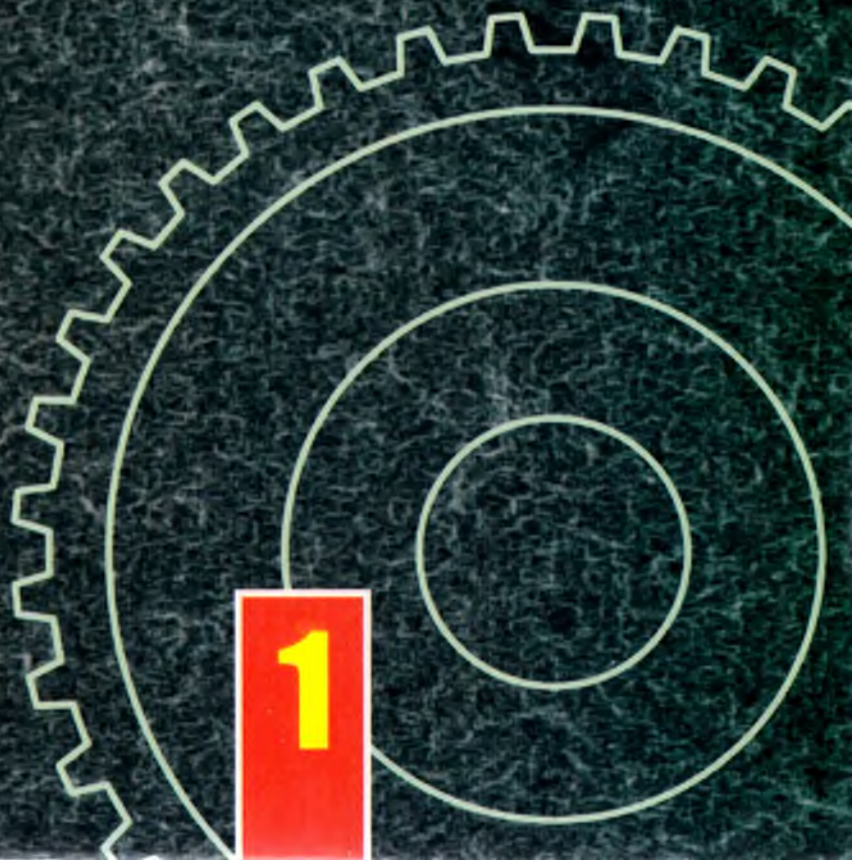


X. TO'RAYEV

NAZARIY MEXANIKA

STATIKA VA KINEMATIKA



1

H. T. TO‘RAYEV, A. TILAVOV

**NAZARIY MEXANIKA.
STATIKA VA KINEMATIKA**

1 Jild

Professor H.T. To‘rayev umumiy tahriri ostida

*O‘zbekiston respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta‘lim vazirligi
tamonidan oliy o‘quv yurtlari talabalari uchun
darslik sifatida tavsiya etilgan*

«NOSHIR»
TOSHKENT-2012

To'rayev N.T.

Nazariy mexanika. Statistika va kinematika: darslik: jild 1/
N.T. To'rayev. — Toshkent: Noshir, 2012. 304 bet.

КБК 22.21

T a q r i z c h i l a r :

J. Aqilov— fizika-matematika fanlari doktori, professor;

J. Qayumov — fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

Mazkur darslikning statika qismida statikaning asosiy aksiomalari, tekislikda kesishuvchi kuchlar, parallel kuchlar, taqsimlangan kuchlar, ishqalanish va fermalar hisobi hamda fazoda kuchlar tizimlariga doir masalalar bayon etilgan.

Kinematika qismida esa nuqta kinematikasi, qattiq jismning ilgarilanma va qo'zgalmas o'q atrofidagi aylanma harakati, tekis harakati, qo'zg'almas nuqta atrofidagi harakati, moddiy nuqtaning murakkab va qattiq jismning murakkab harakatlari kabi masalalar yoritilgan.

Har bir mavzu bo'yicha masalalarni yechishga doir uslubiy ko'rsatmalar va masalalar yechib ko'rsatilgan, muammoli masala va topshiriqlar hamda mustaqil ishlash uchun savollar berilgan.

Mazkur darslik Oliy o'quv yurtlarining 5440200-Mexanika, 5460100-Matematika, 5480100-Amaliy matematika va informatika yo'nalishlari bo'yicha bakalavriat hamda 5A440201-Nazariy mexanika, 5A480104-Matematik modellashtirish, 5A480103-Amaliy matematika va informatsion texnologiyalar, 5A460102-Differensial tenglamalar magistratura mutaxassisliklari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalarga mo'ljallangan. Bundan tashqari, darslikdan professor-o'qituvchilar, aspirantlar va ilmiy xodimlar ham foydalanishlari mumkin.

ISBN 978-9943-353-87-9

© «NOSHIR» nashriyoti, 2012.

**NAMANGAN DAVLAT
UNIVERSITETI**

Ahborot-resurs markazi

2009/1

KIRISH

Nazariy mexanika fani moddiy jismlarning o‘zaro ta‘sirini, mexanik harakatning umumiy qonunlarini va muvozanat shartlarini o‘rganadi.

Tabiatdagi barcha jismlar materiyadan iboratdir. Nazariy mexanikada materiyaning alohida fizik-kimyoviy xossalari e‘tiborga olinmaydi. Materiya doimo harakatda bo‘lganligidan, uni vaqt va fazodan ajratib tasvirlab bo‘lmaydi. Nazariy mexanikaning vazifasi moddiy jismlarning vaqt o‘tishi bilan fazoda bir-birlariga nisbatan qo‘zg‘alishlarni o‘rganish hamda jismlarning muvozanatda bo‘lish hollarini tekshirishdan iborat.

Nazariy mexanika kursi, odatda, klassik mexanika deb ataladi. Klassik mexanikada moddiy jismlarning o‘zaro mexanik ta‘sirini va bu ta‘sir natijasida holati hamda harakatini hisobga olishga asos solgan — Shaqning X—XI asrlarida ijod etgan buyuk mutafakkirlari Abu Ali ibn Sino, Abu Rayhon Beruniy va italiya olimi Galilyeo Galilyey (1564—1642), ingliz matematigi va mexanigi Isaak Nyuton (1642—1727) lar hisoblanadi. Mexanik ta‘sir natijasida moddiy jismlarning shakli (uni tashkil qiluvchi zarralarning joylashish tartibi), holati va harakati o‘zgaradi. Mexanik ta‘sirni tavsiflovchi omil sifatida kuch tushunchasi kiritiladi.

Nazariy mexanika qo‘yilgan masalalarning qanday nuqtayi nazaridan tekshirishiga qarab, uch qismga bo‘linadi: *statika*, *kinematika* va *dinamika*.

Ushbu darslikda nazariy mexanikaning *statika* va *kinematikaga* doir masalalari o‘rganiladi. Kitobning asosi sifatida hammuallif A.Tilavov tomonidan Samarqand davlat universiteti talabalariga uzluksiz o‘qilayotgan ma‘ruzalar olingan. Uning tarkibi va mazmuniga Moskva, Sankt-Peterburg, Nijniy Novgorod, Kiev va O‘zbekiston milliy universitetlari kafedralari bilan ilmiy, o‘quv-uslubiy sohalaridagi hamkorlik hamda universitet talabalariga mexanika fanining yetuk olimlari V.G. Vilke, V.K. Prokopov,

Yu.I. Neymark, N.A.Fufayev, N.V. Butenin, I.A.Kukles, H.R. Rahimov, T.N.Nurov va T.Sh. Shirinqulovlar tomonidan o'qilgan ma'ruzalarning ham ijobiy ta'siri bor.

Darslik 11 bobdan iborat. Birinchi bobda statikaning asosiy tushunchalari, aksiomalari, bog'lanishlar hamda ularning turlari, bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi va ularning muvozanat shartlari, markazga va o'qqa nisbatan kuch hamda kuchlar sistemasining momenti, tekislikda kuchlar sistemasining xos-salari, kuch va kuchlar sistemasining nuqtaga hamda o'qqa nisbatan momentiga doir masalalarning yechimi keltirilgan.

Ikkinchi bobda bir tomonga yo'nalgan ikki parallel kuchlar sistemasi, qarama-qarshi tomonga yo'nalgan ikkita parallel kuchlar sistemasi, tekislikda juft kuchlar sistemasi va ularning muvozanat shartlariga doir nazariyalar, bir tekislikda yotgan parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari, tekislikda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari, paralel kuchlar markazi, og'irlik markazi, og'irlik markazining koordinatalarini topish usullari, ba'zi oddiy jismlarning og'irlik markazini aniqlash, Gulden-Pap teoremlari kabi masalalar bayon etiladi.

Uchinchi bobda taqsimlangan kuchlar, to'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha doimiy intensivlik bilan taqsimlangan parallel kuchlar, to'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha taqsimlanish intensivligi chiziqli qonun bilan o'zgaruvchi parallel kuchlar, balkaning qistirilgan nuqtasining reaksiyasi, taqsimlangan kuchlarga doir masalalar, qattiq jismlar sistemasining muvozanati, qattiq jismlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar bayon etiladi.

To'rtinchi bobda sirpanishdagi ishqalanish qonunlari, yumalashda hosil bo'ladigan ishqalanish kuchi, ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarning tugunlarni qirqish usuli bilan topish, ishqalanish kuchi tufayli yuzaga keladigan jismlar muvozanatini tekshirishga doir masalalarni yechish uchun uslubiy tavsiyalar, yumalashda hosil bo'ladigan ishqalanish kuchini topishga doir masalalar, fermalar hisobiga doir masalalarning tugunlarini qirqish usuli bilan yechishga doir uslubiy tavsiyalar bayon etiladi.

Beshinchi bobda fazoda ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishuvchi va ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari, juftlar sistemasini qo'shish, fazoda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasini berilgan markazga va ularni bitta bosh vektorga hamda bosh momentga keltirish, bosh vek-tor va bosh momentni hisoblash formulalari, kuchlar sistemasini keltirishning xususiy hollari, fazoda parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari, fazoda kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish uslubi, kuchlar sistemasini keltirishga doir masalalar, fazoda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish bo'yicha tavsiyalar bayon etiladi.

Oldinchi bobda kinematikaning asosiy tushunchalari, nuqta harakatining berilish usullari, nuqtaning trayektoriya bo'ylab harakat qonuniga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar, moddiy nuqtaning tezligi, nuqta tezligini topishga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar, moddiy nuqtaning tezlanishi, differensial geometriyadan ba'zi ma'lumotlar, harakati tabiiy usulda berilgan nuqtaning tezlanishi, nuqtaning tekis va tekis o'zgaruvchan harakati, aylana bo'ylab harakatlanuvchi nuqtaning tezlanishi, nuqta tezlanishining qutb koordinatalaridagi ifodasi, nuqta tezlanishini topishga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar, egri chizikli koordinatalar, sferik koordinatalar sistemasini, tezlilikning egri chizikli koordinatalardagi ifodasi, tezlanishning egri chizikli koordinatalardagi ifodasi, egri chizikli koordinatalar sistemasida nuqta tezligi va tezlanishini topishga doir uslubiy tavsiyalar kabi masalalar bayon etilgan.

Yettinchi bobda mexanik sistema va qattiq jismning erkinlik darajasi, qattiq jismning ilgarilanma harakati, qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati, qattiq jismning ilgarilanma va qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatiga doir masalalar yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar bayon etilgan.

Sakkizinchi bobda qattiq jismning tekis parallel harakatiga doir asosiy tushunchalar, tekis shakl nuqtalarining tezliklari va tezlanishlari, tezlanishlar oniy markazi, tekis shaklning o'z

tekisligidagi harakat tenglamasi, qattiq jismning tekis parallel harakatiga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar berilgan.

To'qqizinchi bobda bitta qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan qattiq jismning harakat tenglamalari, oniy aylanish o'qi, aksoidlar, bitta qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan qattiq jismning oniy burchak tezligi va oniy burchak tezlanishi, Eyler va Krilov burchaklari, burchak tezlanishini hisoblash, qattiq jismning bitta qo'zg'almas nuqta atrofidagi harakatiga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar yoritilgan.

O'ninchi bobda moddiy nuqtaning murakkab harakati to'g'risidagi asosiy ta'riflar, vektorning absolut va nisbiy hosilalari, tezliklar hamda tezlanishlarni qo'shish haqidagi teoremlar, nuqtaning murakkab harakatiga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar bayon etilgan.

O'nbirinchi bobda qattiq jismning ilgarilanma va aylanma harakatlarini qo'shish, qattiq jism harakatlarini qo'shishning umumiy holi, qattiq jismning murakkab harakatiga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar, planetar va differensial tishli uzatmalarining burchak tezliklarini topishga doir masalalar yoritilgan.

Nazariy masalalarni bayon etishda misol va masalalardan keng foydalanilgan, har bir paragrafning oxirida mustaqil ishlash uchun masalalar, savol va topshiriqlar berilgan.

Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun «Nazariy mexanika» fanidan o'zbek tilida marhum ustozimiz M. O'rozboyev, P. Shohaydarova va J. Zoirov, T.R. Rashidov, Sh. Shoziyotov va K.B. Mo'minov, Yu.N.Yoqubov va S.A. Saidov, S. Q. Aziz-Qoriyev tomonidan yaratilgan kitoblar «Nazariy mexanika» fanini o'qitishda, tabiiyki, ijobiy rol o'ynadi.

Talabalarga tavsiya etilayotgan ushbu darslik «Nazariy mexanika» fani bo'yicha davlat ta'lim standartlida ko'rsatilgan o'quv dasturlariga va uzluksiz ta'lim tizimi uchun o'quv adabiyotlarning yangi avlodini yaratish konsepsiyasiga to'liq javob beradi.

Kitob kamchiliklardan xoli bo'lmaganligi tufayli, mualliflar kitob haqidagi tanqidiy fikr va mulohazalarni minnatdorchilik bilan qabul qiladilar va oldindan o'z tashakkurini izhor etadilar.

Kitobning qo‘lyozmasi bilan mufassal tanishib, uning sifatini yaxshilash yo‘lida foydali ko‘satma va maslahatlar bergan taqrizchilar fizika-matematika fanlari dokori, professor J.Oqilov va fizika - matematika fanlari nomzodi, dotsent J. Qayumovga, matnini kompyuterga kiritgan va maketini tuzib nashr etishga tayyorlagan G. Israfilova va S. Goncharovalarga o‘z minnatdorchiligimizni bildiramiz.

Mualliflar

STATIKA

I BOB. STATIKANING ASOSIY AKSIOMALARI. TEKISLIKDA KESISHUVCHI KUCHLAR SISTEMASI

Bu bobda statikaning asosiy tushunchalari, aksiomalari, bog‘lanishlar va ularning turlari, bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi va ularning muvozanat shartlari, markazga va o‘qqa nisbatan kuch hamda kuchlar sistemasining momenti, tekislikda kuchlar sistemasining xossalari, kuch va kuchlar sistemasining nuqtaga hamda o‘qqa nisbatan momentiga doir masalalarning yechimi keltirilgan.

1.1. Statikaning asosiy tushunchalari va aksiomalari

Moddiy nuqta, mexanik sistema, qattiq jism, kuch, kuchlar sistemasi va bog‘lanishlar.

Statika bo‘limida kuchlar sistemasi ta‘siridagi mexanik sistemaning yoki mexanik sistemaga qo‘yilgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari o‘rganiladi. Statikaning asosiy tushunchalari: moddiy nuqta, mexanik sistema, qattiq jism va kuchlar hisoblanadi.

Moddiy nuqta deganda o‘lchamlari va shakli e‘tiborga olinmaydigan hamda massasi bir nuqtaga joylashgan deb qaraladigan jism tushiniladi.

Har bir nuqtasining harakati qolgan nuqtalarining holati va harakatiga bog‘liq bo‘lgan moddiy nuqtalar to‘plamiga **mexanik sistema** deyiladi.

Ixtiyoriy ikkita nuqtasi orasidagi masofa o‘zgarmas va massasi uzluksiz taqsimlangan mexanik sistemaga **absolut qattiq jism** deyiladi.

Moddiy jismlarning o‘zaro ta‘sirini xarakterlovchi kattalikka **kuch** deyiladi.

Nazariy mexanikada kuch tushunchasi asosiy birlamchi tushuncha hisoblanadi. Kuch vektor kattalik bo'lib, u o'zining son qiymati (miqdori) yoki moduli, qo'yilish nuqtasi va yo'nalishi bilan xarakterlanadi. Kuch vektori bilan ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqqa, shu kuchning ta'sir chizig'i deb ataladi. **Kuchlar sistemasi** deb qaralayotgan qattiq jismga yoki mexanik sistema nuqtalariga qo'yilgan kuchlar to'plamiga aytiladi. Bitta nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasini ham qarash mumkin.

Jismga ta'sir etuvchi $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar to'plamiga kuchlar sistemasi deyiladi.

Berilgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasi ta'siridan qattiq jism yoki mexanik sistema o'zining tinch holatini yoki inersial harakatini o'zgartirmasa, bunday sistemaga nolga ekvivalent yoki muvozanatlashgan kuchlar sistemasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0.$$

Qattiq jismga qo'yilgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasining ta'sirini boshqa bir $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_k)$ kuchlar sistemasining ta'siri bilan almashtirish mumkin bo'lsa, bunday kuchlar sistemalariga ekvivalent kuchlar sistemalari deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_k).$$

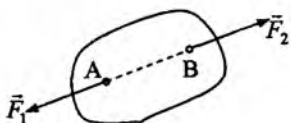
Kuchlar sistemasining jismga ko'rsatadigan ta'sirini bitta kuchning ta'siri bilan almashtirish mumkin bo'lsa, bu kuch berilgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi deyiladi. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini \vec{R} bilan belgilasak, u holda quyidagi ifoda hosil bo'ladi.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}.$$

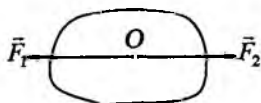
Statika aksiomalari

1-aksioma (Ikki kuchning muvozanati haqidagi aksioma).
Qattiq jismning ixtiyoriy ikkita nuqtasiga qo'yilgan, miqdorlari teng

va shu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan ikkita kuch muvozanatlashgan kuchlar sistemasini hosil qiladi (1-shakl). Xususiy holda qattiq jismning bitta nuqtasiga qo'yilgan, miqdorlari teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan ikkita kuch muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi (2-shakl).



1-shakl.



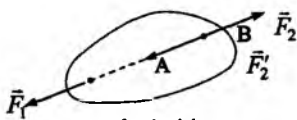
2-shakl.

2-aksioma (Nolga ekvivalent kuchlar sistemasini qo'shish yoki ayirish haqidagi aksioma). Qattiq jismga qo'yilgan kuchlar sistemasiga nolga ekvivalent kuchlar sistemasini qo'shilsa yoki ayirilsa, kuchlar sistemasining jismga ko'rsatadigan ta'siri o'zgarmaydi, boshqacha aytganda, dastlabki kuchlar sistemasiga ekvivalent kuchlar sistemasini hosil bo'ladi.

Natija. Qattiq jismning biror nuqtasiga qo'yilgan kuchning miqdori va yo'nalishini o'zgartirmasdan jismning kuch ta'sir chizig'ida yotuvchi ixtiyoriy nuqtasiga ko'chirganda kuchning jismga ko'rsatadigan ta'siri o'zgarmaydi.

Isbot. Qattiq jismning biror A nuqtasiga \vec{F}_1 kuch qo'yilgan bo'lsin. Jismning kuch ta'sir chizig'ida yotgan ixtiyoriy B nuqtasiga shunday (\vec{F}_2, \vec{F}_2') sistemani qo'yapmizki, bunda $F_1 = F_2 = F_2'$ va $\vec{F}_1 \uparrow \vec{F}_2, \vec{F}_1 \uparrow \downarrow \vec{F}_2'$ bo'lsin (3-shakl).

2-aksiomaga asosan $\vec{F}_1 \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_2')$, birinchi aksiomaga asosan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$.



3-shakl.

Natijada

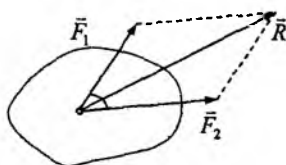
$$\vec{F}_1 \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_2') \sim \vec{F}_2'$$

3-aksioma. Ikkita nolga ekvivalent kuchlar sistemasi o'zaro ekvivalent bo'ladi, ya'ni

$$\begin{aligned} & (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0, (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m) \sim 0 \Rightarrow \\ \text{ya'ni} & (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m) \end{aligned}$$

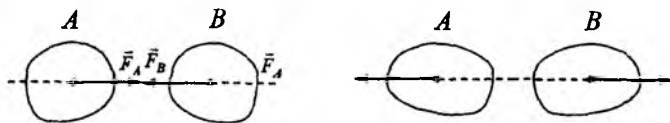
4-aksioma (Parallelogramm aksiomasi). Qattiq jismning bitta nuqtasiga qo'yilgan ikkita parallel bo'lmagan kuchlar teng ta'sir etuvchisining moduli bu kuchlarga qurilgan parallelogramm diagonaliga teng hamda shu diagonal bo'ylab yo'nalgan bo'ladi (4-shakl):

$$\begin{aligned} & (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R}, \quad \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}, \\ & \sin(\vec{R}, \wedge \vec{F}_1) = \frac{F_2 \sin(\vec{F}_1, \wedge \vec{F}_2)}{R}, \quad \sin(\vec{R}, \wedge \vec{F}_2) = \frac{F_1 \sin(\vec{F}_1, \wedge \vec{F}_2)}{R} \end{aligned}$$



4-shakl.

5-aksioma (Ta'sir va aksta'sir prinsipi). Ikki qattiq jismning o'zaro ta'siri miqdor jihatidan teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi (5-shakl).



5-shakl.

6-aksioma (Qotish prinsipi). Qattiq bo'lmagan jism kuchlar sistemasi ta'siridan muvozanatda bo'lsa, jism qattiq holatga o'tganda ham uning muvozanati buzilmaydi.

Bog'lanish aksiomasi. Erksiz qattiq jismga qo'yilgan bog'lanishlar ta'sirini bog'lanish reaksiyalari bilan almashtirib, jismni berilgan aktiv kuchlar va bog'lanish reaksiyalari ta'siridagi erkin qattiq jism deb qarash mumkin.

Asosiy birliklar sistemasi. Mexanik miqdorlarning o'lchovi uchun uchta asosiy birlikni kiritish yetarli. Bulardan ikkitasi uzunlik va vaqt birliklari bo'lsa, uchinchi o'lchov birligi sifatida massa yoki kuchning o'lchov birligi tanlanadi. Kuch va massa o'zaro dinamikaning asosiy tenglamasi

$$kuch = massa \times tezlanish$$

bilan bog'langanligi uchun ulardan bittasini tanlash yetarli. Shuning uchun ham ikkita asosiy o'lchov birliklar sistemasini kiritish mumkin.

a) Birinchi xil o'lchov birliklar sistemasi. Bu sistemada asosiy o'lchov birliklar: masofa, vaqt va massa; kuch hosilaviy birlik hisoblanadi. Bunday birliklar sistemasiga fizik miqdorlarning xalqaro o'lchov birliklar sistemasi (SI) kiradi. Bunga asosan mexanik miqdorlarning o'lchov birliklari: metr, kilogramm, massa va sekund.

