlik va elektr o'tkazuvchanlik jarayonlarini qo'shilishidan termoelektrik hodisa yuzaga keladi:

$$I = \alpha \text{grad}T \quad \sigma \text{grad}\varphi$$

diffuziya va issiqlik o'tkazuvchanlik jarayonlarining qo'shilishidan termodiffuziya hodisasi yuzaga keladi:

$$I = D \text{grad}c \quad \alpha \text{grad}T \quad \text{va h.k.}$$

Chiziqli nomuvozanat jarayonlar termodinamik nazariyasini boshlanishi L. Onzager (1931- yil) ishlari bilan bog'langan. Onzager o'z ishlarida chiziqli nomuvozanat jarayonlar fenomenologik termodinamikasini ta'riflaydi va kinetik koeffitsiyentlar orasidagi munosabatni oladi.

Muvozanat holatda termodinamik kuchlar  $X_i$ , oqimlar  $I_i$  va entropiyani yuzaga kelish tezligi  $\sigma$  nolga teng bo'ladi. Shuning uchun muvozanat holatdan kichik chetlanishlarda oqimlar va kuchlar orasida chiziqli bog'lanish mavjud bo'ladi (chiziqli qonuniyat):

$$I_i = \sum_{k=i}^n L_{ik} X_k. \quad (8.10)$$

Bu chiziqli qonuniyatda  $L_{ik}$  koeffitsiyentlar fenomenologik kinetik koeffitsiyentlar deb yuritiladi. Diagonal koeffitsiyentlar  $L_{ii}$  «to'g'ri», nodiagonal koeffitsiyentlar «ayqash» yoki «qo'shma» hodisalarning uzluksiz bog'lanishini aniqlaydi. Kinetik koeffitsiyentlar  $L_{ii}$  Furrye qonunida  $L_{ii} = L = \alpha$ , Fik qonunida  $L_{ii} = L = D$ , Om qonunida  $L_{ii} = L = \sigma$  va h.k. ga teng bo'ladi. Kinetik koeffitsiyentlar termodiffuziya hodisasida esa  $L_{11} = D$  va  $L_{12} = \alpha$  ga teng bo'ladi, chunki termodiffuziya hodisasida oqim

$$I_1 = L_{11}gradc \quad L_{12}gradT$$

ko'rinishda bo'ladi.

Chiziqli qonun (8.10) da katta sondagi fenomenologik parametrlar  $L_{ii}$  ga kiradi. Ammo, vaqt va fazoviy simmetriya hisobga olinsa, bu kinetik koeffitsiyentlarning o'zaro bog'lanmaganlarining sonini kamaytirish mumkin bo'ladi.

1931- yilda Onzager shu narsani ko'rsatdiki, oqim  $I_i$  va kuch  $X_i$  larni mos ravishda tanlashda kinetik koeffitsiyentlar matritsasi simmetrik bo'ladi:

$$L_{ik} = L_{ki}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (8.11)$$

Bu hol Onzagerning o'zarolik munosabati deb yuritiladi. Onzagerning o'zarolik munosabati turli xil jarayonlarning o'zaro ta'siri qandaydir simmetriyaga ega bo'lishini bildiradi (masalan, temperatura gradienti konsentratsiya gradientini yuzaga keltiradi va h.k.).

Ma'lumki, bir vaqtning o'zida magnit induksiya yo'nalishini o'zgartirish shartidagina vaqt ishorasi (vaqt inversiyasi) o'zgar-ganda magnit maydonda zaryadning harakat tenglamasi o'zgarmaydi. Shunga asosan, magnit maydondagi sistema uchun  $L_{ik}$  va  $L_{ki}$  kattaliklar uchun (8.11) tenglik o'rinli bo'lishidan maydon induksiya yo'nalishini teskari yo'nalishda olish kerak:

$$L_{ik}(\mathbf{B}) = L_{ki}(-\mathbf{B}). \quad (8.12)$$

Qaytmas jarayonlar termodinamikasining chiziqli qonunlariga asoslanib, to'g'ridan-to'g'ri kinetik koeffitsiyentlarining qator xususiyatlarini aniqlash mumkin bo'ladi. Haqiqatan ham, shunday jarayonlar uchun umumiy formula (8.9) ga ko'ra entropiyani hosil qilish, termodinamik kuchlar bo'yicha kvadratik (chiziqli fizik qonuniyatlar uchun umumiy qoida) ko'rinish qabul qiladi:

$$\sigma = \sum_{i,k} L_{ik} X_i X_k. \quad (8.13)$$

$\sigma > 0$  bo'lishi uchun kinetik koeffitsiyentlarga ham qandaydir chegaralangan ( $L_{ik} > 0$ ) bo'lishi kerakligi sharti qo'yiladi.

## 8.4. Qaytmas jarayonlar termodinamikasining variatsion prinsiplari

Qaytmas jarayonlar termodinamikasining asosiy qonunlari va tenglamalari klassik termodinamika va ma'lum chiziqli jarayonlar qonuniyatlarini umumlashtirish natijasida tiklangan. Ana shunday induktiv metoddan tashqari qaytmas jarayonlar termodinamikasining asosiy tenglamalarini umumiy prinsiplardan deduktiv metod bo'yicha olish yo'llari ham mavjud. 1931- yilda birinchi bo'lib Onzager shuni ko'rsatdiki, chiziqli jarayonlar uchun uning o'zarolik munosabati qandaydir variatsion prinsipga ekvivalent ekan. Onzager shu prinsipni «energiyaning eng kichik (minimal) sochilish prinsipi» deb atadi. Bu nom shu bilan bog'langanki, statsionar holda bu prinsip Onzager tomonidan kiritilgan dissipativ funksiyalarning (sochilish funksiyalari) minimumi bilan ifodalanadi. Qaytmas jarayonlarni tahlil qilish natijasida Onzager tomonidan ikkita dissipativ funksiya kiritiladi:

$$\varphi(X, X) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n L_{ik} X_i X_k \geq 0, \quad (8.14)$$

$$\Phi(I, I) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n L_{ik}^{-1} X_i X_k \geq 0. \quad (8.15)$$

Bu funksiyalar

$$\sigma(I, X) = \sum_{i=1}^n I_i X_i \quad (8.16)$$

kabi qaytmas jarayonlarning lokal o'lchovini beradi va bu funksiyalar bir-biridan faqat nomuvazanat holatni tavsivlash usuli bilan farq qiladi. Chiziqli qonunlar holida  $\sigma$  Onzager dissipativ funksiyalarining ikkilanganligiga teng bo'ladi. Onzager o'zarolik munosabati (8.11) dan foydalanib, bu funksiyalarning potensial xarakterda ekanligini ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham (8.14) ifodadan:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_j} = \sum_{k=1}^n L_{jk} X_k, \quad (8.17)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_j \partial X_i} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_i \partial X_j} \quad (8.18)$$

o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Shunga o'xshash qolgan ikkita funksiya uchun (8.18) ko'rinisdagi ifodalarni olamiz. Bundan shu narsa kelib chiqadiki,  $\varphi(X, X)$ ,  $\Phi(I, I)$  va  $\sigma(I, X)$  funksiyalar nomuvozatli potensial funksiyalar bo'lib hisoblanadi. Bu funksiyalardan olingan birinchi tartibli hosila (8.17) chiziqli qonunni ifodalaydi, ikkinchi tartibli hosilasi esa Onzagerning o'zarolik munosabatiga ekvivalentdir. 1947- yilda Prigojin shu narsani aniqladi – statsionar jarayonlar entropiyaning yuzaga kelish munimumini xarakterlaydi. Uzoq vaqt Prigojin prinsipi qaytmas jarayonlar termodinamikasining yangi bog'lanmagan prinsipi deb hisoblab kelindi. 1965- yilda D'yarmati energiyani eng kam sochilish variatsion prinsipining umumiy ta'rifini beradi. U shuni ko'rsatdiki, Onzager prinsipidan farqli holda Prigojin prinsipi, faqat statsionar jarayonlar uchungina o'rinli bo'ladi va bu holda energiyaning eng kam sochilish prinsipiga ekvivalentdir. 1961- yilda Sigler entropiyaning yuzaga kelishida maksimal tezlik prinsipini ta'riflaydi. Bu ta'rifga ko'ra, berilgan termodinamik kuchlar ta'siri ostida bo'lgan sistema o'zining oxirgi holatiga eng qisqa mumkin bo'lgan usul bilan intiladi. Sigler shuni ko'rsatadiki, uning prinsipi Onzager prinsipiga ekvivalent ekan. Shunday qilib, qaytmas jarayonlar termodinamikasining eng umumiy variatsion prinsipi – «energiyaning eng minimal sochilish prinsipi» bo'lar ekan.

## 8.5. Onzager prinsipi. Termoelektrik hodisalarga tatbig'i

Qaytmas jarayonlar chiziqli termodinamikasining muhim tatbiqlaridan biri, bu termoelektrik hodisalar nazariyasini tuzishdir, chunki u har doim issiqlikning qaytmas ko'chishi bilan bog'langandir. Tajribadan izotrop muhitlarda uchta termoelektrik hodisalar ma'lum.

1. *Zeeman effekti*.  $dT$  temperatura farqiga ega bo'lgan ikkita har xil o'tkazgichlarning tutashgan qismida  $\mathcal{E} = \alpha_{12}T$  elektr yurituvchi kuch paydo bo'ladi. Bu yerda  $\alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2$  – berilgan o'tkazgichlar orasidagi termo-elektr yurituvchi kuch koefitsiyenti,  $\alpha_1$  – berilgan o'tkazgichning differensial termo-EYK koefitsiyenti. Shuning uchun, agar ikkita har xil o'tkazgichlardan yopiq zanjir tashkil qilib va kontakt joylari turli xil temperaturalarda ushlab turilsa, bu yopiq zanjirda elektr yurituvchi kuch yuzaga keladi.



2. *Peltje effekti*. Termik bir jinsli sistemada o'zgarmas elektr toki o'tganda ikkita har xil o'tkazgichlarning ulangan qismida tok kuchiga proporsional holda issiqlik ajraladi yoki yutiladi. (Peltje issiqligi):

$$q = \Pi j.$$

Bu jarayon Joule issiqligiga qo'shimcha ravishda sodir bo'ladi.

3. *Tomson hodisasi*. Temperatura gradientli o'tkazgichdan elektr toki o'tganda, Joule issiqligidan tashqari, temperatura gradienti va tok kuchiga proporsional holda qo'shimcha issiqlik miqdori (Tomson issiqligi) ajraladi:

$$q_r = \tau(j, \text{grad}T).$$

Bu hodisalarni nazariy tushuntirish uchun entropiyani yuzaga kelish tezligi  $\sigma$  ni topaylik. Buning uchun (8.1), (8.10) va (8.11) ifodalardan foydalanamiz.

Faraz qilaylik,  $E = -\text{grad}\varphi$  elektr maydon ( $\varphi$  - maydon potentsiali) ta'sirida zaryadlar  $-e$  ( $e > 0$ ) ko'chishi natijasida  $j$  zichligi bo'lgan tok vujudga kelsin. Tok o'tayotganda metallning ko'rilayotgan qismi hajmining o'zgarishini hisobga olmaymiz. Elektr maydon mavjudligida muvozanat, ikki o'tkazgich kontakt qismining sirtida (kimyoviy potensial  $\mu$ ) elektrkimyoviy potensial  $\mu - e\varphi$ , temperatura  $T$ , tok zichligi  $j$  va energiya oqimining zichligi  $u$  uzluksizlik shartida yuzaga keladi.

Agar  $\mu$  bir mol harakatlanuvchi zaryadlangan zarralarga taalluqli va  $dN$  metallning berilgan qismiga kiruvchi zarralarning molyar sonini aniqlaydi deb olsak, bu holda (8.1) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$TdS = dE - (\mu - F\varphi)dN, \quad (8.19)$$

$F = eN_A = 96500$  C/mol - Faradey soni bo'lib, bir mol elektronlar zaryadining absolut kattaligiga teng,  $N_A$  - Avogadro soni,

$\frac{\mu}{F} = \frac{\mu}{eN_A} = \frac{\xi}{e}$ ,  $\xi = \frac{\mu}{N_A}$  - bitta elektronga to'g'ri kelgan kimyoviy potensial. (8.19) tenglamadan vaqt bo'yicha hosila olib quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{T} (\mu - F\varphi) \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (8.20)$$

Bu tenglamadan  $\frac{\partial S}{\partial t}$  ni topish uchun  $\frac{\partial N}{\partial t}$  va  $\frac{\partial E}{\partial t}$  ni topish kerak.

$\frac{\partial N}{\partial t}$  zaryadning saqlanish qonunidan,  $\frac{\partial E}{\partial t}$  esa energiyaning saqlanish qonunidan topiladi.

Faraz qilaylik, 1 g metalldagi harakatlanuvchi zaryadlarning mollyar soni  $N$  bo'lsin. U vaqtda metallda zaryad tashuvchilar soni  $N_A N$  ga teng bo'ladi. Agar 1 sm<sup>3</sup> metall hajmidagi elektronlar massa zichligi  $\rho$  ga teng bo'lsa, u holda birlik hajmdagi zaryad  $-\rho N_A n e$  bo'ladi. Demak, zaryadning saqlanish qonunini ifodalovchi uzluksizlik tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho N_A n e) = \text{div } \mathbf{j},$$

bu ifodadan

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{\rho F} \text{div } \mathbf{j}. \quad (8.21)$$

Endi energiyaning vaqt o'tishi bilan o'zgarishini topamiz. Metall o'tkazgich orqali tok o'tganda issiqlik oqimi  $\mathbf{I}$  tufayli  $-\text{div } \mathbf{I}$  ga teng bo'lgan energiya yo'qotadi, shu paytda birlik vaqtda elektr maydoni ta'sirida  $(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})$  issiqlik energiyasi va birlik hajmda zaryadning ortishi tufayli

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho N_A n e) \varphi = \varphi \text{div } \mathbf{j}$$

qo'shimcha potensial energiya oladi. Shunday qilib, energiyaning saqlanish qonuni bo'yicha

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{I} + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) - \varphi \text{div } \mathbf{j}. \quad (8.22)$$

(8.21) va (8.22) formulalarni (8.20) ifodaga qo'yib, quyidagi tenglamani olamiz:

$$\rho \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div } \mathbf{I}_S = \sigma, \quad (8.23)$$

bu yerda

$$\mathbf{I}_s = \frac{1}{T} \left[ \mathbf{I} + \frac{\xi \mathbf{j}}{e} \right], \quad (8.24)$$

entropiya oqimining zichligi,

$$\sigma = \frac{1}{T} \left[ \left( \mathbf{I}, -\frac{1}{T} \text{grad} T \right) + \left( \mathbf{j}, \mathbf{E} + T \text{grad} \frac{\xi}{eT} \right) \right] \quad (8.25)$$

vaqt birligida entalpiyaning lokal o'sishi. (8.23)–(8.25) ifodalar entropiya tashqaridan entropiya oqimi va ko'rilyotgan hajmda sodir bo'ladigan qaytmas jarayonlar hisobiga o'zgarishini ko'rsatadi.

Kuchining Ongazer ta'rifiga asosan, (8.25) ifoda

$$\sigma = \frac{1}{T} \sum_i I_i I_{s_i},$$

ko'rinishini oladi, bu yerda  $-\mathbf{I}$  va  $\mathbf{j}$  oqimlarning chiziqli funksiyalaridir. Oqimlarning o'zlari esa chiziqli qonun (8.10) ga ko'ra, (8.25) formuladagi koeffitsiyentlarning chiziqli funksiyasidir:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= -L_{11} \frac{1}{T} \text{grad} T + L_{12} \left( \mathbf{E} + T \text{grad} \frac{\xi}{eT} \right), \\ \mathbf{j} &= -L_{21} \frac{1}{T} \text{grad} T + L_{22} \left( \mathbf{E} + T \text{grad} \frac{\xi}{eT} \right). \end{aligned} \quad (8.26)$$

Ongazer o'zarolik munosabati (8.11) ga asosan (8.26) ni  $\mathbf{I}$  va  $\mathbf{E}$  ga nisbatan yechish natijasida quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$I = -\alpha \text{grad} T - \Pi \mathbf{j}, \quad (8.27)$$

$$E = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} + \alpha \text{grad} T - \text{grad} \frac{\xi}{e}, \quad (8.28)$$

bu yerda  $\alpha$ ,  $\Pi$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma^{-1}$  koeffitsiyentlar  $L_{11}$ ,  $L_{12}$  orqali ifodalanadi va ularning ma'nosini (8.27) va (8.28) formulalarni tahlil qilish natijasida aniqlash mumkin.

Haqiqatan ham, o'tkazgichda tok bo'lmaganda (8.27) dan

$$\mathbf{I} = -\alpha \text{grad} T.$$

Bu ifoda o'tkazgich bo'ylab issiqlik oqimini beradi. Demak,  $\alpha$  - issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti bo'ladi. Bir jinsli o'tkazgichda issiqlik gradienti  $\text{grad}T = 0$  bo'lsa, u holda (8.28) munosabat

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

ko'rinishni qabul qiladi va Om qonunining differensial ko'rinishini beradi. Demak,  $\sigma$  - elektr o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti bo'ladi.

Agar o'tkazgichda  $\mathbf{j} = 0$  bo'lsa, u holda (8.28)

$$\mathbf{E} = \alpha \text{grad}T \quad \text{grad} \frac{\xi}{e}.$$

ko'rinishni oladi. Bundan shu narsa ko'rinadiki, ana shunday o'tkazgichda elektr maydon  $\text{grad}T$  va  $\text{grad}\xi$  hisobiga mavjud bo'lar ekan. Bu yerda  $\alpha$  - termo elektr yurituvchi kuch. Agar  $\text{grad}T = 0$  bo'lsa, u holda issiqlik oqimi  $\mathbf{I} \neq 0$  va (8.27) dan  $\mathbf{I} = -\Pi \mathbf{j}$ . Bu oqim zaryadlarni ko'chirish bilan bog'langan.  $\Pi$  Peltze koeffitsiyenti deb yuritiladi.

(8.11) munosabatdan  $\Pi$  va  $\alpha$  koeffitsiyentlar orasidagi bog'lanishni topamiz:

$$\Pi = \alpha T. \quad (8.29)$$

Bu Tomsonning ikkinchi munosabati deb yuritiladi va Onzagar prinsipining xususiy holini ifodalaydi.

Onzagar bo'yicha qaytmas jarayonlarda entropiyani yuzaga keltirish uchun termodinamik kuchlar (8.25) ifodadan quyidagilarga teng bo'ladi:

a) issiqlik o'tkazuvchanlikda

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{T} \text{grad}T;$$

b) elektr toki o'tganda

$$\mathbf{x} = \mathbf{E} = -\text{grad}\varphi;$$

d) diffuziyada

$$\mathbf{x} = -T \text{grad} \frac{\mu}{T}.$$

Bu holda elektr oqimi  $\mathbf{I}_e = -\mathbf{j}$  bo'ladi.

Endi termoelektrik hodisalarni olingan tenglamalar asosida turli xil temperaturali ikki xil o'tkazgichlardan tashkil topgan zanjirda qaraylik. (8.28) formulaga ko'ra, bu o'tkazgichlar orasida kontakt potensial farqidan tashqari, o'tkazgichlarning fizikaviy tabiatiga ( $\alpha$ ) va ularning temperaturasiga bog'liq holda termoelektr yurituvchi kuch yuzaga keladi:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{T_1}^{T_2} \alpha dT.$$

Agar shunday zanjir yopiq bo'lsa va payvand temperaturasi turli joylarida  $T_1$  va  $T_2$  ga teng bo'lsa, u holda zanjirda termoelektr yurituvchi kuch paydo bo'ladi:

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E}^{\text{chet}}, d\mathbf{l}) = \oint \alpha dT = \int_{T_1}^{T_2} \alpha_1 dT + \int_{T_2}^{T_1} \alpha_2 dT = \int_{T_2}^{T_1} (\alpha_1 - \alpha_2) dT,$$

$\alpha_1$  va  $\alpha_2$  larning farqi temperaturaga kuchsiz bog'langan bo'lsa,

$$\mathcal{E} = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_1 - \alpha_2) dT \approx (\alpha_1 - \alpha_2)(T_1 - T_2),$$

bu yerda  $T_1$  – sovuq payvand temperaturasi,  $T_2$  – issiq payvand temperaturasi. Demak, yopiq sistemada termo-EYK faqat turli metallar payvand temperaturalari har xil bo'lgandagina yuzaga kelishi mumkin ekan.

Termo-EYK ning yuzaga kelishi, temperatura gradienti tufayli, tok tashuvchilarning qayta taqsimlanishi bilan bog'langandir.

Zichligi  $j$  bo'lgan tok oqib o'tayotgan termik bir jinsli o'tkazgichlar sistemasini olib qaraylik. (8.27) formulaga ko'ra, ikkita turli xil o'tkazgichlar holida (kesmalari yuzasi  $1 \text{ sm}^2$ ) payvand joyga tok yo'nalishi bo'yicha birinchi o'tkazgichga  $1 \text{ }^\circ\text{C}$  da  $\Pi_1 j$  energiya kelsa, ikkinchi o'tkazgich orqali  $\Pi_2 j$  energiya ketadi. Demak, shu o'tkazgichlarning payvand nuqtasida  $(\Pi_2 - \Pi_1) j$  energiya issiqlik ko'rinishda ajraladi (Pelte issiqligi). Bu hodisa Pelte hodisasi deb yuritiladi. Bundan shu narsa ko'rinadiki, Pelte issiqligi tok kuchiga proporsional bo'lib, tajriba natijasiga mos keladi.

Endi tokli termik bir jinsli bo'lmagan sistemani olaylik va vaqt birligida birlik hajmda ana shunday kimyoviy bir jinsli

sistemada energiya o'zgarishi  $\rho \frac{\partial U}{\partial t}$  ni topaylik. Buning uchun tok o'zgarimas yoki sekin o'zgaradigan ( $\text{div } \mathbf{j} = 0$ ) holida, (8.22) tenglamaga (8.27) va (8.28) ifodalarni qo'yish natijada quyidagi tenglamani olamiz:

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}(\epsilon \text{grad}T) + \frac{j^2}{\sigma} + \left( \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \alpha \right) (\mathbf{j}, \text{grad}T). \quad (8.30)$$

Bu ifodadan shu narsa ko'rinadiki, termik bir jinsli bo'lmagan sistemada energiyaning o'zgarishi issiqlik o'tkazuvchanlik  $\text{div}(\epsilon \text{grad}T)$ , Joul issiqligi  $j^2/\sigma$  ning ajralishi va issiqlik o'tkazuvchanlik va elektr o'tkazuvchanlik  $\left( \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \alpha \right) (\mathbf{j}, \text{grad}T)$  larning birgalikda ta'siri bilan bog'langan.

Temperaturaning bir jinsli emasligi natijasida o'tkazgichda qo'shimcha ajraladigan issiqlik miqdori Tomson issiqligi deb ataladi, bu hodisaning o'zi Tomson hodisasi deb yuritiladi. Fenomenologiyadan bu issiqlik quyidagiga teng bo'ladi:

$$q_{\tau} = \tau (\mathbf{j}, \text{grad}T),$$

bu yerda  $\tau$  - Tomson koeffitsiyenti bo'lib, (8.30) ifodadan

$$\tau = \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \alpha. \quad (8.31)$$

Bu Tomsonning birinchi munosabati deb yuritiladi.  $(\mathbf{j}, \text{grad}T)$  ning ishorasiga qarab, Tomson issiqligi musbat yoki manfiy bo'lishi mumkin. Faqat tok  $\mathbf{j}$  yoki faqat  $\text{grad}T$  ning qarama-qarshi tomonga o'zgarishida kattalik  $q_{\tau}$  ishorasini o'zgartiradi. Shu sababdan Tomson hodisasi ba'zida qaytuvchi deb ham yuritiladi.

## 8.6. Nochiziqli nomuvozanat termodinamika asoslari

Keyingi yillarda qator mualliflarning va eng avvalo I. Prigojin va P. Glensdorf ishlarida kuchli nomuvozanat sistemalar taraqqiy qildi. Kuchli nomuvozanat sistemalarda termodinamik oqimlar va kuchlar orasidagi bog'lanish chiziqli bo'lmasdan

nochiziqli bo'lib qoladi hamda Ongazer o'zaro munosabati bajarilmaydi. Bu yangi, hali tugallanmagan fizikaviy ta'limot nochiziqli nomuvozanat termodinamika nomini oldi. Bu ta'limot bo'yicha turli xil nomuvozanat ochiq sistemalarda tartiblashgan strukturalarning (tuzilishlarning) spontan yuzaga kelishi mumkinligiga, ya'ni o'zi tashkillangan (samoorganizatsiya) jarayonga olib keladi.

Shunga o'xshash ayrim misollar oldindan ma'lum. Bu suyuqlikning notekis qizdirilgan gorizont qatlamida yacheykali strukturalarning, turbalantlikni, uyurmalilarning va h.k. yuzaga kelishi.

Kuchli nomuvozanat ochiq sistemalarda qaytmas jarayonlarda, umuman, hamma hodisalarda tartiblashgan strukturalarning yuzaga kelishi katta guruhdagi molekularning birgalikdagi (kooperativ) harakatidir. Nemis olimi G.Xaken shunday o'zi tashkillashgan jarayonlar uchun «sinergetika» (grekcha *synergia* – birgalikda yoki kooperativ ta'sir) atamasini taklif qildi.

Sinergetikaning fizikaviy tabiati shundan iboratki, muvozanat holatdan uzoqda, nochiziqli sohada sistema barqarorlikni yo'qotadi va kichik fluktuatsiyalar yangi tartibga (rejimga) – ko'p zarralarning birgalikdagi harakatiga olib keladi.

Kuchli nomuvozanat sistemalarda o'zi tashkillanishni yaratilishi fizika, kimyo va ayniqsa biologiya uchun muhim ahamiyatga ega. Chunki, tirik organizm va uning turli xil qismlari juda ko'p nomuvozanat mikrosistemalardan iborat bo'lib, juda katta kimyoviy modda konsentratsiyasi, temperatura, bosim, elektr potentsiali gradieinti mavjud bo'ladi.

## 8.7. VIII bobga oid masala va savollar

1. Nomuvozanat jarayonlarning yuzaga kelish sabablari.
2. Sistema lokal muvozanati qanday tenglama yordamida aniqlanadi?
3. Entropiyaning hosil bo'lish tezligi.
4. Chiziqli qaytmas jarayonlar sanab o'tilsin.
5. Onzagerning o'zarolik munosabati.
6. Energiyaning eng kam sochilish prinsipi.
7. Termoelektrik hodisalar.
8. Tomsonning birinchi munosabati.
9. Tomsonning ikkinchi munosabati.
10. Tomson issiqligi deb qanday issiqlikka aytiladi?
11. Sinergetika. Sinergetikaning fizikaviy tabiati.

## IX bob

### FIZIKAVIY KINETIKA

*Qaytmas jarayonlar statistik nazariyasining asosiy muammosi, dinamikaning qaytuvchi qonunlaridan qaytmas jarayonlarni ifodalovchi tenglamalarni olishdir. Bu ma'noda Broun harakati nazariyasi katta ahamiyat kasb etgan. Qaytmas jarayonlar nazariyasining rivojlanishiga Lanjeven, Fokker, Plank, Eynshteyn katta hissa qo'shgan.*

#### 9.1. Kinetik kimyo

Faraz qilaylik, termostat ichiga tushirilgan sistema termodinamik muvozanat holatida bo'lmasin. Bunday sistemada nomuvozanat jarayonlar o'tadi. Masalan, diffuziya, issiqlik uzatish, kimyoviy reaksiya va hokazo. Atom-molekular tasavvur asosida nomuvozanat jarayonlarni o'rganish nomuvozanat statistik yoki fizikaviy kinetikaning asosini tashkil qiladi. Statistik fizikaning bu bo'limi fizika va kimyoning bir qator zamonaviy masalalarini hal qilishda muhim rol o'ynaydi.

Umuman, nomuvozanat holatlar va jarayonlar bir-biridan prinsipial holda farq qiluvchi ikkita fenomenologik va mikroskopik metodlar yordamida o'rganiladi. Fenomenologik metod VIII bobda ko'rib chiqildi.

Kinetik metod statistik fizika metodlarini umumlashtirgan va uning keyingi taraqqiyoti hisoblangan nazariya bo'lib, nomuvozanat holatlar va jarayonlarni o'rganishda sistema holatini xarakterlovchi taqsimot funksiyasidan foydalaniladi. Nomuvozanat funksiya umumlashgan koordinata, umumlashgan impuls va vaqtga bog'liq bo'ladi. Tashqi maydonlar bo'lmagan holda ham nomuvozanat taqsimot funksiyasi koordinataga bog'liq bo'ladi.