SI sistemasida kuchning o'lchov birligi sifatida 1 kg massaga $1\text{ m}/\text{sek}^2$ tezlanish beruvchi kuch miqdori qabul qilingan. Kuchning bu o'lchov birligiga nyuton deyiladi:

$$1\text{N} = 1\text{kg} \cdot 1\text{m}/\text{sek}^2 = 1\text{kg m}/\text{sek}^2.$$

Birinchi xil o'lchov birliklar sistemasiga fizikada keng qo'llaniladigan SGS sistemasi ham kiradi. Bu sistemaning asosiy o'lchov birliklari: santimetr, gramm massa va sekund. Kuch birligi dina. $1\text{dina} = 10^{-5}\text{N}$.

b) Ikkinchi xil o'lchov birliklar sistemasi. Asosiy o'lchov birliklar: masofa, vaqt va kuch. Bu sistemaga texnikada keng tarqalgan texnik o'lchov birliklar sistemasi MKGS kiradi. Bunda asosiy birliklar: metr, kilogramm kuch va sekund. Massaning o'lchov birligi

$$1 \frac{\text{kg sek}^2}{\text{m}}.$$

SI va MKGS o'lchov birliklar sistemalarida kuchning o'lchov birliklari quyidagicha bog'langan:

$$1 \text{ kg kuch} \approx 9,81 \text{ N yoki } 1 \text{ N} \cdot 0,102 \text{ kg kuch}.$$

1.2. Bog'lanish va bog'lanish reaksiyalari

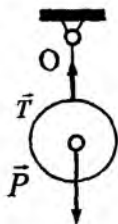
Agar sistemaning har bir nuqtasi fazoda ixtiyoriy holatni egallay olsa va ixtiyoriy tezlikka erisha olsa, bunday sistemaga **erkin sistema**, aks holda **erksiz sistema** deyiladi. **Sistema holati va harakatiga chek qo'yuvchi sabablarga bog'lanishlar**. Agar bog'lanish sistema nuqtalarining faqat holatigagina chek qo'ysa, bunday bog'lanishga geometrik bog'lanish, holati hamda tezliklariga chek qo'yganda esa bunday bog'lanishga kinematik bog'lanish deyiladi.

Bog'lanishlar ichki va tashqi bog'lanishlarga bo'linadi. Agar bog'lanish butun bir sistemaning ko'chishiga chek qo'ymasdan, uning ayrim nuqtalarining nisbiy harakatiga chek qo'ysa, bunday bog'lanishga **ichki bog'lanish**, butun sistema ko'chishiga chek qo'ysa, **tashqi bog'lanish** deyiladi.

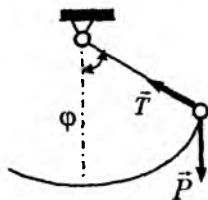
Bog'lanishning jismga ko'rsatadigan ta'sirini belgilovchi kuchga **bog'lanish reaksiyasi** deyiladi. Bog'lanishdagi jismning harakati qaysi tomondan cheklangan bo'lsa, reaksiya kuchi shu yo'nalishga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi.

Jismlar asosan tayanchlar, iplar, zanjirlar yoki trosslar va sterjenlar vositasida bog'langan bo'ladi. Bog'lanish reaksiyalarining aniqlash masalasi statikaning asosiy masalalaridan biri hisoblanadi. Umumiy holda masalani yechmasdan turib, bog'lanish reaksiyasini aniqlab bo'lmaydi. Lekin ayrim hollarda masalani yechmasdan, reaksiya kuchlarining yo'nalishini aniqlash mumkin. Masalan, \bar{P} og'irlikdagi qattiq jism cho'zilmaydigan ip yordamida qo'zg'almas O nuqtaga osib qo'yilgan bo'lsa, ip bog'lanish vazifasini o'taydi. Bu holda bog'lanish reaksiyasi \bar{T} ip bo'ylab O nuqtaga qarab

yoʻnalgan boʻladi (6-shakl). Shu holda ogʻir jism tebranma harakatda boʻlsa, ipning reaksiya kuchi ip boʻylab yoʻnalgan boʻladi, uning son qiymati nafaqat \bar{P} ga balki, burilish burchagi φ va burchak tezligi $d\varphi/dt$ larga ham bogʻliq, yaʼni jismning harakatiga bogʻliq boʻladi (7-shakl).

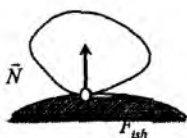


6-shakl.

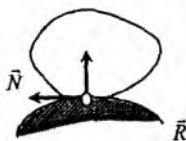


7-shakl.

Jism qoʻzgʻalmas silliq sirtga tayangan boʻlsin. Bu holda sirtning reaksiya kuchi jism bilan sirtning urinish nuqtasiga qoʻyilgan boʻlib, sirtning shu nuqtadagi normali boʻylab yoʻnalgan boʻladi (8-shakl). Bu kuchga **normal reaksiya kuchi** deyiladi. Bogʻlanish reaksiyasining miqdori tashqi kuchga va jismning harakatiga bogʻliq boʻladi.



8-shakl.



9-shakl.

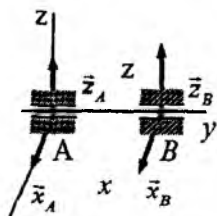


10-shakl.

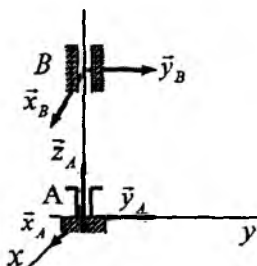
Agar sirt va jism silliq boʻlmasa, bogʻlanish reaksiyasi ularning urinish nuqtasiga qoʻyilgan boʻlib, yoʻnalishi va miqdorini masalani yechmasdan aniqlab boʻlmaydi. Bu holda bogʻlanish reaksiyasining miqdori va yoʻnalishi jism hamda sirtlarning fizik xossalariga, tashqi kuchlarga va jism harakatiga bogʻliq boʻladi. Sirtning reaksiyasi bu holda sirtning normali boʻylab yoʻnalgan normal reaksiyaga va urinma tekislikda yotuvchi urinma reaksiya kuchlariga ajraladi (9-shakl). Urinma reaksiya kuchiga **ishqalanish kuchi** deyiladi.

Agar bog‘lanish bitta qo‘zg‘almas O nuqtadan tashkil topgan bo‘lsa, bog‘lanish reaksiyasi shu O nuqtaga qo‘yilib, yo‘nalishi va miqdori ixtiyoriy bo‘lishi mumkin (10-shakl). Bu holda ham bog‘lanish reaksiyasining miqdori va yo‘nalishi jismga qo‘yilgan tashqi kuchlarga hamda jismning holatiga va harakatiga bog‘liq bo‘ladi.

Agar bog‘lanish jismning harakatini bitta tekislikda yotgan o‘zaro perpendikular ikkita yo‘nalish bo‘yicha cheklasa, bunday bog‘lanishga texnikada **silindrik bog‘lanish** (podshipniklar) deyiladi. Masala yechilayotgan vaqtda bunday bog‘lanish reaksiyasini koordinata o‘qlari bo‘ylab yo‘nalgan ikkita o‘zaro perpendikular tuzuvchilarga ajratish qulay bo‘ladi (11-shakl).



11-shakl.



12-shakl.

Agar jism bitta qo‘zg‘almas nuqtaga ega bo‘lsa, ya‘ni bitta nuqtasi bilan bog‘langan bo‘lsa, bunday bog‘lanishga **sferik bog‘lanish** deyiladi. Bu holda bog‘lanish reaksiyasini koordinata o‘qlari bo‘ylab yo‘nalgan o‘zaro perpendikular uchta tuzuvchiga ajratish qulay (12-shakl).

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Mexanikaning asosiy tushunchalari nimalar?
2. Kuchlar sistemasi deganda nimani tushunasiz?
3. Qanday kuchlar sistemasiga muvozanatlashgan kuchlar sistemasi deyiladi?
4. Ekvivalent kuchlar sistemasi deganda nimani tushinasiz?
5. Bog‘lanishlar deganda nimani tushunasiz?
6. Bog‘lanish aksiomasini ta‘riflab, tushuntiring.

1.3. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi

Kuch, kuchlar sistemasi, teng ta'sir etuvchi kuch, kuch ko'pburchagi.

1.3.1. Kuchlar sistemasini bitta teng ta'sir etuvchiga keltirish

Ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasiga bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi deyiladi.

Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini topamiz. Qattiq jismga ta'sir etuvchi bir nuqtada kesishuvchi $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasi berilgan bo'lsin.

Avval parallelogramm aksiomasidan foydalanib berilgan kuchlar sistemasining birinchi ikkitasining teng ta'sir etuvchisini topamiz. Teng ta'sir etuvchining moduli

$$\vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad R_{12} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\vec{F}_1, \wedge \vec{F}_2)}$$

ga teng, yo'nalishi esa quyidagi munosabatlardan topiladi:

$$\frac{F_2}{\sin(\vec{F}_1, \wedge \vec{R}_{12})} = \frac{F_1}{\sin(\vec{F}_2, \wedge \vec{R}_{12})} = \frac{R_{12}}{\sin(\vec{F}_1, \wedge \vec{F}_2)}.$$

Endi \vec{R}_{12} kuch bilan \vec{F}_3 kuchni yoki $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisini topamiz:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R}_{12},$$

bunda

$$\vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2;$$

Shunga o'xshash

$$(\vec{R}_{12}, \vec{F}_3) \sim \vec{R}_{123},$$

bunda

$$\vec{R}_{123} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,$$

va hokazo.

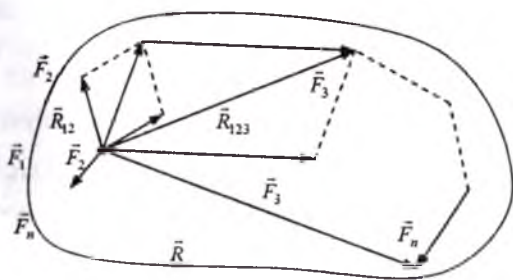
$$(\bar{R}_{123\dots(n-1)}, \bar{F}_n) \sim \bar{R}$$

bunda

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad (1.3.1)$$

Shunday qilib, bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi bitta kuchga ekvivalent, ya'ni teng ta'sir etuvchiga ega. Bu teng ta'sir etuvchi berilgan sistemasi kuchlarining geometrik yig'indisiga teng.

Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini kuch ko'pburchagini qurish usuli bilan ham topish mumkin. Buning uchun \bar{F}_1 kuchni kuchlar sistemasining markazi deb olib, \bar{F}_2 kuchni o'z-o'ziga parallel ravishda shunday ko'chiramizki, \bar{F}_2 kuchning boshi \bar{F}_1 kuchning oxiri bilan ustma-ust tushsin. Xuddi shunday \bar{F}_3 kuchni o'z-o'ziga parallel ravishda ko'chiramiz, natijada \bar{F}_3 kuchning boshi \bar{F}_2 kuchning oxiri bilan ustma-ust tushsin va hokazo, shu ishni davom ettirib, oxiri \bar{F}_n kuchni ko'chirganimizda bu kuchning boshi \bar{F}_{n-1} kuchning oxiri bilan ustma-ust tushsin. Kuchlar sistemasi markazidan chiqib \bar{F}_n kuchning oxirini tutashtiruvchi \bar{R} kuch berilgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi bo'ladi. Shunday usul bilan qurilgan ko'pburchakka **kuch ko'pburchagi** deyiladi (13-shakl).



13-shakl.

Kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining moduli va yo'nalishini analitik usul bilan ham topish mumkin.

Geometriya kursidan malumki, vektorlar yig'indisining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari berilgan vektorlarning mos o'qlardagi proeksiyalari yig'indisiga teng, ya'ni

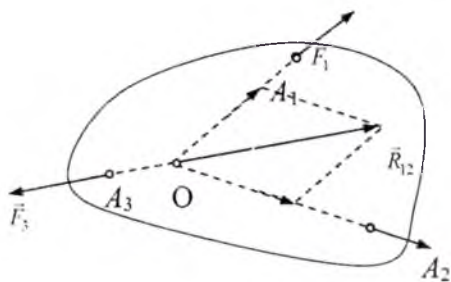
$$R_x \equiv \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y \equiv \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad R_z \equiv \sum_{i=1}^n F_{iz}.$$

Teng ta'sir etuvchining moduli va yo'nalishi quyidagicha topiladi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\cos(\vec{R}, \hat{x}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \hat{y}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \hat{z}) = \frac{R_z}{R}.$$

Uch kuch haqidagi teorema. Bir tekislikda yotgan uchta kuchlar sistemasi muvo-zanatda bo'lsa, ularning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi.



14-shakl.

Isbot. Bir tekislikda yotgan uchta $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ kuch muvozanatda bo'lsin. Berilgan \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarni ta'sir chiziqlari bo'ylab kesishish nuqtasiga ko'chirib, ularni parallelogram qoidasiga ko'ra qo'shamiz, natijada

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim (\vec{R}_{12}, \vec{F}_3) \sim 0$$

ga kelamiz, bunda

$$\vec{R}_{12} \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2)$$

va aytilganidek, \vec{R}_{12}, \vec{F}_3 kuchlar muvozanatlashgan kuchlar sistemasini hosil qiladi. 1-aksiomaga asosan bu ikki kuch bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan va demak \vec{F}_3 kuchining ta'sir chizig'i ham O nuqtadan o'tadi.

1.3.2. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Teorema. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun berilgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli, yani

$$\vec{R} \equiv \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (1.3.2)$$

To'g'ri burchakli Oxyz dekart koordinatalar sistemasini tanlab, (1.3.2) tenglamani koordinata o'qlariga proyeksialaymiz, natijada uchta skalar tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, ya'ni

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (1.3.3)$$

Muvozanatdagi qattiq jism erkin bo'lmasa, bog'lanishlar aksiomasidan foydalanib, bog'lanishlarning jismga ko'rsatadigan ta'sirini ularning reaksiya kuchi bilan almashtiramiz. Natijada avval ham aytilganidek, bunday jismni berilgan kuchlar va bog'lanish reaksiya kuchlari ta'siridagi erkin jism deb qarash mumkin.

(1.3.3) tenglamalardan foydalanib, kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini quy-idagicha ifodalash ham mumkin: bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun berilgan kuchlarning mos koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Agar qattiq jismga qo'yilgan kuchlar sistemasi bir tekislikda joylashgan bo'lsa, koordinata o'qlaridan bittasini, masalan, z o'qini

kuchlar tekisligiga perpendikular qilib olish kerak. U holda (1.3.3) tenglamalarning uchinchisi aynan nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$R_z \equiv \sum_{i=1}^n F_{iz} \equiv 0.$$

Natijada quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$R_x \equiv \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad R_y \equiv \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (1.3.4)$$

(1.3.4) tenglamalar sistemasi bir tekislikda joylashgan va bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini ifodalaydi.

1.4. Tekislikda kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar

Tekislikda kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi.

1. Muvozanati tekshirilayotgan qattiq jismni ajratib, unga ta'sir etuvchi aktiv kuchlar shaklda tasvirlab olinishi kerak.

2. Qaralayotgan qattiq jism erkin bo'lmasa bog'lanish aksiomasidan foydalanib, unga qo'yilgan bog'lanish reaksiyalarini ham tasvirlab olish zarur (albatta, bog'lanish turiga e'tibor berish talab etiladi).

3. Masalani geometrik usulda yechish uchun qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasiga mos kuch ko'pburchagi yasalib, keyin bu ko'pburchakdan noma'lum miqdor topiladi.

4. Masalani analitik usulda yechish uchun mos koordinatalar sistemasini tanlash kerak (ko'p hollarda koordinatalar sistemasining boshi sifatida kuch markazi olinadi).

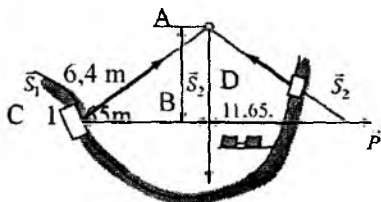
5. Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan (1.3.4) tenglamalar sistemasi tuziladi.

6. Tuzilgan tenglamalar sistemasi birgalikda yechilib, izlanayotgan noma'lum miqdorlar topiladi.

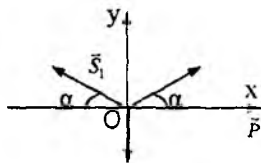
Mazkur uslubiy tavsiyalar asosida quyida mavzuga doir ayrim masalalarni yechib ko'rsatamiz.

1.4.1-masala (И.В.Мещерский 2.12.). Tog'larda qurilgan temir yo'lda, yo'lning dara ichidagi bir qismi shaklda ko'rsatilgandek osilgan. AB osmaga $P = 500kN$ kuch ta'sir qiladi, deb hisoblab, AC va AD sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin (15-shakl).

Yechish. Masalani avval analitik usul bilan yechamiz. Buning uchun tegishli koordinatalar sistemasini tanlaymiz. Koordinatalar sistemasining boshi sifatida A nuqtani olamiz (16-shakl).



15-shakl.



16-shakl.

(1.3.3) muvozanat tenglamalarini tuzamiz

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = S_1 \cos \alpha - S_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = S_1 \sin \alpha + S_2 \sin \alpha - P = 0. \quad (a)$$

$\sin \alpha$ va $\cos \alpha$ larni topamiz:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6,4}{11,65} \approx 0,549; \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = 0,47$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \approx 0,88$$

Topilganlarni (a) tenglamalarga qo'yamiz:

$$\begin{cases} S_1 = S_2, \\ 0,48S_1 + 0,48S_1 = P. \end{cases}$$

Bulardan $S_1 = S_2 = 532kN$.

Javob. AC va AD sterjenlarning har biri $532kN$ ga teng kuch bilan siqilar ekan.

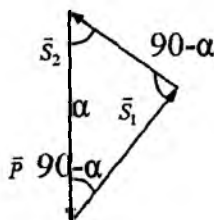
Endi masalani kuch uchburchagidan foydalanib yechaylik. Kuchlarning o'z-o'ziga parallel ko'chirib, uchburchak yasaymiz (17-shakl).

Sinuslar teoremasiga asosan

$$\frac{P}{\sin 2\alpha} = \frac{S_1}{\cos \alpha} = \frac{S_2}{\cos \alpha}.$$

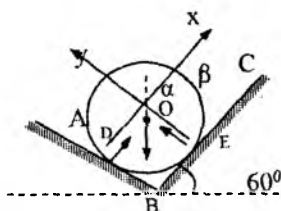
Bundan

$$S_1 = S_2 = \frac{P}{\sin \alpha} \approx 532kN.$$

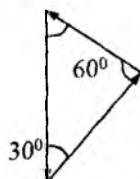


19-shakl.

1.4.2-masala (Мешчерский 2.18.). Bir-biriga tik bo'lgan ikkita silliq AB va BC og'ma tekisliklarda og'irligi $60N$ bo'lgan bir jinsli shar turibdi. BC tekislik bilan gorizontal tekislik orasidagi burchak 60° . Sharning har qaysi tekislikka ko'rsatadigan bosimi aniqlansin (18-shakl).



18-shakl.



19-shakl.

Yechish. Koordinatalar sistemasi boshini shar markazi O nuqtada olib, koordinata o'qlarini shaklda ko'rsatilganday yo'naltiramiz. (1.3.3) muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = N_D - P \cos \beta = 0, \quad \sum_{i=1}^3 F_{iy} = N_E - P \cos \alpha = 0. \quad (a)$$

Shaklga asosan: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$. (a) tenglamalardan

$$N_D = P \cos 30^\circ = 60\text{N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 52\text{N},$$

$$N_E = P \cos 60^\circ = 60\text{N} \cdot \frac{1}{2} = 30\text{N}.$$

Endi masalani geometrik usul bilan yechamiz. Kuchlarni o'z-o'ziga parallel ravishda ko'chirib, kuch uchburchagini tuzsak (19-shakl), bu uchburchakdan

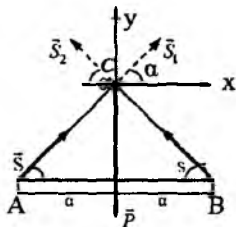
$$\frac{N_E}{\sin 30^\circ} = \frac{P}{\sin 90^\circ} = \frac{N_D}{\sin 60^\circ}.$$

Shunday qilib,

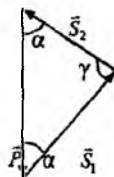
$$N_E = P \cdot \sin 30^\circ = 60\text{N} \cdot \frac{1}{2} = 30\text{N},$$

$$N_D = P \cdot \sin 60^\circ = 60\text{N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 52\text{N}.$$

1.4.3-masala (Мешчерский 2.25). Og'irligi 160N , uzunligi $1,2\text{ m}$ bo'lgan bir jinsli AB sterjen ikkita AC va CB sim arqonlar bilan C nuqtaga osib qo'yilgan. Ikkala sim arqonning uzunligi 1 m dan. Sim arqonlardagi taranglik kuchlari aniqlansin (20-shakl).



20-shakl.



21-shakl.

Berilgan: $P=160\text{N}$, $AB=1,2\text{m}$, $AC=BC=1\text{m}$.

Topish kerak: S_1 , S_2 .

Yechish. Koordinatalar sisemasini shaklda ko'rsatilgandek qilib tanlaymiz. Tanlagan Cxy koordinatalar sistemasiga nisbatan (1.4.3) muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = S_1 \cos \alpha - S_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = S_1 \sin \alpha + S_2 \sin \alpha - P = 0. \quad (\text{a})$$

Shakldan $\cos \alpha = \frac{AB/2}{AC} = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

(a) tenglamalardan

$$\begin{cases} S_1 = S_2, \\ \frac{4}{5}S_1 + \frac{4}{5}S_1 = P, \end{cases} \Rightarrow S_1 \frac{5}{8}P = \frac{5}{8}160\text{N} = 100\text{N}.$$

Endi masalani kuch uchburchagidan foydalanib yechamiz (21-shakl):

$$\frac{S_1}{\sin \alpha} = \frac{S_2}{\sin \alpha} = \frac{P}{\sin \gamma}, \quad \gamma = 180^\circ - 2\alpha,$$

$$\sin \gamma = \sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}.$$

$$\text{Natijada } S_1 = S_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} P = \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{24} \cdot 160\text{N} = \frac{5}{6} \cdot 160\text{N} = 100\text{N}.$$

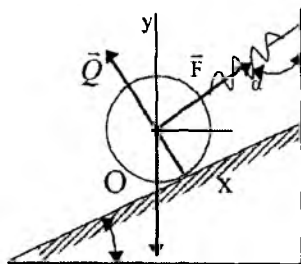
1.4.4-masala (И.В.Мещерский 2.20). Og'irligi 20N bo'lgan bir jinsli shar silliq og'ma tekislik ustida sim arqon yordamida ushlab turiladi. Bu sim arqon tekislikdan yuqoriroqda mahkamlangan prujinali taroziga bog'langan. Prujinali tarozining ko'rsatishi 10N ga teng. Gorizont bilan tekislik orasidagi burchak 30° . Vertikal bilan sim arqon orasidagi α burchak va sharning tekislikka ko'rsatadigan bosimi aniqlansin. Prujinali tarozining og'irligi hisobga olinmasin.

Berilgan: $P = 20\text{N}$, $F = 10\text{N}$, 30° .

Topish kerak: α , Q .

Yechish. Avval ta'sir etuvchi kuchlarni shaklda tasvirlab olamiz.

Koordinatalar sistemasini shaklda ko'rsatilganidek qilib tanlaymiz. Koordinatalar sistemasining boshi sifatida kuchlarning ta'sir chiziqlari kesishish nuqtasini olish qulay.



22-shakl.

Muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = F \cos(90^\circ - \alpha) - Q \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = F \cos \alpha + Q \cos 30^\circ - P = 0.$$

Bundan

$$\begin{cases} F \sin \alpha - \frac{1}{2}Q = 0; \\ F \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}Q = P, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q = 2F \sin \alpha; \\ Q = \frac{2(P - F \cos \alpha)}{\sqrt{3}}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2F \sin \alpha = \frac{2(P - F \cos \alpha)}{\sqrt{3}};$$

$$\sqrt{3}F \sin \alpha + F \cos \alpha = P; \quad 2F \sin(\alpha + \varphi) = P; \quad \varphi = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ;$$

$$\sin(\alpha + 30^\circ) = \frac{P}{2F} = \frac{20}{2 \cdot 10} = 1; \quad \alpha + 30^\circ = 90^\circ, \quad \alpha = 60^\circ.$$

Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$Q = 2F \sin 60^\circ = 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10 \cdot 1,73\text{N} = 17,3\text{N}.$$

Javob. $\alpha = 60^\circ$; $Q = 17,3\text{N}$.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. $\vec{F}_1 = 3\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{F}_2 = \vec{i} - 2\vec{j}$ kuchlar teng ta'sir etuvchisining moduli va yo'nalishi topilsin.

2. Gorizontaal tekislik ustida turgan sharning tekislikka ko'rsatadigan bosimi topilsin. Sharning og'irligi P ga teng bo'lib, uning markaziga qo'yilgan.

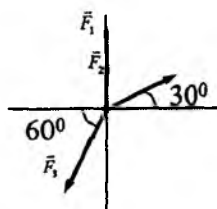
3. Og'irligi P ga teng bo'lgan yuk bir xil uzunlikdagi ikkita cho'zilmaydigan arqonga osilgan holatda muvozanatda turadi. Arqonlar o'zaro 60° li burchak tashkil qiladi. Arqonlarning tortilish kuchlari topilsin.

4. $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ kuch vektori bilan Oy koordinata o'qi orasidagi burchak kosinusi topilsin.

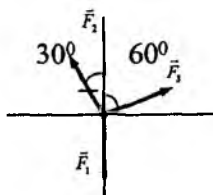
5. Uchta kesishuvchi kuch proyeksiyalari bilan berilgan:

$$F_{1x} = 10\text{N}; \quad F_{1y} = 2\text{N}; \quad F_{2x} = -4\text{N}; \quad F_{2y} = 3\text{N}; \quad F_{3x} = -6\text{N}; \\ F_{3y} = -5\text{N} \quad \text{Kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladimi?}$$

6. Shaklda tasvirlangan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi topilsin; $F_1 = F_3 = 3\text{N}$, $F_2 = \sqrt{3}$.



6-masala.

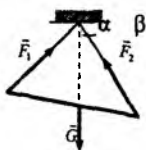


7-masala.

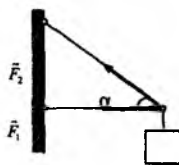
7. Shaklda tasvirlangan kuchlar sistemasi muvozanatlashgan kuchlar sistemasini hosil qiladi. $F_2 = 15\text{N}$ bo'lsa, \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarining modullari topilsin.

8. Iplarning tortilish kuchlari $F_1 = 120\text{N}$, $F_2 = 80\text{N}$ va burchaklar $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$ bo'lsa, AB balkaning G og'irligi topilsin.

9. Yuk A , B va C nuqtalarda sharnirlar vositasida biriktirilgan AC va BC sterjenlarda ushlab turiladi. BC sterjenning tortilish kuchi $F_2 = 45N$ va $\alpha = 60^\circ$ bo'lsa, AC sterjenlarning siqilish kuchi va yukning og'irlik kuchi topilsin.

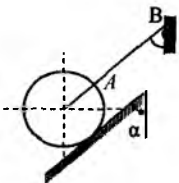


8-masala.

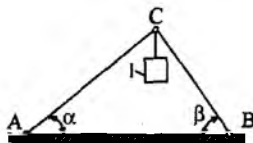


9-masala.

10. Og'irligi $12N$ bo'lgan bir jinsli shar arqon yordamida silliq og'ma tekislikda muvozanatda ushlab turiladi. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ bo'lsa, sharning tekislikka ko'rsatadigan bosimi topilsin.



10-masala.



11-masala.

11. Og'irligi e'tiborga olinmaydigan AC va BC sterjenlar o'zaro va gorizontal tekislikka sharnirlar vositasida biriktirilgan. C sharnirga 1 yuk osilgan. AC sterjenning zo'riqishi $45N$ va $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ bo'lsa, BC sterjen reaksiyasi topilsin.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Qanday kuchlar sistemasiga bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi deyiladi?
2. Qanday ko'pburchakka kuch ko'pburchagi deyiladi?
3. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir e'tuvchisi qanday topiladi?
4. Kuch ko'pburchagida teng ta'sir e'tuvchi qanday tasvirlanadi?
5. Kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi qanday hisoblanadi?
6. Teng ta'sir etuvchining proyeksiyalari qanday hisoblanadi?

1.5. Markazga va o'qqa nisbatan kuch hamda kuchlar sistemasining momenti

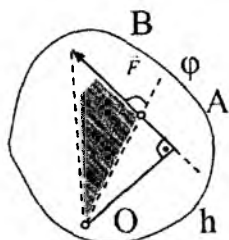
Kuch, skalar va vektor, kuchning nuqtaga va o'qqa nisbatan momenti.

1.5.1. Kuchning nuqtaga nisbatan algebraik momenti. Bir tekislikda yotadigan kuchlar sistemasi qaralganda kuchning nuqtaga nisbatan momenti tushunchasidan foydalaniladi

Kuchning nuqtaga nisbatan algebraik momenti deb kuch modulini kuch yelkasiga ko'paytmasining (+) yoki (-) ishorasi bilan olinganiga aytiladi va quyidagicha yozialdi:

$$mom_0(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) = \pm Fh . \quad (1.5.1)$$

Biror O nuqtadan kuch ta'sir chizig'igacha bo'lgan eng qisqa h masofaga kuch yelkasi (25-shakl), O nuqtaga esa kuch markazi deyiladi.



25-shakl.

Agar kuch jismni O markaz atrofida soat mili harakati yo'nalishiga teskari yo'nalishida aylantirishga intilsa (+) ishora, soat mili harakati yo'nalishida aylantirishga intilsa (-) ishora olinadi. Kuchning ta'sir chizig'i kuch markazidan o'tsa, kuchning bu markazga nisbatan algebraik momenti nolga teng. (1.5.1) formulaga asosan kuchning nuqtaga nisbatan algebraik momentining son qiymati kuch vektori va O markazga qurilgan uchburchak yuzining ikki baravariga teng, ya'ni

$$\left| M_0(\vec{F}) \right| = 2S_{OAB} . \quad (1.5.2)$$

1.5.2. Kuchning nuqtaga nisbatan moment vektori

Fazoviy kuchlar sistemasi qaralganda kuchning nuqtaga nisbatan vektorli momenti tushunchasidan foydalaniladi.

Kuchning O markazga nisbatan momenti deb shunday vektorga aytiladiki, bu vektor O nuqtaga qo'yilgan bo'lib, uning moduli

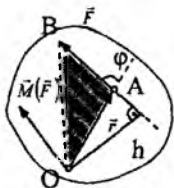
kuch vektori va O nuqtaga qurilgan uchburchak yuzining ikki baravariga teng, yo'nalishi esa kuch vektori va O nuqta orqali o'tuvchi tekislikka perpendikular bo'lib, moment vektori uchidan qaralganda kuch jismni soat mili yo'nalishiga teskari yo'nalishda aylantirsa musbat, aks holda manfiy bo'ladi. Kuchning O nuqtaga nisbatan moment vektorini $\overline{mom}_0(\vec{F})$ yoki $\vec{M}_0(\vec{F})$ deb belgilaymiz. Moment vektorining ta'rifi asosan

$$\overline{mom}_0(\vec{F}) = \vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} . \quad (1.5.3)$$

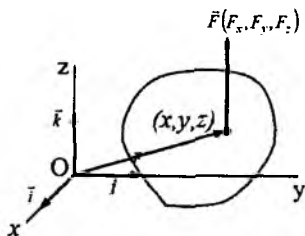
Haqiqatan ham, 26-shaklga asosan:

$$|\vec{M}_0(\vec{F})| = |\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin \varphi = Fh = 2S_{OAB} ,$$

bunda $h = r \sin \varphi$. (1.5.3) formuladagi \vec{r} - kuch qo'yilgan nuqtaning O nuqtaga nisbatan radius-vektori. $\vec{r} \times \vec{F}$ vektorining yo'nalishi va vektorlar tekisligiga perpendikular. Demak, moment vektorini (1.5.3) ko'rishda yozish mumkin. Kuchni ta'sir chizig'i bo'ylab ko'chirilganda uning nuqtaga nisbatan momenti o'zgarmaydi.



26-shakl.



27-shakl.

Kuchning ta'sir chizig'i kuch markazidan o'tsa, uning o'sha markazga nisbatan moment vektori nolga teng bo'ladi.

Agar to'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasida \vec{F} kuch o'zining F_x, F_y, F_z proyeksiyalari va kuch qo'yilgan nuqta (x, y, z) koordinatalari bilan berilgan bo'lsa (27-shakl), (1.5.3) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}, \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

bunda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -lar koordinata o'qlarining birlik vektorlari.

(1.5.4) munosabatlardan foydalanib, $\vec{M}(\vec{F})$ moment vektorining proyeksiyalari uchun

$$\left. \begin{aligned} M_{0x}(\vec{F}) &= yF_z - zF_y, \\ M_{0y}(\vec{F}) &= zF_x - xF_z, \\ M_{0z}(\vec{F}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \right\} \quad (1.5.5)$$

formulalarni yozish mumkin.

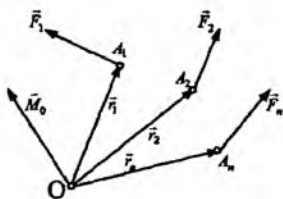
Moment vektorining moduli va yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagicha topiladi:

$$\begin{aligned} |\vec{M}_0(\vec{F})| &= \sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}; \\ \cos(\vec{M}_0 \wedge X) &= \frac{M_x(\vec{F})}{|\vec{M}_0(\vec{F})|}, \quad \cos(\vec{M}_0 \wedge Y) = \frac{M_y(\vec{F})}{|\vec{M}_0(\vec{F})|}, \\ \cos(\vec{M}_0 \wedge Z) &= \frac{M_z(\vec{F})}{|\vec{M}_0(\vec{F})|}. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

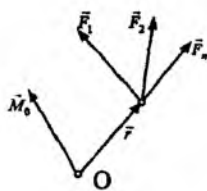
1.5.3. Kuchlar sistemasining markazga nisbatan momenti

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasi berilgan bo'lsin (28-shakl). O markazga nisbatan bu sistema kuchlarining moment vektorlari yig'indisini \vec{M}_0 deb belgilaymiz, ya'ni

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \overline{mom}_0(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i). \quad (1.5.7)$$



28-shakl.



29-shakl.

\vec{M}_0 vektorga kuchlar sistemasining O markazga nisbatan bosh momenti deyiladi. Agar hamma kuchlar bitta nuqtaga qo'yilgan bo'lsa, u holda

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{r} \times \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.5.8)$$

Demak, bir nuqtaga qo'yilgan kuchlar yig'indisining biror O nuqtaga nisbatan momenti kuchlarning o'sha nuqtaga nisbatan momentlari yig'indisiga teng (Varinon teoremasi).

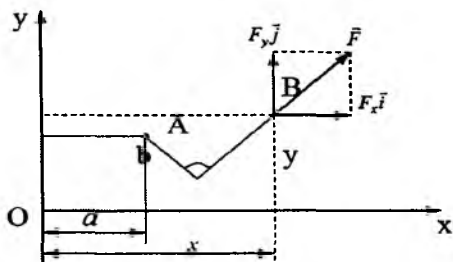
Kuchning A nuqtaga nisbatan algebraik momentini analitik tarzda quyidagicha ham ifodalash mumkin (30-shakl):

$$M_A(\vec{F}) = (x-a)F_y - (y-b)F_x, \quad (1.5.9)$$

bunda x va y kuch qo'yilgan nuqtaning dekart koordinatalari, a va b A nuqtaning koordinatalari, F_x va F_y esa kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari (30-shakl). Xususiyl holda \vec{F} kuchining momenti koordinatalar boshiga nisbatan hisoblansa, (1.5.9) quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$M_0(\vec{F}) = xF_y - yF_x. \quad (1.5.10)$$

Endi bitta qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan qattiq jismning muvozanati haqidagi masalani qaraymiz. Agar bunday qattiq jism muvozanatda bo'lsa, qo'zg'almas nuqtaning reaksiya kuchi jismga qo'yilgan aktiv kuchlarning teng ta'sir etuvchisi bilan muvozanatda bo'lishi kerak. Demak, aktiv kuchlarning teng ta'sir etuvchisining ta'sir chizig'i qo'zg'almas nuqtadan o'tishi kerak, aks holda jismning ag'darilishi yuz beradi.



30-shakl.

Agar moment markazi sifatida qattiq jismning qo'zg'almas nuqtasini olsak, reaksiya kuchining momenti nolga teng va demak, aktiv kuchlar teng ta'sir etuvchisining momenti ham nolga teng bo'ladi. Bu holda Varinon teoremasiga asosan aktiv kuchlarning qo'zg'almas nuqtaga nisbatan algebraik momentlari yig'indisi nolga teng, ya'ni

$$\sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i) = 0. \quad (1.5.11)$$

1.5.4. Kuchning o'qqa nisbatan momenti

Kuchning o'qqa nisbatan momenti deb kuchning o'q ustida olingan ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentining shu o'qdagi proyeksiyasiga aytiladi, ya'ni

$$mom_x(\vec{F}) = (\vec{r} \times \vec{F})_x. \quad (1.5.12)$$

\vec{F} kuchning x o'qi ustida olingan biror O nuqtaga nisbatan momentining shu o'qdagi proyeksiyasi O nuqtani tanlashga bog'liq emasligini ko'tsatamiz (31-shakl). Haqiqatan ham (1.5.12) tenglikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$mom_x(\vec{F}) = (\vec{r} \times \vec{F})_x = (\vec{r} \times \vec{F}) \vec{x}^0 = (\vec{x}^0 \times \vec{r}) \vec{F},$$

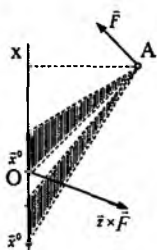
bunda \vec{x}^0 - x o'qining birlik vektori.

$\vec{x}^0 \times \vec{r}$ ifodaning son qiymati (31-shakl) asosi $|\vec{x}^0|$ va balandligi $r \sin(\vec{x}^0, \vec{r}) = d$ ga teng bo'lgan uchburchak yuzining ikki baravariga

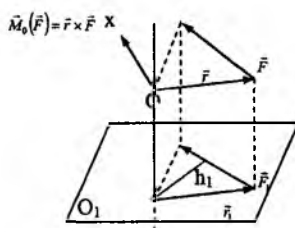
teng. Uchburchakning asosi ham balandligi ham o'zgarmas miqdorlar, demak $(\vec{r} \times \vec{F})_x$ miqdor O nuqtani tanlashga bog'liq emas.

Kuchning o'qqa nisbatan momenti ta'rifini boshqacha ko'rinishda ham ifodalash mumkin: kuchning o'qqa nisbatan momenti deb kuchning shu o'qqa perpendikular tekislikdagi proyeksiyasining o'q bilan tekislik kesishgan nuqtaga nisbatan algebraik momentiga aytiladi (32-shakl), ya'ni

$$mom_x(\vec{F}) = mom_{O_1}(\vec{F}) = \pm F_1 h_1 \quad (1.5.13)$$



31-shakl.



32-shakl.

(1.5.13) formuladagi (+) yoki (-) ishora quyidagicha tanlanadi: x o'qining musbat uchidan qaralganda \vec{F} kuch tekislikni soat mili harakatiga teskari yo'nalishda aylantirsa (+) ishora, aks holda (-) ishora olinadi. Agar \vec{F} kuchning ta'sir chizig'i x o'qini kesib o'tsa yoki parallel bo'lsa, kuchning shu o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'ladi.

Agar ixtiyoriy O nuqta sifatida $Oxyz$ koordinatalar sistemasining boshi tanlansa, kuchning o'qqa nisbatan momenti ta'rifiga hamda (1.5.5) ga asosan kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlari uchun quyidagi formulalarni yozish mumkin:

$$\left. \begin{aligned} mom_x(\vec{F}) &= (\vec{r} \times \vec{F})_x = yF_z - zF_y, \\ mom_y(\vec{F}) &= (\vec{r} \times \vec{F})_y = zF_x - xF_z, \\ mom_z(\vec{F}) &= (\vec{r} \times \vec{F})_z = xF_y - yF_x. \end{aligned} \right\} \quad (1.5.14)$$

1.6. Kuch va kuchlar sistemasining nuqtaga hamda o'qqa nisbatan momentini hisoblash tartibi

1. Berilganlardan foydalanib moment hisoblanadigan nuqtaga nisbatan kuch yelkasi topiladi.

2. (1.5.1) formuladan foydalanib kuchning algebraik momenti topiladi.

3. Kuchning o'qqa nisbatan momentini hisoblashda koordinata o'qlaridan birortasini moment hisoblanishi kerak bo'lgan o'q bilan ustma-ust tushirish va o'q ustidagi ixtiyoriy nuqta sifatida koordinatalar sistemasining boshi olinishi kerak.

4. Kuch qo'yilgan nuqtaning koordinatalari va kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari topiladi.

5. (1.5.14) formulalarni tegishlisidan foydalanib, kuchning o'qqa nisbatan momenti hisoblanadi.

Endi kuch va kuchlar sistemasining nuqtaga hamda o'qqa nisbatan momentini topishga doir masalalarni yechib ko'rsatamiz.

1.6.1. Kuchning va kuchlar sistemasining nuqtaga nisbatan momentiga doir masalalar

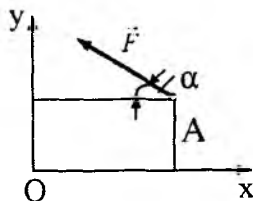
6.1-masala (O.Ə. Kene 2.1.3). $F = 420\text{N}$ kuch Oxy tekisligining A nuqtasiga qo'yilgan. $x_A = 0,2\text{m}$, $y_A = 0,3\text{m}$ va burchak $\alpha = 30^\circ$ bo'lsa, F kuchning O nuqtaga nisbatan momenti topilsin (33-shakl).

Berilgan: $F = 420\text{N}$,

$x_A = 0,2\text{m}$, $y_A = 0,3\text{m}$, $\alpha = 30^\circ$

Topish kerak: $M_0(\vec{F})$.

Yechish. \vec{F} kuchni O nuqtaga nisbatan momentini (1.5.10) formuladan foydalanib topamiz:



33-shakl.

$$M_0(\vec{F}) = x_A F_y - y_A F_x,$$

$$F_x = -F \cos \alpha = -F \cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} F,$$

$$F_y = -F \sin \alpha = F \sin 30^\circ = \frac{1}{2} F.$$

Natijada

$$M_0(\bar{F}) = 0,2m \frac{1}{2} F - 0,3m \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} F \right) = (0,1 + 0,26) m \cdot 420\text{N}.$$

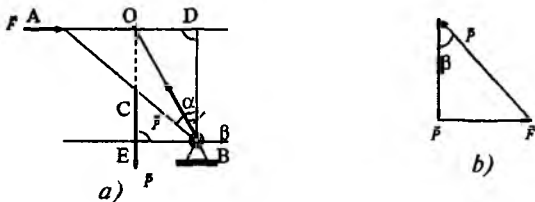
$$M_0(\bar{F}) = 151\text{Nm}.$$

6.2-masala (O.Ə. Kene 2.1.5). Og'irligi P ga teng bo'lgan **ingichka** bir jinsli AB sterjen polga mahkamlangan B sharnir atrofida aylana oladi. Sterjen muvozanatda qolishi uchun uning A uchiga qanday \bar{F} kuchni vertikalga nisbatan qaysi burchak ostida qo'yish kerak? (34a-shakl).

Yechish. AB sterjenning muvozanatini tekshiramiz. Sterjenga ikkita \bar{P} va \bar{F} aktiv kuchlar qo'yilgan. Bu kuchlarning ta'sir chiziqlari O nuqtada kesishadi. B sharnir reaksiyasi \bar{R} ning ta'sir chizig'i ham uch kuch haqidagi teoremaga asosan O nuqtadan o'tishi kerak. 34-a shaklga asosan $AC=CB$ va, demak, $AO=OD$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{BD} = \frac{2OD}{BD}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{OA}{BD} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

34-b shaklga asosan $F = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha$.



34-shakl.

Bu shart bajarilganda sterjen muvozanatda bo'ladi. $F > \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha$ shart bajarilsa, sterjen B sharnir atrofida soat mili harakati

yoʻnalishida, $F < \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha$ shart bajarilganda esa soat mili harakatiga qarama-qarshi yoʻnalishda aylanadi.

Masalani richagning (1.5.4) muvozanat shartidan foydalanib yechish ham mumkin. Bu shartni quyidagi koʻrinishda yozamiz:

$$M_B(\vec{P}) + M_B(\vec{F}) = 0. \quad (a)$$

$$M_B(\vec{P}) = P \cdot BE = \frac{1}{2} P \cdot AB \sin \alpha, \quad M_B(\vec{F}) = -F \cdot BD = -F \cdot AB \cos \alpha$$

Bularni (a) tenglamaga qoʻyamiz:

$$\frac{1}{2} P \cdot AB \sin \alpha - F \cdot AB \cos \alpha = 0.$$

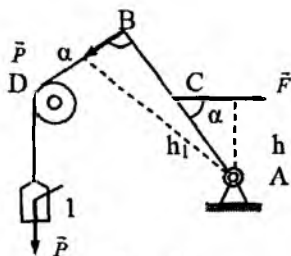
$$\text{Bundan } F = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

6.3-masala (O.Э. Кеңе 2.1.9). *A* sharnirga mahkamlangan *AB* sterjenda *D* shkiv orqali oʻtuvchi arqon yordamida *l* yuk ushlab turiladi. Agar burchak $\alpha = 60^\circ$ va yukning ogʻirligi 2N boʻlsa, sterjenni muvozanatda ushlab turish uchun \vec{F} kuchning miqdori qanday boʻlishi kerak (35-shakl)?

Berilgan: $\alpha = 60^\circ$, $P = 2\text{N}$, $AC = BC$.

Topish kerak. \vec{F} kuch miqdorini.

Yechish. Yukning ogʻirlik kuchi \vec{P} ni arqon boʻylab *B* nuqtaga koʻchiramiz. *B* va *C*



35-shakl.

nuqtalarga qo'yilgan \vec{P} va \vec{F} kuchlar uchun (1.5.11) muvozanat tenglamasini tuzamiz. Moment markazi sifatida A nuqtani olamiz. U holda

$$M_A(\vec{F}) + M_A(\vec{P}) = 0; \quad hF - h_1P = 0,$$

bunda $h = AC \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$, $h_1 = AB \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \sqrt{3} AC$.

Natijada $\frac{\sqrt{3}}{2} AC \cdot F - \sqrt{3} ACP = 0 \Rightarrow F = 2P = 2 \cdot 2N = 4N$.