Kinetikaning asosiy masalasi: birinchidan, (zamon va makonda) fazo va vaqt bo'yicha taqsimot funksiyasining o'zgarishini aniqlovchi tenglamani topish va ikkinchidan, taqsimot funksiyasi va sistema holatini xarakterlovchi termodinamik kattaliklar oqimlari orasidagi bog'lanishni aniqlashdan iborat.



Nomuvozanat holatlar va jarayonlar uchun taqsimot funksiyasini topish masalasi muvozanat holatni xarakterlovchi taqsimot funksiyasini topishga nisbatan ancha murakkabdir.

Muvozanat holatni xarakterlashda umumiy taqsimot funksiyasi – Gibbs taqsimot funksiyasi bo'lib hisoblanadi. Nomuvozanat holatni xarakterlashda esa, sistemaga ta'sir etuvchi turli xil tashqi kuchlarning ta'siri tufayli, Gibbs taqsimot funksiyasiga o'xshash universal taqsimot funksiyasini topish mumkin emas. Bundan tashqari ko'p hollarda kinetik tenglamaning o'zini juda kuchli cheklanishlar asosida yozish mumkin bo'ladi.

Klassik kinetikada nomuvozanat jarayonlarni tekshirishda, gazning «siyrak» yoki «zich» bo'lishiga qarab, ikkita metod mavjud.

Ma'lumki, gaz neytral zarralardan tashkil topgan bo'lsa, molekulalar orasidagi o'zaro ta'sir ular orasidagi masofa ortishi bilan kamayadi. Shuning uchun faraz qilish mumkinki, zarralar orasidagi qandaydir masofa  $r_0$  dan boshlab ularning o'zaro ta'sir energiyasi  $U(r_0)$  hisobga olmaslik darajada kichik bo'ladi. Ana shu  $r_0$  masofaga molekulalararo kuchning ta'sir radiusi deyiladi. O'zaro ta'sir energiyasi  $U(r_0)$  va issiqlik harakat o'rtacha energiyasi bir tartibda deb,  $r_0$  ning qiymatini baholash mumkin, ya'ni  $U(r_0) \simeq kT$  dan  $r_0 \simeq 10^{-7}-10^{-8}$  sm.  $r > r_0$  masofalarda zarra inersiyasi bo'yicha yoki tashqi maydonlar ta'sirida harakatlanadi. Agar  $r < r_0$  bo'lsa, zarralar orasidagi o'zaro ta'sir asosiy rol o'ynaydi. Zarraning erkin yugurish yo'li  $\lambda \gg r_0$  bo'lsa, gaz siyraklantirilgan hisoblanadi. Erkin yugurish yo'li  $\lambda \sim \frac{k}{nr_0^2}$ ,

bu yerda  $n$  – zarralarning hajm zichligi. Shunga ko'ra siyraklantirilgan gaz uchun  $\frac{1}{nr_0^2} \gg r_0$  va  $nr_0^3 \ll 1$  o'rinli bo'ladi. Bu

tengsizlikdan siyrak gazlarda  $n \ll 10^{21} + 10^{24}$  sm<sup>-3</sup>. Siyraklantirilgan gazlarda o'tayotgan nomuvozanat jarayonlar Bolsman kinetik metodi yordamida o'rganiladi. Agar  $\lambda \ll r_0$  bo'lsa, u holda gaz zich deb hisoblaniladi va to'qnashish tushunchasi ma'nosini yo'qotadi, chunki zarralar hamma vaqt qo'shni zarralar ta'sir sferasi ichida bo'ladi. Zichligi katta gazlarda o'tayotgan nomuvozanat jarayonlar Smoluxovskiy va Fokker-Plank kinetik metodi yordamida o'rganiladi.

## 9.2. Broun harakatining fizik xarakteristikasi

Broun harakati – suyuqlik yoki gazlarda muallaq zarralarining muhit molekulari ta'siridagi tartibsiz harakatidir. Broun harakati 1827- yilda ingliz botanigi R. Broun tomonidan kashf etilgan. Broun harakatining yuzaga kelish sabablarining nazariyasi A.Eynshteyn va polyak olimi M. Smoluxovskiy tomonidan berilgan (1905–1906- y.y.). Broun harakatini tekshirish molekular-kinetik nazariyaning to'g'riligini isbotladi. Broun harakati muhit molekulari tomonidan unga tushirilgan makroskopik zarraga uzatiluvchi bosim fluktuatsiyasining natijasidir. Bu narsani ko'rsatish uchun suyuqlik yoki gazga muallaq tushirilgan makroskopik zarraga muhit molekulari tomonidan ta'sir etuvchi kuchni aniqlaylik. Suyuqlik yoki gazga tushirilgan makroskopik zarraga muhit molekulari uzluksiz issiqlik harakati tufayli bir sekunda taxminan  $10^{12}$  marta zarba berib turadi va zarbaga mos holda kuch impulsi uzatiladi. Natijada muhit molekulari suyuqlik yoki gazdagi makroskopik zarra sirtiga bosim beradi. Agarda makroskopik zarra o'lchami  $10^{-4}$  sm dan katta bo'lsa, zarra har tomonlama zarbalar ta'sirida muvozanatlashadi va tinch holatda qoladi. Agar makroskopik zarra o'lchami  $10^{-4}$  sm va undan kichik bo'lsa, u holda statistik muvozanat buziladi, ya'ni muhit molekulari tomonidan zarra sirtiga teng ta'sir etuvchi kuch noldan farqli bo'lib qoladi. Natijada makroskopik zarra tartibsiz harakatlana boshlaydi. Bu hol makroskopik zarraga kelib uriluvchi muhit molekular sonini va uzatiluvchi impuls (va demak, bosimni) katta fluktuatsiyaga duchor bo'lishligini ko'rsatadi.

Broun harakatining miqdoriy nazariyasini berishda fluktuatsiya nazariyasining VII bobdagi munosabatlaridan foydalanamiz.

Faraz qilaylik, suyuqlik yoki gazga  $m$  massali makroskopik, lekin juda kichik Broun zarrasi muallaq tushirilgan bo'lsin. Bu Broun zarrasining holatini qandaydir umumlashgan parametr  $x$  xarakterlasin. Eynshteyn bitta Broun zarrasini vaqt bo'yicha kuzatish o'rniga suyuqlik yoki gazga tushirilgan bir xildagi Broun zarralaridan tashkil topgan juda ko'p zarralar oqimini kuzatishni taklif qiladi. Bu zarralar muhit molekularining issiqlik harakat fluktuatsiyasi tufayli muhit tomonidan vaqt bo'yicha tartibsiz o'zgaruvchi kuch ta'siriga duchor bo'ladi.

Bu fluktuatsiya kuchi ta'sirida Broun zarralari oqimi kichik siljishga duchor bo'ladi. Muhitda qandaydir faraziy sirt orqali o'tuvchi Broun zarralar miqdorini topaylik.

Faraz qilaylik, biror  $x$  sirtidan  $x, x + dx$  masofadagi bir birlik hajmdagi zarralar soni  $c(x)$  bo'lsin.  $\Delta = \sqrt{(\Delta x)^2}$  esa kichik  $\tau$  vaqt davomida zarraning o'rtacha kvadratik siljishi bo'lsin. U vaqtda  $\tau$  vaqt davomida  $1 \text{ sm}^2$  faraziy sirt orqali chapdan o'ngga harakatlanuvchi Broun zarralarining o'rtacha soni  $c(x - \Delta/2)\Delta/2$  bo'ladi. Shu vaqt davomida ko'rilyotgan sirt orqali o'ngdan chapga harakatlanuvchi Broun zarralar soni  $c(x + \Delta/2)\Delta/2$  bo'ladi. Natijada  $1 \text{ sm}^2$  faraziy sirtidan o'tgan zarralar soni

$$N = j\tau = \left[ c\left(x - \frac{\Delta}{2}\right) - c\left(x + \frac{\Delta}{2}\right) \right] \frac{\Delta}{2} \quad (9.1)$$

bo'ladi, bu yerda  $j$  – zarralar oqimi,  $r$  – Broun zarrasini kuzatish vaqti.  $\Delta$  kichik deb hisoblab,  $c(x)$  ni esa  $x$  koordinatalarning sekin o'zgaruvchi funksiyasi deb qarasaq, (9.1) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$N \simeq -\frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial c}{\partial x}. \quad (9.2)$$

Bundan

$$j = -\frac{\Delta^2}{2\tau} \frac{\partial c}{\partial x} \quad (9.3)$$

kelib chiqadi. Zarralar oqimi uning konsentratsiyasi gradientiga proporsional va uning kamayishi tomon yo'nalgan. Bu yerda

$$D = \frac{\Delta^2}{2\tau} \quad (9.4)$$

diffuziya koeffitsiyenti deyiladi. (9.4) dan zarraning o'rtacha kvadratik siljishi

$$\Delta = \sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{2D\tau}. \quad (9.5)$$

Demak, zarralarning o'rtacha kvadratik siljishi kuzatish vaqti  $\tau$  dan olingan ildizga proporsional bo'lar ekan.

Agarda zarralar oqimi, konsentratsiyasi gradientidan tashqari har bir Broun zarrasiga ta'sir etuvchi tashqi  $f$  kuch tufayli yuzaga kelayotgan bo'lsa, u holda zarralarning to'la oqimi

$$j = -D \frac{\partial c}{\partial x} + vc. \quad (9.6)$$

Bu yerda  $v = bf$  – zarraning muhitdagi tezligi (Stoks formulasi).  $b = C\eta r$  – zarraning harakatchanligi,  $r$  – uning radiusi,  $\eta$  – muhit yopishqoqligi,  $C$  – proporsionallik koeffitsiyenti bo'lib, sferik zarra uchun  $6\pi$  ga teng.  $f$  kuchga javob beruvchi potensial energiyani  $U$  desak, (9.6) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$j = -D \frac{\partial c}{\partial x} - bc \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (9.7)$$

Faraz qilaylik, tashqi maydon ta'sirida yuzaga kelgan zarralar oqimi konsentratsiya tufayli yuzaga kelgan zarralar oqimiga teng va qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsin, bu holda zarralarning to'la oqimi  $j$  nolga aylanadi va natijada (9.6) dan zarralar konsentratsiyasining taqsimotini olamiz:

$$c = c_0 \exp\left(-\frac{bU}{D}\right). \quad (9.8)$$

Ikkinchi tomondan, o'zaro ta'sirda bo'lmagan zarralarning tashqi maydondagi taqsimoti Bolsman bo'yicha

$$c = c_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right). \quad (9.9)$$

(9.8) va (9.9) tengliklardan diffuziya koeffitsiyenti  $D$  ni topamiz:

$$D = bkT = \frac{kT}{C\eta r}.$$

Sferik zarralar uchun

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r}.$$

Natijada, (9.5) quyidagicha yoziladi:

$$\Delta = \sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{\frac{kT\tau}{3\pi\eta r}}. \quad (9.10)$$

Shunday qilib, Broun zarralari o'tgan o'rtacha siljish muhit temperaturasi, yopishqoqligi, zarra o'lchami va zarraning qaytish vaqtiga bog'liq bo'ladi. (9.10) formulaga kiruvchi kattaliklar ma'lum yoki o'lchash mumkin. Bu formula yordamida Avagadro soni  $N_A$  va, demak, atomlarning absolut massasini aniqlash imkonini berdi. Broun harakati bo'yicha o'tkazilgan 1908-yildagi Jan Perren tajribalarda moddalarning molekular-kinetik nazariyasini to'g'riligini va molekular jarayonlarning qaytuvchanlik prinsipi isbotlandi. Bu tajribalarda topilgan Avagadro soni ( $N_A = 6,44 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ) ning qiymati o'sha davr uchun eng aniqlaridan biri bo'lib hisoblangan.

### 9.3. Smoluxovskiy tenglamasi

Nomuvozanat holatda yotgan bir atomli gazni olib qaraylik. Gaz holati olti o'lchovli – fazalar fazosidagi traektoriya bo'yicha harakatlanuvchi  $N$  ta tasviriy nuqtalar to'plami bilan xarakterlanadi.

Tasviriy nuqtalar zichligi yoki nomuvozanat holatlar uchun koordinata, impuls va vaqtga bog'liq bo'lgan taqsimot funksiya  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  ni kiritamiz. Taqsimot funksiya

$$\iiint f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r}d\mathbf{p} = N$$

sharti bilan normalashtirilgan. Bu yerda  $N$  – gazdagi to'la zarralar soni.

Taqsimot funksiyasi  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  ni topish masalasi fizikaviy kinetikaning muhim masalalaridan biri bo'lib hisoblanadi. Bu funksiyani bilish sistemaning nomuvozanat holatiga tegishli bir qator masalalarni yechish imkonini beradi. Masalan, bunday masalaga ko'chish hodisasida kinetik koeffitsiyentlar – diffuziya, issiqlik o'tkazuvchanlik va hokazolarni topish kiradi. Faraz qilaylik,  $L$  – bitta molekulaga tegishli kinetik energiya, impulsi va hokazo additiv bo'lgan fizik kattalik bo'lsin. U holda

$$\overline{L} = \frac{\int L f d\mathbf{p}}{\int f d\mathbf{p}}, \quad \overline{Lv_i} = \frac{\int Lv_i f d\mathbf{p}}{\int f d\mathbf{p}}.$$

Bu ifodalar mikroskopik kattalik uchun fazoviy zichlik va oqim zichligini xarakterlaydi.  $v_i$  – zarralar tezligi.

Biz zichligi katta bo'lgan gazlarni qaraylik. Har bir zarra bir vaqtda juda katta sondagi qo'shni molekulalar bilan o'zaro ta'sirda bo'lgani uchun, uning qolgan zarralar taqsimotiga ta'siri hisobga olmaslik darajada kichik bo'ladi. Shu bilan birga sistema zarralarining taqsimot funksiyasini topish bitta zarrani qolgan boshqa zarralar hosil qilgan maydondagi harakati masalasiga olib kelinadi. Zarra harakatda bo'lganligi tufayli, bu maydon fluktuatsiyalanadi va tanlangan zarra harakati tasodifiy (stoxastik) bo'ladi. Ana shunday tasodifiy jarayonlar uchun zarraning  $\tau$  vaqt davomida  $x$  nuqtadan  $y$  nuqta yaqinidagi  $dy$  hajm elementiga o'tish ehtimolligi tushunchasini kiritish mumkin.  $x$  va  $y$  simvollar bilan nuqtalarni,  $dy$  simvol bilan fazoning elementar hajmini belgilaymiz. Agar  $x$  nuqtadan  $y$  nuqtaga  $\tau$  vaqt davomida  $t$  vaqt momentida (tasviriy nuqtaning  $x$  dan chiqish vaqti) o'tish ehtimolligi zichligini  $W(y, x/\tau, t)$  bilan belgilasak, o'tish ehtimolligi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dw = W(y, x/\tau, t)dy. \quad (9.11)$$

Bu o'tish ehtimolligi faqat boshlang'ich va oxirgi holatlar bilan aniqlanadi. Va sistema qanday yo'l bilan  $x$  va  $y$  holatlarga tushishiga bog'liq bo'lmaydi. Ana shunday jarayonlar Markov jarayoni deyiladi. Boshqacha qilib aytganda, Markov jarayoni holida kelajak uchun jarayonning tasodifiyligi xarakteristikasi faqat hozirgi vaqt momentidagi jarayon xarakteristikasiga bog'liq bo'ladi va bu jarayon oldin qanday o'tganligiga bog'liq bo'lmaydi.

Shunday qilib, (9.11) faqat ana shu juft holatlarga bog'liq bo'ladi. Ana shunday holatlarning to'plamining ehtimollik nazariyasida Markov zanjiri deyiladi. Markov jarayonlari katta zichlikdagi gaz va suyuqliklarda kinetik jarayonlarni yuqori aniqlik bilan tavsiflaydi. Zarrani  $x$  nuqtadan  $y$  nuqtaga  $t + \tau$  vaqt davomida oraliq  $z$  nuqta orqali o'tishini qaraylik. Bu yerda  $t - x$  nuqtadan  $z$  nuqtaga o'tish vaqti,  $\tau$  esa  $z$  nuqtadan  $y$  nuqtaga o'tish vaqti.  $x$  nuqtadan  $z$  nuqtagacha va  $z$  nuqtadan  $y$  nuqtagacha o'tish jarayonlari bog'lanmagan bo'lgani uchun,  $x$  nuqtadan  $dy$  intervalga  $dz$  aniqlik bilan oraliq nuqta orqali o'tish ehtimolligi

$$W(y, z/\tau, t_0 + t)W(z, x/t, t_0)dydz \quad (9.12)$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda  $t_0$  zarraning  $x$  nuqtadan chiqish vaqti. (9.12) ni oraliq nuqta  $z$  ning hamma holatlari bo'yicha integral-

lash natijasida  $x$  nuqtadan  $y$  nuqtaga  $t + \tau$  vaqt davomida  $t_0$  vaqt momentida o'tish ehtimolligi zichligi uchun quyidagi ko'rinishdagi nohiziqli integral tenglamani olamiz:

$$W(y, x/t + \tau, t_0) = \int W(y, z, / \tau, t_0 + t) W(z, x/t, t_0) dz. \quad (9.13)$$

Bu tenglamaga Smoluxovskiylar tenglamasi deyiladi. Smoluxovskiylar tenglamasi umumiy xarakterga ega bo'lib, tatbiq qilish sohasi ancha keng.

## 9.4 Batafsil muvozanat prinsipi

Endi batafsil muvozanat prinsipi deb ataluvchi muhim fizik qonuniyatni ko'rib chiqaylik. Sistema mikroholatlarining vaqt bo'yicha o'zgarishini aniqlovchi qonunlar yoki klassik mexanika qonunlari yoki kvant mexanika qonunlari bo'lib hisoblanadi. Berk sistema holi uchun har ikkala qonunlar vaqt ishorasi  $t$  ni  $-t$  ga o'zgartirishga nisbatan simmetrikdir.

Klassik mexanikaning asosiy tenglamasi

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i$$

vaqtga nisbatan ikkinchi tartiblidir. Shuning uchun  $t$  ni  $-t$  ga o'zgartirilganda tenglamaning chap tomoni invariant qoladi, o'ng tomoni esa umuman  $t$  ni oshkora holda o'z ichiga olmaydi.

Kvant mexanikasida spinsiz zarralar holi uchun vaqt  $t$  ni  $-t$  ga almashtirilganda sistema to'liqin funksiyasi  $\psi(\mathbf{q}_i, t)$  uchun Shredinger tenglamasi

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

kompleks qo'shma funksiya  $\psi^*(\mathbf{q}_i, t)$  uchun tenglamaga aylanadi:

$$i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \hat{H}\psi^* .$$

To'liqin funksiyalar  $\psi(\mathbf{q}_i, t)^*$  va  $\psi(\mathbf{q}_i, t)$  bir holatning o'zini xarakterlaydi, ammo tok zichligi vektori  $\mathbf{j}$  ishorasi o'zgargan bo'ladi. Ikkinchi tomondan  $t$  ni  $-t$  ga almashtirganda sistemaning bosh-

lang'ich va oxirgi holatlari o'z o'rinlarini almashtirgan bo'ladi. Shuning uchun  $x \rightarrow y$  va  $y \rightarrow x$  ga to'g'ri va teskari o'tish ehtimolliklari bir xilda bo'lishi kerak va  $W(y, x/\tau, t)$  funksiya birinchi juft argumentlari bo'yicha simmetrik bo'ladi, ya'ni

$$W(y, x/\tau, t) = W(x, y/\tau, t).$$

Bu tasdiq batafsil muvozanatlar prinsipi deb yuritiladi.

## 9.5. Fokker-Plank tenglamasi

Katta zichlikdagi gazda nomuvozanat jarayonlarning xususiy holi – sekin jarayonlarni qaraylik. Bunday jarayonlar uchun Smoluxovskiy tenglamasini soddalashtirish va Fokker-Plank differensial tenglamasiga keltirish mumkin.

Faraz qilaylik, makroskopik sistemada sekin jarayonlar o'tayotgan bo'lsin. Bu shuni anglatadiki, sistema holatining muhim o'zgarishlari kam ehtimollikka ega bo'ladi. Demak,  $x \rightarrow y$  o'tish ehtimolligi  $|y - x|$  farqning o'sishi bilan tez kamayadi. Shuning uchun sistema holati nisbatan kam o'zgarganda o'tish ehtimolligi ancha katta bo'ladi.

Fokker-Plank tenglamasini chiqarishga o'taylik. Buning uchun Smoluxovskiy tenglamasi (9.13) ni quydagicha yozaylik ( $t_0 = 0$ ):

$$W(y, x/t + \tau, 0) = \int W(y, z, / \tau, t) W(z, x/t, 0) dz \quad (9.14)$$

– fazalar fazosida integrallanuvchi ixtiyoriy  $g(x)$  funksiyani kiritaylik.  $g(x)$  funksiya quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) \rightarrow 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial g}{\partial x_i} \rightarrow 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k} \rightarrow 0, \dots$$

(9.14) tenglamaning har ikkala tomonini  $\frac{1}{\tau} g(y) dy$  ga ko'paytirib, ning hamma qiymatlari bo'yicha integrallaymiz:

$$\int W(y, x/t + \tau, 0) \frac{1}{\tau} g(y) dy = \frac{1}{\tau} \int \int W(y, z, / \tau, t) W(z, x/t, 0) g(y) dy dz \quad (9.15)$$

Bu tenglamaning o'ng tomonidagi  $g(y)$  ni  $(y_i - z_i)$  ning darajalari bo'yicha Teylor qatoriga yoyamiz:



$$g(y) = g(z) + \frac{\partial g}{\partial z_i}(y_i - z_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_k}(y_i - z_i)(y_k - z_k) + \dots$$

Bu qatorni (9.15) ning o'ng tomoniga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int W(y, x/t + \tau, 0) g(y) dy &= \frac{1}{\tau} \iint [g(z) + \frac{\partial g}{\partial z_i}(y_i - z_i) + \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_k}(y_i - z_i)(y_k - z_k) + \dots] W(y, z/\tau, t) W(z, x/t, 0) dy dz. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Bu tenglamaning o'ng tomonidagi qo'shiluvchilarni soddalashtiraylik. (9.15) ning birinchi hadi normirovka sharti

$$\int W(y, x/\tau, t) dy = 1$$

ga ko'ra birga teng. Sekin jarayonlarda  $(y_i - z_i)$  ayirma kichik bo'lganligi uchun integral ostidagi  $(y_i - z_i)$  ayirmaning yuqori darajalari qatnashgan integrallar yaqinlashuvchi bo'ladi. Shuning uchun ikkinchi tartibli haddan keyingi tartibli hadlar qatnashuvchi integrallar juda kichik bo'lishini inobatga olib, ularni hisobga olmaymiz. U holda (9.16) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int g(y) [W(y, x/t + \tau, 0) - (W(y, x/t, 0))] dy - \\ = \int a_i^{(\tau)}(z, t) \frac{\partial g}{\partial z_i} W(z, x/t, 0) dz - \\ - \frac{1}{2} \int b_{ik}^{(\tau)}(z, t) \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_k} W(z, x/t, 0) dz = 0. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Bu yerda

$$a_i^{(\tau)}(z, t) = \frac{1}{\tau} \int (y_i - z_i) W(y, z/\tau, t) dy,$$

$$b_{ik}^{(\tau)}(z, t) = \frac{1}{\tau} \int (y_i - z_i)(y_k - z_k) W(y, z/\tau, t) dy.$$

Bu yerda olti o'lchovli vektor  $a_i^{(\tau)}$  fazalar fazosida tasviriy nuqtaning  $t$  vaqt momentida va  $z$  nuqtadagi  $(\tau)$  vaqt davomidagi o'rtacha tezligini beradi. Olti o'lchovli tenzor  $b_{ik}^{(\tau)}$  birlik vaqtga nisbatan  $(\tau)$  vaqt davomida tasviriy nuqtaning  $i$ - va  $k$ -siljish proeksiyalari oralig'ida korrelatsiya funksiyasini beradi.

Bu tenzorning shpuri esa (diogonal elementlar yig'indisi) birlik vaqtga nisbatan  $(\tau)$  vaqt davomida tasviriy nuqtaning o'rtacha kvadratik siljishini beradi:

$$b_{ii}^{(\tau)} = \frac{1}{\tau} \int (y_i - z_i)^2 W(y, z/\tau, t) dy. \quad (9.18)$$

(9.17) tenglamani  $\tau \rightarrow 0$  hol uchun qaraymiz va

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} a_i^{(\tau)}(z, t) = a_i(z, t), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} b_{ik}^{(\tau)}(z, t) = b_{ik}(z, t)$$

bilan belgilaymiz. Ikkinchi va uchinchi hadlarni bo'laklab integrallash, chegaraviy shartni hisobga olish va integrallash o'zgaruvchisi  $z$  ni  $y$  bilan almashtirish natijasida (9.17) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\int g(y) \left[ \frac{\partial W(y, x/t, 0)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_i} [W(y, x/t, 0) a_i(y, t)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} [W(y, x/t, 0) b_{ik}(y, t)] \right] dy = 0. \quad (9.19)$$

Bu  $g(y)$  funksiyaning ixtiyoriyligidan (9.19) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial W(y, x/t, 0)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_i} [W(y, x/t, 0) a_i(y, t)] - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} [W(y, x/t, 0) b_{ik}(y, t)] = 0. \quad (9.20)$$

(9.20) tenglama Fokker-Plank tenglamasi yoki monomolekular kinetik tenglama deyiladi. Monomolekular kinetik tenglama deb atash shuni anglatadiki, sistema zarralarining kollektiv harakatlari masalasini bitta zarraning «tentirashi», qolgan zarralarning joylashishi bo'yicha o'rtachalangan harakat masalasiga aylanganligini ko'rsatadi.

O'tish ehtimollik zichligi  $W(y, x/\tau, t)$  taqsimot funksiyasi  $f(x, t)$  bilan qanday bog'langanligini aniqlaylik. Bu yerda  $x \equiv \mathbf{r}, \mathbf{p}$ . Faraz qilaylik,  $\Gamma$ - fazoda  $t = 0$  da  $x$  nuqtada taqsimot funksiyasi  $f(x, 0)$  bo'lsin. U holda  $t$  vaqt ichida  $dx$  hajmdan chiqib ketgan zarralar soni

$$dx \int W(z, x/t, 0) f(x, 0) dz,$$

shu vaqt ichida  $dx$  hajmga kirgan zarralar soni

$$dx \int W(x, z/t, 0) f(z, 0) dz$$

bo'ladi.  $t$  vaqt ichida  $dx$  hajmdagi zarralar sonining o'zgarishi

$$[f(x, t) - f(x, 0)] dx = dx \int [W(x, z/t, 0) f(z, 0) - W(z, x/t, 0) f(x, 0)] dz,$$

$dx$  ga qisqartirish va normirovka sharti

$$\int W(z, x/t, 0) dz = 1$$

ni hisobga olish natijasida quyidagi tenglamani olamiz:

$$f(x, t) = \int W(x, z/t, 0) f(z, 0) dz. \quad (9.21)$$

(9.21) shuni ko'rsatdiki,  $W(y, x/\tau, t)$  ga ko'paytirish va  $z$  bo'yicha integrallash bir vaqtda  $\Gamma$ -fazoda  $x - z$  vektorga va  $t$  vaqt bo'lagi bo'yicha siljishiga ekvivalent ekan.

Shunday qilib, (9.20) tenglamani  $f(x, 0)$  taqsimot funksiyaga ko'paytirib,  $x$  bo'yicha integrallash natijasida  $f(y, t)$  taqsimot funksiyasi uchun Fokker-Plank tenglamasini olamiz:

$$\frac{\partial f(y, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_i} [f(y, t) a_i(y, t)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} [f(y, t) b_{ik}(y, t)] = 0. \quad (9.22)$$

(9.22) ni  $\Gamma$ -fazalar fazosida uzluksizlik tenglamasi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial j_i}{\partial y_i} = 0. \quad (9.23)$$

Bu yerda  $j_i$  - olti o'lchovli tok zichligi vektori komponentlari:

$$j_i = a_i(y, t) f(y, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_k} [b_{ik}(y, t) f(y, t)]. \quad (9.24)$$

Fokker-Plank tenglamasining (9.23) ko'rinishda yozilishi ba'zi bir umumlashtirishlarga olib keladi. Xususan, agar  $x, y, z, \dots$

nuqtalarni uch o'lchovli fazo nuqtalari deb qarajak, u holda  $j_i$  uch o'lchovli fazoda tok zichligini, vektor  $a_i$  zarraning oddiy tezligi  $v$  ni, tenzor  $b_{ik}$  esa koordinata o'qlari yo'nallishi bo'yicha zarralar siljishlari orasidagi korrelatsiya funksiyasini beradi. Bu holda Broun zarrasi uchun olingan fluktuatsiya ifodasi (9.10) ni keltirib chiqarish mumkin.

Tashqi maydonda bo'lmagan gazni olib qaraylik. Bu holda fazo va vaqtning bir jinsliliigi tufayli o'tish ehtimolligi zichligi faqat nuqtalar orasidagi masofaga bog'liq bo'lib, vaqtga bog'liq bo'lmasligi kerak, ya'ni  $W(y, x/\tau, \tau + t) = W(|y - x|, \tau)$ . Natijada  $a_i(y, t)$  va  $b_{ik}(y, t)$  uchun quyidagilarni olamiz:

$$a_i(y, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int W(|y - x|, \tau)(y_i - x_i) dx = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int W(|z|, \tau) z_i dz = 0$$

- integral ostidagi funksiyaning toqligiga asosan,

$$b_{ik}(y, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int W(|y - x|, \tau)(y_i - x_i)(y_k - x_k) dx = b \delta_{ik},$$

bu yerda

$$b = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int W(|z|, \tau) z_i^2 dx = \text{const.}$$

Fokker-Plank tenglamasi (9.23) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} b \nabla^2 f.$$

Bu esa diffuziya tenglamasi

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \nabla^2 f$$

ga mos tushadi. Bu tengliklardan Enshteyn munosabati  $b = 2D$  ni olamiz ( $D$  - diffuziya koeffitsiyenti). Agar  $x$  ni gaz molekulasi koordinatasi bo'lmasdan, gaz yoki suyuqlikda muallaq turgan Broun zarrasining koordinatasi deb qarajak, bu holda Fokker-Plank tenglamasi zarra harakatini xarakterlaydi. U vaqtda uch o'lchovli fazo holi uchun (9.18) ga asosan

$$\overline{\Delta x^2} = b\tau = 2D\tau. \quad (9.25)$$

Agar Broun zarrasi tashqi maydon ta'sirida bo'lsa, u holda (9.24) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\mathbf{j} = a\mathbf{f} - \frac{1}{2}b\nabla f. \quad (9.26)$$

Muvozanat holatda zarralar taqsimoti Bolsman taqsimoti bilan karakterlanadi:

$$f = f_0 \exp\left(-\frac{U(x,y,z)}{kT}\right).$$

Tok zichligi  $\mathbf{j} = 0$  bo'ladi. Demak, (9.26) dan quyidagi ifodani olamiz:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= f_0 \left( \mathbf{a} + \frac{1}{2} \frac{b\nabla U(x,y,z)}{kT} \right) \exp\left(-\frac{U(x,y,z)}{kT}\right) = \\ &= f_0 \left( \mathbf{a} - \frac{b\nabla U}{2kT} \right) \exp\left(-\frac{U(x,y,z)}{kT}\right) = 0, \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{v} = \frac{b\nabla U}{2kT} = \frac{D\nabla U}{kT} = q\nabla U.$$

Yopishqoq suyuqlikning zarra harakatiga ko'rsatadigan qarshiligi uchun - Stoks formulasi. Bu yerda  $q = \frac{D}{kT}$  - harakatchanlik,  $\mathbf{F} = -\nabla U$  - kuch. Olingan kattaliklarni (9.25) ga qo'yish natijasida, ma'lum ifoda (9.10) ni olamiz.

Agar tasviriy nuqtalar to'plamini qandaydir aynan nomuvozanatdagi sistema ansambliga javob beradi deb qarash, u holda taqsimot funksiyasi  $f(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$  ning tasviriy nuqtalar zichligi, vektor  $\mathbf{j}$  ni esa fazalar fazosida tasviriy nuqtalarning oqim zichligi deb qarash mumkin. Agar  $a_i$  va  $b_{ik}$  o'zgaruvchi  $\lambda$  ga bog'liq bo'lmasa, u holda (9.23) va (9.24) quyidagi ko'rinishlarni oladi:

$$\frac{\partial \rho(\lambda, t)}{\partial t} + \frac{\partial j_i}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{va} \quad j_i = a_i \rho - D \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}$$

yoki

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \left( a_i \rho - D \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \right) = -a_i \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial \lambda^2} = 0.$$

Statsionar holatda bir o'lchovli hol uchun Fokker-Plank tenglamasi oson integrallanadi:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ a\rho - \frac{\partial}{\partial \lambda} (D\rho) \right] = 0.$$

Agar zarralar oqimi cheksizlikda nolga teng bo'lsa, yuqoridagi ifodani integrallash natijasida

$$\frac{\partial(D\rho)}{\partial \lambda} = a\rho$$

ni olamiz. Bundan

$$\rho(\lambda) = \frac{\text{const}}{D} \exp \left[ \int_0^\lambda \frac{a(\lambda')}{D(\lambda')} d\lambda' \right].$$

## 9.6. Kinetik balans tenglama

O'tish ehtimollik zichligi  $W(y, x/\tau, t)$  ning taqsimot funksiyasi  $f(x, t)$  bilan bog'lanish masalasiga qaytamiz. Ifoda (9.21) ning ko'rinishini quyidagicha yozib olaylik:

$$f(y, t + \tau) = \int W(y, x/\tau, t) f(x, t) dx. \quad (9.27)$$

o'tish ehtimolliги zichligi  $W(y, x/\tau, t)$  ni  $\tau$  ning darajalari bo'yicha qatorga yoyib, birinchi ikki had bilan chegaralaylik; u holda

$$W(y, x/\tau, t) = \Phi(y, x, t) + \tau P(y, x, t),$$

bu yerda  $P(y, x, t)$  - vaqt birligida  $t$  vaqt momentida  $x$  nuqtadan  $y$  nuqtaga o'tish ehtimolliги zichligi,  $\Phi(y, x, t)$  esa «bironta»  $x$  nuqtadan  $y$  nuqtaga o'tish ehtimolini beradi.

Nol vaqt davomida zarra  $x$  nuqtani tashlab keta olmaydi,  $\tau$  ning nol inchi darajali hadini quyidagicha yozamiz:

$$\Phi(y, x, t) = A(y, t) \delta(y - x). \quad (9.28)$$

Normirovka sharti

$$\int W(y, x/\tau, t) dy = 1$$

va (9.28) ga asosan

$$A(x, t) = 1 - \tau \int P(y, x, t) dy. \quad (9.29)$$

Bu ifodadan foydalanib, o'tish ehtimolligi zichligi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$W(y, x/\tau, t) = 1 - \tau \int P(z, y, t) dz \delta(y - x) + \tau P(y, x, t). \quad (9.30)$$

(9.30) ni (9.27) ga qo'yib,  $\tau \rightarrow 0$  da limitga o'tish natijasida quyidagi kinetik balans tenglamani olamiz:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \int [P(x, z, t)f(z, t) - P(z, x, t)f(x, t)] dz. \quad (9.31)$$

(9.31) ning chap tomoni vaqt birligi ichida  $t$  vaqt momentida  $x$  nuqtada zarralar zichligining o'zgarishini beradi. Bu o'zgarish  $x$  nuqtaga hamma  $z$  nuqtalardan kelgan zarralar va  $x$  nuqtadan ketgan zarralar bilan bog'langan. Shuning uchun (9.31) tenglama kinetik balans tenglama nomi bilan yuritiladi.

Kinetik balans tenglamada  $\Gamma$ - fazalar fazosida holatning klassik tavsiflashdan kvant mexanikaviy diskret tavsiflashga o'tish mumkin. Bu holda, taqsimot funksiyasi  $f(x, t)$  ning  $i$ - holatidagi zarralar soni  $N_i(t)$ , vaqt birligida  $z$  nuqtadan  $x$  nuqtaga o'tish ehtimoli  $P(x, z, t)$  ni  $k$ - holatdan  $i$ - holatga o'tish ehtimolligi  $P_{ik}(t)$  va  $P(z, x, t)$  ni  $i$ - holatdan  $k$ - holatga o'tish ehtimolligi  $P_{ki}(t)$  bilan almashtiramiz. U holda (9.31) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_{k \neq i} (P_{ik} N_k - P_{ki} N_i). \quad (9.32)$$

Agar sistema yopiq bo'lsa, u holda batafsil muvozanat prinsipi o'rinli bo'ladi:

$$P(x, y, t) = P(y, x, t)$$

yoki

$$P_{ik}(t) = P_{ki}(t).$$

Bu holda (9.32) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_{k \neq i} (P_{ik}(t)(N_k - N_i)). \quad (9.33)$$

(9.32) va (9.33) tenglamalar nochizikli integro-differensial tenglamalar bo'lib, faqat xususiy hollarda yechilishi mumkin.

Misol sifatida ikkita aynimagan  $E_1$  va  $E_2$  energetik sathli atomlardan tashkil topgan ideal gazni olib qaraylik. Faraz qilaylik, gaz termostat bilan kontaktda bo'lsin. Termostat ta'siri tufayli gazda atomlar bir holatdan boshqa holatga o'tishi yuzaga keladi. Natijada, o'tishlar atomlarning to'qnashishi tufayli emas, balki tashqi ta'sir ostida ro'y beradi. Shuning uchun o'tish ehtimolliklari  $P_{12}$  va  $P_{21}$  to'ldirish sonlariga va vaqtga bog'liq bo'lmaydi. Gaz yopiq sistema bo'lmaganligi tufayli, batafsil muvozanat prinsipi o'rinsiz bo'ladi, ya'ni  $P_{12} \neq P_{21}$ . Kinetik balans tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{dN_1}{dt} - P_{12}N_2 - P_{21}N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} - P_{21}N_1 - P_{12}N_2.$$

Tenglamalar sistemasi yechimini  $N_i = C_i e^{\alpha t}$  ko'rinishda qidiramiz, u vaqtda  $C_i$  lar uchun algebraik tenglamalar sistemasini olamiz:

$$(\alpha + P_{21})C_1 - P_{12}C_2 = 0, \quad -P_{21}C_1 + (\alpha + P_{12})C_2 = 0.$$

Bu tenglamalar notrivial yechimga ega bo'lishi uchun quyidagi shart bajarilishi kerak:

$$\alpha(\alpha + P_{12} + P_{21}) = 0.$$

Bu tenglikdan  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = -P_{12} - P_{21}$ . Birinchi yechim muvozanat holatni beradi:

$$N_1^{(1)} = C_1, \quad N_2^{(1)} = C_2 = C_1 \frac{P_{21}}{P_{12}}.$$

$N = N_1 + N_2$  shartiga asosan

$$N_1^{(1)} = \frac{NP_{12}}{P_{12} + P_{21}}, \quad N_2^{(1)} = \frac{NP_{21}}{P_{12} + P_{21}}.$$

Ikkinchi yechim esa statsionar holatdan eksponensial holda kamayuvchi chetlashishni beradi:

$$N_{1,2}^{(2)} = \pm n \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Demak, umumiy yechim statsionar rejimga yaqinlashuvchi relaksion jarayonni tavsiflaydi;



$$N_1 = \frac{NP_{12}}{P_{12} + P_{21}} + n \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad N_2 = \frac{NP_{21}}{P_{12} + P_{21}} - n \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

bu yerda  $n$  – relaksiya vaqti, boshlang‘ich shartlardan topiladi ( $n = N_1 - N_1^{(1)} = N_2^{(1)} - N_2$   $t = 0$  da).

Agar gaz aynimagan bo‘lsa, Maksvell–Bolsman taqsimotidan foydalanib,

$$\frac{P_{12}}{P_{21}} = \exp\left(\frac{E_1 - E_2}{KT}\right)$$

ni topamiz. Agar  $E_1 < E_2$  va  $(E_1 - E_2)/KT \gg 1$  bo‘lsa, u holda  $P_{21} < P_{12}$  va  $\tau \simeq 1/P_{12}$  bo‘ladi.

### 9.7. Eynshteyn bo‘yicha Plank formulasing kinetik isboti

Biz murakkabroq masala – termostatda yotgan elektromagnit nurlanish bilan muvozanatda bo‘lgan atomlar sistemasini olib qaraylik. Bu masala 1916- yillarda Eynshteyn tomonidan qaralgan. Bu hol yorug‘lik nurlanishi uchun Plank formulasing kinetik isbotiga olib keldi.

$E_i$  va  $E_k$  energetik sathlarda yotgan atomlarni olib qaraylik. Batafsil muvozanat prinsipiga ko‘ra vaqt birligida  $i \rightarrow k$  va  $k \rightarrow i$  ga o‘tish sonlari teng bo‘ladi.  $E_i > E_k$  deb hisoblaylik. Bu holda  $i \rightarrow k$  o‘tishda  $E_i - E_k$  energiya nurlanishi yuz beradi,  $k \rightarrow i$  o‘tishda esa shunday miqdordagi energiyani yutish yuz beradi. Natijada:  $k \rightarrow i$  o‘tishda o‘tish soni  $\nu$  chastotadagi nurlanish energiyasi zichligi  $\rho(\nu, T)$  ga proporsional bo‘ladi:

$$n_{ki} = B_{ki} N_k \rho(\nu, T),$$

$B_{ki}$  – proporsionallik koeffitsiyenti.  $i \rightarrow k$  o‘z-o‘zidan o‘tish soni:

$$n_{ik}^{\text{spont}} = A_{ik} N_i$$

bo‘ladi.  $A_{ik}$  – spontan nurlanish koeffitsiyenti. Eynshteyn fikricha  $i \rightarrow k$  ga o‘tishda spontan nurlanish bilan birga yuz beruvchi induksiyalangan nurlanish jarayoni ham mavjud bo‘ladi. Bu induksiyalangan o‘tish soni

$$n_{ik}^{\text{ind}} = B_{ik} N_i \rho(\nu, T)$$

bo'ladi.  $B_{ik}$  – majburiy nurlanish koeffitsiyenti,  $n_{ki}$  va  $n_{ik}$  – o'tish sonlari.  $N_i$  va  $N_k$  –  $i$ - va  $k$ - holatidagi zarralar soni.

Statsionar va muvozanat holatda  $k \rightarrow i$  ga va  $i \rightarrow k$  ga o'tish sonlari teng bo'ladi:

$$n_{ki} = n_{ik}^{\text{spont}} + n_{ik}^{\text{ind}}$$

yoki

$$B_{ki} N_k \rho(\nu, t) = A_{ik} N_i + B_{ik} N_i \rho(\nu, t).$$

Yuqorida keltirilgan ifodadan nurlanish energiya zichligi

$$\rho(\nu, T) = \frac{A_{ik} N_i}{B_{ki} N_k} = \frac{A_{ik}}{B_{ki} N_k / N_i}.$$

Statsionar holatda  $N_i$  va  $N_k$  zarralar soni Maksvell–Bolsman taqsimotini qanoatlantirishi kerak:

$$\frac{N_k}{N_i} = \frac{g_k}{g_i} \exp\left(\frac{E_i - E_k}{kT}\right),$$

chunki  $N_s = g_s \exp\left(-\frac{E_s}{kT}\right)$ . Natijada

$$\rho(\nu, T) = \frac{\frac{g_i A_{ik}}{g_k B_{ki}}}{\exp\left(\frac{E_i - E_k}{kT}\right) \frac{g_i B_{ik}}{g_k B_{ki}}}. \quad (9.34)$$

$T \rightarrow \infty$  da  $\rho(\nu, T)$  chegaralanmagan holda ortishi uchun  $g_i B_{ik} = g_k B_{ki}$  deb hisoblash kerak. U holda (9.34) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\rho(\nu, T) = \frac{\frac{A_{ik}}{B_{ik}}}{\exp\left(\frac{E_i - E_k}{kT}\right) - 1}. \quad (9.35)$$

Vinning termodinamik qonuniga ko'ra  $\rho(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$  ko'rinishda bo'lishi kerak. Shunga asosan, biz  $E_i - E_k = h\nu$  va  $A_{ik}/B_{ik} = A\nu^3$  deb hisoblaymiz. U holda (9.35) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\rho(\nu, T) = \frac{A\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}, \quad (9.36)$$

o'zgarmas  $A$  ni  $h\nu/kT \ll 1$  shartdan topiladi. Kichik chastotalar sohasida (9.36) klassik qonun Reley–Jins formulasi o'tadi:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi kT\nu^2}{c^3}.$$

$h\nu/kT \ll 1$  da (9.36) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\rho(\nu, T) = \frac{A\nu^3}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} = \frac{AkT\nu^2}{h}.$$

Bu ifodani Reley–Jins formulasi bilan solishtirish natijasida o'zgarmas kattalik  $A$  uchun quyidagini olamiz:

$$A = \frac{8\pi h}{c^3}. \quad (9.37)$$

(9.37) ni (9.36) ga qo'yish natijasida quyidagi ko'rinishdagi ifodani olamiz:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]}.$$

Bu ifoda Plank formulasi bo'lib, biz uning kinetik isbotini keltirdik.

Endi biz induksiyalangan, ya'ni majburiy nurlanish kvant kuchaytirish va nurlanish generatorlari nazariyasida muhim rol o'ynashini qarab chiqaylik.

Faraz qilaylik,  $E_i$  energetik sathli atomlarni o'z ichiga olgan.

Muhitga  $\nu = \frac{E_i - E_k}{h}$  chastotali monoxromatik yorug'lik dastasi tushayotgan bo'lsin. Bu nurlanish qisman  $E_k$  energetik sathda yotgan atomlar tomonidan yutiladi. Yutilgan bu energiya miqdori  $J_a$  esa  $k \rightarrow i$  ga o'tish soniga va yutilgan  $h\nu = E_i - E_k$  energiyaga proporsional bo'ladi:

$$J_a = n_{ki} h\nu = B_{ki} N_k \rho(\nu, T) h\nu.$$

Ikkinchi tomondan,  $E_i$  energetik sathli holatdagi atomlar  $\nu$  chastotali to'liqinni ham sponton va hamda induksiyalangan (majburiy) holda nurlantiradi. Nurlanuvchi energiya miqdori  $J_e$  esa  $i \rightarrow k$  ga o'tishda sponton va majburiy nurlanishlar soniga va  $h\nu$  energiyaga proporsional bo'ladi:

$$J_e = (n_{ik}^{\text{spont}} + n_{ik}^{\text{ind}})h\nu = A_{ik}N_i h\nu + B_{ik}N_i \rho(\nu T)h\nu.$$

Nurlangan va yutilgan energiya miqdorlarining farqi  $J$ :

$$J = J_e - J_a = \rho(\nu, T)h\nu [B_{ik}N_i - B_{ki}N_k] + A_{ik}N_i h\nu.$$

Bu ifodadan quyidagi muhim xulosa kelib chiqadi: Agar  $J = J_e - J_a > 0$  bo'lsa, muhit shu nurlanish kuchaytirgichi bo'la oladi. Boshqacha qilib aytganda, muhit manfiy absorbsiyaga ega bo'lsa, ya'ni  $(B_{ik}N_i - B_{ki}N_k) > 0$  bo'lsa. Bu shart bajarilishi mumkin, agar zarralarni pastki energetik sathdan yuqori energetik sathga ko'chirishda inversiya bandligi hosil qilinsa:

$$B_{ik}N_i > B_{ki}N_k \quad \text{yoki} \quad \frac{N_i}{N_k} > \frac{B_{ki}}{B_{ik}} = \frac{g_i}{g_k}, \quad \text{yoki} \quad \frac{N_i}{g_i} > \frac{N_k}{g_k}.$$

Bu esa bitta holatga hisoblangan  $E_i$  energiyali yuqori sathdagi atomlar soni  $n_i = N_i/g_i$ ,  $E_k$  energiyali pastki sathdagi holatda yotgan atomlar soni  $n_k = \frac{N_k}{g_k}$  dan katta bo'lsa. Inversiya hosil qilish mumkin, agar muhit absolut manfiy temperaturali holatda bo'lsa, ya'ni  $T < 0$  bo'lsa. Ana shunday holatni hosil qilib turish mumkin, agarda zarralarni uzluksiz holda pastki energetik sathdan yuqori energetik sathga so'rib olib turilsa. Ana shu metod asosida lazerlar (kvant kuchaytirguvchilar) va mazerlar (elektromagnit to'liqin generatorlarini) qurilgan.

## 9.8. IX bobga oid masala va savollar

1.  $\eta$  koeffitsiyentli yopishqoq muhitda harakatlanuvchi  $m$  massali Broun zarrasining o'rtacha kvadratik siljishi aniqlansin. Zarra radiusi  $r_0$ .

2. Og'irlik maydonidagi Broun zarrasi uchun kvadratik o'rtacha siljish aniqlansin.

*Yechish.* Faraz qilaylik, og'irlik kuchi  $z$  o'qi bo'yicha ta'sir etayotgan bo'lsin, u holda  $U = mgz$ . Broun zarrasining tezligi

$$a = qF = -q \frac{\partial U}{\partial z} = -qmg.$$

Ikkinchi tomondan, Fokker-Plank tenglamasiga ko'ra

$$a = \frac{1}{\tau} \overline{(z - z_0)} \quad \text{yoki} \quad \overline{(z - z_0)} = a\tau = -qmg\tau.$$

Agarda og'irlik kuchi maydoni bo'lmasa,

$$\overline{(z - z_0)^2} = b\tau = 2D\tau.$$

Og'irlik kuchi maydoni ta'sir etayotgan bo'lsa,

$$\overline{(z - z_0)^2} = 2D\tau - \tau q \overline{(z - z_0)} F = 2D\tau + (qmg)^2 \tau^2.$$

Bu yerda  $D$  - diffuziya koeffitsiyenti.  $q = \frac{1}{6\pi\eta r_0}$  ekanligini hisobga olsak,

$$\overline{(z - z_0)^2} = 2D\tau + \left( \frac{mg}{6\pi\eta r_0} \right)^2 \tau^2.$$

3. Massasi  $m$  va radiusi  $r_0$  bo'lgan Broun zarrasining  $\tau$  vaqt davomida kvadratik o'rtacha siljishi  $\overline{(\Delta x)^2}$  ga teng bo'lsa, Avogadro soni  $N_A$  aniqlansin.

4. Statsionar rejimda zarralar bir o'lchovli potensial to'siq  $U(x)$  orqali diffuziyalanadi. Agar  $x_1$  va  $x_2$  kesimlarda zarralar sonining zichligi ma'lum bo'lsa, zarralar oqimining zichligi topilsin.

5. Berilgan o'rtacha energiya va zarralar sonida bir jinsli gaz uchun H-funksiyasining minimumlik sharti Maksvell taqsimotiga olib kelishi ko'rsatilsin.

*Yechish.*

$$S = -kH, \quad H = \iint f(r, v, t) \ln f(r, v, t) dr dv.$$

Muvozanat holatida sistemaning entropiyasi maksimum bo'ladi,  $H$ - funksiyaning birinchi variatsiyasi  $\delta H = 0$  va ikkinchi variatsiyasi  $\delta^2 H \gg 0$  bo'lishi kerak. Qo'shimcha shartlar:

$$\int \left[ \frac{mv^2}{2} + U(\mathbf{r}) \right] f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = E,$$

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = N.$$

$$\frac{\partial}{\partial N} (S + \alpha E + \lambda N) = 0$$

entropiyaning maksimumlik shartiga asosan quyidagi yordamchi funksionalni tuzamiz:

$$H' = \int \left\{ \beta \left[ \frac{mv^2}{2} + U(\mathbf{r}) \right] + \ln f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \lambda \right\} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}.$$

Bu funksionalning birinchi variatsiyasini nolga tenglashtiramiz:

$$\frac{\delta H'}{\delta f} = \beta \left[ \frac{mv^2}{2} + U(\mathbf{r}) \right] + (\lambda + 1) + \ln f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0.$$

Uning ikkinchi variatsiyasi noldan katta bo'lishi kerak:

$$\frac{\delta^2 H'}{\delta^2 f} = \frac{1}{f} > 0.$$

Bu minimumlik shartidir. Birinchi variatsiya ifodasidan

$$f = A \exp \left\{ -\beta \left[ \frac{mv^2}{2} + U(\mathbf{r}) \right] \right\}.$$

Bu ifoda Maksvell-Bolsman taqsimotini ifodalaydi.  $A = e^{-\lambda-1}$  normirovka shartidan topiladi,  $\beta = \frac{1}{kT}$ .

6. Tashqi maydon  $U(\bar{r})$  ning mavjudligida Bolsman kinetik tenglamasining statsionar yechimi Maksvell-Bolsman taqsimoti funksiyasi ekanligi ko'rsatilsin.

7. Broun harakati. Eynshteyn ishlari.
8. Smoluxovskiy tenglamasi va uning fizik ma'nosi.
9. Batafsil muvozanat prinsipi.
10. Monomolekular tenglama va uning fizik ma'nosi.
11. Fokker-Plank tenglamasi.
12. Broun zarrasining fluktuatsiyasi.
13. Klassik kinetik balans tenglama va uning fizik ma'nosi.
14. Kvant kinetik balans tenglama va uning fizik ma'nosi.
15. Plank formulasining kinetik isboti.
16. Lazer va mazerlarning ishlash prinsipi.

## X bob

### KINETIK TENGLAMALAR

*Kinetik nazariyaga Maksvell va Bolsman qariyb bir yuz ellik yil muqaddam asos solishgan. Bolsman muhim ahamiyatga ega bo'lgan N- teoramani ta'riflagan. Maksvell klassik gazlar uchun tezliklar bo'yicha taqsimot funksiyasini topgan. Bu asos soluvchi ishlarga tan berib, ushbu bobni kinetik tenglamani o'rganishdan boshlaymiz.*

#### 10.1. Bolsmanning kinetik tenglamasi

9.6- badda olingan asosiy kinetik tenglamani yechishda bir qator qiyinchiliklarda duch kelinadi. Shuning uchun asosiy kinetik tenglamani oddiy tenglama bilan almashtirish mumkin bo'lgan fizik sistemalarni ko'rib chiqamiz. Siyraklashgan gazlarni o'rganishga o'taylik.

Asosiy kinetik tenglama  $N_i$  sonni aniqlaydi yoki sistema zarralari orasida mavjud bo'lgan hamma bog'lanishlar va o'zaro ta'sirlarni hisobga olgan holda, holatlar bo'yicha zarralar taqsimotini aniqlaydi.

Ammo bir qator hollarda, xususan, siyrak ideal gazlarda, makrosistema holatini ana shunday ko'rinishda xarakterlash haddan tashqari batafsil bo'lib hisoblanadi. Klassik yaqinlashishda berilgan holatdagi zarralar soni o'rniga sistema holatini uzluksiz taqsimot funksiyasi yordamida xarakterlash mumkin. Ideal gazlarda zarralar orasida o'zaro ta'sirning yo'qligi tufayli sistema taqsimot funksiyasi ayrim zarralar taqsimot funksiyalarining ko'paytmalari ko'rinishida ajraladi. Demak, ayrim zarralar taqsimot funksiyalarining berilishi ideal gaz holatini yaxlit holda xarakterlashga imkon beradi.

Nomuvozanat siyrak ideal gaz molekullari uchun taqsimot funksiyasini qarab chiqaylik. Ideal gazda har bir molekulani kvazi yopiq sistemacha deb qarash mumkin. Muvozanatdagi gazdan farqli holda nomuvozanat holatdagi gaz taqsimot funksiyasi koordinata, impuls va vaqtga bog'liq bo'ladi. Faraz qilay-

lik,  $dn - t$  vaqt momentida tasviriy nuqtalari fazalar fazosi elementar hajmi  $d\gamma = dx dy dz dp_x dp_y dp_z = dp dV$  da yotgan molekulalar soni bo'lsin. U holda  $dn = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\gamma$ , bu yerda  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  - izlanuvchi taqsimot funksiyasi. Elementar hajm  $d\gamma$  dagi molekulalar sonining vaqt bo'yicha o'zgarishi gaz molekulalari orasidagi to'qnashish bilan bog'langan.