6.4-masala (O.Ə.Kene 2.1.13). Qo'zg'almas O nuqtaga ega bo'lgan richagga miqdori $F_1 = 6N$ bo'lgan \vec{F}_1 kuch va u bilan richagni muvozanatda saqlab turuvchi \vec{F}_2 kuch qo'yilgan. $\alpha = 70^\circ$, $AO = 0,3m$, $BO = 0,4m$ bo'lsa, \vec{F}_2 kuchning miqdori aniqlansin (36-shakl).

Berilgan: $\alpha = 70^\circ$, $AO = 0,3m$,

$BO = 0,4m$ $F_1 = 6N$

Topish kerak. \vec{F}_2 kuch miqdorini.

Yechish. O markazga nisbatan muvozanat

tenglamasini tuzamiz: $M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) = 0$.

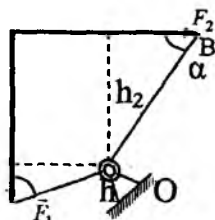
36-shaklga asosan $-h_1F_1 + h_2F_2 = 0$,

$h_1 = OA \sin 70^\circ \approx 0,28m$, $h_2 = OB \sin 70^\circ = 0,4m$.

Natijada $F_2 = \frac{h_1}{h_2} F_1 = 4,5N$.

6.5-masala (O.Ə.Kene 2.2.11). Kvadrat uchlariga miqdori $4N$ dan bo'lgan oltita kuch qo'yilgan. Berilgan kuchlar sistemasining B nuqtaga nisbatan bosh momenti topilsin (37-shakl). $\ell = 0,4m$

Berilgan: $F_1 = F_2 = \dots = F_6 = 4N$, $\ell = 0,4m$.



36-shakl.

Topish kerak. M_B .

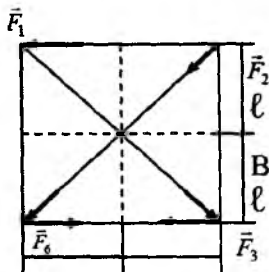
Yechish. (1.5.8) formuladan foydalanib kuchlar sistemasining B nuqtaga nisbatan bosh momentini topamiz:

$$\vec{M}_B = \sum_{i=1}^6 \vec{M}_B(\vec{F}_i).$$

Kuchlar sistemasining B nuqtaga nisbatan algebraik momenti, kuchlarning algebraik momentlari yig'indisiga teng, ya'ni

$$M_B = \ell \cdot F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \ell F_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \ell F_3 - \ell F_4 + \ell F_5 + \frac{\sqrt{2}}{2} \ell F_6 =$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \ell \cdot F, \quad M_B = 1,24\text{m} \cdot 4\text{N} = 4,9\text{Nm}.$$



37-shakl.

1.6.2. Kuchning va kuchlar sistemasining o'qqa nisbatan momentiga doir masalalar

6.6-masala (O.Ə. Kene 5.1.7). To'g'ri burchakli parallelepipedning A nuqtasiga $F = 4\text{kN}$ kuch qo'yilgan. Agar $a = 10\text{m}$, $b = 6\text{m}$, $c = 20\text{m}$ bo'lsa, kuchning Oy o'qiga nisbatan momenti topilsin (38-shakl).

Berilgan: $F = 4\text{kN}$, $a = 10\text{m}$, $b = 6\text{m}$, $c = 20\text{m}$.

Topish kerak. M_y .

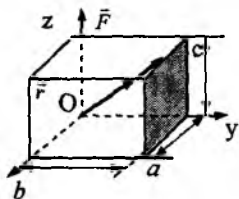
Yechish. Kuchning o'qqa nisbatan momentini topish formulasiga asosan

$$M_y(\vec{F}) = (\vec{r} \times \vec{F})_y = zF_x - xF_z,$$

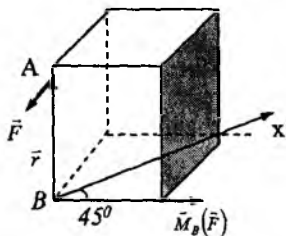
$$x = a = 10\text{m}, \quad z = c = 20\text{m}, \quad F_x = -F, \quad F_z = 0,$$

$$M_y(\vec{F}) = 20\text{m}(-4\text{kN}) = -80\text{kNm} = -8 \cdot 10^4\text{Nm}.$$

6.7-masala (O.Ə. Kene 5.1.5). Qirrasiz 5m bo'lgan kubning A nuqtasiga $F = 6\text{kN}$, kuch qo'yilgan. Bu kuchning Bx o'qiga nisbatan momenti topilsin (39-shakl).



38-shakl.



39-shakl.

Yechish. Avval \vec{F} kuchning B nuqtaga nisbatan momentini hisoblaymiz:

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

$\vec{M}_B(\vec{F})$ moment vektori kubning qirrasi bo'ylab yo'nalgan (40-shakl).

O'qqa nisbatan momentning ta'rifiga asosan

$$M_x(\vec{F}) = (\vec{r} \times \vec{F})_x = r \cdot F \sin 90^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} 5\text{m} \cdot 6\text{kN},$$

$$M_x(\vec{F}) = 2,12 \cdot 10^4 \text{Nm}.$$

6.8-masala (Kene 5.1.10). Qirrasi 0,2m bo'lgan kubning uchiga $F = 5\text{N}$ kuch qo'yilgan. \vec{F} kuchning Oz o'qiga nisbatan momenti hisoblansin (40-shakl).

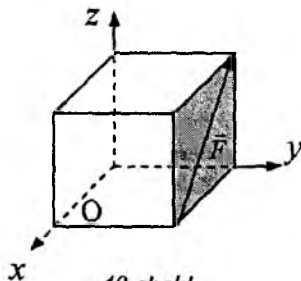
Yechish. (1.4.14) formulalarning uchinchisidan foydalanib \vec{F} kuchning Oz o'qiga nisbatan momentini hisoblaymiz:

$$M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x,$$

bunda x va y kuch qo'yilgan nuqtaning

koordinatalari: $x = y = 0,2\text{m}$. \vec{F} kuchning x va y o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha:

$$F_x = -F \cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} F; \quad F_y = 0.$$



40-shakl.

Natijada $M_z(\vec{F}) = 0,2\text{m} \cdot 0 - 0,2\text{m} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) 5\text{N} = 0,707\text{Nm}$,

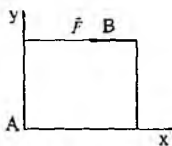
$M_z(\vec{F}) = 0,707\text{Nm}$.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. \vec{F} kuch qo'yilish nuqtasining koordinatalari $x = y = 0,2\text{m}$ proyeksiyalari $F_x = F_y = 180\text{N}$. Kuchning koordinatalar boshiga nisbatan algebraik momenti topilsin.

2. Koordinatalar boshiga qo'yilgan kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari: $F_x = 3\text{N}$; $F_y = 4\text{N}$. Kuchning $(0;3)$ nuqtaga nisbatan algebraik momenti topilsin.

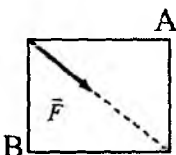
3. Tomoni $0,2\text{m}$ bo'lgan kvadrat plastinkaning B nuqtasiga $F = 100\text{N}$ kuch qo'yilgan. Kuchning koordinatalar boshiga nisbatan algebraik momenti topilsin.



3-masala.

4. Tekislikning $(2;3)$ nuqtasiga $F = 150\text{N}$ kuch qo'yilgan. Kuchning ta'sir chizig'i x o'qi bilan 450 li burchak tashkil qiladi. Kuchning koordinatalar boshiga nisbatan momentning moduli topilsin.

5. Tomoni $0,2\text{m}$ dan bo'lgan kvadratning A uchuga $F = 120\text{N}$ kuch qo'yilgan. Kuchning B nuqtaga nisbatan momentning moduli topilsin.



5-masala.

6. Oxy tekisligining A nuqtasiga $F = 420\text{N}$ kuch qo'yilgan A nuqtaning koordinatalari $x_A = 0,2\text{m}$, $y_A = 0,3\text{m}$ va bo'lsa, kuchning O nuqtasiga nisbatan momenti topilsin.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
2. Kuchning nuqtaga nisbatan algebraik momenti deb nimaga aytiladi?
3. Kuch momentining moduli nimaga teng?
4. Kuchning o'qqa nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
5. Moment vektorining moduli va yo'nalishi qanday topiladi?

Ushbu bobda bir tomonga yoʻnalgan ikkita parallel kuchlar sistemasi, qarama-qarshi tomonga yoʻnalgan ikkita parallel kuchlar sistemasi, tekislikda juft kuchlar sistemasi va ularning muvozanat shartlariga doir nazariyalar, bir tekislikda yotgan parallel kuchlar sistemasininig muvozanat shartlari, tekislikda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari, parallel kuchlar markazi, ogʻirlik markazi, ogʻirlik markazining koordinatalarini topish usullari, baʼzi oddiy jismlarning ogʻirlik markazini aniqlash, Gulden-Pap teoremlari kabi masalalar bayon etiladi.

2.1. Parallel kuchlar sistemasi

Kuch, parallel va antiparallel kuchlar, juft kuch, juftlik momenti.

2.1.1. Bir tomonga yoʻnalgan ikkita parallel kuchlar sistemasi

Absolut qattiq jismning ikkita har xil nuqtalariga qoʻyilgan ikkita \vec{P} va \vec{Q} parallel kuchlar sistemasini qaraymiz (41-shakl). Kuchlar qoʻyilgan nuqtalarni A va B bilan belgilaymiz. A va B nuqtalarga miqdorlari teng hamda AB toʻgʻri chiziq boʻylab qarama-qarshi tomonga yoʻnalgan \vec{S} va \vec{S}' kuchlarni qoʻyamiz. Bunday ikkita kuch muvozanatlashgan kuchlar sistemasini hosil qiladi,

yaʼni $(\vec{S}, \vec{S}') \sim 0$.

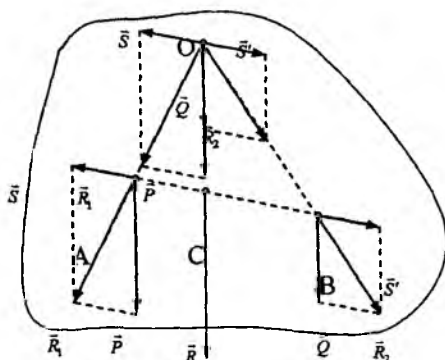
A va B nuqtalarga qoʻyilgan va kuchlarni qoʻshib, ularning teng taʼsir etuvchi \vec{R}_1 va \vec{R}_2 larni hosil qilamiz. Ikkinchi aksiomaga asosan

$$(\vec{P}, \vec{Q}) \sim (\vec{P}, \vec{Q}, \vec{S}, \vec{S}')$$

va demak

$$(\vec{P}, \vec{Q}) \sim (\vec{R}_1, \vec{R}_2).$$

\vec{R}_1 va \vec{R}_2 kuchlarni ta'sir chiziqlari bo'ylab ularni O kesishish nuqtasiga ko'chiramiz (41-shakl).



41-shakl.

Keyin \vec{R}_1 va \vec{R}_2 kuchlarini AB to'g'ri chiziq va \vec{P} , \vec{Q} kuchlarga parallel \vec{P} va \vec{S} , \vec{Q} va \vec{S}' tuzuvchilarga ajratamiz. Shunday qilib, bitta nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz. (\vec{S}, \vec{S}') muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil qiladi, shuning uchun

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{S}, \vec{S}') \sim (\vec{P}, \vec{Q}).$$

\vec{P} va \vec{Q} kuchlar \vec{P} va \vec{Q} kuchlarga parallel to'g'ri chiziq bo'ylab bir tomonga yo'nalgani uchun ularning teng ta'sir etuvchisi $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ bo'ladi. Demak, uning moduli berilgan kuchlar modullari yig'indisiga teng, ya'ni

$$R = P + Q. \quad (2.3.1)$$

Teng ta'sir etuvchining yo'nalishi berilgan kuchlarga paralleldir. Mos uchburchaklarning o'xshashligidan

$$\frac{P}{OC} = \frac{S}{AC}, \quad \frac{Q}{OC} = \frac{S'}{SB}.$$

Bu proporsiyalarning birinchisini ikkinchisiga bo‘lib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{P}{Q} = \frac{CB}{AC}, \quad \text{bundan} \quad \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC}.$$

Oxirgi proporsiyadan quyidagi hosilaviy proporsiyaga kelamiz:

$$\frac{P+Q}{AC+CB} = \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC},$$

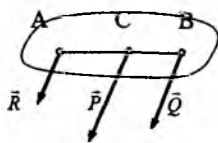
$P+Q=R$ va $AC+CB=AB$ bo‘lgani uchun

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}. \quad (2.3.2)$$

Shunday qilib, bir tomonga yo‘nalgan ikkita parallel kuch teng ta’sir etuvchiga ega bo‘lib, teng ta’sir etuvchining moduli berilgan kuchlar modullari yig‘indisiga teng. Yo‘nalishi berilgan kuchlarga parallel va ular bilan bir xil bo‘ladi. Teng ta’sir etuvchining ta’sir chizig‘i AB kesmani berilgan kuchlarning modullariga nisbatan ichki ravishda teskari proporsional bo‘laklarga ajratadi.

Endi berilgan \vec{R} kuchni ikkita parallel tuzuvchiga ajratish masalasini qaraymiz. Bu masalani cheksiz ko‘p usullar bilan yechish mumkin, ya’ni masala umumiy holda aniqmas masala hisoblanadi.

Masala aniq masala bo‘lishi uchun tuzuvchi kuchlardan bittasining moduli va qo‘yilish nuqtasi yoki ikkala tuzuvchining ham qo‘yilish nuqtasi berilishi kerak. Masalan, C nuqtaga qo‘yilgan \vec{R} kuchni unga parallel shunday ikkita tuzuvchiga ajratilganki, ulardan biri A nuqtaga qo‘yilgan bo‘lib, moduli P ga teng. Ikkinchi qo‘shiluvchining moduli Q va qo‘yilish nuqtasi B quyidagi munosabatlardan topiladi (42-shakl):



42-shakl.

$$R = P + Q, \quad \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC},$$

bulardan

$$Q = R - P, \quad CB = \frac{P}{Q} AC.$$

Endi \bar{R} kuchni A va B nuqtalarga qo'yilgan ikkita parallel tuzuvchilarga ajratish talab etilsin. Tuzuvchi kuchlarning modullari quyidagi munosabatlardan topiladi:

$$P = R \cdot \frac{CB}{AB}, \quad Q = R \cdot \frac{AC}{AB}.$$

2.1.2. Qarama-qarshi tomonga yo'nalgan ikkita parallel kuchlar sistemasi

Qarama-qarshi tomonga yo'nalgan ikkita parallel kuchga antiparallel kuchlar deyiladi. A va B nuqtalarga qo'yilgan miqdorlari teng bo'lmagan ikkita antiparallel kuchlar berilgan bo'lsin (43-shakl).

Moduli katta bo'lgan \bar{P} kuchni ikkita \bar{R} va \bar{Q}' tuzuvchiga shunday ajratamizki, bu kuchlardan bittasi \bar{Q}' ning moduli \bar{Q} ning moduliga teng va \bar{Q} kuch bilan bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'lsin, ya'ni $Q = Q'$, $\bar{Q} = -\bar{Q}'$. U holda \bar{Q} va \bar{Q}' kuchlar nol sistemani hosil qiladi, ya'ni $(\bar{Q}, \bar{Q}') \sim 0$. \bar{R} kuchning moduli va qo'yilish nuqtasi (2.3.1) va (2.3.2) formulalardan topiladi, ya'ni

$$R = P - Q. \quad (2.3.3)$$

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}. \quad (2.3.4)$$

\bar{R} kuch \bar{P} , \bar{Q} antiparallel kuchlarining teng ta'sir etuvchisi bo'ladi, ya'ni

$$(\bar{P}, \bar{Q}) \sim (\bar{R}, \bar{Q}, \bar{Q}') \sim \bar{R}.$$

Shunday qilib, ikkita antiparallel kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga ega bo'lib, uning moduli berilgan kuchlar modullari

ayirmasiga teng, yo‘nalishi berilgan kuchlarga parallel va katta kuch bilan bir xil bo‘ladi. Teng ta‘sir etuvchining qo‘yilish nuqtasi AB kesmaning davomidagi C nuqtada bo‘lib, AB kesmani tashqi ravishda kuchlar modullariga nisbatan teskari proporsional bo‘laklarga ajratadi.

2.2. Juftlar nazariyasi

Qattiq jismning ikkita har xil nuqtalariga qo‘yilgan modullari teng va qarama-qarshi tomonga yo‘nalgan ikki parallel kuchlar sistemasiga **juft kuch** deyiladi (44-shakl). Kuchlarning ta‘sir chiziqlari orasidagi masofaga juft kuch yelkasi deyiladi.

Juft kuch teng ta‘sir etuvchiga ega emas. Buni teskaridan faraz qilib isbotlaymiz. Faraz qilaylik, (\vec{F}, \vec{F}') juft kuch \vec{R} teng ta‘sir etuvchiga ega bo‘lsin. (\vec{F}, \vec{F}') kuchlar sistemasiga miqdori teng ta‘sir etuvchining moduliga teng va bir to‘g‘ri chiziq bo‘ylab qarama-qarshi tomonga yo‘nalgan \vec{R}' kuchni qo‘shamiz, natijada $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{R}')$ muvozanatlashgan kuchlar sistemasi hosil bo‘ladi, ya‘ni

$$(\vec{F}, \vec{F}', \vec{R}') \sim 0, \quad \vec{R}' = -\vec{R}.$$

Uch kuchning muvozanati haqidagi teoremaning zaruriy **sharti** bajarilmaydi. Demak, (\vec{F}, \vec{F}') juft kuch teng ta‘sir etuvchiga **ega** emas. Bundan juft kuch ta‘siridagi jism muvozanatda bo‘lmaydi **degan** xulosa kelib chiqadi. Juft kuch ta‘siridagi jism aylanma harakat qiladi. Juftning jismga ko‘rsatadigan ta‘siri uning momenti bilan xarakterlanadi. Juftning algebraik momenti deb juftni tashkil qiluvchi kuchlardan birining moduli bilan juft yelkasi ko‘paytmasining (+) yoki (-) ishora bilan olinganiga aytiladi, ya‘ni

$$M(\vec{F}, \vec{F}') = \text{mom}(\vec{F}, \vec{F}') = \pm F_1 \cdot d = \pm F_2 \cdot d. \quad (2.2.1)$$

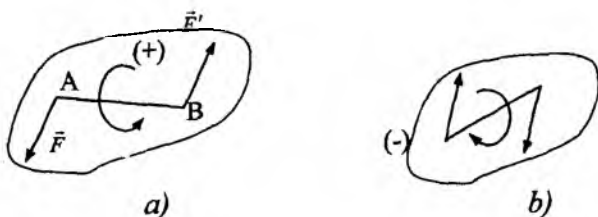
Juft kuch yotgan tekislikka juft tekisligi deyiladi. Agar juft kuch juft tekisligini soat mili harakati yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda aylantirsa (2.2.1) formulada (+) ishora, soat

mili harakati yo'nalishida aylantirsa (-) ishora olinadi (45- a, b shakl).

Tekislikdagi juft kuchlar haqida teoremlar

1-teorema. Juftning algebraik momenti ixtiyoriy markazga nisbatan juftni tashkil qiluvchi kuchlarning algebraik momentlari yig'indisiga teng.

Isbot. Ixtiyoriy O nuqtani tanlaymiz (46-shakl). O nuqtaga nisbatan A va B nuqtalarning radius-vektorlarini \vec{r}_1 , \vec{r}_2 bilan



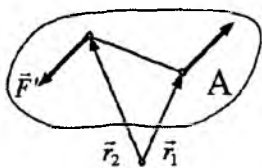
45-shakl.

belgilaymiz. U holda $\vec{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ va

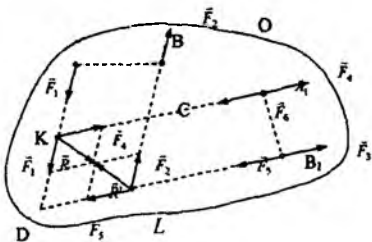
$$\vec{AB} \times \vec{F}' = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}' = \vec{r}_2 \times \vec{F}' - \vec{r}_1 \times \vec{F}'$$

$$\vec{F}' = \vec{F} \text{ bo'lgani uchun } \text{mom}(\vec{F}, \vec{F}') = \vec{AB} \times \vec{F}' = \vec{r}_1 \times \vec{F}' + \vec{r}_2 \times \vec{F}' = \\ = \text{mom}_0(\vec{F}) + \text{mom}_0(\vec{F}')$$

2-teorema. Juftni o'z tekisligida bir holatdan boshqa bir holatga ko'chirganda juftning jismga ko'rsatadigan ta'siri o'zgarmaydi.



46-shakl.



47-shakl.

Isbot. Yelkasi AB bo'lgan (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juft berilgan bo'lsin (47-shakl). Tekislikning A_1 va B_1 nuqtalariga miqdorlari teng va yo'nalishlari qarama-qarshi \vec{F}_3, \vec{F}_4 va \vec{F}_5, \vec{F}_6 kuchlarni qo'yamiz ($F_3 = F_4 = F_5 = F_6$), bunda $AB = A_1B_1$.

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_4$ va \vec{F}_5 kuchlarning ta'sir chiziqlari bo'ylab K va L nuqtalarga ko'chiramiz. Natijada K va L nuqtalarga qo'yilgan (\vec{F}_1, \vec{F}_4) va (\vec{F}_2, \vec{F}_5) kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz. \vec{F}_1 va \vec{F}_4 kuchlarni teng ta'sir etuvchisini \vec{R} bilan \vec{F}_2 va \vec{F}_5 kuchlarni teng ta'sir etuvchisini \vec{R}' bilan belgilaymiz, ya'ni $(\vec{F}_1, \vec{F}_4) \sim \vec{R}$, $(\vec{F}_2, \vec{F}_5) \sim \vec{R}'$. $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$, $\vec{F}_4 = \vec{F}_5$ bo'lgani uchun \vec{R} va \vec{R}' kuchlarning modullari teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan. U holda

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_4, \vec{F}_2, \vec{F}_5) \sim (\vec{R}, \vec{R}') \sim 0.$$

Natijada

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6) \sim (\vec{F}_3, \vec{F}_6).$$

Momentlari teng bo'lgan ikkita juftga *ekvivalent juftlar* deyiladi, ya'ni

$$mom(\vec{F}, \vec{F}') = mom(\vec{P}, \vec{P}') \Rightarrow (\vec{F}, \vec{F}') \sim (\vec{P}, \vec{P}').$$

3-teorema. Juftning momentini o'zgartirmasdan uning tashkil etuvchi kuchlarini va yelkasini har qancha o'zgartirganda ham juftning jismga ko'rsatadigan ta'siri o'zgarmaydi.

Isbot. (\vec{P}_1, \vec{P}_2) juft berilgan bo'lsin (48-shakl). \vec{P}_2 kuchni unga parallel ikkita tuzuvchiga ajratamiz, ya'ni

$$\vec{P}_2 \sim (\vec{Q}, \vec{P}_2 - \vec{Q}).$$

Kuchlardan bittasi A nuqtaga ikkinchisi AB kesma yotgan to'g'ri chiziq davomidagi C nuqtaga qo'yilgan bo'lsin. A nuqtaga

qo'yilgan \vec{P} va $\vec{P}_2 - \vec{Q}$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisi \vec{Q}' ning moduli

$$Q' = P_1 - (P_2 - Q) = Q.$$

Natijada yelkasi AC bo'lgan yangi juftga ega bo'lamiz. AC yelka

quyidagi munosabatni qanoatlantiradi: $\frac{Q}{AB} = \frac{P_2}{AC}$ bundan

$$Q \cdot AC = P_2 \cdot AB. \quad (2.2.2)$$

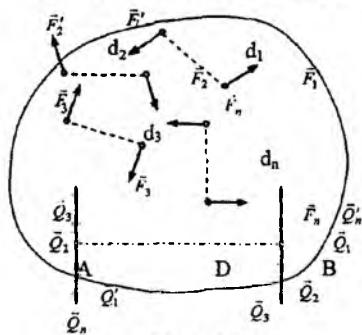
(2.2.2) tenglikdagi $Q \cdot AC$ ko'paytma (\vec{Q}, \vec{Q}') juft kuchning momentini, $P_2 \cdot AB$ ko'paytma esa (\vec{P}_1, \vec{P}_2) juftning momentini ifodalaydi, ya'ni $mom(\vec{Q}, \vec{Q}') = mcm(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$.

4-teorema. Bir tekislikda yotgan juft kuchlar sistemasi bitta juft kuchga ekvivalent bo'lib, uning momenti berilgan juft kuchlar momentlari yig'indisiga teng.

Isbot. Bir tekislikda yotgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_1'), (\vec{F}_2, \vec{F}_2'), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n')$ juft kuchlar berilgan bo'lsin (49-shakl). 3-teoremadan foydalanib, berilgan juft kuchlarning momentlarini o'zgartirmay bitta D yelkaga keltiramiz.

Natijada

$$[(\vec{F}_1, \vec{F}_1'), (\vec{F}_2, \vec{F}_2'), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n')] \sim [(\vec{Q}_1, \vec{Q}_1'), (\vec{Q}_2, \vec{Q}_2'), \dots, (\vec{Q}_n, \vec{Q}_n')].$$



49-shakl.

A va B nuqtalarga qo'yilgan kuchlarni qo'shib, (\vec{R}, \vec{R}') yangi juft kuchni hosil qilamiz. 49-shaklga asosan

$$R' = R = Q_1 - Q_2 - Q_3 + \dots + Q_4.$$

(\vec{R}, \vec{R}') juftning momenti

$$\begin{aligned} \text{mom}(\vec{R}, \vec{R}') &= R \cdot D = \\ &= (Q_1 D) + (-Q_2 D) + (-Q_3 D) + \dots + (Q_4 D). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

3-teoremaga asosan

$$\begin{aligned} Q_1 D &= F_1 d_1 = \text{mom}(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), \\ -Q_2 D &= -F_2 d_2 = \text{mom}(\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \\ &\dots\dots\dots \\ Q_n D &= F_n d_n = \text{mom}(\vec{F}_n, \vec{F}'_n) \end{aligned}$$

Bu tengliklarni hadma-had qo'shib, (2.2.3) ga asosan quyidagini topamiz:

$$\text{mom}(\vec{R}, \vec{R}') = \sum_{i=1}^n \text{mom}(\vec{F}_i, \vec{F}'_i) \quad (2.2.4)$$

2.3. Bir tekislikda yotgan parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Kuch, kuchlar sistemasi, kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari, kuchning nuqtaga nisbatan momenti.

Bir tekislikda yotgan parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari quyidagi tenglamalar bilan ifodalanadi:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Bir tekislikda yotgan parallel kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning shu kuchlarga perpendikular bo'lma-

gan o'qdagi proyeksiyalari yig'indisi va kuchlar tekisligidagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlari yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Bir tekislikda yotgan parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini boshqacha ko'rinishdagi tenglamalar bilan ham berish mumkin, ya'ni

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Bir tekislikda yotgan parallel kuchlar sistemasining muvozanatda bo'lishi uchun kuchlar sistemasining shu kuchlarga perpendikular to'g'ri chiziq ustidagi ixtiyoriy ikkita nuqtaga nisbatan algebraik momentlari yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

2.4. Bir tekislikda yotgan parallel kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar

Bir tekislikda yotgan parallel kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish bo'yicha quyidagi uslubiy tavsiyalarni berish mumkin:

1. Qaralayotgan qurilmaning qaysi qismining muvozanati tekshirilayotganini aniqlash kerak.
2. Koordinatalar sistemasi o'qlaridan bittasini kuchlarga parallel qilib tanlash maqsadga muvofiq.
3. Qurilmaga ta'sir etuvchi aktiv kuchlar va bog'lanish reaksiyalari shaklda tasvirlab olinadi.
4. Moment markazi yoki moment markazlari tanlanib (2.3.1) tenglamalar sistemasi yoki (2.3.2) tenglamalar sistemasi tuziladi.
5. Tuzilgan tenglamalarni birgalikda yechib, izlanayotgan norma'lumlar topiladi.

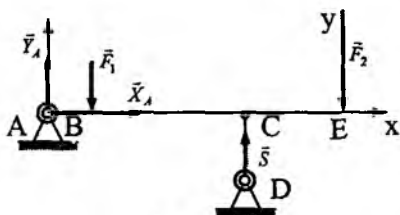
Berilgan uslubiy tavsiyalar asosida quyida parallel kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechib ko'rsatamiz.

4.1-masala (O.Э.Кене 2.3.3). AE sterjen A nuqtada sharnir vositasida biriktirilgan va CD vertikal sterjenga tirkalgan. Agar bo'lsa, CD sterjendagi S zo'riqish kN da topilsin (50-shakl).

Yechish. A sharnirning reaksiyasini koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan \bar{x}_A, \bar{y}_A tuzuvchilarga ajratamiz. Uchta noma'lum reaksiya kuchi mavjud, bu noma'lumlarni topish uchun uchta tenglama kerak bo'ladi.

Berilgan: $AB = 1\text{m}$, $BC = CE = 2\text{m}$, $F_1 = 2\text{kN}$, $F_2 = 4\text{kN}$.

Topish kerak: S .



50-shakl.

Yechish. Topish kerak bo'lgan \bar{S} noma'lum reaksiyani A nuqtaga nisbatan bitta moment tenglamasidan topish mumkin, ya'ni

$$\sum_{i=1}^5 \text{mom}_A(\bar{F}_i) = 0. \quad (\text{a})$$

\bar{x}_A va \bar{y}_A kuchlarning ta'sir chiziqlari A nuqtadan o'tadi. Shuning uchun bu kuchlarning A nuqtaga nisbatan momentlari nolga teng:

$$-AB \cdot F_1 + AC \cdot S - AE \cdot F_2 = 0$$

yoki

$$3m \cdot S = 1m \cdot 2\text{kN} + 5 \cdot 4\text{kN}.$$

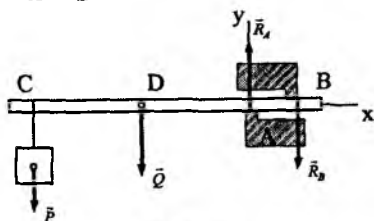
Bundan

$$S = 7,33\text{kN}.$$

4.2-masala (Мещерский 3.12). Uzunligi 4m, og'irligi 5kN bo'lgan bir jinsli gorizontal balka qalinligi 0,5 m bo'lgan devorga shunday qilib o'rnatilganki, u A va B nuqtalarda devorga tiralib turadi. Balkaning erkin uchiga og'irligi 40kN bo'lgan P yuk osilgan. A va B nuqtalardagi reaksiya kuchlari topilsin (51-shakl).

Berilgan: $BC=4\text{m}$, $AB=0,5\text{m}$, $P=40\text{kN}$, $Q=4\text{kN}$.

Topish kerak: R_A, R_B reaksiya kuchlarini.



51-shakl.

Yechish. Koordinatalar sistemasini shaklda ko'rsatilganday qilib tanlab, y o'qiga nisbatan proyeksiyalar tenglamasini va A nuqtaga nisbatan moment tenglamasini tuzamiz, yani

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = R_A - R_B - Q - P = 0,$$

$$\sum_{i=1}^4 \text{mom}_A(\vec{F}_i) = AC \cdot P + AD \cdot Q - AB \cdot R_B = 0.$$

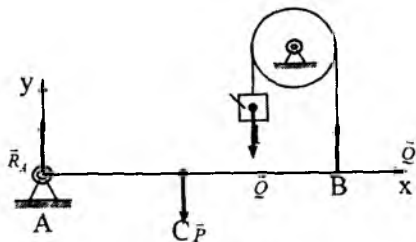
Bu tenglamarga berilganlarni qo'yamiz:

$$\begin{cases} R_A - R_B = 4\text{kN} + 40\text{kN}, \\ 0,5\text{m}R_B = 3,5\text{m} \cdot 40\text{kN} + 1,5 \cdot 4\text{kN}. \end{cases} \quad (\text{a})$$

Bu tenglamalarning ikkinchisidan $R_B = 295\text{kN}$, birinchisidan $R_A = 340\text{kN}$. *Javob:* $R_A = 340\text{kN}$, $R_B = 295\text{kN}$.

4.3-masala (O.Ə.Kene 2.3.13). Og'irligi 340N bo'lgan bir jinsli AB balkani gorizontal holatda muvozanatda ushlab turuvchi l yukning og'irligi topilsin (52-shakl).

Yechish. Yukning \vec{Q} og'irlik kuchini arqon bo'ylab B



52-shakl.

nuqtaga ko'chiramiz, bu kuch vertikal yuqoriga yo'nalgan bo'ladi. \bar{Q} kuchning modulini topish uchun A nuqtaga nisbatan moment tenglamasini tuzamiz, ya'ni

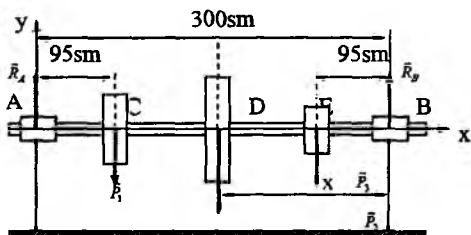
$$\sum_{i=1}^3 \text{mom}_A(\bar{F}_i) = -AC \cdot P + AB \cdot Q = 0.$$

Balka bir jinsli bo'lgani uchun $AC = \frac{1}{2}AB$. Natijada yuqoridagi tenglamalardan: $Q = \frac{1}{2}P$, yoki $Q = 170\text{N}$.

4.4-masala (И.В.Мещерский 3.5). AB transmission valga $P_1 = 3\text{kN}$, $P_2 = 5\text{kN}$, $P_3 = 2\text{kN}$ bo'lgan uchta shkiv o'rnatilgan. O'lchamlar shaklda ko'rsatilgan. A podshipnikning reaksiyasi B podshipnik reaksiyasigateng bo'lishi uchun P_2 og'irlikdagi shkivni B podshipnikdan qanday x masofada o'rnatish kerak? Valning og'irligi e'tiborga olinmasin (53-shakl).

Berilgan: $P_1 = 3\text{kN}$, $P_2 = 5\text{kN}$, $P_3 = 2\text{kN}$.

Topish kerak: x .



53-shakl.

Yechish. Koordinatalar sistemasini shaklda ko'rsatilganday qilib tanlaymiz. y o'qiga nisbatan proyeksiyalar tenglamasini va B nuqtaga nisbatan moment tenglamalarini tuzamiz, ya'ni

$$\sum_{i=1}^5 F_{iy} = R_A - P_1 - P_2 - P_3 + R_B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^5 \text{mom}_B(\vec{F}_i) = BE \cdot P_3 + BD \cdot P_2 + BC \cdot P_1 - BA \cdot R_A = 0. \quad (a)$$

$R_A = R_B$ bo'lgani uchun (a) tenglamalarning birinchisidan

$$R_A = R_B = 5\text{kN},$$

ikkinchisini quyidagi ko'rinishda yozsak:

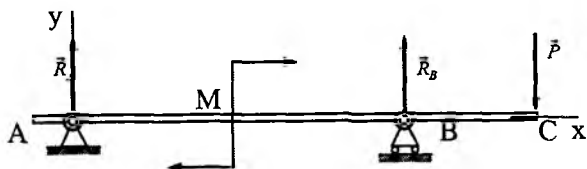
$$95\text{sm} \cdot 2\text{kN} + x \cdot 5\text{kN} + 205\text{sm} \cdot 3\text{kN} - 30\text{sm} \cdot 5\text{kN} = 0,$$

bundan $x = 135\text{sm}$.

4.5-masala (И.В.Мещерский 3.15). Gorizontol konsol balkaga momenti $M = 6\text{kN} \cdot \text{m}$ bo'lgan juft kuch, uning C nuqtasiga esa vertikal $P = 2\text{kN}$ yuk ta'sir qiladi. Balkaning AB oralig'i $3,5\text{ m}$, konsolning chiqib turgan qismi $BC=0,5\text{m}$. Tayanchlardagi reaksiyalar topilsin (54-shakl).

Berilgan: $M = 6\text{kN} \cdot \text{m}$, $P = 2\text{kN}$, $AB = 3,5\text{m}$, $BC = 0,5\text{m}$.

Topish kerak: R_A , R_B .



54-shakl.

Yechish. \vec{R}_A va \vec{R}_B noma'lum reaksiyalarni topish uchun y o'qiga nisbatan proyeksiyalar tenglamasini va A nuqtaga nisbatan moment tenglamasini tuzamiz, ya'ni

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = R_A + R_B - P = 0,$$

$$\sum_{i=1}^4 \text{mom}_A(\vec{F}_i) = AB \cdot R_B - AC \cdot P - M = 0. \quad (a)$$

(a) tenglamalarning ikkinchisidan

$$R_B = \frac{1}{AB}(AC \cdot P + M) = \frac{1}{3,5\text{m}}(4\text{m} \cdot 2\text{kN} + 6\text{kNm}), \quad R_B = 4\text{kN}.$$

birinchisidan $R_A = P - R_B = -2\text{kN}$.

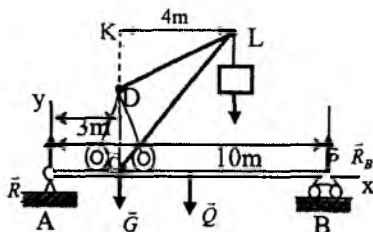
Javob. $R_A = -2\text{kN}$ vertikal bo‘ylab pastga, $R_B = 4\text{kN}$ esa vertikal bo‘ylab yuqoriga yo‘nalgan.

4.6-masala (И.В.Мещерский 3.17). Uzunligi 10 m bo‘lgan AB balka ustiga yuk ko‘taradigan kran uchun yo‘l solingan. Kranning og‘irligi 50kN bo‘lib, uning og‘irlik markazi CD o‘qda yotadi. R yukning og‘irligi 10kN , AB balkaning og‘irligi 30kN ; kranning KL qulochi uzunligi 4m , $AC = 3\text{m}$. Kranning DL strelasi balka bilan bir vertikal tekislikda bo‘lgan hol uchun A va B nuqtalardagi tayanch reaksiyalari topilsin (55-shakl).

Berilgan: $AB = 10\text{m}$, $G = 50\text{kN}$, $P = 10\text{kN}$, $Q = 30\text{kN}$, $KL = 4\text{m}$, $AC = 3\text{m}$.

Topish kerak: R_A , R_B tayanch reaksiya kuchlarini.

Yechish. Koordinatalar sistemasini 55-shaklda ko‘rsatilgandek tanlaymiz. Masalani (2.3.1) tenglamalardan foydalanib yechamiz. Axy koordinatalar sistemasiga nisbatan proyeksiya tenglamasini va A nuqtaga nisbatan moment tenglamasini tuzamiz



55-shakl.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 \bar{F}_{iy} = R_A - G - Q - P + R_B = 0; \\ \sum_{n=1}^5 \text{mom}_A(\bar{F}_i) = ACG - \frac{1}{2}ABQ - (AC + KL)P + ABR_B = 0. \end{cases}$$

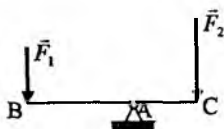
Bu tenglamaga berilgan miqdorlarni qo‘yamiz, natijada

$$\begin{cases} R_A - 50\text{kN} - 30\text{kN} - 10\text{kN} + R_B = 0; \\ -3\text{m} \cdot 30\text{kN} - 5\text{m} \cdot 30\text{kN} - 7\text{m} \cdot 10\text{kN} + 10\text{m} \cdot R_B = 0. \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib, noma'lumlarni topamiz, ya'ni $R_B=37\text{kN}$; $R_A=53\text{kN}$.

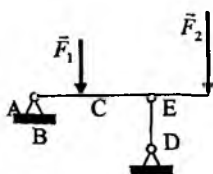
Muammoli masala va topshiriqlar

1. A sharnirga mahkamlangan BC brusga vertikal $F_1=4\text{kN}$ va \vec{F}_2 kuchlar ta'sir etadi. Brus gorizontol holatda muvozanatda turishi uchun \vec{F}_2 kuchning miqdori qanday bo'lishi kerak. $AC=2\text{m}$, $AB=6\text{m}$.



1-masala.

2. AE balka A nuqtada sharnir vositasida mahkamlangan va CD vertikal sterjenga suyalgan. $AB=1\text{m}$, $BC=CE=2\text{m}$ va $F_1=2\text{kN}$, $F_2=4\text{kN}$ bo'lsa, CD sterjenning zo'riqishini toping.

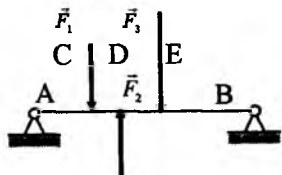


2-masala.

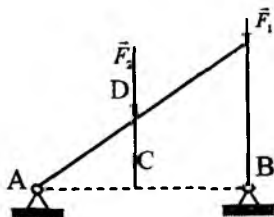
3. AB balkaga vertikal $F_1=1\text{kN}$, $F_2=2\text{kN}$ va $F_3=3\text{kN}$ kuchlar ta'sir etadi. $AC=CD=DE=1\text{m}$, $BE=2\text{m}$ bo'lsa, B tayanchning reaksiyasini toping.

4. ADB romga vertikal $F_1=9\text{kN}$ va $F_2=4\text{kN}$ kuchlar ta'sir etadi. B tayanch reaksiyasini toping. $AC=2,5\text{m}$, $AB=6\text{m}$.

5. Og'irligi 340m bo'lgan AB balka gorizontol holatda muvozanatda bo'lishi uchun 1 yukning og'irligi qanday bo'lishi kerak? Balka bir jinsli

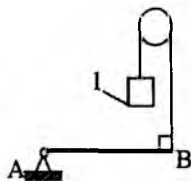


3-masala.

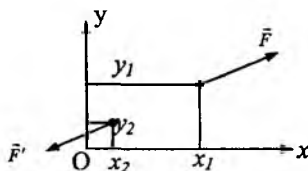


4-masala.

6. (\vec{F}, \vec{F}') juft kuchni tashkil qiluvchi kuchlarning proyeksiyalari $F_x = -F'_x = 7,5\text{N}$, $F_y = -F'_y = 2,5\text{N}$ berilgan, kuchlar qo'yi-lish nuqtalarining koordinatalari; $x_1 = 0,1\text{m}$, $y_1 = 0,15\text{m}$, $x_2 = 0,015\text{m}$, $y_2 = 0,02\text{m}$. Juftning momenti topilsin.



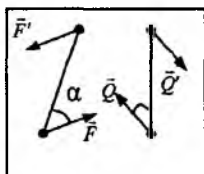
5-masala.



6-masala.

7. Plitaga uni tekisligida yotuvchi ikkita juft kuch ta'sir qiladi. $F = 8\text{N}$, $Q = 5\text{N}$, $AB = 0,25$, $CD = 0,20\text{m}$ va $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$ bo'lsa, juftlar momentlari yig'indisi topilsin.

8. Bir tekislikda yotgan va muvozanatlashgan uchta juft berilgan $M_1 = 510\text{Nm}$, $M_2 = 120\text{Nm}$ bo'lsa, M_3 moment topilsin.



7-masala.



8-masala.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Bir tomonga yo'nalgan ikki parallel kuch teng ta'sir etuvchisining moduli nimaga teng?
2. Bir tomonga yo'nalgan ikki parallel kuch teng ta'sir etuvchisining ta'sir chizig'i qaysi nuqtadan o'tadi?
3. Qarama-qarshi tomonga yo'nalgan ikki parallel kuch teng ta'sir etuvchisining moduli nimaga teng?
4. Juft kuch deb nimaga aytiladi?
5. Juftning moment vektori deb qanday vektorga aytiladi?
6. Juftning algebraik momenti deb nimaga aytiladi?
7. Juft kuch haqidagi teoremlarni tushintirib bering.

2.5. Tekislikda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Kuch, kuch intensivligi, teng ta'sir etuvchi, tekis va chiziqli qonun bilan taqsimlanish, reaksiya kuchi, reaksiya momenti.

Tekislikda ixtiyoriy ravishda yo'nalgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning bosh vektori va tekislikning ixtiyoriy nuqtasiga nisbatan bosh momenti nolga teng, ya'ni

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \\ \sum_{i=1}^n \overrightarrow{mom}_0(\vec{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (2.5.1)$$

bo'lishi zarur va yetarli.

(2.5.1) tenglamalarni tekislikda dekart koordinatalar sistemasi o'qlariga proyeksiyalab, quyidagi tenglamalar sistemasiniga kelamiz:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \\ \sum_{i=1}^n mom_0(\vec{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (2.5.2)$$

(2.5.2) munosabatlar tekislikda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini ifodalaydi. Tekislikda ixtiyoriy yo'nalgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlar sistemasining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari yig'indisi va tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan algebraik momentlari yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Tekislikda ixtiyoriy ravishda yo'nalgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini yana boshqacha ko'rinishda ham berish mumkin: bir tekislikda ixtiyoriy yo'nalgan kuchlar sistemasi

muvozanatda bo'lishi uchun kuchlar sistemasining bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan ixtiyoriy uchta A , B va C nuqtalarga nisbatan algebraik momentlari yig'indisi alohida-alohida nolga teng, ya'ni

$$\sum_{i=1}^n mom_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n mom_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n mom_C(\vec{F}_i) = 0. \quad (2.5.3)$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Tekislikda ixtiyoriy ravishda yo'nalgan kuchlar sistemasining uchinchi xil muvozanat shartlarini ham berish mumkin: Tekislikda ixtiyoriy ravishda yo'nalgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlar sistemasining tekislikdagi ixtiyoriy ikkita A va B nuqtaga nisbatan olingan algebraik momentlari yig'indisi hamda kuchlar sistemasining shu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lmagan o'qdagi proyeksiyalari yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli, ya'ni

$$\sum_{i=1}^n mom_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n mom_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i)_\ell = 0, \quad (2.5.4)$$

bunda ℓ — AB to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lmagan o'q.

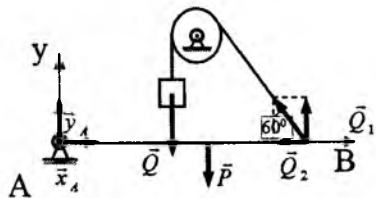
2.6. Tekislikda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartiga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar

1. Koordinatalar sistemasi o'qlarini kuchlarning proyeksiyalarini hisoblashga qulay qilib tanlash kerak.
2. Moment markazi sifatida ikkita va undan ortiq noma'lum reaksiya kuchlari kesishgan nuqtani olish maqsadga muvofiq.
3. Tanlangan koordinatalar sistemasi va moment markaziga nisbatan (2.5.2) tenglamalar sistemasini tuzish lozim.
4. Tekislikda bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtani tanlab, (2.5.3) tenglamalar sistemasi tuziladi.
5. Tekislikda A va B nuqtalarni va AB to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lmagan ℓ o'qni tanlab, (2.5.4) tenglamalar sistemasi tuziladi.