Agar impulslari  $\mathbf{p}_1$  va  $\mathbf{p}_2$  bo'lgan ikkita molekulaning to'qnashishi natijasida, ulardan birortasi  $\mathbf{p}$  impuls olsa, u holda uning tasviriy nuqtasi  $d\gamma$  fazo elementiga kiradi. Aksincha, agar  $\mathbf{p}$  impulsiga ega bo'lgan molekula boshqa molekula bilan to'qnashib, yangi impulsiga ega bo'lsa, uning tasviriy nuqtasi  $d\gamma$  hajmdan chiqadi. Hajm elementi qancha katta bo'lsa, vaqt birligi ichida tasviriy nuqtalari shu hajmdan chiquvchi va kiruvchi molekulalar soni ham shuncha katta bo'ladi. Vaqt birligida fazalar fazosi elementar hajmida zarralar sonining o'zgarishi

$$\frac{d(dn)}{dt} = \frac{df(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{dt} d\gamma = (b - a) d\gamma. \quad (10.1)$$

Bu yerda  $(ad\gamma) - (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1) \rightarrow (\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$  tip to'qnashish natijasida tasviriy nuqtalari  $d\gamma$  hajm elementini tark etgan molekulalar soni,  $(bd\gamma)$  esa  $(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$  tip to'qnashish tufayli tasviriy nuqtalar  $d\gamma$  hajm elementiga kirgan molekulalar soni. Agar

$$\frac{df(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}$$

tenglamani hisobga olsak, (10.1) quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I. \quad (10.2)$$

Bu yerda  $\mathbf{p}/m = \mathbf{v}$  - molekula tezligi,  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$  -  $t$  vaqt momentida impuls va koordinatlari  $d\gamma$  fazaviy hajm elementida yotgan molekulaga ta'sir etuvchi kuch.

$$I = b - a \quad (10.3)$$

ifoda to'qnashish integrali deb yuritiladi. Masala to'qnashish integralini topishdan iborat. To'qnashish integralini faqat to'qnashishlar juft-juft holda o'tuvchi yetarli darajada siyraklan-



tirilgan gazlar uchun hisoblash mumkin. Faraz qilaylik molekularning to'qnashishi qattiq sharlarning elastik to'qnashish qonuni bo'yicha yuz bersin.

Bir xil zarralarning juft-juft holda elastik to'qnashishlarida impuls va energiyaning saqlanish qonunlari quyidagicha yoziladi:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3, \quad (10.4)$$

$$\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2. \quad (10.5)$$

Molekularning elastik to'qnashish jarayonini  $d\Omega_1$  fazoviy burchak elementida sochilish differensial effektiv kesimi bilan xarakterlash mumkin. Bu holda effektiv kesim to'qnashuvchi zarralarning nisbiy tezligining absolut kattaligi  $v_n = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|$  va sochilish burchagi  $\alpha = \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$  ga bog'liq bo'ladi. Tezligi  $\mathbf{v}$  bo'lgan zarraning  $d\Omega_1$  fazoviy burchakda sochilish differensial effektiv kesimi

$$d\sigma = \sigma(v_n, \alpha) d\Omega_1.$$

Impulsi  $\mathbf{p}$  bo'lgan  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} dV$  bilan aniqlangan zarralarning har biri bir sekundda balandligi  $v_n$  va asos yuzasi  $d\sigma$  bo'lgan silindr ichida yotgan  $\mathbf{p}_1$  impulsli zarralar bilan  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) d\mathbf{p}_1 v_n d\sigma$  marta to'qnashadi.  $d\gamma$  fazoviy hajm elementida yotgan zarraning bir sekund ichidagi juft-juft to'qnashishlarining to'la soni

$$\sigma(v_n, \alpha) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) v_n d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1 dV d\Omega_1$$

ga teng bo'ladi.

Bunday to'qnashishlar  $(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) \rightarrow (\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$  tip to'qnashishlarga mansub bo'lib, hamma fazoviy burchak  $\Omega_1$  va  $\mathbf{p}_1$  impulsning hamma qiymatlari bo'yicha integralash natijasida tasviriy nuqtalari  $d\gamma$  hajm elementidan chiquvchi molekular soni  $a d\gamma$  ni olamiz:

$$a d\gamma = d\mathbf{p} dV \iint v_n \sigma(v_n, \alpha) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) d\mathbf{p}_1 d\Omega_1$$

yoki

$$a = \iint v_n \sigma(v_n, \alpha) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) d\mathbf{p}_1 d\Omega_1. \quad (10.6)$$

bd $\gamma$  kattalikni hisoblash uchun  $(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$  tip to'qnashishlarni qaraymiz. Bu to'qnashishlar d $\gamma$  fazoviy hajm elementida tasviriy nuqtalar sonini ortishiga olib keladi.  $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  impulsli molekullarning bir sekund ichida to'qnashishlar soni

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) d\mathbf{p}_2 dV_1 \cdot f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) d\mathbf{p}_3 v_n \sigma(v_n, \alpha) d\Omega_1 \quad (10.7)$$

ga teng bo'ladi. Bu yerda  $v_n = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3|$ ,  $\alpha = \alpha(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ . Elastik to'qnashishning klassik mexanika qonunlari (10.7) ifodani sod-dalashtirishga imkon beradi. (10.4) va (10.5) shartlarni qanoat-lantiruvchi  $(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$  tip to'qnashishlar uchun  $v'_n = v_n$ ,  $d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 = d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1$  va  $\alpha = \alpha$  larni isbotlash mumkin. Shuning uchun (10.7) ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) v_n \sigma(v_n, \alpha) d\mathbf{p}_1 d\Omega_1. \quad (10.8)$$

Bu ifodani  $\mathbf{p}_1$  va  $\Omega_1$  ning hamma qiymatlari bo'yicha integrallash natijasida bd $\gamma$  kattalikni topamiz:

$$bd\gamma = d\mathbf{p} dV \iint v_n \sigma(v_n, \alpha) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) d\mathbf{p}_1 d\Omega_1,$$

yoki

$$b = \iint v_n f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) d\mathbf{p} \sigma_1 d\Omega_1. \quad (10.9)$$

$a$  va  $b$  uchun topilgan (10.6) va (10.9) ifodalar to'qnashishlar integralini aniqlaydi:

$$I = b - a = \iint \sigma v_n [f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t)] d\mathbf{p}_1 d\Omega_1. \quad (10.10)$$

(10.10) ni (10.2) ifodaga qo'yish natijasida quyidagi tenglamani olamiz:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial r} + F \frac{\partial f}{\partial p} = \\ & = \iint \sigma v_n [f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t)] d\mathbf{p}_1 d\Omega_1. \quad (10.11) \end{aligned}$$

$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ ,  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t)$ ,  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t)$ ,  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t)$  larni, mos ravishda  $f$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  orqali belgilasak va  $d\Omega_1$  kattalikni indeksiz yozsak, (10.11) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial r} + F \frac{\partial f}{\partial p} = \iint \sigma v_n [f_2 f_3 - f f_1] dp_1 d\Omega. \quad (10.12)$$

Taqsimot funksiyasiga nisbatan integro-differensial tenglama (10.12) birinchi marta Bolsman tomonidan olingan bo'lib, Bolsman kinetik tenglamasi deb yuritiladi. Bolsman tenglamasining tatbiq qilish sohasi ideal gaz fizikaviy kinetika doirasidan chetga chiqadi. Shuning uchun Bolsman tenglamasini tatbiq qilish sohasi juda kengdir. Xususan, ideal gazlardan mohiyati bo'yicha tamoman farq qiluvchi, ammo Bolsmaning kinetik tenglamasini isbotlashda foydalanilgan talablarga rasmiy tomondan qanoatlantiruvchi bir qator fizik-kimyoviy sistemalar (10.12) tenglama asosida tasvirlanadi.

Matematik nuqtayi nazardan Bolsman tenglamasi xususiy hosilali noxiziqli integro-differensial tenglamadir. Bu tenglamani yechish ancha murakkab masaladir. Chunki tenglama konkret ma'noga ega bo'lishi va uni yechish uchun effektiv kesimning nisbiy tezlik va sohilish burchagiga bog'liqligini va gaz zarrasiga ta'sir etuvchi kuch maydonini bilishi kerak. Ammo xususiy hollarda ham (10.12) ni integrallash ancha murakkab masaladir. (10.12) tenglamani  $(r, v, t)$  o'zgaruvchanlarda yozsak,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = \iint \sigma v_n [f_2 f_3 - f f_1] dv_1 d\Omega \quad (10.13)$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamani vektorlarning tashkil etuvchilari orqali yozamiz:<sup>1</sup>

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} = \iint \sigma v_n [f_2 f_3 - f f_1] dv_1 d\Omega. \quad (10.14)$$

Bolsman tenglamasi, hatto, ideal gazlarda faqat juft-juft o'zaro ta'sirni hisobga olganda ham murakkab ko'rinishni saqlab qoldi.

## 10.2. Bolsman tenglamasining statsionar yechimi

Bolsman tenglamasining eng sodda yechimi sifatida uning statsionar yechimini xususiy holda, ya'ni tashqi maydon  $U = 0$  bo'lganda ko'raylik. Statsionar holatda  $f$  taqsimot funksiyasi

---

<sup>1</sup> Takrorlanuvchi indekslar «soqov» indekslar deyiladi va ular bo'yicha albatta yig'indi ko'zda tutiladi.

vaqtga oshkor ko'rinishda bog'lanmagan bo'ladi, ya'ni  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ . Bundan tashqari, tashqi kuch bo'lmashligi tufayli, fazoda ajratilgan nuqtalar yo'q, shuning uchun  $f$  taqsimot funksiyasi koordinatlarga ham bog'liq bo'lmaydi, ya'ni  $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$ . Natijada (10.12) tenglamaning chap tomoni nolga teng bo'ladi va  $f$  taqsimot funksiya quyidagi tenglama bilan aniqlanadi:

$$\iint \sigma v_n [f_2 f_3 - f f_1] d\mathbf{p}_1 d\Omega = 0.$$

Bu tenglamaning xususiy yechimi  $f_2 f_3 - f f_1 = 0$  shartdan yoki funksional tenglama

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) \quad (10.15)$$

dan topiladi. (10.15) ni logarifmlab, unga impuls va energiya-ning saqlanish qonunini qo'llasak, u holda quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\ln f(\mathbf{p}_2) + \ln f(\mathbf{p}_3) = \ln f(\mathbf{p}) + \ln f(\mathbf{p}_1), \quad (10.16)$$

(10.16) tenglamalar sistemasini

$$\ln f(\mathbf{p}) = \mathbf{a}\mathbf{p} + b\mathbf{p}^2 + c = b(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^2 + A$$

funksiya qanoatlantiradi. Bu yerda  $\mathbf{a}$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\mathbf{p}_0$ ,  $A$  - konstantalar. Shunday qilib, Bolsman tenglamasining xususiy statsionar yechimi

$$f(\mathbf{p}) = B \exp[b(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^2] \quad (10.17)$$

ko'rinishda bo'ladi, ya'ni tezlik bilan harakatlanuvchi sanoq sistemasida Maksvell taqsimoti bo'lib hisoblanadi, chunki  $b = -1/2mkT$  deb tanlash mumkin, konstanta  $B$  esa normirovka sharti

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} d\mathbf{r} = N$$

dan aniqlaniladi. Bu yerda  $N$  - molekularning to'la soni. Hisoblash natijasi

$$B = \frac{N}{V} \left( \frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} = n \left( \frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2}$$

ekanligini ko'rsatadi. Olingan kattaliklarni (10.17) ga qo'yish natijasida Bolsman tenglamasining xususiy statsionar yechimi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$f(\mathbf{p}) = n \left( \frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)^2}{2mkT} \right]. \quad (10.18)$$

$\bar{p}_x = \frac{1}{N} \int p_x f(\mathbf{p}) dpdr = p_{0x}$  ekanligini ko'rsatish mumkin. Agar gaz yaxlitligicha harakatlanmasa, u holda  $\bar{p}_x = \bar{p}_y = \bar{p}_z = 0$  bo'ladi va (10.18) quyidagicha yoziladi:

$$f(\mathbf{p}) = n \left( \frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{\mathbf{p}^2}{2mkT} \right]. \quad (10.19)$$

Maksvell taqsimoti (10.18) yoki (10.19) Bolsman tenglamasining yagona statsionar yechimini yoki (10.15) tenglamani qanoatlantiruvchi boshqa statsionar yechimlar ham mavjudmi degan muhim savolni aniqlash masalasi turadi. Bu savolni yechish uchun Bolsmaning H- teoremasini qarab chiqishimiz kerak.

### 10.3. Bolsmaning H-teoremasi va entropiyaning o'sish qonuni

Statistik fizikada muvozanatdagi sistemalarda entropiyani o'sish qonuni mukammal yoritildi. Unda entropiyaning o'sishi aniqlandi. Shu narsa ko'rsatildiki, yopiq sistema holati o'zgar-ganda oxirgi holat entropiyasi boshlang'ich holat entropiyasiga nisbatan har doim katta bo'ladi. Biroq statistik doirada qarash bilan sistemani boshlang'ich holatidan oxirgi holatiga o'tishning qanday bajarilishini aniqlash mumkin emas. Kinetikada esa entropiyaning o'zgarish xarakterini o'rganish va ideal gaz entropiyasining vaqt bo'yicha monoton o'sishini ko'rsatish mumkin bo'lar ekan. Muvozanat holatdagi berk sistema entropiyasi

$$S = -k \iint \rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \ln \rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}d\mathbf{r}$$

bo'lgani kabi, kinetikada ham entropiya ana shu ko'rinishda bo'ladi:

$$S = -k \int \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \ln f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} d\mathbf{r}. \quad (10.20)$$

Bolsman (10.20) ifodada integralni  $H(t)$ - funksiya bilan belgilab oladi:

$$H(t) = \int \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \ln f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} d\mathbf{r}. \quad (10.21)$$

(10.21) ifodaga Bolsmanning  $H$ - funksiyasi deb aytiladi. Bino-  
barin, sistema entropiyasi  $H$ - funksiya bilan

$$S = -kH \quad (10.22)$$

ko'rinishda bog'langan.

Biz eng avval  $H(t)$  funksiyani Bolsman tenglamasidan foy-  
dalanib, vaqt bo'yicha kamayuchi, ya'ni  $\frac{dH}{dt} \leq 0$  bo'lishligini  
isbotlaylik. U holda (10.20) ga asoslanib, entropiyaning vaqt  
bo'yicha o'sishini ko'rsatgan bo'lamiz.

(10.21) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{dH}{dt} = \int \int (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{r} d\mathbf{v}. \quad (10.23)$$

Normirovka shartiga asosan (10.23) ning birinchi hadi nolga teng:

$$\int \int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial t} \int \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = \frac{\partial N}{\partial t} = 0.$$

U holda (10.13) ga asosan, (10.23) quyidagicha yoziladi:

$$\frac{dH}{dt} = \int \int \left[ -v \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v} + I \right] \ln f d\mathbf{r} d\mathbf{v}. \quad (10.24)$$

(10.24) ifodada quyidagi integrallar nolga teng:

$$\int \frac{\partial f}{\partial r} \ln f d\mathbf{r} = f \ln f \left[ \int \frac{\partial f}{\partial r} d\mathbf{r} = f(\ln f - 1) \right] = 0,$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial v} \ln f d\mathbf{v} = f \ln f \left[ \int \frac{\partial f}{\partial v} d\mathbf{v} = f(\ln f - 1) \right] = 0,$$

Bu yerda kuch tezlikka bog'liq emas deb hisoblangan. Natijada  
to'qnashish integrali (10.10) ni hisobga olib (10.24) ni quyidagi  
ko'rinishga keltiramiz:

$$\frac{dH}{dt} = \iint \sigma v_n \ln f(f_2 f_3 - ff_1) drdvdv_1 d\Omega. \quad (10.25)$$

Impuls va energiya saqlanish qonunlarining simmetriyasiga ko'ra, (10.25) ifodada  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) \rightarrow (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  bilan va, aksincha,  $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \rightarrow (\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$  bilan almashtirish mumkin. Bundan tashqari Liuvill teoremasidan foydalanib,  $dv_2 dv_3 = dv dv_1$  va  $v'_n = v_n$ ,  $\sigma(v'_n, \alpha) = \sigma(v_n, \alpha)$  ekanligini hisobga olsak, (10.25) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{dH}{dt} = \iint \sigma v_n \ln f_1(f_2 f_3 - ff_1) drdvdv_1 d\Omega, \quad (10.26)$$

$$\frac{dH}{dt} = -\iint \sigma v_n \ln f_2(f_2 f_3 - ff_1) drdvdv_1 d\Omega, \quad (10.27)$$

$$\frac{dH}{dt} = -\iint \sigma v_n \ln f_3(f_2 f_3 - ff_1) drdvdv_1 d\Omega. \quad (10.28)$$

(10.25)–(10.28) tenglamalarni qo'shish natijasida quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{4} \iint \sigma v_n \ln \left( \frac{ff_1}{f_2 f_3} \right) (f_2 f_3 - ff_1) drdvdv_1 d\Omega. \quad (10.29)$$

(10.29) dagi integral ostidagi ifoda hech vaqt musbat bo'la olmaydi. Chunki  $(f_2 f_3 - ff_1)$  ning har qanday qiymatida

$$\ln \left( \frac{ff_1}{f_2 f_3} \right) (f_2 f_3 - ff_1) \leq 0. \quad (10.30)$$

Shunday qilib, (10.30) ga ko'ra Bolsman kinetik tenglamasining yechimi bo'lgan har qanday taqsimot funksiyalari uchun

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} < 0, & \text{ agar } f_2 f_3 \neq ff_1, \\ \frac{dH}{dt} = 0, & \text{ agar } f_2 f_3 = ff_1. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Demak,  $\frac{dH}{dt} \neq 0$  faqat nostatsionar yechimlarda, ya'ni vaqtga oshkora ko'rinishda bog'langan  $f$  taqsimot funksiyalarida bo'lishi

mumkin. Statsionar yechim esa faqat  $\frac{dH}{dt} = 0$  da bo'lishi mumkin. Shunday qilib, (10.31) ga ko'ra, statsionar yechimlar uchun  $f(\mathbf{v}_2)f(\mathbf{v}_3) = f(\mathbf{v})f(\mathbf{v}_1)$  shart, ya'ni Maksvell taqsimot funksiyasida olingan shartning o'zi albatta bajarilishi kerak. Bino-barin, Maksvell taqsimoti Bolsman kinetik tenglamasining yagona statsionar yechimidir. Isbotlangan

$$\frac{dH}{dt} \leq 0 \quad (10.32)$$

tengsizlik Bolsmanning H- teoremasi deyiladi.  $S = -kH$  dan vaqt bo'yicha hosila olib, (10.31) ni hisobga olish natijasida

$$\frac{dS}{dt} \geq 0 \quad (10.33)$$

ifodani olamiz.

Shunday qilib, yopiq sistema – bir atomli ideal gaz entropiyasi vaqt bo'yicha monoton ortadi yoki o'zgarmasdan qoladi.

#### **10.4. Ko'chishning umumlashgan tenglamasi. Enskog tenglamasi**

Bolsman tenglamasi (10.14) dan taqsimot funksiyasi  $f$  ning oshkora ko'rinishi bilan bog'liq bo'lmagan bir qator muhim umumiy natijalarni olish mumkin.

Faraz qilaylik, gaz bir butun holda o'rtacha  $\mathbf{u}$  tezlik bilan harakat qilsin. Bolsman tenglamasi yordamida nisbiy harakat tezligi ixtiyoriy funksiyasining o'rtacha qiymatini qanoatlashtiruvchi umumiy tenglamani topish mumkin ekan, ya'ni  $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$  nisbiy harakat tezligi bo'lsa,  $\phi(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \phi(\mathbf{V})$  funksiyaning o'rtacha qiymati uchun umumiy tenglamani olish mumkin. Bu funksiyaning o'rtacha qiymati

$$\bar{\phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int \phi f d\mathbf{v}}{\int f d\mathbf{v}} = \frac{1}{N} \int \phi(\mathbf{V}) f d\mathbf{v}, \quad (10.34)$$

bu yerda  $N$  – birlik hajmdagi zarralar soni bo'lib, koordinata va vaqtning funksiyasidir, ya'ni  $N = N(\mathbf{r}, t)$ . (10.34) ifodani  $N$  ga ko'paytirib vaqt bo'yicha hosila olamiz:



$$\bar{\phi} \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} = \int \phi(\mathbf{V}) \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v}. \quad (10.35)$$

Bu yerga Bolsman tenglamasi (10.13) dan  $\frac{\partial f}{\partial t}$  ni (10.35) ning o'ng tomoniga qo'ysak, u holda

$$\begin{aligned} \bar{\phi} \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} &= - \int \phi(\mathbf{V}) \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v} - \\ &- \int \phi(\mathbf{V}) \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v} + \int \phi(\mathbf{V}) I d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (10.36)$$

(10.36) ifodaga kirgan integrallarni o'zgartiramiz:

$$\int \phi \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \phi \mathbf{v} f d\mathbf{v} = \frac{\partial N(\overline{\mathbf{v}\phi})}{\partial \mathbf{r}},$$

$$\int \phi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \phi f \Big|_{|\mathbf{v}| \rightarrow \infty} - \int f \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = - \int f \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = -N \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \mathbf{v}} \right).$$

Bu yerda tezlik moduli cheksizga intilganda taqsimot funksiyasi nolga intiladi deb olindi. Ushbu o'zgarishlarni hisobga olib (10.36) ni qayta yozamiz:

$$\bar{\phi} \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial N(\overline{\mathbf{v}\phi})}{\partial \mathbf{r}} - N \frac{\mathbf{F}_k}{m} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \mathbf{v}} \right) = \int \phi I d\mathbf{v}. \quad (10.37)$$

Bu tenglama ko'chishning umumlashgan tenglamasi yoki Enskog tenglamasi deb yuritiladi. Agar (10.37) ga kirgan ixtiyoriy kattalik  $\phi$  additiv harakat integrallaridan (massa -  $m$ , nisbiy harakat impulsi -  $m\mathbf{V}$  yoki kinetik energiya -  $m\mathbf{V}^2/2$ ) biri bo'lsa, u holda ko'chishning umumlashgan tenglamasi sodalashadi. Xususan, zarralarning to'qnashishida

$$m_1 + m_2 = \text{const},$$

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{const},$$

$$\frac{m_1 \mathbf{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \mathbf{v}_2^2}{2} = \text{const}$$

tengliklar o'rinli ekanligini hisobga olsak,  $\phi$  additiv harakat integrali bo'lgan holda to'qnashish integralining simmetriya

xususiyatlaridan foydalanib, (10.37) tenglama o'ng tomonining nolga teng bo'lishini isbotlash mumkin. Bu holda ko'chishning umumlashgan tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\bar{\phi} \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial N(\bar{v}\phi)}{\partial \mathbf{r}} - N \frac{F_k}{m} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0. \quad (10.38)$$

Bu tenglama (10.37) tenglamaga nisbatan ancha soddalashadi. Eng muhimi nochiqli tenglama chiziqli tenglamaga aylandi. Ya'ni juft ta'sirlarni hisobga oluvchi had yo'qoldi. Shu sababli tenglamani keng doiradagi masalalarga tatbiq qilish mumkin.

### 10.5. Additiv kattaliklar saqlanish qonunlari

Ko'chishning umumlashgan tenglamasi (10.38) yordamida bir qator fizik kattaliklar uchun ko'chish masalasini yoki saqlanish qonunlarini ko'rib chiqamiz.

**1. Massa saqlanish qonuni.** Umumlashgan ko'chish tenglamasidan harakatdagi uzluksiz muhitlarda massaning saqlanish qonunini keltirib chiqarish mumkin. Bir jinsli moddalarning makroskopik zichligi  $\rho = mN$ , bu yerda  $N$  – gaz konsentratsiyasi. Bu misolda additiv kattalik  $\phi \equiv m$ . Shu sababli (10.38) tenglamadagi ikkinchi va to'rtinchi had  $m = \text{const}$  bo'lganligi uchun nolga teng bo'ladi. Demak, (10.38) to'g'ridan-to'g'ri uzluksizlik tenglamasi ko'rinishida yoziladi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (10.39)$$

Bu tenglama massaning saqlanish qonunini beradi. Birorta hajmdagi massaning o'zgarishi shu hajmni o'rab turgan sirt bo'ylab shuncha miqdor massa oqimiga ekvivalent ekanligini ko'rsatadi.

Massaning saqlanish qonuni ko'p komponentli gazlar uchun ham o'rinlidir, chunki zarralar orasidagi o'zaro ta'sir tenglamasidan yo'qolganligi uchun gazni tashkil etuvchi har bir komponentlar oqimda mustaqil ravishda ishtirok etadi. Agar har bir komponent uchun saqlanish qonunini yozsak, unda qo'shimcha hadlar paydo bo'ladi. Lekin, qo'shimcha hadlar barcha komponentlar uchun yozilgan saqlanish qonunida yo'qolib ketadi. Shu masalani batafsil ko'rib chiqamiz.

Bu holda gazning  $\alpha$ -komponenti uchun zichlik va tezlik tushunchasini quyidagicha kiritamiz:

$$\rho^\alpha = N^\alpha m^\alpha = m^\alpha \int f^{(\alpha)} d\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}^\alpha = \int \mathbf{v}^\alpha f^{(\alpha)} d\mathbf{v}. \quad (10.40)$$

Umumiy holda massa zichligi va tezligi

$$\rho = \sum \rho^\alpha, \quad \rho \mathbf{u} = \sum \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha \quad (10.41)$$

ifodalar bilan aniqlanadi.  $\alpha$ -komponent zichligidan vaqt bo'yicha hosilani ochiq yozib chiqamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} &= m^\alpha \int \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} d\mathbf{v} = -m^\alpha \int \mathbf{v}^\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v} = \\ &= -m^\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \mathbf{v}^\alpha f^\alpha d\mathbf{v} = -\frac{\partial \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha}{\partial \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (10.42)$$

Bu ifodadagi  $\mathbf{v}^\alpha$  ga  $\mathbf{u}$  ni qo'shib ayiramiz va natijani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{j}^\alpha + \mathbf{u} \rho^\alpha). \quad (10.43)$$

Bu yerda  $\alpha$ -komponentning diffuziya oqimi deb nomlanuvchi kattalik

$$\mathbf{j}^\alpha = m^\alpha \int (\mathbf{v}^\alpha - \mathbf{u}) f^\alpha d\mathbf{v}, \quad \sum \mathbf{j}^\alpha = 0 \quad (10.44)$$

kiritildi. Bu kattalik gaz aralashmasining umumiy zichlik saqlangan holdagi turli komponentlarning oqimiga teng. Bu oqimni turli komponentlar bo'yicha yig'ib chiqsak, yig'indi nolga teng bo'ladi. Natijada to'liq massaning saqlanish qonuni (10.38) ko'rinishda yoziladi. Bu holda massa zichligi va uning oqimining zichligi (10.41) bilan aniqlanadi.

**2. Impuls saqlanish qonuni.** Makroskopik impuls saqlanish qonunini olish uchun (10.38) ifodadagi ixtiyoriy kattalik  $\phi$  o'rniga  $m\mathbf{v}$  impulsni qo'yamiz. Soddalik uchun bir komponentli gazni qaraymiz. Birluk hajmdagi impuls

$$\rho \mathbf{u} = Nm \int \mathbf{v} d\mathbf{v}. \quad (10.45)$$

Ushbu ifodadan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} = Nm \int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v}. \quad (10.46)$$

Bu tenglamaning o'ng tomonini Bolsman tenglamasining vektor kattaliklarning komponentlari orqali yozilgan ko'rinishi (10.14) dan foydalanib o'zgartiramiz. Bunda additiv kattaliklar uchun Bolsman tenglamasining o'ng tomoni nolga tengligini hisobga olamiz va uning ikkinchi hadi bilan bog'liq bo'lgan integral ostidagi tezliklarga  $u$  ning mos tashkil etuvchilarini qo'shib ayiramiz. Bundan tashqari uncha murakkab bo'lmagan hisoblashlarni amalga oshirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \mathcal{F}_i. \quad (10.47)$$

Bu gazning makroskopik harakat tenglamasi (Nyuton II qonuni) yoki impuls saqlanish qonunini beradi. Bu yerda

$$\mathcal{F}_i = NF_i$$

birlik hajmdagi gazga ta'sir etuvchi tashqi kuch,

$$\sigma_{ik} = mN \int (v_i - u_i)(v_k - u_k) f dv = mN \overline{(v_i - u_i)(v_k - u_k)} \quad (10.48)$$

kuchlanish tenzori deb ataladi. Kuchlanish tenzori aniqlanishiga binoan simmetrikdir, ya'ni  $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ . Bu kattalik gaz molekularining xaotik issiqlik harakati bilan bog'liq bo'lgan «qayish-qoqlik» oqimi natijasida paydo bo'ladigan kuchga teng. Nihoyat, o'ng tomondagi birinchi had impulsning konvektiv oqimi hisobiga paydo bo'ladigan kuchdir. Umuman olganda, to'liq impulsining manbayi tashqi kuchdir.

**3. Energiya saqlanish qonuni.** Impuls saqlanish qonunini olishdagi kabi hisoblashlarni olib borib gazning makroskopik energiyasining saqlanish qonunini olish mumkin, ya'ni

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k} (q_k + E u_k) - \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad (10.49)$$

bu yerda

$$q_k = \frac{mN}{2} \int (v_i - u_i)^2 (v_k - u_k) f^{(0)} dv \quad (10.50)$$

energiya oqimi zichligi. Demak, birlik hajmda energiya o'zgarishi, shu hajmni o'rab turuvchi sirt orqali to'la energiya oqimi

$(q_k + E u_k)$  va ichki kuchlarga qarshi bajarilgan ish  $-\left(\sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)$

bilan bog'langan ekan.