6. Tuzilgan tenglamalar sistemasini yechib, izlanayotgan noma'lumlar topiladi.

Berilgan uslubiy tavsiyalar asosida quyida tekislikda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlarga doir masalalarni yechib ko'rsatamiz.

6.1-masala (O.Ə.Kene 2.4.20). Og'irligi 346N bo'lgan AB bir jinsli balkani gorizontol holatda muvozanatda ushlab turuvchi 1 yukning og'irligi topilsin (56-shakl).



56-shakl.

Yechish. Noma'lum kuchlar uchta, ularni topish uchun uchta tenglama tuzish kerak bo'ladi. Ammo masalaning shartiga ko'ra bitta Q kuchni topish talab qilingan. A

nuqtani moment markazi qilib olsak, tuzilgan moment tenglamasida faqat bitta Q noma'lum qatnashadi, ya'ni

$$\sum_{i=1}^5 \text{mom}_A(\vec{F}_i) = -\frac{AB}{2}P + AB \cdot Q_1 = 0. \quad (a)$$

\vec{x}_A, \vec{y}_A va \vec{Q}_2 kuchlarning ta'sir chiziqlari A nuqtadan o'tadi, shuning uchun ularni A nuqtaga nisbatan momentlari nolga teng. Shaklga asosan

$$Q_1 = Q \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} Q.$$

Buni (a) tenglamaga qo'yamiz, natijada

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} P = \frac{1}{\sqrt{3}} 346 \text{N} \approx 200 \text{N}.$$

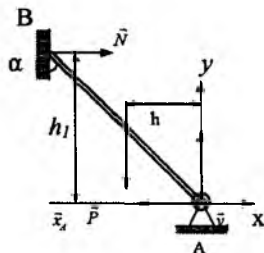
Javob: $Q=200\text{N}$.

6.2-masala (O.Ə.Kene 2.4.15). Og'irligi 100kN bo'lgan bir jinsli brusning bir uchi A sharnir yordamida mahkamlangan, ikkinchi uchi silliq devorga tayanib muvozanatda turadi. Agar $\alpha = 60^\circ$ bo'lsa, brusning devorga ko'rsatadigan bosimi topilsin (57-shakl).

Berilgan: $P = 100\text{kN}$, $\alpha = 60^\circ$.

Topish kerak: N .

Yechish. Masalada uchta noma'lum miqdor qatnashadi. Ularni topish uchun uchta tenglama kerak bo'ladi. Lekin masalaning shartiga ko'ra bitta \vec{N} reaksiyani topish kerak. Shuning uchun A nuqtani moment markazi deb olib, momentlar tenglamasini tuzsak, hosil bo'lgan tenglamada faqat bitta N noma'lum reaksiya qatnashadi, ya'ni



57-shakl.

$$\sum_{i=1}^4 \text{mom}_A(\vec{F}_i) = hP - h_1N = 0. \quad (a)$$

Shakldan

$$h_1 = AB\cos 60^\circ, \quad h = \frac{AB}{2}\sin 60^\circ.$$

Bularni (a) tenglamaga qo'yamiz:

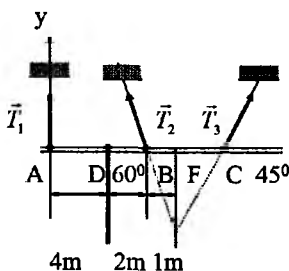
$$P \frac{AB}{2} \sin 60^\circ - NAB\cos 60^\circ = 0$$

yoki $\frac{\sqrt{3}}{4}P - \frac{1}{2}N = 0$, bundan

$$N = \frac{\sqrt{3}}{2}P = 86,6\text{kN}.$$

Javob: $N = 86,6\text{kN}$.

6.3-masala. (И.В.Мещерский 4.11). Ko'prikning qismlarini yig'ishda ko'prik fermasining biror ABC qismini shaklda ko'rsatilgandek, uchta arqon bilan ko'tarishga to'g'ri keldi. Ferma shu qismining og'irligi 42kN , og'irlik markazi D nuqtada. Masofalar mos ravishda: $AD = 4\text{m}$, $BD = 2\text{m}$, $BF = 1\text{m}$. Agar AC to'g'ri chiziq gorizontaal bo'lsa, arqonlardagi taranglik kuchlari qancha bo'ladi.



58-shakl.

Berilgan: $R = 42\text{kN}$, $AD = 4\text{m}$, $BD = 2\text{m}$, $BF = 1\text{m}$;

Topish kerak: T_1 , T_2 , T_3 .

Yechish. Koordinatalar sistemasini rasmda ko'rsatilgandek tanlaymiz va (2.5.2) tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = -T_2 \cos 60^\circ + T_3 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = T_1 + T_2 \cos 30^\circ + T_3 \cos 45^\circ - P = 0.$$

$$\sum_{i=1}^n \text{mom}_A(\vec{F}_i) = -4P + 6T_2 \cos 30^\circ + (7 + \sqrt{3})T_3 \cos 45^\circ = 0. \text{ EFC uch-}$$

burchakdan $EF=FC$, EFB uchburchakdan $EF=\sqrt{3}$, shuning uchun $AC=7+\sqrt{3}$.

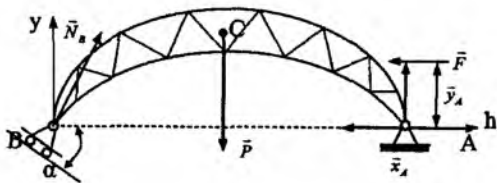
$$\begin{cases} T_2 = \sqrt{2}T_3 = 0, \\ 2T_1 + \sqrt{3}T_2 + \sqrt{2}T_3 = 2P, \\ -4 \cdot 42 + 6 \frac{\sqrt{3}}{2} T_2 + \frac{7 + \sqrt{3}}{2} \sqrt{2} T_3 = 0. \end{cases}$$

Bu tenglamalardan $T_1 = 18\text{kN}$, $T_2 = 17,7\text{kN}$, $T_3 = 12,4\text{kN}$.

6.4-masala (И.В.Мешчерский 4.22). Arka shaklidagi fermaning A nuqtasi qo'zg'almas sharnirli tayanchda va B nuqtasi gorizont bilan 30° burchak tashkil qilgan silliq tekislikdagi qo'zg'aluvchi tayanchda turadi. Oraliq $AB = 20\text{m}$. Fermaning ustidagi qori bilan birgalikda og'irligi 100kN va u AB oraliqning o'rtasidan yuqoridagi C nuqtaga qo'yilgan. Shamol bosimining teng ta'sir etuvchisi $F = 20\text{kN}$ bo'lib, AB ga parallel holda yo'nalgan, uning ta'sir chizig'i AB dan 4m uzoqlikda. Tayanchlardagi reaksiyalar topilsin (59-shakl).

Berilgan: $\alpha = 30^\circ$, $AB = 20\text{M}$, $P = 100\text{kN}$, $F = 20\text{kN}$, $h = 4\text{m}$.

Topish kerak: x_A , y_A , N_B .



59-shakl.

Yechish. Koordinatalar sistemasini shaklda ko'rsatilganday qilib tanlaymiz. Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan proektsiyalar tenglamalarini va B nuqtani markaz qilib olib, moment tenglamasini, ya'ni (2.5.2) ni tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^5 F_{ix} = N_B \cos(90^\circ - \alpha) - F - x_A = 0,$$

$$\sum_{i=1}^5 F_{iy} = N_B \cos \alpha - P - y_A = 0, \quad (a)$$

$$\sum_{i=1}^5 \text{mom}_B(\vec{F}_i) = -\frac{AB}{2}P + AB y_A + hF = 0.$$

(a) tenglamalarga berilganlarni qo'yib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}N_B - F - x_A = 0, & \frac{\sqrt{3}}{2}N_B - P + y_A = 0, \\ -10P + 20y_A + 4 \cdot F = 0. \end{cases} \quad (b)$$

(b) tenglamalarning oxirgisidan

$$y_A = \frac{1}{20\text{m}}(10\text{m} \cdot 100\text{kN} - 4\text{m} \cdot 20\text{kN}),$$

yoki

$$y_A = 46\text{kN}.$$

Buni ikkinchi tenglamaga qo'yib, N_B ni topamiz:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}N_B = P - y_A; \quad \frac{\sqrt{3}}{2}N_B = 100\text{kN} - 46\text{kN},$$

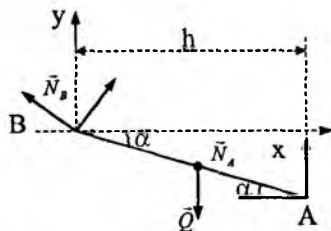
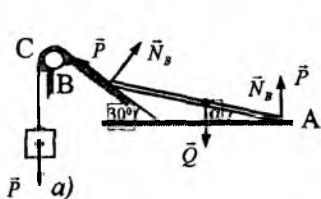
bundan $N_B = 62,4\text{kN}$.

(b) tenglamalarning birinчисidan

$$x_A = \frac{1}{2}N_B - F; \quad x_A = 11,2\text{kN}.$$

Javob: $x_A = 11,2\text{kN}$, $y_A = 46\text{kN}$, $N_B = 62,4\text{kN}$.

6.5-masala (И.В.Мещерский 4.10). Og'irligi 100N bo'lgan bir jinsli AB sterjenning bir uchi gorizontaal silliq polga, ikkinchi uchi esa gorizontga nisbatan 30° burchak tashkil qiluvchi silliq qiya tekislikka tayangan. Sterjenning B uchini C blokdan o'tgan va P yuk osilgan arqon ushlab turadi. Arqonning BC qismi qiya tekislikka parallel. Blokdagi ishqalanishni hisobga olmay, arqonga osilgan P yukning og'irligi, pol bilan qiya tekislikka tushadigan N_A va N_B bosimlar topilsin (60-shakl).



60-shakl.

Berilgan: $Q = 100\text{N}$, 30° .

Topish kerak: P , N_A , N_B .

Yechish. AB sterjenning muvozanatini tekshiramiz. P kuchni arqon bo'ylab B nuqtaga ko'chiramiz. B nuqtani koordinatalar boshi sifatida olib, koordinatalar sistemasini shaklda ko'rsatilganday qilib tanlaymiz. A va B tayanch reaksiyalarini qo'yamiz, natijada sterjen \vec{P} , \vec{Q} , \vec{N}_A va \vec{N}_B kuchlar ta'sirida muvozanatda turadi. Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan proyeksiya tenglamalarini va B nuqtaga nisbatan moment tenglamasini, ya'ni (2.5.2) tenglamalarni tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^4 F_{ix} = -P \cos 30^\circ + N_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = P \cos 60^\circ + N_B \cos 30^\circ - Q + N_A = 0; \quad (a)$$

$$\sum_{i=1}^4 \text{mom}_B(\vec{F}_i) = -\frac{h}{2}Q + hN_A = 0,$$

yoki

$$\begin{cases} \frac{1}{2}N_B - \frac{\sqrt{3}}{2}P = 0, & N_A = \frac{1}{2}Q, \\ \frac{1}{2}P + \frac{\sqrt{3}}{2}N_B - Q + N_A = 0. \end{cases} \quad (b)$$

(b) tenglamalarning uchinchisidan: $N_A = 50 \text{ N}$. Birinchi tenglamadan

$$N_B = \sqrt{3}P, \quad (c)$$

buni ikkinchi tenglamaga qo'yamiz:

$$\frac{1}{2}P + \frac{3}{2}P - Q + N_A = 0.$$

Bundan $2P = Q - N_A$ yoki $P = 25 \text{ N}$.

P ning bu qiymatini (c) ga qo'ysak

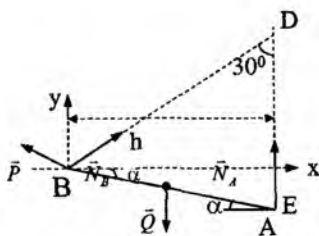
$$N_B = 25\sqrt{3} \text{ N} = 43,3 \text{ N}.$$

Endi masalani (2.5.3) tenglamalardan foydalanib yechamiz. **Moment** markazlari sifatida B, D va E nuqtalarni olamiz (61-shakl).

$$\sum_{i=1}^4 \text{mom}_B(\vec{F}_i) = -\frac{h}{2}Q + hN_A = 0,$$

$$\sum_{i=1}^4 \text{mom}_D(\vec{F}_i) = -BD \cdot P + \frac{h}{2}Q = 0,$$

$$\sum_{i=1}^4 \text{mom}_E(\vec{F}_i) = -BE \cdot N_B \cos 30^\circ - BE \cdot P \cos 60^\circ + \frac{h}{2}Q = 0. \quad (d)$$



61-shakl.

Shaklga asosan $BE=h$.

Bularni (d) tenglamalarga qo'yamiz:

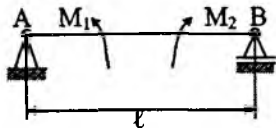
$$\begin{cases} N_A = \frac{1}{2}Q, & -2P + \frac{1}{2}Q = 0, \\ -\sqrt{3}N_B + \frac{1}{2}Q = 0, & -\sqrt{3}N_B - P + Q = 0. \end{cases}$$

Bularning birinchisidan $N_A = 50\text{N}$, ikkinchisidan $P = 25\text{N}$, uchinchisidan esa $N_B = 43,3\text{N}$ kelib chiqadi.

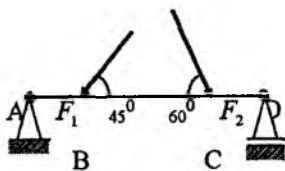
Javob: $N_A = 50\text{N}$, $N_B = 43,3\text{N}$, $P = 25\text{N}$,

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Uzunligi $\ell = 3\text{m}$ bo'lgan balkaga momentlari $M_1 = 2\text{kNm}$, $M_2 = 8\text{kNm}$ bo'lgan juft kuchlar ta'sir etadi. B tayanchning reaksiyasini toping.



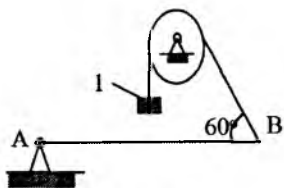
1-masala.



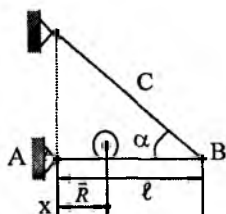
2-masala.

2. $F_1 = 84,6\text{N}$, $F_2 = 208\text{N}$ bo'lsa, D tayanchning reaksiyasini toping. $AB = 1\text{m}$, $BC = 3\text{m}$, $CD = 2\text{m}$.

3. AB balkaning og'irligi 346N , uni gorizontal holatda muvozanatda ushlab turuvchi 1 yukning og'irligini toping. AB balka bir jinsli deb olinsin.



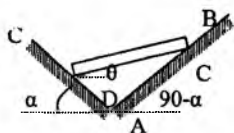
3-masala.



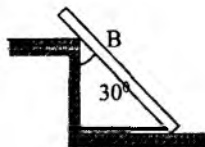
4-masala.

4. Kran gorizontal balkasining uzunligi ℓ ga teng, uning bir uchi sharnir yordamida mahkamlangan ikkinchi B uchi gorizont bilan α burchak hosil qiluvchi BC tortqich vositasida, devorga tortilib turadi. Balka ustida og'irligi R bo'lgan yuk siljiy oladi. Yukning holati A sharnirgacha bo'lgan o'zgaruvchi masofaga qarab aniqlanadi. BC tortqichning tortilish kuchi T yuk holatining o'zgarishiga qarab aniqlansin. Balkaning og'irligi hisobga olinmasin.

5. Og'irligi R bo'lgan bir jinsli AB balka vertikal tekislikda joylashgan silliq CD va DE og'ma to'g'ri chiziqlarga tiralib turadi. Bu to'g'ri chiziqlardan birinchisi gorizont bilan α burchak, ikkinchisi $90^\circ - \alpha$ burchak hosil qiladi. Muvozanat holatida balkaning gorizont bilan hosil qilgan burchagi θ hamda tayanchlarga ko'rsatilgan bosimi topilsin.



5-masala.

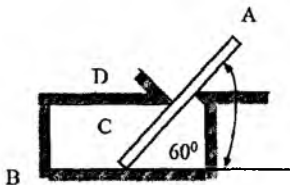


6-masala.

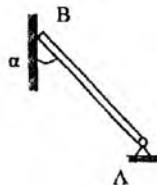
6. Og'irligi 600N , uzunligi 4m bo'lgan bir jinsli balka bir uchi bilan silliq polga va oraliqdagi B nuqtasi bilan balandligi 3m bo'lgan stolbaning uchiga tiralgan, balka vertikal bilan 30° burchak tashkil etadi. Balkani pol bo'ylab tortilgan AC arqon shu

holatda ushlab turadi. Ishqalanishni hisobga olmay, arqonning tortilish kuchi stolbaning reaksiyasi R_B va pol reaksiyasi R_C topilsin.

7. Og'irligi 200N bo'lgan bir jinsli AB balka gorizontalliq polga B nuqtada 60° burchak ostida tiralib turadi, bundan tashqari, uni ikkita C va D tayanchlar ushlab turadi. B , C va D tayanchlardagi reaksiyalar topilsin: $AB=3\text{m}$, $CB=0,5\text{m}$, $BD=1\text{m}$.



7-masala.

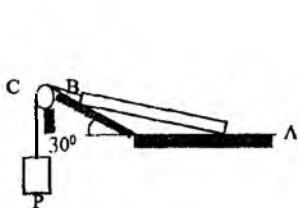


8-masala.

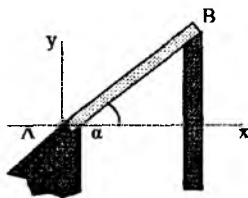
8. Og'irligi 100kN bo'lgan bir jinsli brusning B uchi silliq devorga tayangan, ikkinchi uchi A sharnirga mahkamlangan. $\alpha=60^\circ$ bo'lsa, brusning devorga beradigan bosimini aniqlang.

9. Og'irligi 100N bo'lgan bir jinsli AB sterjenning bir uchi gorizontalliq silliq polga, ikkinchi uchi esa gorizontga nisbatan 30° burchak tashkil qiluvchi silliq qiya tekislikka tayangan. Sterjenning B uchini C boltdan o'tgan va R yuk osilgan arqon ushlab turadi. Arqonning BC qismi qiya tekislikka parallel. Blokda ishqalanishni hisobga olmay, arqonga osilgan R yukning og'irligi, pol bilan qiya tekislikka tushadigan N_A va N_B bosimlar topilsin.

10. Bir tomonga nishab bo'lgan tomning stropilasi AB brusdan iborat bo'lib, uning yuqorigi B uchi silliq tayanchda erkin holatda yotadi, pastki A uchi esa devorga tiralib turadi. Tomning qiyaligi $\text{tg}\alpha=0,5$; AB brusga uning o'rtasiga qo'yilgan 9kN li vertikal kuch ta'sir qiladi. A va B nuqtalardagi tayanch reaksiyalari aniqlansin.



9-masala.



10-masala.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Tekislikda kuchlar sistemasining birinchi xil muvozanat tenglamalarini tushuntiring.

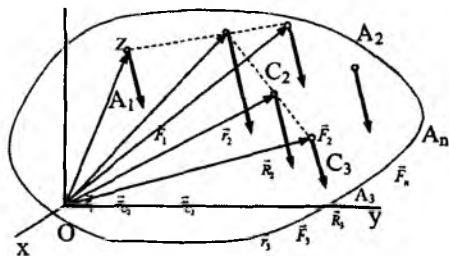
2. Tekislikda kuchlar sistemasining ikkinchi xil muvozanat tenglamalarini yozib tushuntiring.

3. Tekislikda kuchlar sistemasining uchinchi xil muvozanat tenglamalarining mohiyatini tushuntiring.

2.7. Parallel kuchlar markazi

Kuch, parallel kuchlar sistemasi, teng ta'sir etuvchi, nuqta va koordinata tekisliklariga nisbatan statik moment.

Teng ta'sir etuvchiga keltiriladigan parallel kuchlar sistemasining markaziy tushunchasini kiritaylik. Qattiq jismning A_1, A_2, \dots, A_n nuqtalarga qo'yilgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ parallel kuchlar sistemasi berilgan bo'lsin. Avval bir tomonga yo'nalgan parallel kuchlarni qaraymiz (62-shakl).



62-shakl.

\vec{F}_1 va \vec{F}_2 ikkita kuchni qo'shamiz. A_1 va A_2 nuqtalarning koordinatalarini mos ravishda $A_1(x_1, y_2, z_1)$ va $A_2(x_1, y_2, z_1)$ bilan radius-vektorlarini esa \vec{r}_1 va \vec{r}_2 bilan belgilaymiz. \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarning teng ta'sir etuvchisini \vec{R}_2 bilan belgilaymiz. U holda \vec{R}_2 kuchning moduli $R_2 = P_1 + P_2$. \vec{R}_2 kuchning qo'yilishi nuqtasini topamiz.

Shaklga asosan

$$\overline{A_1 C_2} = \vec{r}_{c_2} - \vec{r}_1, \quad \overline{C_2 A_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_{c_2}. \quad (2.7.1)$$

Ikkinchi tomondan 1-§ dagi (2.1.2) formulaga asosan C_2 nuqtaning holati quyidagi munosabatdan topiladi:

$$\frac{A_1 C_2}{P_2} = \frac{C_2 A_2}{P_1}.$$

$\overline{A_1 C_2}$, $\overline{C_2 A_2}$ va $\overline{A_1 A_2}$ vektorlar kolleniarligidan

$$\frac{\overline{A_1 C_2}}{P_2} = \frac{\overline{C_2 A_2}}{P_1}$$

yoki (2.7.1) munosabatlarga asosan

$$\frac{\vec{r}_{c_2} - \vec{r}_2}{P_2} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_{c_2}}{P_1},$$

bundan

$$\vec{r}_{c_2} = \frac{P_1 \vec{r}_1 + P_2 \vec{r}_2}{P_1 + P_2}. \quad (2.7.2)$$

Endi \vec{R}_2 va \vec{F}_3 yoki $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisini qo'yilish nuqtalarini topamiz:

$$(\vec{R}_2, \vec{F}_3) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}_3.$$

\vec{R}_2 va \vec{F}_3 bir tomonga yo'nalgan parallel kuchlar bo'lganligi uchun ularning teng ta'sir etuvchisi \vec{R}_3 ham shu yo'nalishga ega va uning moduli quyidagi formuladan topiladi:

$$R_3 = R_2 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3.$$

Teng ta'sir etuvchining qo'yilish nuqtasi

$$\vec{r}_{c_3} = \frac{R_2 \vec{r}_{c_2} + F_3 \vec{r}_3}{R_2 + F_3}$$

formuladan topiladi. (2.7.2) formulaga asosan

$$\vec{r}_{c_3} = \frac{F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2 + F_3 \vec{r}_3}{F_1 + F_2 + F_3}. \quad (2.7.3)$$

Endi to'la induksiya usulidan foydalanib, (2.7.3) formulani n ta kuch uchun ham o'rinli ekanligini isbot qilish mumkin. Buning uchun (2.7.3) formula k ta kuch uchun o'rinli deb $k+1$ ta kuch uchun ham o'rinli bo'lishini ko'ramiz. Faraz qilaylik, (2.7.3) formula k ta kuch uchun o'rinli, ya'ni

$$\vec{r}_{c_k} = \frac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2 + \dots + F_k\vec{r}_k}{F_1 + F_2 + \dots + F_k} = \frac{\sum_{i=1}^k F_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^k F_i} \quad (2.7.4)$$

bo'lsin. $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_k$ kuchlarining teng ta'sir etuvchisi \vec{R}_k shu kuchlar bilan bir xil yo'nalgan bo'lib, uning moduli quyidagiga teng:

$$R_k = F_1 + F_2 + \dots + F_k = \sum_{i=1}^k F_i.$$

Endi \vec{R}_k va \vec{F}_{k+1} kuchlarining teng ta'sir etuvchisini topamiz. \vec{R}_k va \vec{F}_{k+1} bir tomonga yo'nalgan parallel kuchlar ekanligidan teng ta'sir etuvchisi ular bilan bir xil yo'nalgan, moduli esa quyidagicha topiladi:

$$R_{k+1} = R_k + F_{k+1} = F_1 + F_2 + \dots + F_{k+1}.$$

\vec{R}_{k+1} kuchning qo'yilish nuqtasi (2.7.2) ko'ra

$$\vec{r}_{c_{k+1}} = \frac{\vec{R}_{k+1} + \vec{F}_{k+1}}{R_{k+1} + F_{k+1}}$$

bo'ladi. (2.7.4) formulga asosan esa

$$\vec{r}_{c_{k+1}} = \frac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2 + \dots + F_{k+1}\vec{r}_{k+1}}{F_1 + F_2 + \dots + F_{k+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{k+1} F_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{k+1} F_i}.$$

Shunday qilib, bir tomonga yo'nalgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ parallel kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisining yo'nalaishi berilgan

kuchlarning yoʻnalishi bilan bir xil, moduli esa modullari yigʻindisiga teng, yaʼni

$$R = \sum_{i=1}^n F_i.$$

Teng taʼsir etuvchining qoʻyilish nuqtasi quyidagi formula yordamida topiladi:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (2.7.5)$$

(2.7.5) tenglikning ikkala tomonini koordinatalar sistemasi oʻqlariga proyeksiyalab, parallel kuchlar markazining koordinatalarini topamiz:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (2.7.6)$$

bunda x_i, y_i, z_i — \vec{F}_i kuch qoʻyilgan nuqtasining koordinatalari.