Agar ideal gaz energiyasini temperatura orqali ifodalasak, u holda (10.49) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (q_k + C_v T u_k) - \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (10.51)$$

Massa, impuls va energiya saqlanish qonunlari ideal gaz uchun chiqarilgan bo'lsada, ularning tatbiq qilish sohasi anchagina kengdir.

## 10.6. Makroskopik qaytmaclik va mikroskopik qaytuvchanlik

Bolsmanning H- teoremasi entropiyaning o'sish qonuniga ekvivalent ma'noga egadir. Bu qonun makroskopik jarayonlar qaytmas jarayon ekanligini ko'rsatuvchi matematik ifodadir, chunki H- teorema Bolsmanning gazokinetik tenglamasini qaytmas jarayonlarni ifodalashini isbotlaydi. Mikroskopik qonunlar vaqt inversiyasiga ( $t \rightarrow -t$ ) nisbatan invariantdir. Klassikada bu holat harakat tenglamalari vaqt bo'yicha ikkinchi tartibliligidan kelib chiqadi. Kvant nazariyada esa, vaqt inversiyasi to'liq funksiyasi  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  ni kompleks qo'shmasi  $\Psi^*(\mathbf{r}, t)$  bilan almashtirishga ekvivalent, chunki bu ikkala funksiya bir holatni ifodalaydi. Bunga asosan barcha mikroskopik jarayonlar prinsipial qaytuvchandir, ya'ni boshlang'ich shartni, mos ravishda, o'zgartirsak (klassik fizikada boshlang'ich tezliklarning yo'nalishini teskariga almashtirish) ixtiyoriy jarayon to'g'ri va teskari yo'nalishlarda o'tadi. Bunda ular bir xil oraliq holatlar orqali o'tadi. Qaytmas jarayonlarni ifodalovchi Bolsman tenglamasi vaqt bo'yicha qaytuvchi statistik fazoviy ansambl harakat tenglamasidan keltirib chiqarilgan, chunki uning asosida Gamilton tenglamasi yotadi. Shunday qilib, mikroskopik qaytuvchanlikdan keltirib chiqarilgan makroskopik qaytmaslik paradoksi paydo bo'ladi.

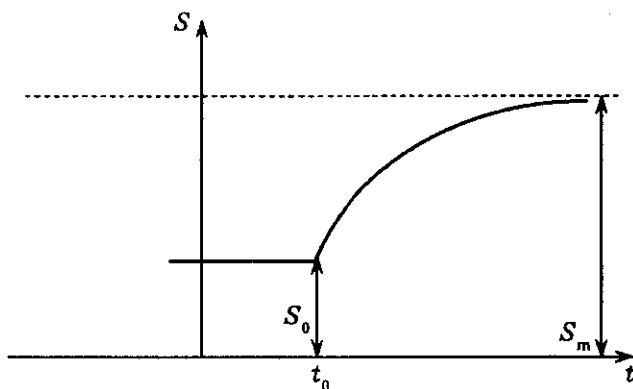
Shu narsa aniqki, bu paradoks, qaytuvchi mikroskopik harakat tenglamalaridan olinadigan qaytmas makroskopik harakat tenglamalariga asoslanuvchi har qanday statistik nazariyada ham paydo bo'ladi. Haqiqatan ham, har qanday makroskopik holat mikroskopik holat funksiyasi bo'ladi. Ammo mikroharakat tenglamalarining qaytuvchanligiga ko'ra, sistema qandaydir

«a» mikroskopik holatdan «b» holatga va, aksincha, «b» holatdan «a» holatga tashqi ta'sirsiz spontan (o'z-o'zidan) o'tishi mumkin. Demak, makroskopik nuqtayi nazardan ham sistema «A» makroskopik holatdan («a» mikroskopik holatga mos keluvchi) «B» holatga («b» mikroholatga mos keluvchi) va aksincha «B» dan «A» ga spontan o'tishi mumkin. Ammo agar biz makroharakat qaytmas ekanligini isbotlagan bo'lsak, u holda tashqi ta'sirsiz spontan o'tish faqat bitta yo'nalishda mumkin, masalan, «A» dan «B» ga spontan o'tish mumkin bo'lsa, aksincha, o'tish mumkin emas.

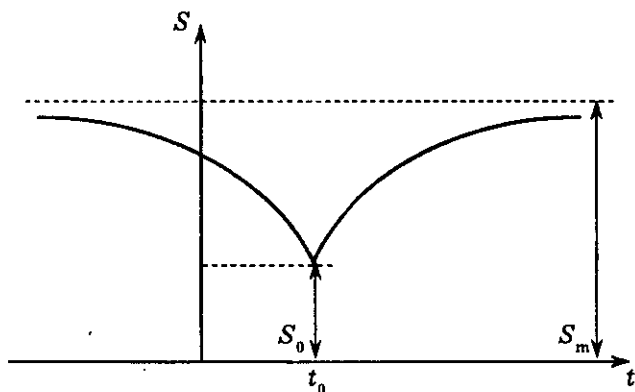
Agarda har qanday izolatsiyalangan sistemalar qaytmas makroskopik harakat tenglamalari, qandaydir boshlang'ich vaqt momentidan, ya'ni sistemaning izolatsiyalanmagan holatidan izolatsiyalanishiga tayyorlanish vaqt momentidan boshlab o'rinni desak, ko'rsatilgan qarama-qarshilik yengil hal bo'ladi. Masalan, nisbatan issiq jismdan sovuqroq jismga issiqlik uzatish qaytmas jarayonini ko'rib chiqamiz. Bu jismlar orasidagi issiqlik uzatilishi ularni bir-biriga issiqlik kontaktga keltirish momentidan boshlanadi. Shu vaqtga qadar jismlar bir-birlaridan ajralgan holda edi va ularni birlashtirish uchun qandaydir tashqi ta'sir kerak bo'ldi, ya'ni issiqlik uzatish jarayonini boshlanishi uchun tashqi ta'sir zarur bo'ldi. Demak, izolatsiyalangan sistema uchun qaytmas harakat tenglamasi, faqat qandaydir boshlang'ich vaqt momentidan boshlab hisoblangandagina o'rinni bo'lishi kerak.

Agar sistema izolatsiyalangan va hech qanday tashqi ta'sirga duchor bo'lmagan bo'lsa, u holda bunday sistemada qaytmas jarayon faqat spontan fluktuatsiya natijasida yuzaga kelishi mumkin. Yuqorida ko'rilgan misolda holat, issiqlik kontaktda bo'lgan ikkita jismdan biri  $T_1$ , ikkinchisi  $T_2$  temperaturada bo'lsa, spontan fluktuatsiya temperaturalar farqi natijasidagina amalga oshishi mumkin. Ammo bu holda  $t_0$  vaqt momentiga qadar issiqlik sovuq jismdan issiq jismga,  $t_0$  dan keyin issiq jismdan sovuq jismga o'tishi kerak edi. Boshqacha qilib aytganda,  $t_0$  vaqt momentiga qadar issiqlik o'tkazuvchanlik jarayoni vaqt yo'nalishi bo'yicha teskari o'tgan,  $t_0$  dan so'ng esa to'g'ri yo'nalish bo'yicha o'tishi kerak bo'lib chiqadi.

Birinchi (jismlar  $t_0$  vaqtda tashqi ta'sir yordamida kontaktga keltirilgan) holda, umumiy entropiyaning vaqtga bog'lanishi 10.1-rasmdagi ko'rinishda bo'ladi. Ikkinchi (fluktuatsiya nati-



10.1- rasm.



10.2- rasm.

jasida issiqlik almashinish) holda, izolatsiyalangan sistema uchun umumiy entropiyaning vaqtga bog'lanishi har doim 10.2- rasmga ko'rsatilgandek bo'lishi mumkin. Demak, birinchi va ikkinchi hollarda ham entropiyaning o'sishi faqat  $t_0$  vaqt momentidan boshlab o'rinli bo'ladi. Ikkinchi holda  $t_0$  vaqt momentiga qadar, entropiyaning o'sishi emas, balki entropiyaning kamayishi o'rinli bo'lmoqda. Birinchi holda esa  $t_0$  vaqt momentiga qadar entropiya umuman o'zgarmaydi, ya'ni istalgan yo'nalishda vaqt davomida qaytmas qonunlari o'rinli bo'lishi mumkin.

Shunday qilib, Bolsman kinetik tenglamasidan faqat qandaydir boshlang'ich vaqt momenti  $t_0$  dan boshlab, ya'ni nomuvozanat sistema tayyorlanish vaqtidan boshlab foydalanish mumkin. Bu vaqtda entropiya maksimum yoki  $H$  minimum bo'ladi.

$t_0$  vaqtga qadar Bolsman tenglamasidan o'ng tomonidagi ishorasi bilan farq qiladigan boshqa tenglamadan foydalanish kerak. Bunday tenglamaga asosan entropiya kamayadi,  $H$  esa o'sadi.

Demak, doimo izolatsiyalangan sistema uchun makroskopik tenglama shundayki, cheksiz vaqt oralig'ining hammasi qaytuvchi, chunki entropiya avvalo kamayadi, keyin esa ortadi. Izolatsiyalanmagan sistema uchun esa har doim boshlang'ich vaqt momenti boshlang'ich shart bilan ajratilgan va shu vaqt momentidan boshlab, makroskopik tenglama faqat entropiyaning o'sishini berishi mumkin, bu esa mikroskopik qaytuvchanlikka zid bo'lmaydi.

Yuqorida masalani amaliy nuqtayi nazardan ko'rib chiqdik. Savol qayta paydo bo'ladi – nima uchun biz foydalanadigan kinetik tenglama qaytuvchi jarayonni o'rganish imkonini bermaydi? Bu joyda izolatsiyalangan har qanday sistema yetarlicha katta vaqtdan so'ng boshlang'ich holatga cheksiz yaqin holatlarga qaytishi kerakligi to'g'risidagi Puankarening teoremasini eslash lozim. Ya'ni Bolsman tenglamasi Puankare teoremasiga ziddir. Bu ziddiyatga (umuman kinetik paradoks) Bolsman tenglamasini olishda asos solingan. Chunki Bolsman tenglamasi aniq tenglama emas. Bu tenglama zanjir tenglamani uzish natijasida olingan bo'lib, molekularning uchtalab, to'rttalab va h.k. o'zaro ta'sirlari hisobga olinmaydi. Shu sababli ular nisbatan qisqa vaqtlarda o'rinli bo'ladi. Shuning uchun mexanikadagi mutlaq qaytuvchanlik bilan qaytmas kinetik tenglamalar orasida ziddiyat yo'q.

### 10.7. Ideal gazda Maksvell muvozanat va lokal muvozanat taqsimoti

Biz entropiyaning o'sish qonuni  $\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0$  ni oldik.  $t \rightarrow \infty$  da entropiya o'sib borib qandaydir o'zgarmas kattalikka intiladi, ya'ni  $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ .  $t \rightarrow \infty$  da emas, balki relaksatsiya vaqti  $\tau$  da  $S \rightarrow S_{\max}$ . Shu  $t \geq \tau$  vaqtda

$$\ln \left( \frac{f_2 f_3}{f f_1} \right) (f_2 f_3 - f f_1) = 0$$

shart bajariladi. Bundan  $f_2 f_3 = f f_1$  yoki  $\ln f_2 + \ln f_3 = \ln f + \ln f_1$  bo'lishi kerak. Bu esa  $\ln f$  harakatning additiv integrali ekanligini



ko'rsatadi. Ikkita zarra to'qnashishida beshta harakat additiv integrali mavjud bo'ladi: massa, impuls va energiya integrallari. Shuning uchun,  $\ln f$  ana shu kattaliklarning chiziqli funksiyasi bo'lishi kerak:

$$\ln f = ma + b_k mv + c \frac{mv^2}{2},$$

bu yerda  $a$ ,  $b_k$ ,  $c$  – o'zgarmas kattaliklar bo'lib, birlik hajmdagi zarralar soni « $n$ », o'rtacha makroskopik tezlik « $u_i$ » va muvozanat holatdagi bir atomli gaz o'rtacha energiyasi orqali ifodalanadi. Agar gaz bir butun holda tinch turgan bo'lsa va  $u_i = 0$  bo'lsa,  $u$  holda

$$\int f dv = n, \quad \int v_i f dv = 0, \quad n \int \frac{mv_k^2}{2} f dv = \frac{3}{2} nkT.$$

Bu tenglamalar asosida Maksvell muvozanat taqsimot funksiyasini topamiz:

$$f^{(M)} = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mv^2}{2kT} \right).$$

Muvozanatdagi gazda temperatura  $T$  va zichlik  $n$  butun gaz hajmida o'zgarmas qiymatga ega bo'ladi va unda makroskopik harakat yuzaga kelmaydi. Agarda temperatura va zichlik koordinata va vaqtga bog'liq bo'lsa va gaz o'rtacha  $u_i$  tezlik bilan harakatlansa,  $u$  holda Bolsman tenglamasidagi to'qnashish integrali nolga aylanadi, agarda taqsimot funksiyasi o'rniga quyidagi ifodani olsak:

$$f^{(0)} = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m(v-u)^2}{2kT} \right), \quad (10.52)$$

bu yerda  $n$  va  $T$  – koordinata va vaqtning funksiyasi. Taqsimot funksiyasini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$f^{(0)} = \exp(\alpha + \beta_i v_i + \gamma v^2). \quad (10.53)$$

Agarda taqsimot funksiyasi  $f^{(0)}$  Bolsman tenglamasining o'ng va chap tomonlarini nolga aylantirsa,  $u$  holda Bolsman tenglamasining yechimi bo'la oladi. Buning uchun  $\alpha$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma$  quyidagi

shartlarni qanoatlantirish kerak. Odatda, (10.52) va (10.53) Maksvell–Bolsman lokal taqsimoti deb yuritiladi. (10.53) taqsimotni Bolsman tenglamasining chap tomoniga qo'yamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0. \quad (10.54)$$

$v_i$  ning bir xil darajalaridagi koeffitsiyentlarni tenglashtirish natijasida quyidagi ifodalarni olamiz:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{F_i \beta_i}{m} = 0, \quad (10.55)$$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial t} + 2\gamma \frac{F_i}{m} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = 0, \quad (10.56)$$

$$\delta_{ij} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (10.57)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = 0. \quad (10.58)$$

Shunday qilib, (10.55)–(10.58) tenglamalar sistemasi Maksvell–Bolsman taqsimotiga mos bo'lgan harakatning o'rtacha tezligi  $u_i$  ga chegaralanish yuklanadi:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{m}{2kT} \right) = 0$$

tenglama temperatura  $T$  butun fazoda o'zgarmas bo'lishligini ko'rsatadi. Ammo gaz temperaturasi vaqt bo'yicha o'zgarishi mumkin. (10.57) ni koordinita bo'yicha differensiallaymiz:

$$\delta_{ij} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial r \partial x_j} + \frac{\partial^2 \beta_j}{\partial r \partial x_i} \right) = 0.$$

Bundan

$$\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial r \partial x_j} + \frac{\partial^2 \beta_j}{\partial r \partial x_i} = 0$$

yoki  $\beta_i = \frac{m u_i}{kT}$  asosan va  $i = j$  bo'lsa,

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial r \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial r \partial x_i} = 0.$$

Bundan

$$\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial r \partial x_i} = 0 \quad (10.59)$$

ekanligi kelib chiqadi. (10.59) ning yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$u_i = a_i(t) + b_{ij}(t)x_j \text{ yoki } u_i = 0. \quad (10.60)$$

$b_{ij}$  koeffitsiyentni topish uchun (10.60) ni (10.57) ga qo'yamiz va quyidagi ifodani olamiz:

$$b_{ij} = -b_{ji} \text{ va } b_{ij} = \frac{m}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Shunday qilib, gaz o'rtacha tezligini quyidagicha topamiz:

$$u_i = a_i(t) + b_{ik} e_{1kj} x_j + \frac{m}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial t} x_i$$

yoki vektor shaklida:

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}(t) + [\omega, \mathbf{r}] + \frac{m}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial t} \mathbf{r}.$$

Bu yerda  $\omega$  - aylanma harakat burchak tezligi. Agarda gaz idish ichiga qamalgan bo'lsa, u holda (10.60) dagi yechimda  $u_i = 0$  va  $\beta_i = 0$  deb olish kerak. U holda (10.56) quyidagi ko'rinishini oladi:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} + 2\gamma \frac{F_i}{m} = 0.$$

Agarda tashqi kuch potensialga ega bo'lsa, u holda

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \text{ va } \alpha = -\frac{U}{kT} + \text{const}$$

bo'ladi. Bu holda Maksvell-Bolsman muvozanat taqsimoti quyidagi ko'rinishni oladi:

$$f^{M-B} = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mv^2}{2kT} - \frac{U}{kT} \right).$$

Bu holda gazda Maksvell–Bolsman muvozanat taqsimoti tiklanar ekan. Relaksatsiya vaqti  $\tau \sim \bar{\lambda}/\bar{v}_n$  bo'ladi. Bu esa fazoda tezliklar taqsimotining tiklanishi bilan bog'langaligini ko'rsatadi.

Boshlang'ich vaqt momenti  $t = 0$  da fazoda zarralarning ixtiyoriy taqsimoti  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  berilgan bo'lsin deb faraz qilaylik, u holda  $\tau$  vaqtda fazoning har bir nuqtasida Maksvellning tezliklar bo'yicha taqsimoti Maksvellning lokal taqsimotiga intiladi:  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rightarrow f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Lokal taqsimot esa  $t \approx \tau_{\text{macro}} = L/c$  da  $f^{(0)} \rightarrow f^{(M-B)}$  ga intiladi.

## 10.8. Hidrodinamika tenglamasi. Kinetik koeffitsiyentlar

Biz yuqorida shu narsaga amin bo'ldikki, xususiyl holda Bolsman tenglamasi tutash muhitlar mexanikasining qonunlarini olish imkonini beradi. Ammo, amalda kuchlanish tenzori  $\sigma_{ik}$  ni topish taqsimot funksiyasi  $f$  ni bilishni talab qiladi.

Shuning uchun birinchi navbatda makroskopik harakatdagi ideal gaz uchun nomuvozanat taqsimot funksiyasini hisoblashni ko'rib chiqamiz. Gazning makroskopik harakat tezligi  $\mathbf{u}$  koordinataning funksiyasi bo'lsin deb faraz qilamiz. Ammo tezlikning bu o'zgarishini yetarli darajada sekin deb qabul qilamiz. Bunday harakatda sistemaning ayrim bo'laklarida Maksvell lokal muvozanat taqsimoti yuzaga keladi. Gazning turli bo'laklarida makroskopik harakat tezligi turlicha bo'ladi, ya'ni  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Biz gaz harakatining izotermik rejimi bilan chegaralanamiz, shu sababli butun gaz hajmi bo'ylab temperatura o'zgarmas bo'ladi. Lokal muvozanat yuzaga kelgan deb hisoblab, kuchlanish tenzori (10.48) va issiqlik oqimi zichligi (10.50) ni hisoblash uchun (10.52) bilan aniqlangan Maksvell lokal taqsimot funksiyasi  $f^{(0)}$  dan foydalanamiz. Hisoblashlar natijasida

$$\sigma_{ik} - NkT\delta_{ik} - p\delta_{ik}, \quad (10.61)$$

$$q_k = 0 \quad (10.62)$$

ifodalarni olamiz. Shunday qilib, kuchlanish tenzori  $\sigma_{ik}$  normal bosimga o'tar ekan. Bu yaqinlashishda massa (10.38) va (10.47) impuls saqlanish qonunlari tutash muhitlar uchun quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (10.63)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_k}. \quad (10.64)$$

Umuman, (10.64) tenglama ideal tutash muhitlarning harakat tenglamasi bo'lib Eyler tenglamasi deyiladi. Yuqoridagiga o'xshash birlik hajmdagi entropiya uchun tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial j_i^s}{\partial x_i} = 0. \quad (10.65)$$

Bu yerda  $j_i^s$  – entropiya oqimining zichligi. Bu tenglamaga asosan tutash muhit harakatida solishtirma entropiya  $s$  o'zgar-mas qolar ekan, ya'ni ko'chish jarayoni adiabatik xarakterga ega bo'ladi.

Bu yaqinlashishda tutash muhitni holat tenglamasi

$$p = NkT \quad (10.66)$$

ko'rinishda bo'lgan ideal suyuqlik deb qarash mumkin. (10.63)–(10.67) tenglamalar to'plami tutash muhit yaqinlashishida gaz harakatini to'la holda aniqlaydi.

Bu yaqinlashishda real (qayishqoq) gaz gidrodinamik tengla-masini olish uchun Bolsman tenglamasining yechimini ketma-ket yaqinlashish metodidan foydalanamiz. Taqsimot fuksiyasini quyidagi ko'rinishda qidiramiz:

$$f = f^{(0)}(1 + \xi), \quad (10.67)$$

bu yerda  $\xi \ll 1$  lokal taqsimot funksiyasi  $f^{(0)}$  ga tuzatma bo'lib, mikroskopik jarayonlar xarakterli vaqti  $\tau_m$  ga nisbatan katta  $\Delta t$  vaqtlarda gaz evolutsiyasini aniqlaydi. Masalani yanada soddalashtirish uchun bir qator cheklanishlar kiritamiz. Gaz izotermik, siqilmaydigan, tashqi kuchlar yo'q va bosim deb o'zgar-mas bo'lsin.

Bolsman kinetik tenglamasi (10.14) ga (10.67) ni qo'yib,  $\xi$  bo'yicha birinchi tartibli kichik hadlar bilan chegaralanib, quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + v_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} = f^{(0)} \int f_1^{(0)} \sigma v_n [\xi_2 + \xi_3 - \xi_1 - \xi] dv_1 d\Omega. \quad (10.68)$$

Yuqoridagi cheklanishlar doirasida lokal taqsimot funksiya-sining oshkora ko'rinishi (10.52) ni inobatga olsak, (10.68) ifoda-ning chap tomoni

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + v_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{m}{kT} \left( V_i V_k - \frac{V^2}{2} \delta_{ik} \right) U_{ik} f^{(0)}, \quad (10.69)$$

bu yerda

$$U_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

deformatsiya tezligi tenzori,  $\mathbf{V}$  – nisbiy tezlik. Natijada Bolsman tenglamasi (10.70) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{m}{kT} \left( V_i V_k - \frac{V^2}{3} \delta_{ik} \right) U_{ik} f^{(0)} = f^{(0)} \int f_1^{(0)} \sigma v_n [\xi_2 + \xi_3 - \xi_1 - \xi] dv_1 d\Omega. \quad (10.70)$$

Lokal taqsimot funksiyasiga tuzatma  $f^{(0)}\xi(\mathbf{v})$  (10.70) tenglama-dan tashqari, massa, impuls va energiya saqlanish qonunlari bajarilishini ta'minlashi kerak. Bunga asosan,  $f^{(0)}\xi(\mathbf{v})$  yordamida hisoblangan massa, impuls va energiyaga tuzatmalar nolga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$m \int f^{(0)} \xi d\mathbf{v} = 0, \quad (10.71)$$

$$mN \int V_i f^{(0)} \xi d\mathbf{v} = 0, \quad (10.72)$$

$$\frac{mN}{2} \int V^2 f^{(0)} \xi d\mathbf{v} = 0. \quad (10.73)$$

Bu shartlarning bajarilishi bir jinsli bo'lmagan integral tenglama (10.70) ning yechimi mavjudligining zaruriy sharti bo'lib hisoblanadi.

Tenglama (10.70) yechimlari mavjudligi tahlil qilishni davom etdirish, birinchidan, chigal va mashaqqatli, ikkinchidan yangi fizik ma'lumot bermaydi. Bundan tashqari sochilish effektiv kesimi  $\sigma$  ni bilishni talab qiladi. Real molekularlar, hatto bir atomli molekularlar uchun ham bu funksiyaning ko'rinishi no'-

malum. Sochilish effektiv kesimi faqat burchakka bog'liq bo'lgan sodda misolda (10.70) tenglamaning yechimini analitik ko'inishda yozish mumkin, ya'ni

$$f = f^{(0)} \left[ 1 - \frac{8}{3N\sigma} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \left( V_i V_k - \frac{V^2}{3} \delta_{ik} \right) U_{ik} \right]. \quad (10.74)$$

Ushbu taqsimot funksiyasi yordamida kuchlanish tenzorining (10.48) oshkora ko'inishi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \frac{4m}{3\sigma} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (10.75)$$

Shu joyda uzluksiz muhit mexanik harakat qonunlari asosida olingan kuchlanish tenzori uchun ifodani keltiramiz:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (10.76)$$

Bu ikkala ifodani solishtirish natijasida ideal gaz yopishqoqlik koeffitsiyenti uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\eta = \frac{4m}{3\sigma} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2}. \quad (10.77)$$

Bu formula sifat jihatdan tajriba natijalari bilan mos tushadi. (10.77) dan shu narsa ko'rinadiki, gaz yopishqoqligi zichlikka bog'liq bo'lmaydi, ammo sochilish kesimi  $\sigma$  ga bog'liq bo'ladi. Yopishqoqlik – kinetik koeffitsiyentlardan birinchisi hisoblanadi.

Xuddi yuqoridagiga o'xshash termik bir jinsli bo'lmagan gazda issiqlik oqimini hisoblash mumkin. Bu yerda gazning temperaturasi koordinataning funksiyasi va gaz makroskopik harakat bajarmaydi deb hisoblaymiz. Bolsman tenglamasining yechimini yuqoridagi metod yordamida topamiz. Bu holda taqsimot funksiyasi

$$f = f^{(0)} \left[ 1 - \left( \frac{mv^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \frac{2}{\sigma NT} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{1/2} v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right], \quad (10.78)$$

issiqlik oqimi

$$q_i = -\frac{5mk}{2\sigma} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\alpha \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (10.79)$$

issiqlik o'tkazuvchanlik

$$\kappa = \frac{5mk}{2\sigma} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \quad (10.80)$$

Issiqlik o'tkazuvchanlik – ikkinchi kinetik koeffitsiyent bo'ladi. Issiqlik o'tkazuvchanlik va yopishqoqlik koeffitsiyentlarini nisbati

$$\frac{\kappa}{\eta} = \frac{15}{4} k = \frac{5}{2} C_v \quad (10.81)$$

sochilish kesimi  $\sigma$  ga bog'liq bo'lmaydi. Bu esa tajriba natijalariga mos keladi.

### 10.9. Relaksatsiya vaqti

Kuch maydoni tashqarisida yotgan fazoviy bir jinsli gazning muvozanat holatga o'tishini qarab chiqaylik. Muvozanat holatda yetarli darajada yaqin yotgan gaz bilan cheklanamiz. U holda 10.8-bandga asosan taqsimot funksiyasini

$$f = f^{(0)} (1 + \xi)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda  $f^{(0)}$  – lokal muvozanat taqsimot funksiya. Bu holda Bolsman tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \int f_1^{(0)} \sigma v_n [\xi_2 + \xi_3 - \xi_1 - \xi] d\mathbf{v}_1 d\Omega. \quad (10.82)$$

Bu bir jinsli bo'lmagan integro-differensial tenglamani yechimini

$$\xi(\mathbf{v}, t) = \sum A_i \psi_i(\mathbf{v}) e^{-\frac{t}{\tau_i(\mathbf{v})}} \quad (10.83)$$

ko'rinishda qidiramiz. Natijada  $\psi_i(\mathbf{v})$  uchun chiziqli integral tenglama olinadi. Olingan tenglamaning yechimi uchun  $\sigma(v, \alpha)$  funksiyaning berilishi talab qilinadi. Shunday qilib, taqsimot funksiyasining vaqtga bog'lanishi (10.83) qator ko'rinishda ifodalanib, cheksiz  $\tau_i$  kattaliklar bilan aniqlanadi. Sistemada muvozanat turli tezliklar uchun turli relaksatsiya vaqti  $\tau_i(\mathbf{v})$  davomida yuzaga keladi.