Berilgan kuchlarning qoʻyilish nuqtalari atrofida bir xil burchakka burganda ularning teng taʼsir etuvchisi ham xuddi shunday burchakka oʻsha yoʻnalishda buriladi, ammo uning qoʻyilish nuqtasi oʻzgarmaydi. Demak, teng taʼsir etuvchi qoʻyilish nuqtasining holati parallel kuchlar yoʻnalishiga bogʻliq boʻlmas ekan. Bu nuqtaning holati berilgan kuchlarning modullariga va qoʻyilish nuqtalarining holatiga bogʻliqdir.

Agar qarama-qarshi tomonga yoʻnalgan parallel kuchlar sistemasi berilgan boʻlsa, ularni qarama-qarshi tomonga yoʻnalgan ikkita parallel kuchlar sistemasiga ajratamiz. Hosil boʻlgan kuchlar sistemalarining teng taʼsir etuvchilari topiladi. Natijada anti-parallel kuchlar sistemasiga kelamiz. Bu ikki kuchni ham bitta teng taʼsir etuvchiga keltirish mumkin. Uning moduli va qoʻyilish nuqtasi (2.1.3) va (2.1.4) formulalar orqali topiladi. Yuqorida

keltirilgan formulalardan foydalanishda bir tomonga yoʻnalgan kuchlarning modullari oldiga (+) ishorasini, ikkinchi tomonga yoʻnalgan kuchlarning modullari oldiga (-) ishorasini qoʻyish lozim.

(2.7.5) formuladagi $\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i$ ifodaga parallel kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan statik momenti deyiladi.

$\sum_{i=1}^n F_i x_i$, $\sum_{i=1}^n F_i y_i$, $\sum_{i=1}^n F_i z_i$ miqdorlarga parallel kuchlar sistemasining mos ravishda (yz) , (zx) va (xy) tekisliklarga nisbatan statik momentlari deyiladi.

$$(2.7.5) \text{ va } (2.7.6) \text{ lardan } \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i = \vec{r}_c \sum_{i=1}^n F_i,$$

$$\sum_{i=1}^n F_i x_i = x_c, \quad \sum_{i=1}^n F_i y_i = y_c, \quad \sum_{i=1}^n F_i z_i = z_c.$$

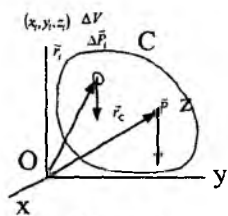
munosabatlar kelib chiqadi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Bir tomonga yoʻnalgan parallel kuchlar sistemasining teng taʼsir etuvchisi qanday topiladi?
2. Qarama-qarshi tomonga yoʻnalgan parallel kuchlar sistemasining teng taʼsir etuvchisi qanday topiladi?
3. Parallel kuchlar sistemasi teng taʼsir etuvchisi qoʻyilish nuqtasining radius-vektori qanday topiladi?
4. Parallel kuchlar sistemasi teng taʼsir etuvchisi qoʻyilish nuqtasining koordinatalari qanday topiladi?

2.8. Ogʻirlik markazi

Parallel kuchlar, parallel kuchlar markazi, zichlik, bir jinslilik
Oʻgʻirlik markazi tushunchasini kiritish uchun jismni fikran yetarlicha koʻp sondagi shunday boʻlaklarga ajratiladi, har bir boʻlakchanning hajmi (massasi) jism hajmidan juda kichik boʻlsin.



63-shakl.

(63-shakl). Har bir elementda bo‘lakchanning og‘irlik kuchini ΔP_i bilan, butun jismning og‘irlik kuchi \bar{P} bilan belgilanadi. Bo‘lakchalarning og‘irlik kuchi Yer markaziga qarab yo‘nalgan. Jism o‘lchamlari Yernikiga qaraganda juda kichik bo‘lganligi uchun bo‘lakchalarning og‘irlik kuchlarini parallel

kuchlar sistemasi deb qarash mumkin. ΔP_i parallel kuchlar sistemasining markaziga jismning **og‘irlik markazi** deyiladi. Jism og‘irlik markazining radius-vektorini (2.7.5) formuladan foydalanib topish mumkin, ya’ni

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \Delta P_i}{\sum_{i=1}^n \Delta P_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta P_i \bar{r}_i}{P}, \quad (2.8.1)$$

bunda $\bar{r}_i - i$ — elementar bo‘lakcha og‘irlik markazining radius-vektori, $P = \sum_{i=1}^n \Delta P_i$ jismning og‘irliqi, n — elementar bo‘lakchalarning soni.

Berilgan jismning hajmini V bilan, elementar bo‘lakchanning hajmi ΔV bilan va og‘irliqi ΔP bilan belgilanadi:

$$\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{dP}{dV}$$

miqdorga jismning berilgan nuqtasidagi birlik hajmining og‘irliqi (solishtirma og‘irlik) deyiladi. Ushbu

$$\rho = \frac{\gamma}{g}, \quad \left(\rho = \frac{dm}{dV} \right)$$

miqdorga jismning berilgan nuqtasidagi zichligi (birlik hajmining massasi) deyiladi.

Umumiy holda γ va ρ lar jism nuqtalari koordinatalarining funksiyasidir. Agar jism bir jinsli bo‘lsa, γ va ρ o‘zgarmas bo‘ladi.

Texnik birliklar sistemasida: ρ ning o'lchov birligi $1\text{kg}/\text{m}^3$, ρ ning o'lchov birligi $1\text{kgsek}^2/\text{m}^4$.

γ va ρ larning aniqlanishiga binoan ixtiyoriy elementar bo'lakchanning og'irligini quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$\Delta P_i = \gamma_i \Delta V_i = g_i \rho_i \Delta V_i.$$

Bunga asosan (2.8.1) tenglik quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta P_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n \Delta P_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta V_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta V_i}. \quad (2.8.2)$$

(2.8.2) formulani koordinata o'qlariga proyeksiyalab, og'irlik markazining koordinatalari topiladi, ya'ni

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta V_i x_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta V_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta V_i y_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta V_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta V_i z_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta V_i} \quad (2.8.3)$$

Jismning o'lchamlari unchga katta bo'lmaganligi uchun barcha bo'lakchalarning og'irlik kuchlarining tezlanishlarini bir xil, ya'ni $g_i = g$ deb olish mumkin. U holda (2.8.2) va (2.8.3) formulalarni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i} \quad (2.8.4)$$

va

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i x_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i y_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i z_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i}, \quad (2.8.5)$$

bunda $\sum \rho \Delta V$ — butun sistema massasi.

(2.8.5) jism massalar markazining koordinatalarini topish formulalarini ifodalaydi.

Jismning og'irlik markazi (massalar markazi) geometrik nuqta bo'lib jismning birorta ham nuqtasi bilan ustma-ust tushmasligi mumkin (masalan, halqaning og'irlik markazi).

Agar γ va ρ lar nuqta koordinatalarining uzluksiz funksiyalari bo'lsa, barcha olingan formulardagi yig'indilarni butun jism hajmi bo'yicha olingan integrallar bilan almashtirish mumkin. Masalan, bir jinsli jism uchun (2.8.4) va (2.8.5) formulalar quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{aligned} \vec{r}_c &= \frac{\int \vec{r} dV}{V}, \\ x_c &= \frac{\int x dV}{V}, \quad y_c = \frac{\int y dV}{V}, \quad z_c = \frac{\int z dV}{V}. \end{aligned} \quad (2.8.6)$$

$\int_{(V)} \vec{r} dV$ — miqdorga hajmning 0 nuqtaga nisbatan statik momenti, $\int_{(V)} x dV$, $\int_{(V)} y dV$, $\int_{(V)} z dV$ miqdorlarga esa hajmning mos ravishda (yz) , (zx) va (xy) tekisliklarga nisbatan statik momentlari deyiladi.

Agar jism sirt formasida, ya'ni uning bitta o'lchami qolgan ikkita o'lchamidan bir necha tartibga kichik bo'lsa, elementar bo'lakchanning og'irligi quyidagicha aniqlanadi:

$$\Delta P_i = \gamma_i \Delta S_i, \quad P = \gamma \cdot S,$$

bunda γ_i — birlik yuzaning og'irligi; ΔS_i — elementar bo'lakchanning yuzasi; S — butun sirtning yuzasi. U holda bir jinsli sirtning og'irlik markazi quyida ifodadan topiladi:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \Delta S_i}{S} \quad \text{yoki} \quad \vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} dS}{S} \quad (2.8.7)$$

Agar jism bir jinsli chiziqdan iborat, ya'ni bir o'lchami qolgan ikkita o'lchamidan bir necha tartibga kichik bo'lsa, elementar bo'lakchanning og'irligi quyidagiga tengdir:

$$\Delta P_i = \gamma_i \Delta \ell_i, \quad P = \gamma \ell$$

bunda γ_i — birlik uzunlikning og'irligi; $\Delta \ell_i$ — elementar bo'lakchanning uzunligi; ℓ — butun chiziq uzunligi. Bu holda og'irlik markazining radius-vektori quyidagi munosabatlardan topiladi:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \Delta \ell_i}{\ell}, \quad \vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} d\ell}{\ell} \quad (2.8.8)$$

2.9. Og'irlik markazining koordinatalarini topish usullari

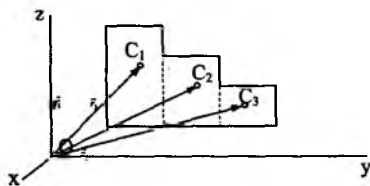
2.9.1. Bo'laklarga ajratish usuli

Berilgan jism murakkab formada bo'lib, uni chekli sondagi og'irlik markazi elementar usullar bilan topiladigan oddiy jismlarga ajratish mumkin bo'lsin. Masalan, 64-shaklda tasvirlangan jism qaralsa, uni shunday uchta bo'lakka ajratish mumkin, ularning har birini og'irlik markazi elementar usul bilan topiladi, ya'ni

$$\vec{r}_1 = \frac{\sum_{(i)} \vec{r}_i \Delta S_i}{S_1}, \quad \vec{r}_2 = \frac{\sum_{(i)} \vec{r}_i \Delta S_i}{S_2}, \quad \vec{r}_3 = \frac{\sum_{(i)} \vec{r}_i \Delta S_i}{S_3} \quad (2.9.1)$$

Berilgan jismning og'irlik markazi quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \Delta S_i}{S} = \frac{\sum_{(i)} \vec{r}_i \Delta S_i + \sum_{(i)} \vec{r}_i \Delta S_i + \sum_{(i)} \vec{r}_i \Delta S_i}{S_1 + S_2 + S_3}$$



64-shakl.

(2.9.1) munosabatlarga asosan

$$\sum_{(i)} \vec{r}_i \Delta S_i = \vec{r}_1 S_1, \quad \sum_{(i)} \vec{r}_i \Delta S_i = \vec{r}_2 S_2, \quad \sum_{(i)} \vec{r}_i \Delta S_i = \vec{r}_3 S_3.$$

Bular yuqoridagi formulaga qo'yiladi:

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{r}_1 S_1 + \vec{r}_2 S_2 + \vec{r}_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3}, \quad (2.9.2)$$

bunda $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ — lar mos ravishda 1,2,3—bo'laklar og'irlik markazlarining radius-vektorlari, S_1, S_2, S_3 lar yuzalari. (2.9.2) ga o'xshash formula hajm va chiziqlar uchun ham o'rinli.

2.9.2. Simmetriya usuli. Agar bir jinsli jism simmetriya tekisligiga, simmetriya o'qiga, simmetriya markaziga ega bo'lsa, uning og'irlik markazi mos ravishda simmetriya tekisligida, simmetriya o'qida yoki simmetriya markazida yotadi.

a) Faraz qilaylik, jism simmetriya tekisligiga ega bo'lsin. Jismning simmetriya tekisligini (xy) tekisligi deb olamiz. U holda jismning har bir (x, y, z) koordinatali ΔV zarrasiga (xy) tekisligiga nisbatan simmetrik ($x, y, -z$) koordinatali xuddi shunday ΔV hajmli zarrasi mos keladi. Shuning uchun jismning (xy) tekisligiga nisbatan statik momenti nolga teng, ya'ni $\sum z \Delta V$ bo'ladi. Og'irlik markazini topish formulasiga asosan, bundan esa og'irlik markazi (xy) tekisligida yotishi kelib chiqadi.

b) Jism simmetriya o'qiga ega bo'lsin. Simmetriya o'qini z o'qi bilan ustma-ust tushiramiz. U holda jismning har bir ΔV hajmli va (x, y, z) koordinatali zarrasiga z o'qiga nisbatan simmetrik xuddi shunday ΔV hajmli va ($-x, -y, z$) koordinatali zarrasi mos keladi,

shuning uchun $\Sigma x \Delta V = 0$, $\Sigma y \Delta V = 0$ tengliklar bajariladi. Bundan esa og'irlik markazining x va y koordinatalari nolga teng, ya'ni $x_c = 0$, $y_c = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, og'irlik markazi z o'qini ustida yotadi.

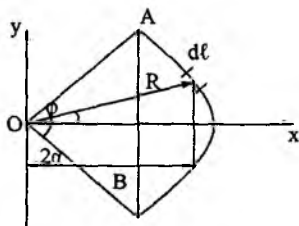
d) Jism simmetriya markaziga ega bo'lsin. Koordinatalar boshi sifatida jismning simmetriya markazi olinadi. U holda jismning har bir ΔV hajmli va \vec{r} radius-vektorli zarrasiga O nuqtaga nisbatan simmetrik xuddi shunday ΔV hajmli va $-\vec{r}$ radius-vektorli zarrasi mos keladi, shuning uchun $\Sigma \vec{r} \Delta V = 0$. Bundan esa og'irlik markazini topish formulasiga asosan $\vec{z}_c = 0$ ekani kelib chiqadi. Demak, jismning og'irlik markazi uning simmetriya markazida yotar ekan.

2.9.3. Manfiy massalar usuli. Agar biz qaraydigan jism murakkab jism, masalan, jism tutash to'ldirilgan bo'lsa, yoki tekis yuza qaraladigan holda bu yuza bir nechta teshiklarga ega bo'lsa, bunday jismning og'irlik markazini manfiy massalar usulidan foydalanib topish mumkin. Bu usulning mohiyati shundan iboratki, jism to'ldirilgan jism va qo'shimcha jismlardan iborat deb qaraladi. Og'irlik markazini hisoblashda qoshimcha jismlarning hajmi shartli ravishda manfiy ishora bilan olinadi.

2.10. Ba'zi oddiy jismlarning og'irlik markazlari

Murakkab jismlarning og'irlik markazini, ularni oddiy jismlarga ajratib hisoblash qulay bo'ladi. Shu nuqtayi nazardan amalda ba'zi oddiy jismlarning og'irlik markazini bilish talab qilinadi.

2.10.1. Aylana yoyining og'irlik markazi. R radiusli AB aylana yoyi berilgan bo'lsin. AB yoy va AB vatarga perpendikular OC radius o'tkaziladi. Ana shu OC radiusdan o'tuvchi to'g'ri chiziq simmetriya o'qi bo'ladi (65-shakl).



65-shakl.

Koordinatalar boshini aylana markazida olib, x o'qini OC o'q bo'ylab yo'naltiramiz. Og'irlik markazi x o'qining ustida yotadi ($y_c = 0$).

Yoyning markaziy burchagi 2α ga teng bo'lsin. Yoydan dl uzunlikdagi elementlar bo'lakcha ajratib olinadi. U holda yoyning og'irlik markazi quyidagicha hisoblanadi:

$$x_c = \frac{\int x dl}{\ell}, \quad y_c = 0.$$

Bunda $dl = R d\varphi$, $x = R \cos \varphi$, $\ell = 2R\alpha$ bo'lgani uchun

$$x_c = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi}{2R\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (2.10.1)$$

Shunday qilib, yoyning og'irlik markazining koordinatalari

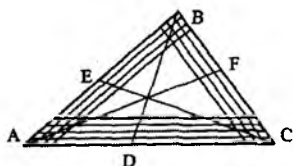
$$\left(\frac{R \sin \alpha}{\alpha}; 0 \right)$$

bo'ladi. Hususan yoy yarim aylana bo'lgan holda $\alpha = \frac{\pi}{2}$ va $\sin \alpha = 1$, natijada

$$x_c = \frac{2R}{\pi}, \quad (y_c = 0).$$

2.10.2. Uchburchakning og'irlik markazi. ABC uchburchakning og'irlik markazi topiladi (66-shakl).

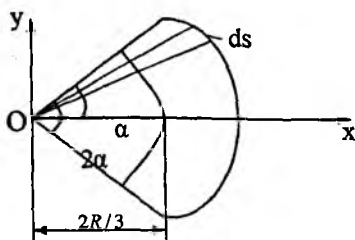
Uchburchak uning asosiga parallel kesmalar bilan cheksiz ko'p sondagi bo'lakchalarga ajratiladi. Bo'lakchalar yetarlicha ingichka bo'lsa, ularni oddiy kesma deb olish mumkin. Bu kesmalarining og'irlik markazlari ularning o'rtalarida bo'ladi. Bu kesmalar o'rtalarining geometrik o'rni esa uchburchakning medianasidir. Demak, uchburchak yuzining og'irlik markazi uning medianasida yotar ekan. Uchala medianaga



66-shakl.

ham tegishli bo'lgan nuqta, medianalarning kesishish nuqtasi bo'ladi. Demak, uchburchak yuzining og'irlik markazi uning medianalari kesishgan nuqtasida yotadi.

2.10.3. Doira sektorining og'irlik markazi. R radiusli AOB doira sektorining og'irlik markazi topiladi (67-shakl). Sektorning markaziy burchagi 2α bo'lsin.



67-shakl.

Markaziy burchakni teng ikkiga bo'luvchi OC o'q uning simmetriya o'qi bo'ladi. Koordinatalar boshini doira markazida olib, x o'qini OC o'q bo'ylab yo'naltiramiz (67-shakl).

Sektorning og'irlik markazi Ox o'qining ustida yotadi va demak $y_c = 0$. Sektor markaziy burchagi juda kichik bo'lgan sektorlarga ajratiladi. Bu sektorlarni asosi juda kichik bo'lgan uchburchaklar deb qarash mumkin. Ularning og'irlik markazlari doira markazidan $\frac{2}{3}R$ masofada yotadi. Natijada bu sektorlar og'irlik markazlarining geometrik o'rni radiusi $\frac{2}{3}R$ ga teng aylana yoyidan iborat bo'ladi.

Shunday qilib, masala markaziy burchagi 2α va radiusi $\frac{2}{3}R$ ga teng bo'lgan aylana yoyining og'irlik markazini topishga keladi. Sektorchalarning yuzlari bir xil ekanligi uchun hosil bo'lgan aylana yoyining massasi teng taqsimlangandir. $\frac{2}{3}R$ radiusli aylana yoyining og'irlik markazi (2.10.1) formuladan foydalanib topiladi:

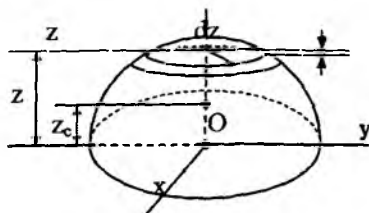
$$x_c = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (y_c = 0). \quad (2.10.2)$$

Xususiyl holda yarim doira uchun $\alpha = \frac{\pi}{2}$ va $\sin \alpha = 1$ bo'lib, (2.10.2) formuladan yarim doira og'irlik markazining absissasi $x_c = \frac{4R}{3\pi}$ ekanligi kelib chiqadi.

2.10.4. Yarim sharning og'irlik markazi. Radiusi R ga teng bo'lgan sharning og'irlik markazi topiladi (68-shakl). Oz o'qi simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltiriladi. U holda $x_c = 0$, $y_c = 0$ bo'lib, og'irlik markazining z_c koordinatasi quyidagicha topiladi:

$$z_c = \frac{1}{V} \int_V z dV. \quad (2.10.3)$$

Yarim shardan radiusi r ga, qalinligi dz ga teng bo'lgan elementar disk (shar kamari) ajratib olinadi. U holda $r = \sqrt{R^2 - z^2}$, $dV = \pi r^2 dz = \pi(R^2 - z^2)dz$.



68-shakl.

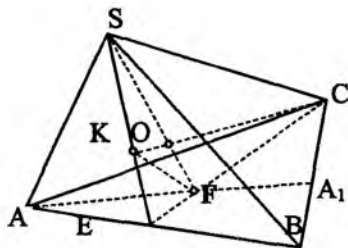
Yarim sharning hajmi $V = \frac{2}{3} \pi R^3$.

Bularni (2.10.3) ga qo'yib $z_c = \frac{1}{\frac{2}{3} \pi R^3} \int_0^{\pi} \pi (R^2 - z^2) z dz = \frac{3}{2R^3} \left(R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{3}{8} R$ topiladi. Shunday qilib, yarim shar

og'irlik markazining koordinatalari uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$z_c = \frac{3}{8} R, \quad (x_c = 0, \quad y_c = 0).$$

2.10.5. Piramidaning og'irlik markazi. Uchburchakli bir jinsli piramidaning og'irlik markazi topiladi (69-shakl).



69-shakl.