Bu shuni anglatadiki, tezliklar fazosining har xil soholarida, Maksvellning tezliklar bo'yicha taqsimoti turli xil vaqt ichida tiklanadi. Demak, gazning o'rtacha xarakteristikalarini (o'rtacha tezlik, o'rtacha energiya) o'zlarining o'rtacha relaksatsiya davriga ega bo'ladi va h.k. Agar (10.83) da faqat bitta hadni hisobga olsak:

$$f(t) = f^{(0)} (1 + \psi e^{-t/\tau}). \quad (10.84)$$

Bu ifodadan ko'rinib turibdiki sistema muvozanatga kelishini xarakterlovchi vaqt  $\tau$  mavjud ekan. Bu relaksatsiya vaqti deyiladi. Tenglama (10.83) ga asosan shu vaqtni baholaymiz:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \sim \frac{\xi}{\tau} \approx \frac{I}{f^{(0)}}. \quad (10.85)$$

Ikkinchi tomondan, (10.82) tenglamaga asosan,

$$I(v) \sim N f^{(0)} \xi \bar{v}_n. \quad (10.86)$$

(10.85) va (10.86) ifodalarni solishtirib,  $\tau$  uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{1}{\tau} \simeq N f^{(0)} \xi \bar{v}_n. \quad (10.87)$$

Ko'paytuvchi  $N$  o'rtacha  $\bar{v}_n$  ni hisoblash tufayli paydo bo'ladi. Ko'rilayotgan aniqlikda

$$\xi = \frac{f - f^{(0)}}{f^{(0)}} = I(v) \quad (10.88)$$

yozish mumkin. U holda, ana shu yaqinlashishda kinetik tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f - f^{(0)}}{\tau}. \quad (10.89)$$

Bu tenglama shu narsani anglatadiki,  $f$  ning muvozanat holatga yaqinlashish tezligi qancha katta bo'lsa, muvozanat taqsimotidan chetlanish shuncha katta bo'ladi. Muvozanat holatdan yetarli darajada kichik chetlanishlarda (10.89) ko'rinishda  $\frac{\partial f}{\partial t}$  ning o'zgarish qonuni, qator amaliy tatbiqlarda relaksatsiya jarayonini yetarlicha aniqlikda ifodalaydi. Bu esa lokal taqsimot funksiyasi tezlik  $v = \bar{v}_n$  da keskin maksimumga ega bo'lishini ko'rsatadi.

Shuning uchun relaksatsiya jarayoniga o'rtachaga yaqin tezlikka ega bo'lgan zarralar asosiy hissa qo'shadi.

Ko'pincha tashqi kuch maydonida yotgan fazoviy bir jinsli bo'lmagan gazlar kinetikasini o'rganishda (10.89) ko'rinishdagi kinetik tenglama bilan bir qatorda, umumiy holda taqsimot funksiyasini olish uchun relaksatsion yaqinlashish foydalaniladi. Bu holda, Bolsman kinetik tenglamasidagi to'qnashish integrali (10.88) bilan almashtiriladi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} = \frac{f - f^{(0)}}{\tau}. \quad (10.90)$$

Bu yerda relaksatsiya vaqti  $\tau(\mathbf{r})$  dan farqli ravishda koordinata funksiyasi hisoblanadi, chunki gaz zichligi  $\rho$  koordinataga bog'liq. Bu yaqinlashish relaksatsiya jarayonini miqdor jihatdan aniq tushuntira olmasada, ko'p masalalarda kinetika tenglama (10.89) ko'rinishga keltiriladi. Shuning uchun relaksatsion yaqinlashish muhim aqamiyatga ega.

## 10.10. Bolsman kinetik tenglamasining gazlarga ba'zi bir tatbig'i

1. Gazlarning mikroskopik holatini tavsiflashda qulay bo'lgan qator kattaliklarni keltirib chiqaraylik. Agar gaz o'zining muvozanat holatidan chetlanishi uncha katta bo'lmasa, bu kattaliklar muvozanatda bo'lgan gaz uchun yetarli darajada aniqlik bilan aniqlanadi. Muvozanatda bo'lgan gaz molekulalarining bir sekunddagi o'rtacha to'qnashish sonini aniqlaylik.  $\nu$  ni aniqlash uchun birlik hajmda  $\mathbf{v}$  tezlikdagi molekulalarni  $\mathbf{v}_1$  tezlikdagi molekulalar bilan bir sekundda to'qnashish soni (10.6) ni  $\mathbf{v}$  bo'yicha integrallab,  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  va  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t)$  lar o'rniga Maksvell muvozanat taqsimot funksiyasini qo'yib, molekulalar konsentratsiyasini  $n$  ga bo'lish kerak, ya'ni

$$\nu = \frac{1}{n} \int v_n \sigma f(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}_1) dv dv_1 d\Omega. \quad (10.91)$$

Bu yerda

$$f(\mathbf{v}) = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{mv^2}{2kT} \right). \quad (10.92)$$

$f(\mathbf{v}_1)$  uchun ifoda (10.92) ga o'xshash.

$\sigma(v_n, \alpha)$  nisbiy tezlikka bog'liq emas deb faraz qilsak, (10.91) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\nu = n\sigma_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3 \int v_n \exp\left(-\frac{m(v^2+v_1^2)}{2kT}\right) d\mathbf{v}d\mathbf{v}_1, \quad (10.93)$$

bu yerda  $\sigma_0 = \int \sigma(v_n, \alpha) d\Omega$  – sochilishning to'la kesimi.

(10.93) ifodani integrallashda yangi o'zgaruvchilar – massa markazining harakat tezligi  $\mathbf{v}_c$  va  $\mathbf{v}_n = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$  nisbiy harakat tezligini kiritamiz. U holda (10.93) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\nu = 16\pi^2 n\sigma_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3 \int v_c^2 \exp\left(-\frac{mv_c^2}{2kT}\right) dv_c \int v_n^3 \exp\left(-\frac{mv_n^2}{2kT}\right) dv_n. \quad (10.94)$$

(10.94) ifodani integrallash natijasida vaqt birligida muvozanatdagi gaz molekularining to'qnashish sonini aniqlaymiz:

$$\nu = \sqrt{2}n\sigma_0\bar{v}.$$

Bu yerda  $\bar{v} = \bar{p}/m = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$  – molekular o'rtacha tezligi. Molekularning ketma-ket ikkita to'qnashishlar orasidagi o'rtacha vaqt oralig'i, yoki erkin yugurish o'rtacha vaqti

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma_0\bar{v}}.$$

$\bar{\tau}$  kattalik relaksatsiya vaqti bilan bir xil tartibdadir.

Ikkita ketma-ket to'qnashishlar orasidagi masofa molekularning erkin yugurish yo'li

$$\lambda = \tau v = \frac{\bar{v}}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma_0}.$$

Misol tariqasida azot molekulasini olib qaraylik. Azot molekulasining diametri  $d = 2,5 \cdot 10^{-8}$  sm, to'la kesimi  $\sigma_0 = \pi d^2 \approx 2 \cdot 10^{-15}$  sm<sup>2</sup>. Normal sharoitda  $n = 2,7 \cdot 10^{19}$  sm<sup>-3</sup> konsentratsiyali shunday gaz uchun erkin yugurish yo'li  $\lambda \approx 10^{-5}$  sm bo'ladi. 0 ° C temperaturada azot gazi molekulasining o'rtacha tezligi  $\bar{v} = 4,5 \cdot 10^4$  sm/s, shuning uchun erkin yugurish o'rtacha vaqti  $\bar{\tau} \approx 2 \cdot 10^{-10}$  s.

Shunday qilib, normal sharoitlarda gaz uchun  $\lambda \gg n^{-1/3} \gg d$  bo'ladi. Bu esa Bolsman kinetik tenglamasini gazlarga tatbiq qilish o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

Ko'p hollarda faqat erkin yugurish yo'li emas, balki erkin yugurish yo'lining taqsimot qonuni qiziqtiradi. Faraz qilaylik, molekulaning to'qnashishga duchor bo'lmasdan  $x$  masofani o'tish ehtimoli  $W(x)$  bo'lsin.  $x + dx$  masofani to'qnashmasdan o'tish ehtimoli esa  $W(x + dx)$  bo'lsin. Bu holda

$$W(x + dx) = W(x)W(dx) = W(x)(1 - adx), \quad (10.95)$$

bu yerda  $W(dx) = (1 - adx)$  ifoda  $dx$  masofani molekula to'qnashmasdan o'tish ehtimoli. (10.95) ning chap tomonini  $dx$  darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$W(x) + dW(x) = W(x)(1 - adx)$$

yoki

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -adx.$$

Ushbu tenglamaning yechimi

$$W(x) = C \exp(-ax).$$

O'zgarmas  $C$  boshlang'ch shartdan topiladi, ya'ni  $W(x \rightarrow 0) = 1$  dan  $C = 1$ . Demak,

$$W(x) = \exp(-ax). \quad (10.96)$$

O'zgarmas  $a$  ni topish uchun molekulaning  $x$  dan  $x + dx$  masofagacha to'qnashmasdan o'tish ehtimolligini aniqlaylik:

$$dP(x) = W(x)W(dx) = W(x)adx = a \exp(-ax)dx. \quad (10.97)$$

Bu yerda  $W(dx) = adx$  molekulaning  $dx$  masofada to'qnashish ehtimolligi. O'rtacha erkin yugurish yo'li

$$\lambda = \int_0^{\infty} x dP(x) = a \int_0^{\infty} x \exp(-ax) dx = \frac{1}{a}.$$

Demak,  $a = 1/\lambda$  va natijada (10.96) hamda (10.97) ifodalar quyidagi ko'rinishlarni oladi:

$$W(x) = \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), \quad dP(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) dx.$$

## 10.11. Kristallda o'tkazuvchi elektronlar

XIX asr oxirlarida nemis fiziklari E. Rikke va P. Drude oldinga surgan gipotezalarga ko'ra, metallarda elektr toki «erkin» elektronlarning harakati bilan bog'langan. Elektronlar manfiy zaryadga ega, shunga ko'ra ular qo'yilgan musbat tashqi maydon  $E$  ga qarama-qarshi yo'nalishda harakatlanadi. Erkin elektronlarning metall ionlari bilan to'qnashishi tufayli elektronlarning o'rtacha (dreyf tezligi) tezligi elektr maydon kuchlanganligiga proporsional bo'ladi, bu to'g'ridan-to'g'ri Om qonuniga olib keladi:  $j = \sigma E$ .

Agar G.A. Lorens bo'yicha, maydon yo'q bo'lganda erkin elektronlar metall ionlari bilan issiqlik muvozanatda yotadi va shuning uchun Maksvell tezliklar taqsimotiga ega bo'ladi deb faraz qilsak, u vaqtda nazariya qator qarama-qarshiliklarga olib keladi, shulardan bittasi metall issiqlik sig'imiga erkin elektronlar hissasining yo'qligidadir.

Bu qarama-qarshiliklar shu bilan tushuntiriladiki, metalldagi erkin elektronlarga klassik statistikani tatbiq qilish mumkin emas va ular Fermi-Dirak statistikasiga bo'ysunadi. Biroq ana shu qarama-qarshiliklar bartaraf qilingandan so'ng ham ba'zi narsalar tushunilmasdan qoldi, masalan, nima uchun metall va yarimo'tkazgichlarda o'tkazuvchi elektronlar o'zini erkin zarra kabi tutadi va katta erkin yugurish yo'liga ega bo'ladi. Faqat kvant mexanika kristallning uch o'lchovli davriy maydonda elektron tabiatini o'rganishi tufayli bu muammoni tushuntirdi va kubik kristallarda o'zini effektiv massali erkin zarra kabi tushishini ko'rsatdi.

Keyingi yillardagi nazariy tekshirishlar ko'rsatdiki, ko'p hollarda faqat yarimo'tkazgichdagi elektronlar orasidagi o'zaro ta'sirni emas (konsentratsiya  $n = 10^{14}-10^{18} \text{ sm}^{-3}$ ), balki metallarda ham ( $n = 10^{22}-10^{23} \text{ sm}^{-3}$ ) hisobga olmasligimiz mumkin, ya'ni ularni ideal gaz deb qarashimiz mumkin.

Agar kristallda o'tkazuvchan elektronlar  $m^*$  effektiv massa orqali xarakterlansa va nomuvozanat holatda yotsa, ularning tabiati Bolsman kinetik tenglamasi bilan tavsiflanadi. Bunda erkin elektronlarning bir-biri bilan to'qnashishini emas, balki ularning aralashma, atomlar (ionlar) yoki panjara tebranishlari bilan to'qnashishi hisobga olinadi, natijada kinetik tenglamada to'qnashish hadi oddiy ko'rinishni oladi.

Bolsman kinetik tenglamasi (10.12) ni qo'yidagi ko'rinishda yozaylik:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{dreyt}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{to'qn}}. \quad (10.98)$$

Bu yerda

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{dreyt}} &= -\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\mathbf{F}}{m^*} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{to'qn}} &= I = b - a. \end{aligned}$$

$a$  va  $b$  kattaliklar to'qnashish natijasida  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  fazoda molekullarning kelish va ketish tezligini aniqlaydi. (10.98) ifoda  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  taqsimot funksiyasi uchun  $a$  va  $b$  larni oshkora holda  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  orqali ifodalash zarur. Umumiy holda bajarish murakkabdir, ammo ba'zi hollarda

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{to'qn}} = -\frac{f-f_0}{\tau} \quad (10.99)$$

deb faraz qilsa bo'ladi. Bu yerda  $(f - f_0)$  - nomuvozanat taqsimot funksiyasini muvozanat taqsimot funksiyasidan chetlanishi,  $\tau(\mathbf{v})$  - relaksatsiya vaqti.

(10.59) kinetik tenglamani o'tkazuvchi elektronlar konsentratsiyasi  $n$  o'zgarmas bo'lganda  $\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0\right)$  va statsionar holda

$\left(\frac{\partial f}{\partial t} = 0\right)$  qaraylik. Bunda elektr maydon  $(\mathbf{E} = E_x)$   $x$  o'qi yo'nalishi bo'yicha qo'yilgan bo'lsin. Agar elektron energiyasi  $\mathcal{E} = m^* v^2/2$  va ularning sochilishi elastik o'tayotgan bo'lsa, u holda kinetik tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{eE_x}{m^*} \frac{\partial f}{\partial v_x} = \frac{f-f_0}{\tau}. \quad (10.100)$$

Taqsimot funksiyasi  $f$  ning muvozanat taqsimot funksiyasi  $f_0$  dan birinchi yaqinlashishda chetlanishi elektr maydon kuchlanganligiga proporsional bo'ladi. Agar biz maydon kuchlanganligi  $E$  bo'yicha chiziqli (Om qonuni) effektlar bilan qiziqsak, u holda (10.100) ning chap tomonini  $f = f_0 + f_1 \approx f_0$  funksiya bilan almashtiramiz. Bu holda

$$\frac{eE_x}{m^*} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} = \frac{eE_x}{m^*} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_x} = eE_x \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} v_x.$$

Demak,

$$f = f_0 + eE_x \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} v_x \tau(v). \quad (10.101)$$

Agar elektr maydon  $x$  o'qi bo'yicha qo'yilgan bo'lsa, u vaqtda tok  $x$  o'qi bo'yilab oqadi. Elektr tok zichligi  $j = j_x$  elektron zaryadi ( $-e$ ) bilan o'qi bo'yicha elektronlar oqimining ko'paytmasiga tengligini va  $\int f_0 v_x dv = 0$  ni hisobga olsak,

$$j = -e \int f v_x dv = -e^2 E_x \int \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \tau v_x^2 d^3 v. \quad (10.102)$$

Bu yerda integralni hisoblash uchun  $x$  o'qi bo'yicha yo'nalgan qutb koordinatalariga o'tamiz. U holda  $v_x = \cos \theta$ ,  $d^3 v = v^2 \sin \theta dv d\varphi d\theta$ .  $f_0$  ni Maksvell tezliklar bo'yicha taqsimot funksiyasi bilan almashirib, (10.102) ni burchaklar bo'yicha integrallash natijasida tok zichligi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$j = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{ne^2 E_x}{m^*} \int_0^\infty \tau(\xi) e^{-\xi} \sqrt{\xi^3} d\xi, \quad (10.103)$$

bu yerda relaksatsiya vaqti  $\tau$  o'zgaruvchi orqali ifodalangan. Shunday qilib, Om qonunining differensial ko'rinishi uchun

$$j = \sigma E = neuE \quad (10.104)$$

ifodani olamiz. Bu yerda  $\sigma = neu$  - solishtirma elektr o'tkazuvchanlik,  $u = e \langle \tau \rangle / m^*$  - tok tashuvchilarning harakatchanligi.

$$\langle \tau \rangle = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \tau(\xi) e^{-\xi} \sqrt{\xi^3} d\xi$$

- o'rtacha relaksatsiya vaqti. Agar relaksatsiya vaqti tezlikka (ya'ni  $\xi$  ga) bog'liq bo'lmasa, u holda  $\langle \tau \rangle = \tau$  bo'ladi.

O'tkazuvchi elektronlar kuchli aynigan va Fermi statistikasi-ga bo'ysinuvchi metallar holda,  $f_0$  taqsimot funksiyasini  $h^3$  fazoviy yacheykadagi elektronlarning o'rtacha soniga teng deb qabul qilinsa, u holda integrallashni kvant holatlar bo'yicha almashtirish kerak:

$$2 \frac{d\mathbf{p}}{h^3} = 2 \left( \frac{m^*}{h} \right)^3 d\mathbf{v}.$$

Natijada elektr o'tkazuvchanlik uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\sigma = - \frac{16\sqrt{2}\pi}{3} \frac{e^2 \sqrt{m^*}}{h^3} \int \tau(\mathcal{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \mathcal{E}^{3/2} d\mathcal{E}. \quad (10.105)$$

Nolinchi yaqinlashishda  $\frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}}$  ni delta funksiya bilan almashtirish mumkin, ya'ni

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} = \delta(\mathcal{E} - \mu_0). \quad (10.106)$$

Bu yerda  $\mu_0 = \mu_{T=0} = \mathcal{E}_F$  absolut nol temperaturada elektronlar kimyoviy potentsiali. (10.106) ni (10.95) ga qo'yib integrallash natijasida

$$\sigma = \frac{ne^2}{m^*} \tau(\mu_0)$$

ni olamiz. Bu yerda  $\mu_0 = \frac{h^2}{2m^*} (3n/8\pi)^{2/3}$  bilan almashtirildi.

## 10.12. Bogolyubov kinetik zanjir tenglamasi

Bolsman kinetik tenglamasining isboti o'ta sodda va ko'rgazmali bo'lib, ammo prinsipial va amaliy jihatdan bir qator kamchiliklardan holi emas. Haqiqatan, bu isbotda faqat molekullarning juft-juft to'qnashishlari qaralgan. Bu yerda to'qnashishlarning juftlik xarakteri o'ta muhim, lekin uchtalab, to'rttalab va h.k. to'qnashishlar holi uchun qanday yo'l bilan xulosa qilish mumkinligi tamoman ko'rinmaydi. Umumiy nazariyaning tatbiq qilish sohasi o'ta siyrak gazlar holi uchun o'rinlidir. Bolsman tenglamasining keltirilgan isbotida muhim prinsipial moment tomoman ko'rinmaydi: bir tomondan klassik mexanika tenglamalarining vaqt bo'yicha qaytuvchanligi hisobga olingan va zarralar harakati, ularning to'qnashishlari qat'iy sur'atda determinlashtirilgan qonunlar bo'yicha sodir bo'ladi. Ikkinchi tomondan, Bolsman tenglamasidan shu narsa kelib chiqadiki, to'qnashishlar natijasida gazda molekular xaos barqaror topadi va gaz entropiyasi vaqt monoton o'sib qandaydir limitga intil-



gan holda ortib boradi. Ammo bu yerda, tenglamani hisoblab chiqish davomida qaysi joyda jarayonning statistik, ehtimollik karakteriga ega ekanligi kiritilishi noma'lum.

Biz bu mavzuda korrelativ funksiyalardan foydalanishga asoslangan Bogolyubov varianti bo'yicha kinetik tenglama isbotini keltiramiz.

VI bobda past tartibli korrelativ funksiyalarni yuqori tartibli korrelyativ funksiyalar bilan bog'lovchi Bogolyubovning zanjir tenglamasining isboti berildi. U yerda korrelativ funksiyalar faqat zarra koordinatasiga bog'liq deb olingan edi. Biz bu yerda korrelyativ funksiyalarni aniqlashni zarraning koordinatasi, impulsi va vaqtga bog'liq bo'lgan hol uchun umumlash-tiramiz.

$N$  ta zarradan tashkil topgan sistema  $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  taqsimot funk-siyasi fazalar fazosida tasviriy nuqtalar sonining saqlanish qonu-nini ifodalovchi umumiy tenglamani

$$\frac{d\rho(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{dt} = 0 \quad (10.107)$$

yoki Liuvill tenglamasini

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] \quad (10.108)$$

qanoatlantirilishi kerak. Bu yerda

$$\{H, \rho\} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \right)$$

Puasson qavsi.

Faqat juft-juft o'zaro ta'sirda bo'lgan  $m$  massali  $N$  ta zarra-dan tashkil topgan sistema uchun Gamilton funksiyasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j}^N U(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) + \sum_{i=1}^N U_0(\mathbf{r}_i) \quad (10.109)$$

VI bobdagidek quyidagi ko'rinishda korrelativ funksiyalarni kiritamiz:

$$\rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) = V \int \rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t) d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{p}_N,$$

$$\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = V^2 \int \rho(\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t) d\mathbf{r}_3 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{p}_N,$$

.....

$$\begin{aligned} & \rho_S(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_S, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_S, t) = \\ & = V^S \int \rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t) d\mathbf{r}_{S+1} \dots d\mathbf{r}_N, d\mathbf{p}_{S+1} \dots d\mathbf{p}_N \quad (10.110) \end{aligned}$$

$\rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$  uchun tenglamani olish uchun (10.107) ning har ikkala tomonini  $\mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_2 \dots, \mathbf{p}_N$  bo'yicha integrallaymiz:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = V \int \{H, \rho\} d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{p}_N. \quad (10.111)$$

Gamilton funksiyasi (10.109) ni hisobga olsak, Puasson qavsi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\{H, \rho\} = \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{\mathbf{p}_i}{m} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}_i} + \sum_{j>i}^N \frac{\partial U_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}_j} \right\}. \quad (10.112)$$

Bu yerda qisqacha quyidagi belgilash qabul qilingan:

$$U_{ij} = U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (10.113)$$

(10.112) ni (10.111) ga qo'yib,  $\rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t)$  funksiyaning normirovka shartiga ko'ra, quyidagi hadlarning cheksizlikda nolga tengligini, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{p}_i}{m} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_i} d\mathbf{r}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{m} \rho \Big|_{-\infty}^{\infty} \rightarrow 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_i} d\mathbf{p}_i = \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}_i} \rho \Big|_{-\infty}^{\infty} \rightarrow 0$$

ekanligini hisobga olsak, u holda  $\rho_1$  funksiya uchun quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = V \int \left\{ -\frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}_1} + \sum_{j=2}^N \frac{\partial U_{1j}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}_j} \right\} d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{p}_N. \quad (10.114)$$

Zarralarning to'la ravishda o'xshashligiga (aynanligiga) ko'ra funksiyani, istalgan zarralarni o'rin almashtirilishiga nisbatan simmetrik deb hisoblash mumkin. Bu esa (10.114) da oxirgi haddagi yig'indida  $(N - 1)$  ta hadning bir xilda ekanligini ko'rsatdi. Demak, bu yig'indi  $(N - 1)$  ga ko'paytirilgan bitta had bilan almashtiriladi. Natijada, (10.114) ifoda birinchi zarraning koordinata, impuls va vaqtga bog'liq bo'lgan ordinar funksiya  $\rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$  uchun quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial \rho_1}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial \mathbf{p}_1} + \frac{N-1}{V} \int \frac{\partial U_2}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial \rho_2}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2,$$

yoki  $U_0(\mathbf{r}_i)$  ni impulsiga bog'liq emasligini hisobga olsak, u holda (10.114) quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \{H_1, \rho_1\} + \frac{N-1}{V} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial \rho_2}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2. \quad (10.115)$$

Ammo (10.115) ko'rinishdagi  $\rho_1$  uchun olingan aniq tenglama yopiq emasdir, chunki unga noma'lum bo'lgan binar funksiya  $\rho_{12}$  kiradi. Bu  $\rho_{12}$  binar funksiya uchun tenglama tuzish mumkin, lekin u no'malum funksiya  $\rho_{123}$  ternar funksiyani o'z ichiga olgan bo'ladi.  $\rho_{123}$  uchun tuzilgan tenglama o'z navbatida  $\rho_{1234}$  no'malum funksiyani o'z ichiga oladi va h.k.

Yuqoridagi kabi usul bilan  $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_N$  no'malum funksiyalar uchun quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \{H_2, \rho_2\} + \frac{N-2}{V} \sum_{i=1}^2 \int \frac{\partial U_{2+1,i}}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \rho_3}{\partial \mathbf{p}_i} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{p}_3,$$

.....

$$\frac{\partial \rho_S}{\partial t} = \{H_S, \rho_S\} + \frac{N-S}{V} \sum_{i=1}^S \int \frac{\partial U_{S+1,i}}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \rho_{S+1}}{\partial \mathbf{p}_i} d\mathbf{r}_{S+1} d\mathbf{p}_{S+1},$$

.....

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} = \{H, \rho_N\}. \quad (10.116)$$

Bu yerda  $H_S - S$  ta zarra uchun zarralar orasidagi o'zaro ta'sir hisobga olinmagandagi Gamilton funksiyasi, ya'ni

$$H_S = \sum_{i=1}^S \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{1 \leq i < j \leq S} U_{ij} + \sum_{i=1}^S U_0(\mathbf{r}_i).$$

Demak, olingan zanjir tenglamaning oxirida yana boshlang'ich tenglama (10.107) ga qaytib kelamiz,  $\rho_N$  funksiya esa  $\rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t)$  funksiya bilan mos tushar ekan.

Yuqorida olingan tenglamalar sistemasi (10.115) va (10.116) ga Bogolyubovning kinetik zanjir tenglamasi deb yuritiladi. Bu  $N$  ta zarradan tashkil topgan sistemaning fazalar fazosida

harakat tenglamasi bo'lib hisoblanadi. Kinetik zanjir tenglamalar sistemasidan shu narsa tushinarliki,  $\rho_1$  funksiya uchun aniq yechimni izlash (10.115) va (10.116) tenglamalar sistemasining yechimiga ekvivalentdir. Ammo  $N$  ta moddiy nuqta uchun mexanika tenglamalar sistemasini echish mumkin bo'lmaganligi kabi, (10.115) va (10.116) tenglamalar sistemasining ham amaliy nuqtayi nazardan yechimini topish mumkin emas.

Shunday qilib, yuqoridagi tenglamalar sistemasini yechish uchun  $\rho_1$  funksiyani aniqlovchi tenglama (10.115) ga kirgan  $\rho_{12}$  funksiyani taqriban  $\rho_1$  funksiya orqali ifodalovchi qandaydir boshqa funksiya bilan almashtirish kerak.  $\rho_{12}$  funksiyani taqriban  $\rho_{12}$  funksiya orqali ifodalash uchun soddalashtiruvchi farazlar qabul qilish zarur. Bu farazlarning xarakteri sistemaning fizik xususiyatiga, ya'ni juft o'zaro ta'sirlar potensali  $U(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)$  ning ko'rinishiga bog'liq bo'lishi kerak. Masalan, sistemada zarralar orasidagi o'zaro ta'sir kuchlarining uzoqdan yoki yaqindan ta'sir etish xarakteriga qarab, unar funksiya  $\rho_1$  uchun olingan taqribiy tenglama, sistema holatini aniqlovchi kinetik tenglamaga olib keladi:

$$\rho_1 = \frac{V}{N} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t), \quad \rho_2 = \left(\frac{V}{N}\right)^2 f_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t), \quad \dots$$

almashtirishlar natijasida  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$  uchun tenglamalar sistemasidan  $f_1, f_2, \dots, f_N$  taqsimot funksiyalari uchun Bogolyubov kinetik zanjir tenglamalar sistemasiga o'tish mumkin.

Yuqoridagi almashtirishlar natijasida unar taqsimot funksiyasi uchun  $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$  tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} - \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1} = \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f_{12}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2. \quad (10.117)$$

Agar indeks «1» ni tushirib qoldirsak,  $U_{12}$  ning zarra impulsiga bog'liq emasligini va  $\mathbf{F} = -\frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}}$  ekanligini hisobga olsak, u holda (10.117) tenglama unar taqsimot funksiya  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  uchun quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \int \{U_{12}, f_2\} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2. \quad (10.118)$$

(10.118) ifoda Unar taqsimot funksiyasi uchun Bogolyubovning asosiy kinetik tenglamasi deyiladi. Agar (10.118) ning o'ng tomoni ma'lum bo'lsa, u holda kinetik tenglamaning yechimi sistema holatini xarakterlovchi taqsimot funksiyasi bo'la oladi.

### 10.13. O'zi moslashuvchan maydon kinetik tenglamasi. Vlasov tenglamasi

Yuqorida qo'yilgan masala – unar funksiya uchun taqribiy tenglamani olishni qarab chiqaylik. Faraz qilaylik, gazning ayrim zarralari orasidagi o'zaro ta'sir kuchi uzoqdan ta'sir qiluvchi, ya'ni masofaga qarab, yetarli darajada sekin kamayuvchi (masalan, masofa bo'yicha  $r^{-2}$  ko'rinishda kamayuvchi kulon yoki gravitatsion kuch) kuch bo'lsin. Masalan, ionlashtirilgan gazda, ya'ni plazmada elektronlar va ionlar orasida ana shunday kuchlar ta'sir etadi.

Agar kuchlar masofaga qarab, yetarli darajada sekin kamaysa, masalan,  $r^{-2}$  ko'rinishda bo'lsa, u holda har bir zarra bir vaqtning o'zida unga yaqin turgan zarraga, hamda undan katta masofaga uzoqlashtirilgan zarraga effektiv ta'sir etadi, chunki dr intervalda yotgan zarralar soni  $r^2$  ga proporsional holda ortadi. Binobarin, tanlangan juft zarralarning harakati ularning juft o'zaro ta'sirlashuvining natijasi deb qaralмай, balki ikkala zarralarning har birini qolgan barcha zarralar bilan o'zaro ta'siri deb qaraladi. Shu sababdan tanlangan ikkita zarra harakatini amalda moddiy nuqtalarning bir-biridan statistik bog'lanmagan harakati deb qarash mumkin. Bu hol uchun binar funksiya  $\rho_{12}$  ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)\rho_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t). \quad (10.119)$$

(10.119) ni (10.115) ga qo'yib, quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial \rho_1}{\partial \mathbf{r}_1} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial \mathbf{p}_1} = [U, \rho_1], \quad (10.120)$$

bu yerda

$$U = U_0(\mathbf{r}_1) + \frac{N-1}{V} \int U_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)\rho_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2.$$

Yoki  $\rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$  unar funksiyadan taqsimot funksiyaga o'tsak, (10.120) tenglama

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \nabla_{\mathbf{r}} f + \overline{\mathbf{F}} \nabla_{\mathbf{p}} f = 0 \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{r}} f + \overline{\mathbf{F}} \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \quad (10.121)$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda  $\nabla_{\mathbf{r}}$  va  $\nabla_{\mathbf{p}}$  mos ravishda koordinata va impuls gradient operatoridir. Tenglamani isbotlashda sistema va sistemadagi zarralar soni etarli darajada katta deb hisoblaniladi. Tenglamaga o'zi moslashuvchan maydon kinetik tenglamasi deyiladi.

Bir nechta navdagi zarralardan tashkil topgan gaz holiga (10.121) tenglama oson umumlashtiriladi. Masalan, elektron va musbat ionlardan tashkil topgan to'la ionlashgan plazma uchun (10.121) tenglamaga muvofiq quyidagi tenglamalar sistemasini yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e \nabla_{\mathbf{r}} f_e + \frac{e}{m_e} \nabla_{\mathbf{r}} \varphi \nabla_{\mathbf{v}} f_e &= 0, \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \nabla_{\mathbf{r}} f_i - \frac{e}{m_i} \nabla_{\mathbf{r}} \varphi \nabla_{\mathbf{v}} f_i &= 0. \end{aligned} \quad (10.122)$$

Bu yerda  $\varphi(\mathbf{r})$  elektronlar va ionlar hosil qilgan maydon potentsiali,  $f_e$  va  $f_i$  mos ravishda elektronlar va ionlar taqsimot funksiyasi. (10.122) tenglamalar sistemasi A.A. Vlasov tenglamasi deb yuritiladi. Bu tenglamalar sistemasi yordamida, odatda, o'ta siyraklashgan plazmada nomuvozanat jarayonlar tekshiriladi.

Neytral atomlarning ionlashish jarayonida elektronlar va ionlar rekombinatsiyasini hisobga olish zarur bo'lgan o'ta zich plazmalar holi uchun (10.122) tenglamalar sistemasi kollektiv o'zaro ta'sir va juft to'qnashishlarni hisobga oluvchi hadlar bilan to'ldirilishi kerak.

#### 10.14. Bolsman kinetik tenglamasining Bogolyubov bo'yicha isboti

Zarralari faqat juft-juft to'qnashuvchi o'ta siyraklantirilgan gazni olib qaraylik. Bunda gaz uchun  $r_0/\lambda \ll 1$ . Bu yerda  $r_0$  — o'zaro ta'sir radiusi,  $\lambda$  — zarraning erkin yugirish yo'li.

Masalani soddalashtirish uchun gazni fazoviy birjinsli deb qaraymiz. Bu holda taqsimot funksiyasi  $\rho_1$  faqat impuls va vaqt  $t$  ga bog'liq bo'ladi, ya'ni

$$\rho_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \rho_1(\mathbf{p}, t).$$

Binar taqsimot funksiyasi  $\rho_{12}$  esa ikkita zarraning o'zgarmas a vektorga fazoviy siljitishida o'zgarmasdan qolishi kerak, ya'ni

$$\rho_2(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t).$$

Bu shart bajariladi, agar  $\rho_{12}$  faqat zarralar orasidagi masofaning funksiyasi bo'lsa, ya'ni

$$\rho_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = \rho_{12}(r_{12}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t).$$

Quyidagi uchta xarakterli vaqtlarni kiritamiz:

- 1) to'qnashishlar effektiv davomligi  $\tau_0 \sim r_0/v$ ;
- 2) to'qnashishlar orasidagi o'rtacha vaqt  $\tau_0 \sim \lambda/v$  ( $v$  - o'rtacha tezlik,  $\tau$  - o'rtacha erkin yugirish yo'li);
- 3) turli xil fizik masalalarda turlicha bo'lgan makroskopik relaksatsiya vaqti  $\tau_m \sim L/v$  ( $L$  - idish o'lchami).  $\tau_m$  har doim  $\tau$  dan juda katta bo'ladi. Bu esa qaraladigan gazni yetarli darajada siyrakligini ko'rsatadi.

Shunday qilib, har doim quyidagi tengsizliklar bajariladi:

$$\tau_0 \ll \lambda \ll L, \quad \tau_0 \ll \tau \ll \tau_m.$$

Shunday qilib, bir qator bosqichlar orqali o'tishi tufayli, sistemaning boshlang'ich nomuvozanat holati vaqt bo'yicha evolutsiyalanadi.

$\Delta t$  vaqt oralig'ida gaz tabiatini qarab chiqaylik.

1.  $\Delta t \sim \tau_0$  boshlang'ich xoatizatsiya bosqichi. Bu holda sistema holati to'la  $N$ -zarrali  $\rho_{12,N}$  taqsimot funksiya orqali tavsiflanadi.

2.  $\tau_0 \ll \Delta t \leq \tau$  - bu bosqichni Bogolyubov kinetik deb ataydi va bu vaqt ichida gazda molekulalarning juda ozgina qismi to'qnashishga ulguradi. Shuning uchun,  $\Delta t$  vaqt ichida asosiy zarralar sonining vaqt bo'yicha tabiati funksiya bilan tavsiflanadi.  $\Delta t$  vaqt ichida to'qnashishga ulgurgan ozgina zarralarni fikran juftlab yig'aylik. Bu juftlar soni to'la zarralar soni  $N$  ga nisbatan juda kichik. To'qnashishga duchor bo'lgan juft zarralar tabiati  $\rho_{12}$  binar korrelativ funksiya bilan tavsiflanadi. Bizning vazifamiz  $\rho_1$  va  $\rho_{12}$  orasidagi bog'lanishni tiklashdan iborat. Bu bog'lanishni mulohaza orqali aniqlash faqat vaqt  $\Delta t$  uchun to'g'ri bo'ladi.

3.  $\tau < \Delta t$  - bu bosqich gidrodinamik deb ataladi va shu bilan karakterlanadiki, bir qancha juft to'qnashishlardan so'ng, bu bosqichda gazning kichik hajmlarida lokal muvozanat tiklanadi.

Endi biz quyilgan masalaga o'taylik. Buning uchun korre-  
lativ funksiyalarning tabiatini  $V/N = \frac{1}{v} \rightarrow 0$  limitda qaraylik.  
Bu holda cheksiz kichik zichlikdagi gaz, taqsimot funksiyasi uchun  
tenglama fazoviy bir jinsli gazda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{d\rho_1(\mathbf{p}_1, t)}{dt} = 0. \quad (10.123)$$

Bu formula shu ma'noni anglatadiki - bu yaqinlashishida  
zarralar bir-biridan mustaqil harakatlanadi. (10.123) ning  
yechimini quyidagi simvolik ko'rinishda yozish qulay:

$$\rho_1(\mathbf{p}, t) = \widehat{S}_1 \rho_1(\mathbf{p}_1, t - \tau_0).$$

Operator  $\widehat{S}_1 \rho_1(\mathbf{p}_1, t)$  funksiyaga ta'siri tufayli  $t - \tau_0$  boshlang'ich  
vaqt momentida olingan funksiyani  $t$  vaqt momentidagi funk-  
siyaga o'tkazadi. Zarralar bir jinsli gazda o'zgarmas impuls  
bilan to'qnashishsiz harakatlanganligi uchun:

$$\rho_1(\mathbf{p}_1, t) = \rho_1(\mathbf{p}_1, t - \tau_0).$$

Shunga o'xshash  $1/v \rightarrow 0$  yaqinlashishda  $\tau_{12}$  korrelativ funksiya  
uchun tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d\rho_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t)}{dt} = 0. \quad (10.124)$$

Ushbu tenglamaning yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$\rho_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = \widehat{S}_2 \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t - \tau_0). \quad (10.125)$$

Operator  $\widehat{S}_2$  ta'siri tufayli  $\rho_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t)$   $t - \tau_0$  boshlang'ich  
vaqt momentidagi qiymatidan  $t$  vaqt momentidagi qiymatiga  
o'tkazadi.

(10.125) tenglama qolgan molekulalar tomonidan ta'sirga  
duchor bo'lmagan juft molekulalar tabiatini tavsiflaydi.

Shu narsa tushinarliki, biz yuritayotgan fikr va (10.124)  
tenglama faqat  $\Delta t \leq \tau$  vaqt ichida ma'noga ega. Ammo bu  
vaqt molekulalarning to'qnashish vaqtiga nisbatan ancha kat-  
tadir. Bogolyubov fikriga ko'ra, (10.124) tenglamadan taqriban  
katta vaqtlar ( $t \rightarrow \infty$ ) uchun ham foydalanish mumkin.



(10.125) ni quyidagicha yozamiz:

$$\begin{aligned} \rho_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) &= \widehat{S}_2 \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t - \tau_0) = \\ &= \widehat{S}_2 [\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t - \tau_0) - \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t - \tau_0) \rho_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t - \tau_0)] + \\ &\quad + S_2 \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t - \tau_0) \rho_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t - \tau_0). \end{aligned} \quad (10.126)$$

$t \rightarrow -\infty$  da limitga o'taylik, ya'ni korrellativ funksiyani to'qnashishga qadar ancha avval qaraylik. Bu holda juft zarralar tabiati nokorrellativ bo'ladi va

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \widehat{S}_2 \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t - \tau_0) = \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t - \tau_0) \rho_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t - \tau_0). \quad (10.127)$$

Shuning uchun korrellatsiyani susaytirish shartini yozish mumkin:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t - \tau_0) \rho_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t - \tau_0). \quad (10.128)$$

Fazoviy birjinsli gazda,  $\rho_1$  taqsimot funksiyasi faqat impulsga bog'liq bo'ladi.  $t \rightarrow -\infty$  limitga  $t - \tau_0$  vaqt momentida to'qnashishga kiruvchi zarralar  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  impulslarining chegaraviy qiymatlari javob beradi, ya'ni

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} S_2 \mathbf{p}_1 = \mathbf{P}_1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} S_2 \mathbf{p}_2 = \mathbf{P}_2, \quad (10.129)$$

bu yerda  $\mathbf{P}_1$  va  $\mathbf{P}_2$  - o'zaro ta'sir doirasidan tashqarida yotgan vaqtida, to'qnashishga qadar zarralar impulslarining chegaraviy qiymatlari.  $\mathbf{P}_1$  va  $\mathbf{P}_2$  to'qnashuvchi zarralar impulsleri  $\mathbf{p}_1$  va  $\mathbf{p}_2$  bilan quyidagicha bog'langan:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2) + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2m} (\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2), \quad (10.130)$$

(10.129) dan foydalanish va (10.124) ni hisobga olish natijasida (10.126) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \rho_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) &\approx \lim_{t \rightarrow -\infty} S_2 [\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t - \tau_0) - \\ &\quad - \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t - \tau_0) \rho_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t - \tau_0)] + \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow -\infty} S_2 \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t - \tau_0) \rho_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t - \tau_0) = \\ &= \rho_1(\mathbf{p}_1, 0) \rho_1(\mathbf{p}_2, 0) = \rho_1(\mathbf{P}_1, t) \rho_1(\mathbf{P}_2, t). \end{aligned} \quad (10.131)$$

(10.131) formula  $\rho_{12}$  binar funksiyani  $\rho_1$  unar funksiyasi orqali ifoda qilish imkonini beradi. Biroq,  $\rho_{12}$   $t$  vaqt momentida to'q-nashuvchi zarralar  $\mathbf{p}_1$  va  $\mathbf{p}_2$  impulslarining funksiyasi bo'lsa, (10.131) formulada  $\rho_1$  unar funksiya esa to'qnashishga qadar zarralar  $\mathbf{P}_1$  va  $\mathbf{P}_2$  impulslarning chegaraviy qiymatlariga bog'liq bo'ladi.

Agar  $\frac{1}{v}$  parametrning kichik qiymatida taqsimot funksiyasi uchun tenglamani olishga o'tmoqchi bo'lsak, u holda (10.118) ning o'ng tomoniga binar funksiyaning nolinchii yaqinlashishini (10.131) dan keltirib qo'yish natijasida quyidagi ko'rinishni olamiz:

$$\frac{\partial f(\mathbf{P}_1, t)}{\partial t} = \int \{U_{12}; f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)\} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2. \quad (10.132)$$

$\mathbf{P}_1$  va  $\mathbf{P}_2$  impulslarning o'zgarmas vektorlar ekanligini hisobga olgan holda, Puasson qavsini almashtiramiz. Shunga ko'ra

$$\{H; f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)\} = 0$$

yoki (10.120) dan foydalansak,

$$\left\{ \frac{\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2}{2m} + U_{12}; f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t) \right\} = 0.$$

Bu ifodadan

$$\begin{aligned} \{U_{12}; f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)\} &= - \left\{ \frac{\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2}{2m}; f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t) \right\} = \\ &= \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)}{\partial (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}. \end{aligned}$$

Shunday qilib, (10.132) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial f(\mathbf{p}_1, t)}{\partial t} = \int \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)}{\partial \mathbf{r}_{12}} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2 = \int Id\mathbf{p}_2, \quad (10.133)$$

bu yerda

$$I = \int \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)}{\partial \mathbf{r}_{12}} d\mathbf{r}_2, \quad (10.134)$$

(10.134) ni hisoblash uchun  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\xi$  silindrik koordinatalar sistemasiga o'tamiz. Qutb o'qi  $\xi$  ning musbat yo'nalishi  $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$  vektor yo'nalishi bilan mos kelsin. U holda

$$x_1 = x_2 + r \sin \varphi, \quad y_1 = y_2 + r \cos \varphi, \quad z_1 = z_2 + \xi,$$

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = [0, 0, (p_2 - p_1)], \quad d\mathbf{r}_{12} = r dr d\varphi d\xi.$$

Bu holda

$$(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \frac{\partial f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)}{\partial \mathbf{r}_{12}} = (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \frac{\partial f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)}{\partial \xi}.$$

Endi  $\mathbf{P}_1$  va  $\mathbf{P}_2$  impulslar  $r, \varphi, \xi$  kordinatalarning funksiyasi bo'ladi. Koordinata boshi qilib,  $r_{12}$  nuqtani, ya'ni to'qnashish sodir bo'layotgan nuqtani tanlaymiz. O'qlarni ana shunday tanlashda

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{m} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)}{\partial \xi} r dr d\varphi d\xi = \\ &= 2\pi \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{m} \int_0^{\infty} r dr [f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)] \Big|_{\xi \rightarrow -\infty}^{\xi \rightarrow \infty}, \end{aligned}$$

$$[f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)] \Big|_{\xi \rightarrow -\infty}^{\xi \rightarrow \infty} = [f(\mathbf{P}_1, t - t') f(\mathbf{P}_2, t - t')] \Big|_{\xi \rightarrow -\infty}^{\xi \rightarrow \infty}. \quad (10.135)$$

Ko'paytmani qaraylik. Bu yerda  $t \leq \tau$  va zarralarni bir-biridan katta masofalarda turishiga javob beradi (o'zaro ta'sir sferasidan tashqarida). Bunda zarralar bir-biridan uzoqlashadi (chunki  $(p_2 - p_1)/m = v_n$   $\xi$  ning ortishi bilan ortadi). Bu shuni anglatadiki, agar zarralar  $t$  vaqt momentida bir-biridan katta masofada turgan bo'lsa, u vaqtda avval qandaydir  $t - t'$  vaqt momentida, ular yaqin masofada bo'ladi, o'zaro ta'sirlashib va keyin ajralishadi. (10.125) dagi  $\mathbf{P}_1$  va  $\mathbf{P}_2$  impulslar zarralarning to'qnashishga qadar (xususan, to'qnashishga kirishish oldidagi) impuls-larini anglatadi. Ana shu holni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$[f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)] \Big|_{\xi \rightarrow -\infty}^{\xi \rightarrow \infty} = [f(\mathbf{P}_1^*, t) f(\mathbf{P}_2^*, t)], \quad (10.136)$$

bu yerda  $\mathbf{P}_1^*$  va  $\mathbf{P}_2^*$  - to'g'ridan-to'g'ri to'qnashish impuls-lari.

$$[f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)] \Big|_{\xi \rightarrow -\infty}^{\xi \rightarrow \infty}$$

ko'paytma ham  $\xi \rightarrow -\infty$  vaziyatda  $t$  vaqt momentida o'zaro ta'sir sferasidan tashqarida katta masofalarda turgan zarralarga javob beradi. Biroq bu zarralar  $t \rightarrow \tau_0$  dan  $t$  gacha vaqt oralig'i ichida yaqinlashishga va to'qnashishga ulgura olmaydi. Ular o'zgarmas impuls-lar bilan harakatlanadi. Bu holda

$$[f(\mathbf{P}_1, t)f(\mathbf{P}_2, t)] \Big|_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow \infty} = [f(\mathbf{p}_1, t)f(\mathbf{p}_2, t)], \quad (10.137)$$

bu yerda  $\mathbf{p}_1$  va  $\mathbf{p}_2$  -  $t$  vaqt momentidagi impulslar. (10.136) va (10.137) larni  $I$  integralga qo'yish natijasida quyidagini topamiz:

$$I = \frac{p_2 - p_1}{m} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} [f(\mathbf{P}_1^*, t)f(\mathbf{P}_2^*, t) - f(\mathbf{p}_1, t)f(\mathbf{p}_2, t)] d\varphi. \quad (10.138)$$

(10.138) ifodaning ko'rinishini o'zgartirish uchun quyidagilarni hisobga olamiz. Birinchidan, zarralarning nisbiy tezligini kiritamiz  $v_n$ , ikkinchidan,  $r$  va  $\varphi$  lar o'rniga fazoviy burchak va effektiv kesimini kiritamiz, ya'ni  $rdrd\varphi = \sigma d\Omega$  va, uchinchidan, integral ostidagi ifodaga to'g'ridan-to'g'ri to'qnashish oldidagi  $\mathbf{P}_1^*$  va  $\mathbf{P}_2^*$  impulslar kiradi. Vaqtni almashtirishga nisbatan ikki jismning simmetriya masalasiga ko'ra

$$f(\mathbf{P}_1^*, t)f(\mathbf{P}_2^*, t) = [f(\mathbf{p}_3, t)f(\mathbf{p}_4, t)],$$

bu yerda  $\mathbf{p}_3$  va  $\mathbf{p}_4$  - to'qnashishdan keyingi impulslar. Shunday qilib, (10.138) ning yangi ko'rinishini olamiz:

$$I = \iint v_n \sigma [f(\mathbf{p}_3, t)f(\mathbf{p}_4, t) - f(\mathbf{p}_1, t)f(\mathbf{p}_2, t)] d\mathbf{p}_2 d\Omega. \quad (10.139)$$

Ushbu ifodani (10.133) ga qo'yish natijasida Bolsman kinetik tenglamasiga kelamiz:

$$\frac{\partial f(\mathbf{p}_1, t)}{\partial t} = \iint v_n \sigma [f(\mathbf{p}_3, t)f(\mathbf{p}_4, t) - f(\mathbf{p}_1, t)f(\mathbf{p}_2, t)] d\mathbf{p}_2 d\Omega. \quad (10.140)$$

Bir jinsli bo'lmagan gazlar hoida shunga o'xshash birikish birmuncha shakli o'zgartirgan Bolsman tenglamasini olamiz. (10.140) tenglamani isbotlashda shu narsani ko'rdikki, mexanikaning qaytuvchi qonuni - Liuvill tenglamasidan Bolsmanning kinetik tenglamasiga o'tish statistik bosqich - (10.131) formulani o'z ichiga oladi. (10.131) formulada boshidayoq vaqt bo'yicha jarayonning asimmetriyaligi faraz qilingan. Berilgan  $t$  vaqt momentida gaz holatini qayd qilib, uning berilgan holatga qanday kelishini tahlil qildik. Bunda berilgan vaqt momentda statistik taqsimot, avval qanday bo'lganligi bilan bog'lanadi. Boshqacha qilib aytganda, sistema tasodifan shunday vaziyatga tushib qoladiki, biz uni to'qnashish deb ataymiz. To'qnashish-

gacha «juft» zarralar o'zaro ta'sirlashmaydigan zarralardan tashkil topgan.  $t$  vaqt momentida ta'sirlashish tasodifiy aktdir. Shu vaqt momentidan boshlab, to «juft» zarralar keyingi to'qnashishga duchor bo'lgan  $t + \tau$  vaqt momentiga qadar, ularning harakati determinizmlashtirilgan xarakterga ega bo'ladi. Shunday qilib, Bolsman tenglamasini isbotlashda vaqtning asimmetriyaligi, boshlang'ich va oxirgi holatlari farqlanishi faraz qilingan,  $t - \tau_0$  va  $t + \tau$  vaqt ichida sistema tabiati tamoman turli xildir.

### 10.15. bobga oid masala va savollar

1. Agar  $Ox$  o'qi bo'yicha statsionar temperatura gradienti mavjud va  $E$  maydon qo'yilgan bo'lsa, metalldagi aynimagan elektron gazi uchun elektr o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti aniqlansin.  $\tau = Av^l$  ( $A > 0$ ,  $l > -7$ ).

*Yechish.* Berilgan masala uchun  $Ox$  o'qi bo'yicha tok zichligi  $j_x$  va issiqlik oqimi  $Q$

$$j_x = \int e v_x f dv, \quad Q = \int \frac{mv^2}{2} v_x f dv$$

ko'rinishda yoziladi. Kinetik tenglamadan taqsimot funksiyasini topamiz:

$$f = f_0 - \tau \left( \frac{e\mathcal{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} + v_x \frac{\partial f_0}{\partial x} \right).$$

Bu yerda

$$f_0 = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mv^2}{2kT} \right).$$

Elektr maydon  $\mathcal{E}$  va temperatura gradienti taqsimot funksiyasini kam o'zgartiradi, bu holda

$$f = f_0 + \frac{\tau e \mathcal{E}}{kT} v_x f_0 - \frac{\tau v_x}{kT^2} \left( \varepsilon - \frac{3}{2} kT \right) f_0 \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Bu ifoda yordamida tok zichligini va issiqlik oqimini topamiz:

$$j_x = \frac{4enA}{3m\sqrt{\pi}} \Gamma \left( \frac{l+5}{2} \right) \left( \frac{2kT}{m} \right)^{l/2} kT \left[ eE - \left( \frac{l}{2} + 1 \right) k \frac{\partial T}{\partial x} \right],$$

$$Q = \frac{4\pi A}{3m\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{l+7}{2}\right) \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} kT \left[ e\mathcal{E} - \left(\frac{l}{2} + 2\right) k \frac{\partial T}{\partial x} \right]$$

yoki

$$j_x = L_{11} \mathcal{E} + kL_{12} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Q = L_{21} \mathcal{E} + kL_{22} \frac{\partial T}{\partial x}.$$

$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  shartdan:

$$\sigma = \frac{4e^2 nA}{3m\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{l+5}{2}\right) \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2},$$

$j_x = 0$  shartdan:

$$\mathcal{E} = \frac{nA}{m\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{l+7}{2}\right) \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} kT$$

kelib chiqadi.

2. To'qnashish integrali va uni olish.

3. Bolsman kinetik tenglamasi va uning fizik ma'nosi.

4. Bolsman kinetik tenglamasining statsionar yechimi.

Taqsimot funksiyasi.

5. Bolsman H- funksiyasi.

6. Entropiyaning vaqt bo'yicha o'sish qonuni.

7. Lokal muvozanat va taqsimot funksiyasi.

8. Gazlarda to'qnashish soni, o'rtacha erkin yugurish vaqti va erkin yugurish yo'li.

9. Kristallarga Bolsman tenglamasining tatbig'i. Om qonuni.

10. Umumlashgan ko'chirish tenglamasi.

11. Energiya saqlanish qonuni.

12. Bolsman kinetik tenglamasini yechishda Chepman-Enskiy metodi.

13. Ideal gazlarda issiqliq o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti  $\alpha$  bilan yopishqoqlik koeffitsiyenti  $\eta$  orasidagi bog'lanish.

14. Gazda relaksatsiya vaqti.

15. Bogolyubovning kinetik zanjir tenglamasi.

16. O'zi moslashgan va Vlasov tenglamalari.

## MASALALARNING JAVOBLARI

### I bobga oid masalalarning javoblari

4.  $p^2 - p_0^2 = 2m^2g(z - z_0)$ . 5.  $p = \pm \sqrt{2mee_1 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$ . 6.  $p_1 = p_0 - mgt$ ,

$z_1 = z_0 + \frac{p_0 t}{m} - \frac{gt^2}{2}$ ;  $p_2 = p_0 - mgt$ ;  $z_2 = z_1 + a$ ;  $p_3 = p_1 + b$ ;  $z_3 = z_1 + \frac{b}{m}t$ .

Yangi uchburchak yuzasi  $S = \frac{ab}{2} = S_0$ . 9.  $D = \frac{\partial(q,p)}{\partial(q_0,p_0)} = e^{-t/\tau}$ . 10.  $\Gamma(\varepsilon) = h$ .

11.  $\Gamma(\varepsilon) = \frac{4\pi}{3} V \left( \frac{\varepsilon^2}{c^2} - m_0^2 c^2 \right)^{3/2}$ . 12.  $d\Omega = 2\pi \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$ .

13.  $d\Omega = A_s V^s \frac{\varepsilon^{s/3-1}}{h^s c^{s/3}} d\varepsilon$ ,  $A_s$  - hajm va energiyaga bog'liq bo'lmagan

o'zgarimas. 15.  $\Omega(\varepsilon) = \frac{1}{N!} \left( \frac{2\pi m \varepsilon}{\omega h} \right)^N$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}$ .

### II bobga oid masalalarning javoblari

1.  $Z(\theta) = (2\pi m k T)^{3N/2} V^N$ . 2.  $dW = \frac{2}{\sqrt{\pi} \theta^3} e^{-\varepsilon/\theta} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$ ,

$dW = \frac{1}{\sqrt{\theta^{3N}}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)} e^{-\varepsilon/\theta} \varepsilon^{3N/2-1} d\varepsilon$ . 3.  $dW(\varepsilon) = \frac{1}{kT} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon$ ,  $\bar{\varepsilon} = kT$ .

6.  $C = \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2}$ . 7.  $dW = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} dx$ . 9.  $\varepsilon_e = \frac{kT}{2}$ ,  $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT$ ,  $\bar{\varepsilon} \neq \varepsilon_e$ .

10.  $\frac{N_e}{N} = \Phi(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \approx 43\%$ . 11.  $\frac{N_1}{N} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} e^{-3/2} + 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \approx 0,39$ . Bu yerda

$N_1 = N \int_{\frac{\varepsilon}{kT}}^{\infty} d\rho(\varepsilon)$  energiyasi  $\varepsilon \geq \frac{3}{2} kT$  bo'lgan zarralar soni. 13.  $\bar{v} = \sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}}$ ,

$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{4kT}{m}}$ . 14.  $\nu = 4\pi\sigma \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$ ,  $\lambda = \frac{\bar{v}}{\nu} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi n} R_0^2}$ . 15.  $\frac{N_{<}}{N_{>}} = \frac{\sqrt{\pi} e \Phi(1) - 2}{\sqrt{\pi} e (1 - \Phi(1)) + 2}$ .

16.  $\bar{z} = z_0 = \frac{kT}{mg}$ . 17.  $z_0 = \frac{nkT}{gM} - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n \frac{hm_k}{e^{h/z_{k0}} - 1}$ ,  $M = \sum_{k=1}^n Nm_k$ .

18.  $\frac{n_{\infty}}{n_0} = \exp\left(-\frac{mg\tau_0}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{Nmg\tau_0}{RT}\right) = 10^{-344}$ . 19.  $M = \frac{Sp_2}{\sqrt{2\pi m k T_2}} \cdot 0,41$ .

### III bobga oid masalalarning javoblari

1.  $A = pV_2 = 3125,7 \text{ J}$ ,  $Q = \lambda m = 40624 \text{ J}$ . Bu yerda  $\lambda = 2258 \text{ J/g}$  -

suv uchun bug' hosil qilish issiqligi. 2.  $\delta A = -Edp$ . 4.  $p_k = \frac{a}{27b^2RT}$ ,  $V_k = 3b$ ,

$T_k = \frac{8a}{27Rb}$ ,  $s = \frac{8}{3}$ . 5.  $p_k = \frac{a}{4e^2b^2}$ ,  $V_k = 2b$ ,  $T_k = \frac{a}{4Rb}$ ,  $s = \frac{e^2}{2}$ . 6.  $s = 3,75$ ,

$s_{\text{eks}} = 3,5 - 39,5$ ,  $s_B = 2,67$ . 7.  $p_k = \frac{RT_k}{8(b+C)}$ ,  $V_k = 3b + 2C$ ,  $T_k = \sqrt{\frac{8a}{27R(b+C)}}$ ,

$s = \frac{8(b+C)}{3b+2C}$ . 10.  $B_1 = \left(b - \frac{a}{RT}\right)$ ,  $B_2 = b^2$ ,  $B_3 = b^3$ ,  $T_B = \frac{a}{Rb}$ .

12.  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ ,  $TV^{-\gamma} = \text{const}$ ,  $pV^{\gamma} = \text{const}$ ,  $pV^{\gamma} = \text{const}$ .

13. a)  $v = \sqrt{\gamma \frac{K_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho}}$ ; b)  $v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} = 331,6 \text{ m/s}$ . 14.  $v_B = v_{\text{ia}} \left(1 + \frac{b}{V}\right)$ .

15.  $E = \mu \frac{v^2}{\gamma(\gamma-1)} + E_0$ ,  $\chi = \frac{\mu v^2}{\gamma-1} + \chi_0$ . 17.  $C_H - C_M = \frac{CH^2}{T^2}$ ,  $C$  - Kyuri doimiysi.

18.  $HM^{-\gamma} = \text{const}$ , bu yerda  $\gamma = \frac{C_H}{C_M}$ . 25.  $S = C_V \ln T + R \ln(V-b) + S_0$ ,

$T(V-b)^{R/C_V} = \text{const}$ . 26.  $C_p - C_V = \frac{TV_0\alpha^2}{\beta}$ . 29.  $(dS)_p = \frac{C_p}{\alpha TV} dV$ .

31.  $\Delta S = k \left( N_1 \ln \frac{N_1+N_2}{N_1} + N_2 \ln \frac{N_1+N_2}{N_2} \right)$ . 33.  $\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_2-v_1)}$ ,

$v_1, v_2$  - suyuqlik va bug'ning solishtirma hajmlari.

34.  $F = C_V T(1 - \ln T) - RT \ln V - S_0 + E_0$ ,

$\Phi = C_p T(1 - \ln T) + RT \ln p - TS_0 + E_0$ ,  $\chi = C_p p^{1-1/\gamma} \exp\left(\frac{S-S_0}{C_p}\right) + E_0$ .

35.  $pV = RT$ ,  $E = (\alpha - R)T + E_0$ . 36.  $C_p - C_V = -T^3 \frac{\partial \alpha}{\partial p} \frac{\partial \alpha}{\partial V}$ .

37.  $T_i = \frac{8}{9Rb} \left( 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{3b^2}{a} p} \right)^2$ . 38.  $\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{S,p} = \frac{CH}{C_{H,p}T}$ .

### IV bobga oid masalalarning javoblari

4.  $\mu + \varphi = \text{const}$ ,  $\varphi$  - bitta zarraga to'g'ri kelgan potentsial energiya.

10.  $Q = -T \frac{d\sigma}{dT} (\Sigma_2 - \Sigma_1)$ ,  $\frac{d\sigma}{dT} \Sigma = \text{const}$  tenglamadan temperatura-

ning o'zgarishi aniqlanadi. 12.  $\frac{d\lambda}{dT} = C_p - C_p'$ ,  $V''' \gg V'$  holda.

13.  $s_n - s_i = \frac{H_0^2 T}{2\pi T_c^2} \left( 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \right)$ ,  $c_n - c_i = \frac{H_0^2 T}{2\pi T_c^2} \left( 1 - 3 \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \right)$ . 17.  $\mu = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)^{-1}$ .

18. Kritik nuqtada tovush tezligi nolga teng bo'ladi.



### V bobga oid masalalarning javoblari

$$1. F = -NkT \left( \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi mkT}{h^2} + 1 \right), \quad p = \frac{NkT}{V},$$

$$S = Nk \left( \ln \left( \frac{2\pi m}{p^{2/3} h^2} \right)^{3/2} + \frac{5}{2} \right) + C_p \ln kT, \quad \Phi = NkT \ln \left( \frac{ph^3}{(2\pi m)^{3/2}} \right) - C_p T \ln kT.$$

$$3. F = -NkT \left( \ln \frac{8\pi k^3 T^3 V}{Nc^3 h^3} + 1 \right), \quad p = \frac{NkT}{V}. \quad 4. S = \frac{3}{2} Nk \ln E + Nk \ln V + \text{const.}$$

$$5. C_v^{\text{re}} = 2C_v^{\text{id}}. \quad 6. dn = \frac{g d\Omega}{\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right) \pm 1}. \quad \text{Bu yerda } d\Omega = E, E + dE \text{ energiya}$$

oralig'idagi kvant holatlari soni,  $\mu$  - kimyoviy potensial,  $g = 2s + 1$  -

statistik vazn,  $s$  - zarra spini. 9.  $dn_0(v) = \begin{cases} \frac{8\pi m^3 v^2}{h^3} dv, & v < v_m, \\ 0, & \text{agar } v > v_m. \end{cases}$  Bu yerda

$$v_m = \sqrt{\frac{2E_f}{m}}, \quad E_f = 0 \text{ K dagi Fermi energiyasi. } 10. \bar{v} = \frac{3}{4} v, \quad \overline{v^2} = \frac{3}{5} v_m^2,$$

$$\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{3}{2v_m}. \quad 11. N = \frac{8\pi V}{3} \left(\frac{2m\epsilon_m}{h^2}\right)^{3/2}, \quad p = (3\pi)^{2/3} \frac{h^2}{5m} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}, \quad E = \frac{3}{5} N\epsilon_m.$$

$$12. E = \frac{3}{5} N\epsilon_m \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_f}\right)^2 \right], \quad E_f = E_f \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_f}\right)^2 \right], \quad C_v = \frac{\pi^2}{2E_f} nk^2 T \left[ 1 - \frac{3\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_f}\right)^2 \right].$$

$$13. \frac{N'}{N} = 0,65. \quad 14. \Phi = NE_f \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_f}\right)^2 \right], \quad F = \frac{3}{5} NE_f \left[ 1 - \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_f}\right)^2 \right],$$

$$\chi = NE_f \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_f}\right)^2 \right]. \quad 16. C_v^{\text{id}} = \frac{\pi^2 Nk^2 T}{2E_f}. \quad 17. T_0 = 0,084 \frac{h^2}{km} \left(\frac{N}{(2s+1)V}\right)^{2/3}.$$

$$18. N'' = N - N' = N \left[ 1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \right]. \quad 19. S = \frac{5}{2} \alpha T^{3/2}, \quad p = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{V} T^{5/2}, \quad F = -\frac{2}{3} \alpha T^{5/2},$$

$$\Phi = 0. \quad 20. VT^{3/2} = \text{const yoki } pV^{5/3} = \text{const.} \quad 21. p = \frac{2}{3} \frac{E}{V}.$$

22.  $pV = NkT \left[ 1 \pm \frac{N}{2gV} \left(\frac{\pi h}{mkT}\right)^{3/2} \right]$ , bu yerda «+» fermionlarga, «-» bozonlarga tegishli,  $g = 2s + 1$ ,  $s$  - zarra spini.

$$23. E = N\epsilon_0 + N\Delta\epsilon \frac{g_1}{g_0} \exp\left(-\frac{\Delta\epsilon}{kT}\right) \left[ 1 + \frac{g_1}{g_0} \exp\left(-\frac{\Delta\epsilon}{kT}\right) \right]^{-1},$$

$$C_v = Nk \left(\frac{\Delta\epsilon}{kT}\right)^2 \frac{g_1}{g_0} \exp\left(-\frac{\Delta\epsilon}{kT}\right) \left[ 1 + \frac{g_1}{g_0} \exp\left(-\frac{\Delta\epsilon}{kT}\right) \right]^{-2}.$$

$$24. E = N \left( h\nu + \frac{2h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \right), \quad C_v = \frac{Nk}{2} \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \text{cosech}^2 \left(\frac{h\nu}{kT}\right).$$

$$26. F = \frac{NkT_c}{2} + NkT \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{T_c}{T} \right) \right],$$

$$S = \frac{NkT_c}{T} \left[ \exp \left( \frac{T_c}{T} \right) - 1 \right]^{-1} - Nk \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{T_c}{T} \right) \right].$$

$$27. E = \frac{3Nh^2}{4\pi^2 I} \exp \left( -\frac{2T_c}{T} \right), C_V = 12Nk \left( \frac{T_c}{T} \right)^2 \exp \left( -\frac{2T_c}{T} \right).$$

$$28. \frac{N_0}{N_n} = 9 \exp \left( -\frac{2T_c}{T} \right). \quad 30. \lambda T_m = 0,3668. \quad 31. \Phi = F + pV = 0.$$

$$32. E = \frac{4\pi^5 k^4 V}{5c^3 h^3} T^4 = \frac{3\pi^4 Nk}{5\theta^3} T^4, C_V = \frac{12\pi^4 Nk}{5\theta^3} T^3, \text{ bu yerda } \theta = \frac{h\nu_{max}}{k} -$$

$$\text{Debay temperaturasi. } 33. T = \sqrt{\frac{5k\theta^3}{24\pi^2 \epsilon_{max}}} = 5, \text{ bu yerda } \epsilon_{max} = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{3n}{\pi} \right)^{2/3}.$$

$$35. P = Np_0 L \left( \frac{p_0 E}{kT} \right), L(x) = x - \frac{1}{x} - \text{Lanjeven funksiyasi } 36. \epsilon = 1 + \frac{4\pi}{3} \frac{n p_0^2}{kT}.$$

$$37. \epsilon = 1 + 4\pi n \left( \alpha + \frac{p_0^2}{3kT} \right).$$

### VI bobga oid masalalarning javoblari

$$3. \Phi = \Phi_{id} + \frac{2n^2}{V} (bRT - a), \text{ bu yerda } n = \frac{N}{N_0} = \frac{m}{M_{mol}} - \text{modda miqdori}$$

$$4. S = kN_0 n \left[ \ln \frac{V}{nN_0} \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} + \frac{5}{2} \right] - \frac{n^2 Rb}{V}, n - \text{mollar soni.}$$

$$5. \alpha = \frac{12}{2^n (n-3)} N_0^2 U_0 v, v = \frac{4}{3} \pi r_0^3. \quad 6. p_{int} = \frac{2\pi}{3} d^3 \left( \frac{N}{V} \right)^2 kT \left( 1 - \frac{3}{n-3} \frac{\alpha}{kTd^n} \right).$$

$$7. E = E_{id} - \frac{n^2 a}{V}, F = F_{id} + \frac{n^2}{V} (bRT - a). \quad 8. E_{pl} = E_{id} - Ne^3 \sqrt{\frac{8\pi N}{kTV}},$$

$$E_{id} = C_V + E_0. \quad 9. F_{pl} = F_{id} - \frac{2}{3} Ne^3 \sqrt{\frac{8\pi N}{kTV}}, S_{pl} = S_{id} - \frac{1}{3} \frac{Ne^3}{T} \sqrt{\frac{8\pi N}{kTV}},$$

$$p_{pl} = \frac{NkT}{V} - \frac{1}{3} \frac{Ne^3}{V} \sqrt{\frac{8\pi N}{kTV}}, (C_V)_{pl} = (C_V)_{id} + \frac{1}{2} \frac{Ne^3}{T} \sqrt{\frac{8\pi N}{kTV}}.$$

$$10. R_D = \sqrt{\frac{kT_e T_i}{4\pi n_0 e^2 (T_e + T_i)}}.$$

### VII bobga oid masalalarning javoblari

$$1. (\overline{\Delta V})^2 = kT \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right) \right]^{-1}. \quad 2. (\overline{\Delta T})^2 = \frac{kT_0}{C_V}, T_0 - \text{termostat temperaturasi.}$$

$$4. \overline{\Delta T \Delta p} = \frac{k^2 T^2}{C_V} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V. \quad 5. \overline{\Delta V \Delta p} = -kT, \overline{\Delta S \Delta T} = kT, \overline{\Delta S \Delta V} = kT \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

$$6. \overline{(\Delta A)^2} = k^2 T^2 C_p - kTV^2 \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_S. \quad 8. \overline{(\Delta E)^2} = \theta^2 \left( \frac{\partial E}{\partial \theta} \right)_V = kT^2 C_V.$$

$$9. \delta_E = \frac{\sqrt{(\Delta E)^2}}{E} = \frac{5}{6} \sqrt{\frac{\pi}{N}} \frac{k^{3/2} T}{\sqrt{\epsilon_{\max}}} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\epsilon_{\max}} \right)^2 \right]^{-1}. \quad 10. \delta_E = \sqrt{\frac{5\theta^3}{3\pi^4 NT^3}}.$$

$$11. \overline{(\Delta E)^2} = \frac{(\Delta \epsilon)^2}{2g_1 g_2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\Delta \epsilon}{2kT} + \gamma \right), \quad \gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{g_1}{g_2}. \quad 13. \delta_N = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \delta_n = \sqrt{\frac{1-n_i}{n_i}}, \quad \delta_n = \sqrt{\frac{1+n_i}{n_i}}.$$

### IX bobga oid masalalarning javoblari

$$1. \Delta = \sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{\frac{kT\tau}{3\eta\eta_0}}. \quad 3. N_A = \frac{RT\tau}{3\pi\eta(\Delta x)^2}.$$

$$4. J_x = -D \frac{n(x_2) \exp\left(\frac{U(x_2)}{kT}\right) - n(x_1) \exp\left(\frac{U(x_1)}{kT}\right)}{\int_{x_1}^{x_2} \exp\left(\frac{U(x)}{kT}\right) dx}.$$

### Foydalanilgan adabiyotlar

1. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Том I. – М., Наука, 1969.
2. Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики. Том II. – М., Наука, 1971.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Учеб. пособие. – М., Наука, 1976.
4. Базаров И.П. Термодинамика. – М., Высш. школа, 1991.
5. Румер Ю.Б., Рывкин М.С. Термодинамика, статическая физика и кинетика. Учеб. пособие. – М., Наука, 1976.
6. Boydedayev A. Nomuvozanatli statistik fizika asoslari. O'quv qo'llanma. – T., O'qituvchi, 1992.
7. Boydedayev A. Klassik statistik fizika. O'quv qo'llanma. – T., O'zbekiston, 2003.
8. Терлецкий Я.П. Статистическая физика. – М., Высш. школа, 1973.
9. Кубо Р. Термодинамика. – М., Мир, 1970.
10. Исихара А. Статистическая физика. – М., Мир, 1973.
11. Киттель Ч. Статистическая термодинамика. – М., Наука, 1977.
12. Корнелл Э.А., Вилман К.Э. Бозе-Эйнштейновская конденсация в разреженном газе. Первые 70 лет и несколько последних экспериментов. (Нобелевские лекции по физике – 2001), УФН, 173, № 12, 1320 (2003).
13. Кеттерле В. Когда атомы ведут себя как волны. Бозе-эйнштейновская конденсация и атомный лазер (Нобелевские лекции по физике – 2001), УФН, 173, № 12, 1340 (2003).
14. Гречко А.Г., Сучаков В.И., Томашевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике. – М., Просвещение, 1979.
15. Серова Ф.Г., Янжина А.А. Сборник задач по теоретической физике. – М. Просвещение, 1979.
16. Matmatqulov R., Tursunov A.A., Matmatqulov B.R. Termodinamika, statistik fizika va kinetika bo'yicha masalalar to'plami. – T., O'zbekiston, 2003.

# MUNDARIJA

SO'ZBOSHI .....	3
KIRISH .....	6
<b>I bob. STATISTIK FIZIKANING ASOSIY TASAVVURLARI .....</b>	<b>8</b>
1.1. Statistik fizika vazifalari .....	8
1.2. Fazalar fazosi .....	9
1.3. Liuvill teoremasi .....	14
1.4. Statistik taqsimot .....	15
1.5. I bobga oid masala va savollar .....	19
<b>II bob. STATISTIK MEXANIKANING UMUMIY METODLARI .....</b>	<b>23</b>
2.1. Gibbsning mikro va kichik kanonik taqsimotlari .....	23
2.2. Gibbs kvaziklassik va klassik taqsimotlari .....	27
2.3. Maksvell va Maksvell-Bolsman taqsimotlari .....	30
2.4. Maksvell taqsimoti .....	31
2.5. Bolsman taqsimoti .....	34
2.6. II bobga oid masala va savollar .....	37
<b>III bob. STATISTIK VA FENOMENOLOGIK TERMODINAMIKA .....</b>	<b>42</b>
3.1. Kirish .....	42
3.2. Termodinamikada asosiy tushunchalar .....	44
3.3. Holatning termik va kalorik tenglamalari .....	52
3.4. Termodinamikaning birinchi qonuni .....	55
3.5. Termodinamika birinchi qonunining suyuqliklarning statsionar oqimiga tatbigi .....	59
3.6. Kvazistatik jarayonda sistema ichki energiyasining o'zgarishi .....	62
3.7. Termodinamikada issiqlik sig'imi tushunchasi .....	65
3.8. Asosiy termodinamik jarayonlar va ularning tenglamalari .....	68
3.9. Termodinamikaning ikkinchi qonuni .....	69
3.10. Entropiya. Termodinamikaning asosiy tenglamasi .....	71
3.11. Entropiyaning o'sish qonuni .....	73
3.12. Qaytuvchi va qaytmas jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi .....	76
3.13. Karno sikli va Karno teoremasi .....	77
3.14. Entropiyaning fenomenologik aniqlash .....	80
3.15. Nomuvozanat jarayonlar uchun termodinamika ikkinchi qonunining asosiy tenglamasi .....	84
3.16. Holatning termik va kalorik tenglamalari orasidagi bog'lanish .....	85
3.17. Bolsman prinsipi .....	88
3.18. Termodinamika ikkinchi qonunini tatbiq qilish chegarasi .....	89
3.19. Termodinamikaning uchinchi qonuni. Nernst issiqlik teoremasi .....	91
3.20. Termodinamik metodlar .....	93
3.21. Ideal gaz uchun termodinamik potentsiallar .....	97
3.22. Murakkab sistemalar termodinamik potentsiallari .....	98
3.23. Gibbs-Gelmgols tenglamalari .....	99
3.24. Qaytmas va qaytuvchi adiabatik kengayishda gazlarning sovishi .....	101
3.25. Magnetiklar va dielektriklar termodinamikasi .....	105
3.26. Magnit va yadro sovitish metodlari .....	108
3.27. Termodinamik kattaliklarni statistik fizika metodi bo'yicha hisoblash .....	109
3.28. III bobga oid masala va savollar .....	110

<b>IV bob. ZARRALAR SONI O'ZGARUVCHAN SISTEMALAR.</b>	<b>118</b>
<b>FAZA O'TISHLAR.....</b>	<b>118</b>
4.1. Zarralar soni o'zgaruvchan sistema termodinamik potentsiallari.....	118
4.2. Gibbsning katta kanonik taqsimoti.....	121
4.3. Holat kattaliklari.....	125
4.4. Nurlanish termodinamikasi.....	127
4.5. Termodinamik sistemalarning muvozanati va barqarorlik shartlari.....	134
4.6. Gomogen sistemaning muvozanati.....	136
4.7. Geterogen sistemalarda muvozanat sharti.....	138
4.8. Gibbsning fazalar qoidasi. Uchlamchi nuqta.....	140
4.9. Sirt hodisalar termodinamikasi.....	142
4.10. Faza o'tishlar. Birinchi xil faza o'tishlar.....	144
4.11. Ikkinchi xil faza o'tishlar. Erenfest tenglamalari.....	150
4.12. O'ta o'tkazuvchanlik holatda faza o'tish. Rutgers formulasi.....	154
4.13. Faza o'tishlar Landau va Yang-Li nazariyalari.....	155
4.14. IV bobga oid masala va savollar.....	162
<b>V bob. IDEAL SISTEMALARNING STATISTIK NAZARIYASI.....</b>	<b>167</b>
5.1. Bir atomli kvant ideal gazlar.....	167
5.2. Termodinamik kattaliklarni hisoblash.....	169
5.3. Maksvell va Maksvell-Bolsman taqsimotlarining Gibbs taqsimoti ko'rinishida yozilishi.....	171
5.4. Boze-Eynshteyn va Fermi-Dirak taqsimotlari.....	174
5.5. Absolut nol temperaturalarda Fermi-gaz.....	177
5.6. Metallarda elektron gaz. Issiqlik sig'imi.....	181
5.7. Fermi-Dirak taqsimoti tatbig'i.....	184
5.8. Past temperaturalarda Boze-gaz. Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi.....	185
5.9. Boze-gaz va Fermi-gaz holat tenglamalari.....	188
5.10. Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi.....	191
5.11. Muvozanatli nurlanish. Plank formulasi.....	194
5.12. Foton gazi statistikasi.....	197
5.13. Qattiq jismlar issiqlik sig'imi. Eynshteyn nazariyasi.....	199
5.14. Debay nazariyasi.....	201
5.15. Kristall panjara holat funksiyasi.....	204
5.16. Ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan ideal gazlar issiqlik sig'imining klassik nazariyasi.....	207
5.17. Erkinlik darajalari bo'yicha kinetik energiyaning teng taqsimot teoremasi. Virial teorema.....	211
5.18. Ikki kvant holatli sistema issiqlik sig'imi.....	215
5.19. Ikkita atomli kvant ideal gaz.....	217
5.20. Tebranma harakatning issiqlik sig'imiga qo'shgan hissasi.....	219
5.21. Aylanma harakatning gaz issiqlik sig'imiga qo'shgan hissasi.....	221
5.22. Ideal sistemalarning magnit va elektr xususiyatlari.....	225
5.23. Absolut manfiy temperatura.....	227
5.24. V bobga oid masala va savollar.....	231
<b>VI bob. NOIDEAL SISTEMALAR STATISTIK NAZARIYASI.....</b>	<b>238</b>
6.1. Noideal klassik bir atomli gaz. Holat funksiyasi.....	238
6.2. Noideal gaz holat tenglamasi.....	242
6.3. Bir atomli noideal gaz termodinamik kattaliklarini hisoblash.....	246
6.4. Juft korrelyatsion funksiyalar metodi. Bogolyubovning zanjir tenglamasi.....	248
6.5. Katta zichlikdagi sistema holat tenglamasi va energiyasi.....	254
6.6. Plazma. Plazma holat tenglamasi.....	256
6.7. VI bobga oid masala va savollar.....	260

<b>VII bob. FLUKTUATSIYA NAZARIYASI</b> .....	<b>264</b>
7.1. Fluktuatsiyaning termodinamik nazariyasi.....	264
7.2. Bir jinsli sistemalarda termodinamik kattaliklar fluktuatsiyasi.....	268
7.3. Bajirilgan ish fluktuatsiyasi.....	274
7.4. Fluktuatsiyaning statistik nazariyasi.....	276
7.5. Zichlik fluktuatsiyasining korrelatsiyasi.....	278
7.6. Foton gazida fluktuatsiya.....	280
7.7. Kvant gazlarda fluktuatsiya.....	283
7.8. Turli xil o'lchov asboblarning sezgirligi.....	284
7.9. Osmonning havo ranglilik nazariyasi.....	287
7.10. VII bobga oid masala va savollar.....	291
<b>VIII bob. NOMUVOZANAT JARAYONLAR TERMODINAMIKASI</b> .....	<b>293</b>
8.1. Nomuvozanat jarayonlar termodinamikasining asosiy tenglamalari.....	295
8.2. Balans tenglamasi va saqlanish qonunlari.....	297
8.3. Chiziqli qaytmas jarayonlar.....	299
8.4. Qaytmas jarayonlar termodinamikasining variatsion prinsiplari.....	302
8.5. Onzager prinsipi. Termoelektrik hodisalarga tatbig'i.....	303
8.6. Nochiziqli nomuvozanat termodinamika asoslari.....	309
8.7. VIII bobga oid masala va savollar.....	310
<b>IX bob. FIZIKAVIY KINETIKA</b> .....	<b>313</b>
9.1. Kinetik kimyo.....	311
9.2. Broun harakatining fizik xarakteristikasi.....	313
9.3. Smoluxovskiy tenglamasi.....	316
9.4. Batafsil muvozanat prinsipi.....	318
9.5. Fokker-Plank tenglamasi.....	319
9.6. Kinetik balans tenglama.....	325
9.7. Eynshteyn bo'yicha Plank formulasining kinetik isboti.....	328
9.8. IX bobga oid masala va savollar.....	331
<b>X bob. KINETIK TENGLAMALAR</b>	
10.1. Bolsmanning kinetik tenglamasi.....	334
10.2. Bolsman tenglamasining statsionar yechimi.....	338
10.3. Bolsmanning H-teoremasi va entropiyaning o'sish qonuni.....	340
10.4. Ko'chishning umumlashgan tenglamasi. Enskog tenglamasi.....	343
10.5. Additiv kattaliklar saqlanish qonunlari.....	345
10.6. Makroskopik qaytnaclik va mikroskopik qaytuvchanlik.....	348
10.7. Ideal gazda Maksvell muvozanat va lokal muvozanat taqsimoti.....	351
10.8. Gidrodinamika tenglamasi. Kinetik ko'effitsiyentlar.....	355
10.9. Relaksatsiya vaqti.....	359
10.10. Bolsman kinetik tenglamasining gazlarga ba'zi bir tatbig'i.....	361
10.11. Kristalda o'tkazuvchi elektronlar.....	364
10.12. Bogolyubov kinetik zanjir tenglamasi.....	367
10.13. O'zi moslashuvchan maydon kinetik tenglamasi. Vlasov tenglamasi.....	372
10.14. Bolsman kinetik tenglamasining Bogolyubov bo'yicha isboti.....	373
10.15. bobga oid masala va savollar.....	380
Masalalarning javoblari.....	382
Foydalanilgan adabiyotlar.....	388

33.317

A 15

**Abdumalikov A.A.**

**Nazariy fizika kursi: J. 4: Termodinamika va statistik fizika.**  
**Oliy o'quv yurtlari uchun darslik/A.A. Abdumalikov, R. Mamatqulov.**  
**- T.: «Voriz nashriyot» MChJ, 2006. - 392 b.**

BBK 22.317ya73

ABDUMALIKOV ABDULAZIZ ABDUVAHABOVICH  
MAMATQULOV RAXMON

**TERMODINAMIKA  
VA STATISTIK FIZIKA**

*Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun darslik*

*«Voriz nashriyot» MChJ  
Toshkent-2006*

Muharrir *N. Go'ipov*  
Musahhah *S. Musarojiyev*  
Kompyuterda sahifalovchi *M. To'xtaxo'jayeva*

Original-maketdan bosishga ruxsat etildi 05.12.06. Bichimi 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Kegli 11 shponli. Journal garn. Ofset bosma usulida bosildi. Hajmi 24,5 b.t.  
1000 nusxada bosildi. Buyurtma № 192

«Voriz nashriyot» MChJ, Toshkent, Shiroq ko'chasi, 100.

«Sano-Standart» bosmaxonasi chop etildi.  
Toshkent, Shiroq ko'chasi, 100.