Piramidani uning ABC asosiga parallel tekisliklar bilan katta sondagi uchburchak plastinkalarga ajratiladi. Uchburchakning og'irlik markazi uning medianalari kesishgan nuqtasida ekanligidan, hosil bo'lgan biroq plastinkalarning og'irlik markazlari FS kesma ustida yotadi. Endi piramidani ABS tomoniga parallel tekisliklar bilan plastinkalarga ajratamiz. Yuqoridagi mulohazaga asosan hosil bo'lgan plastinkalarning og'irlik markazlari KC kesma ustida yotishi kelib chiqadi. Shunday qilib, piramidaning og'irlik markazi FS va KC kesmalarning kesishish nuqtasida yotadi.

$KF \parallel SC$ kesmani o'tkaziladi. Natijada $\triangle KOF \sim \triangle OSC$ uchburchaklarning o'xshashligidan

$$\frac{FO}{OS} = \frac{KF}{SC},$$

$$\frac{KF}{SC} = \frac{EK}{EC} = \frac{EF}{EC} = \frac{1}{3}.$$

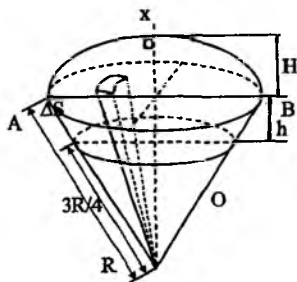
Natijada

$$\frac{FO}{OS} = \frac{KF}{SC} = \frac{1}{3} \text{ bundan } FO = \frac{1}{3} OS = \frac{1}{4} SF,$$

va nihoyat

$$FO = \frac{1}{4} SF, \quad SO = \frac{3}{4} SF. \quad (2.10.4)$$

Shunday qilib, piramidaning og'irlik markazi, piramida asosining og'irlik markazi bilan uning uchini tutashtiruvchi kesmada yotadi. Asosidan boshlab hisoblaganda shu kesmani $1/4$ nisbatda



70-shakl.

bo'ldi. Ko'pburchakli piramida va konus uchun ham (2.10.4) formula o'rinli bo'ldi.

2.10.6. Shar sektorining og'irlik markazi. R radiusli $OACB$ shar sektorining og'irlik markazini topiladi (70-shakl).

Sektor asoslari bir xil va uchi shar markazida bo'lgan katta sondagi piramidalariga ajratiladi. Hosil bo'lgan piramidalarning og'irlik markazlarini (2.10.4) formuladan foydalanib topiladi. Piramidalarning hajmlari bir xil bo'lganligi uchun ularning og'irlik markazlari $\frac{3}{4}R$ radiusli sferik segment sirti ustida yotadi. Shunday qilib, shar sektorining og'irlik markazi $\frac{3}{4}R$ bilan ustma-ust tushadi.

Hosil bo'lgan sferik segmentning balandligini h deylik, u holda $h = \frac{3}{4}H$. Sferik segmentning og'irlik markazi quyidagicha topiladi:

$$x_c = \frac{3}{4}R - \frac{h}{2}. \quad (2.10.5)$$

Koordinatalar boshini shar markazida olib, Ox o'qi shar sektorining simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltiriladi.

Shar sektorining og'irlik markazi bilan hosil bo'lgan sferik segmentning og'irlik markazi ustma-ust tushadi, shuning uchun (2.10.5) formuladan shar sektori og'irlik markazining absissasi quyidagiga teng bo'ldi:

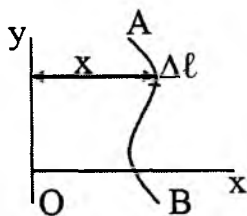
$$x_c = \frac{3}{4}R - \frac{3}{8}H = \frac{3}{8}\left(R - \frac{H}{2}\right). \quad (2.10.6)$$

(2.10.6) formulada $H=R$ deb yarim shar og'irlik markazini topish mumkin, ya'ni

$$x_c = (3/8)R.$$

2.11. Gulden-Pap teoremlari

1-teorema. Egri chiziqning o'z tekisligida yotuvchi lekin bu chiziqni kesmaydigan o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtning yuzi, shu egri chiziq uzunligi bilan egri chiziq og'irlik markazi chizgan aylana uzunligining ko'paytmasiga teng.



71-shakl.

AB egri chiziq va shu egri chiziq tekisligida yotuvchi hamda uni kesmaydigan y o'q berilgan bo'lsin (71-shakl).

AB yoyni $\Delta\ell$ uzunlikdagi bo'lakchalarga ajratamiz. yoyni Oy o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan elementar sirtning yuzi $2\pi x\Delta\ell$ ga teng bo'ladi. Butun AB egri chiziqni Oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtning yuzi quyidagiga teng:

$$S = \sum 2\pi x\Delta\ell = 2\pi \sum x\Delta\ell.$$

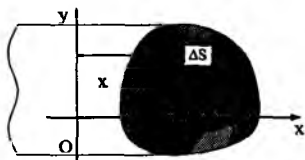
Og'irlik markazining koordinatalarini topish formulasiga asosan $\sum x\Delta\ell = x_0\ell$. x_0 — AB egri chiziq og'irlik markazining absissasi, ℓ — egri chiziqning uzunligi. Shunday qilib, AB egri chiziqning aylanishidan 71-shakl hosil bo'lgan sirtning yuzi quyidagiga teng:

$$S = 2\pi x_0\ell. \quad (2.10.7)$$

2-teorema. Yassi shaklning o'z tekisligida yotuvchi lekin shaklni kesmaydigan o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmi shu shakl yuzasi bilan shakl og'irlik markazi chizgan aylana uzunligining ko'paytmasiga teng.

(S) tekis shakl va shu shakl tekisligida yotuvchi lekin shaklni kesmaydigan y o'qi berilgan bo'lsin (72-shakl).

Berilgan shakl ΔS_i yuzali elementar bo'lakchalarga ajratiladi. Har bir elementar yuzani y o'qi atrofida aylani- shidan hosil bo'lgan jismning hajmini



72-shakl.

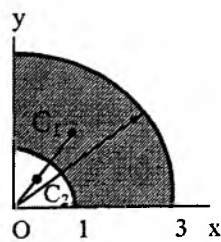
$\Delta V_i = 2\pi x_i \Delta S_i$ deb olish mumkin. U holda berilgan shaklni aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmi quyidagiga teng bo'ladi:

$$V = \sum 2\pi x_i \Delta S_i = 2\pi \sum x_i \Delta S_i.$$

Og'irlik markazining koordinatalarini topish formulasiga asosan $\sum x_i \Delta S_i = x_0 S$, bunda x_0 — berilgan shakl og'irlik markazining absissasi, S — yuzasi. Shunday qilib, (S) shaklning aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmi uchun quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$V = 2\pi x_0 S.$$

2.12. Jismlarning og'irlik markazini topishga doir masalalar



73-shakl.

2.12.1-masala (И.В.Мещерский 9.5).

73-shaklda tasvirlangan chorak halqa og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin.

Yechish. Manfiy yuzalar usulidan foydalalanib qaralayotgan yuzaning og'irlik markazi topiladi. Radiusi 3sm bo'lgan sektor yuzasini S_1 , kichik sektor yuzasini S_2 , katta sektor yuzasini og'irlik markazini koordinatalarini x_1, y_1 , kichik sektorning og'irlik markazining koordinatalarini x_2, y_2 deb belgilaymiz. Doira sektorining og'irlik markazini topish formulasiga asosan:

$$OC_1 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}; \quad R = 3 \text{ sm}; \quad \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad OC_1 = \frac{2}{3} 3 \text{ sm} \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{8 \sqrt{2}}{\pi 2} \text{ sm} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi},$$

$$OC_2 = \frac{2}{3} 1 \text{ sm} \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{8 \sqrt{2}}{3\pi 2} \text{ sm} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \text{ sm},$$

$$x_1 = OC_1 \cos 45^\circ = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{\pi} \text{ sm},$$

$$y_1 = OC_1 \sin 45^\circ = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{\pi} \text{ sm},$$

$$x_2 = OC_2 \sin 45^\circ = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{3\pi} \text{ sm}$$

$$y_2 = OC_2 = \frac{4}{3\pi} \text{ sm}, \quad S_1 = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{9\pi}{4}; \quad S_2 = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Qaralayotgan shaklning og'irlik markazi topiladi:

$$x_c = \frac{S_1 X_1 - S_2 X_2}{S_1 - S_2} = \frac{\frac{9\pi}{4} \cdot \frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{4}{3\pi}}{\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4}} \approx 1,38 \text{ sm},$$

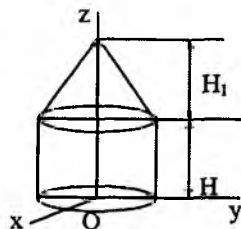
$$y_c = \frac{S_1 Y_1 - S_2 Y_2}{S_1 - S_2} = \frac{\frac{9\pi}{4} \cdot \frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{4}{3\pi}}{\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4}} \approx 1,38 \text{ sm}.$$

2.12.2-masala (O.Ə.Kene 9.5). Silindr va konusdan tashkil topgan bir jinsli jism og'irlik markazining koordinatalari topilsin. Konus va silindrning radiuslari bir xil va balandliklari $H_1 = 2H = 0,4\text{m}$.

Yechish. Jism simmetriya o'qiga ega, shuning uchun simmetriya o'qi bo'ylab Oz o'qini yo'naltiramiz. Natijada $x_c = 0$; $y_c = 0$. Murakkab hajmning og'irlik markazini topish formulasiga asosan:

$$z_c = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V_1 + V_2},$$

bunda V_1 — silindrning hajmi z_1 — silindr og'irlik markazining koordinatasi V_2 — konusning hajmi, z_2 — konus og'irlik markazining koordinatasi



74-shakl.

$$V_1 = \pi r^2 H; \quad z_1 = \frac{H}{2}; \quad V_2 = \pi r^2 H_1; \quad z_2 = H_1 + H.$$

$$z_c = \frac{\pi r^2 H \cdot \frac{H}{2} + \frac{1}{3} \pi r^2 H_1 \left(\frac{1}{4} H_1 + H \right)}{\pi r^2 H + \frac{1}{3} \pi r^2 H_1} =$$

$$= \frac{0,2 \cdot 0,1 + \frac{0,4 \cdot 0,3}{3}}{0,2 + \frac{0,4}{3}} = \frac{0,06 + 0,12}{1} = 0,18.$$

Javob. $x_c = y_c = 0; \quad z_c = 0,18.$

2.12.3-masala (И.В.Мещерский 9.1). Sterjenli *AFBD* konturning og'irlik markazining vaziyatini aniqlaymiz. Kontur $FD=R$ radiusli aylananing to'rtidan biriga teng, *ADB* yoy va diametiri *AB* vatar bo'lgan *AFB* yarim aylana yoyidan tashkil topgan. Sterjenlarning chiziqli zichligi bir xil.

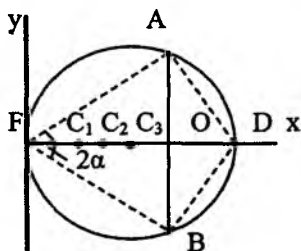
Yechish. Konturni ikki qismga *AFB* yarim aylana va *ADB* yoylarga bo'lamiz. Koordinata boshini *F* nuqtada olib, *x* o'qini konturning simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltiramiz. U holda kontur og'irlik markazining ordinatasi $y_c = 0$ bo'ladi. Og'irlik markazining absissasini bo'laklarga ajratish usulidan foydalanib topiladi, ya'ni

$$x_c = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2}{l_1 + l_2}. \quad (a)$$

Bunda x_1 —*AFB* yarim aylananing og'irlik markazining absissasi, l_1 — uzunligi, x_2 —*ADB* yoyning og'irlik markazining absissasi, l_2 esa uzunligi.

(2.10.1) formuladan foydalanib, *ADB* yoyning og'irlik markazining absissasi topiladi:

$$x_2 = FD \frac{\sin \alpha}{\alpha}; \quad \alpha = \frac{\pi}{4};$$



75-shakl.

$$FD = R, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Demak,

$$x_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R. \quad (b)$$

Yoyning uzunligi

$$l_2 = \frac{\pi R}{2}.$$

Yarim aylaning radiusi $OA=OB=OF=r$ bilan belgilanadi (75-shakl). U holda $\angle DAB = 22^\circ 30'$ bo'ladi. $\triangle OAD$ dan

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \text{ natijada } OD = r \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

Shaklga asosan $r + OD = R$ yoki

$$r + r \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = R \quad \text{bundan} \quad r = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Yarim aylana uchun $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = 1$. (2.10.1) formulaga asosan

$$OC_1 = \frac{2r}{\pi} = \frac{\sqrt{2}R}{\pi}, \quad x_1 = r - \frac{\sqrt{2}R}{\pi} = \frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}R}{\pi} = \frac{\pi - 2}{\sqrt{2}\pi} R. \quad (d)$$

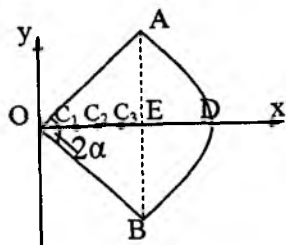
Yarim aylana uzunligi

$$l_1 = \pi r = \frac{R\pi}{\sqrt{2}} \quad (e)$$

(b), (c), (d) va (e) ifodalarni (a) ga qo'yamiz:

$$x_c = \frac{\frac{\pi - 2}{\sqrt{2}\pi} R \cdot \frac{R\pi}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R \cdot \frac{\pi R}{2}}{\frac{R\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi - 2 + 2\sqrt{2}}{(\sqrt{2} - 1)\pi} R = 0,524R.$$

2.12.4-masala (И.В.Меншчерский 9.3). Radiusi $AO = 30\text{sm}$ bo'lgan doiraviy segment yuzining C og'irlik markazini topamiz. Koordinata boshini doira markazida olib, x o'qini segmentning



76-shakl.

simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltiramiz. U holda $y_c = 0$. Yuzaning og'irlik markazi manfiy massalar usulidan foydalanib topiladi. Segment yuzi sektorgacha to'ldiramiz va uchburchak yuzini manfiy ishora bilan olamiz, ya'ni

$$x_c = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2}. \quad (a)$$

Bunda x_1 — sektor yuzasining og'irlik markazining absissasi, S_1 — sektor yuzi x_2 — uchburchak yuzining og'irlik markazining absissasi, S_2 — uchburchak yuzi.

(2.10.1) formulaga asosan:

$$x_1 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}; \quad 2\alpha = \frac{\pi}{3}; \quad \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

va demak

$$x_1 = \frac{2R}{\pi}. \quad (b)$$

Sektorning yuzi

$$S_1 = \frac{\pi R^3}{6}. \quad (c)$$

Endi uchburchakning og'irlik markazining absissasi topiladi. AOB uchburchak teng tomonli bo'lganligi uchun $AB=AO=BO=R$

$$AE = \frac{AB}{2} = \frac{R}{2}$$

u holda

$$OE = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} R.$$

Uchburchakning og'irlik markazini topish formulasiga asosan

$$x_2 = \frac{2}{3} OE = \frac{\sqrt{3}}{3} R. \quad (d)$$

Uchburchakning yuzi

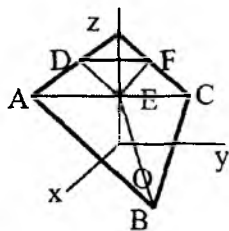
$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2. \quad (e)$$

(b),(c),(d) va (e) ifodalarni (a) ga qo'yib hisoblanadi:

$$x_c = \frac{\frac{\pi R^2}{6} \cdot \frac{2R}{\pi} - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} R}{\frac{\pi R^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2} = R \frac{1}{2\pi - 3\sqrt{3}} \approx 27,7 \text{ sm.}$$

2.12.5-masala (И. В. Мещерский 9.23).

Asosiga parallel qilib kesilgan bir jinsli $ABCDEF$ tetraedr uchun yuza $ABC = \alpha$, $DEF = b$, ularning orasidagi masofa h berilgan ABC asosdan kesik tetraedrning og'irlik markazigacha bo'lgan masofani toping (77-shakl).



77-shakl.

Yechish. Kesik piramida ostki asosining massalar markazini koordinatalar boshi qilib olamiz. (xy) tekisligi sifatida ABC uchburchak tekisligini olamiz. Tetraedrning og'irlik markazi uning balandligida yotadi. Chunki tetraedr bir jinsli.

Demak, $x_c = 0$, $y_c = 0$.

$ABCD$ tetraedrning og'irlik markazini z_1 bilan, hajmini V bilan qo'shimcha $DEFC$ tetraedrning og'irlik markazini z_2 bilan hajmi V_2 bilan belgilanadi.

Manfiy massalar usuliga asosan:

$$z_c = \frac{V_1 z_1 - V_2 z_2}{V_1 - V_2} \quad (a)$$

$O_1 S = h_1$ deb belgilab olamiz. U holda $OS = h + h_1$ geometriyadan ma'lumki,

$$\frac{a}{b} = \frac{(h + h_1)^2}{h_1^2} \text{ bundan } (a - b)h_1^2 - 2bh_1 - bh_1^2 = 0$$

bundan $h_{1,2} = \frac{bh + h\sqrt{ab}}{a - b}$, $\sqrt{ab} > b$ bo'lganligi uchun

$$h_1 = h \frac{b + \sqrt{ab}}{a - b}.$$

Shunday qilib

$$OS = h + h \frac{b + \sqrt{ab}}{a - b} + \frac{h(a + \sqrt{ab})}{a - b}.$$

CABD tetraedrning og'irlik markazi

$$z_1 = \frac{1}{4} OS = \frac{h(a + \sqrt{ab})}{4(a - b)} \quad (b)$$

ga teng. Hajmi $V_1 = \frac{1}{3} a \cdot OC = \frac{ah(a + \sqrt{ab})}{3(a - b)} \quad (c)$

CDFE tetraedrning og'irlik markazi

$$z_2 = h + \frac{1}{4} h_1 = \frac{4ah - 3bh + h\sqrt{ab}}{4(a - b)} \quad (d)$$

bo'ladi. Hajmi

$$V_2 = \frac{1}{3} bh_1 = \frac{bh(b + \sqrt{ab})}{3(a - b)}. \quad (e)$$

(b),(c),(d) va (e) ifodalarni (a) ga qo'yamiz. Natijada berilgan hajmning og'irlik markazi

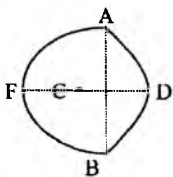
$$z_c = \frac{\frac{ah(a + \sqrt{ab})}{3(a - b)} \cdot \frac{h(a + \sqrt{ab})}{4(a - b)} - \frac{bh(b + \sqrt{ab})}{3(a - b)} \cdot \frac{h(4a + \sqrt{ab} - 3b)}{4(a - b)}}{\frac{ah(a + \sqrt{ab})}{3(a - b)} - \frac{bh(b + \sqrt{ab})}{3(a - b)}}$$

ga teng bo'ladi. Ba'zi soddalashtirishlardan so'ng

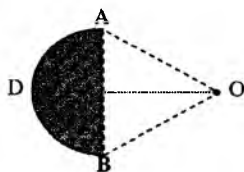
$$z_c = \frac{ha + 2\sqrt{ab} + 3b}{4a + \sqrt{ab} + b}, \quad x_c = 0, \quad y_c = 0.$$

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Sterjenli *AFBD* konturning *C* og'irlik markazining vaziyati aniqlansin. Kontur $FD=R$ radiusli aylananing to'rtidan biriga teng bo'lgan *ADB* yoy va diametri *AB* vatar bo'lgan *AFB* yarim aylana yoyidan tashkil topgan. Sterjenlarning chiziqli zichligi bir xil.

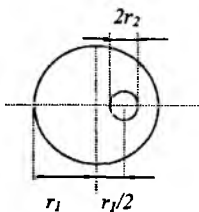


1-masala.

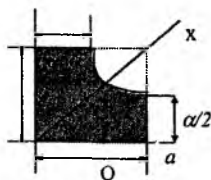


2-masala.

2. Radiusi $AO = 30$ sm bo'lgan ADB doiraviy segment yuzining C og'irlik markazi topilsin; burchak $AOB = 60^\circ$.



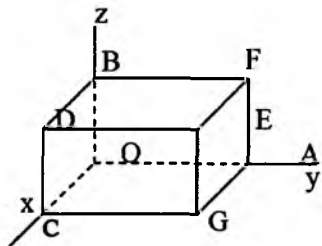
3-masala.



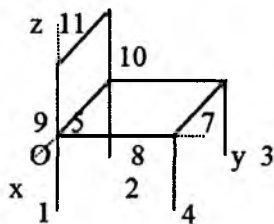
4-masala.

3. Yumaloq teshikli bir jinsli disk og'irlik markazining koordinatalarini aniqlang. Diskning radiusi r_1 ga, teshikning radiusi r_2 ga teng, bu teshikning markazi $r_1/2$ masofada turadi deb hisob-lansin.

4. Rasmda ko'rsatilgan shakl og'irlik markazining koordinatalari topilsin.



5-masala.

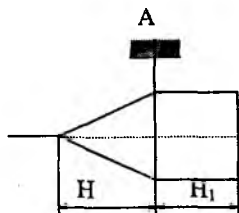


6-masala.

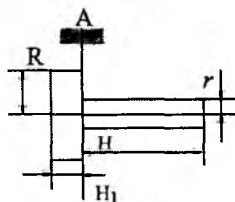
5. To'g'ri burchakli parallelepiped konturi og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin: parallelepiped qirralari bir jinsli brus-

lardan iborat bo'lib, ularning uzunliklari: $OA = 0,8\text{ m}$, $OB = 0,4\text{ m}$, $OC = 0,6\text{ m}$. Bu bruslarning og'irliklari mos ravishda: $OA = 250\text{ N}$, OB , OC va CD lar 75 N dan; $OG = 200\text{ N}$, $AF = 125\text{ N}$, AG va $GE = 50\text{ N}$; BD , BF , DE va EF lar 25 N dan.

6. Stul ko'rinishidagi jism og'irlik markazining koordinatalari topilsin; bu jism bir xil uzunlik va bir xil og'irlikdagi sterjenlardan tuzilgan. Sterjenlarning uzunligi 44 sm .



7-masala.



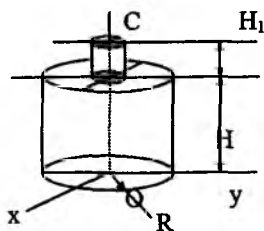
8-masala.

7. Bir jinsli jism konus va silindrdan tashkil topgan. Agar jismning simmetriya o'qi gorizontal bo'lsa, konusning H balandligini toping. $H_1 = 0,3\text{ m}$.

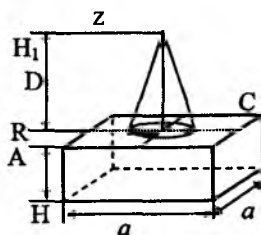
8. Ikkita silindrdan tashkil topgan jism A nuqtasida osib qo'yilgan. Jismning simmetriya o'qi gorizontal, silindrning balandligi $H_1 = 0,5\text{ m}$, radiusi $R = 32$ bo'lsa, H balandlikni toping.

9. Jism bir jinsli to'g'ri burchakli parallelepipeddan va bir jinsli konusdan tashkil topgan. Agar jismning og'irlik markazi $ABCD$ tekislikda yotsa, konusning R radiusini toping. $N_1 = 3\text{ N}$, $a = 2\text{ m}$.

10. Figuraning shtrixlangan yuzasining og'irlik markazining u_x koordinatasini toping. $R = 0,99\text{ m}$, $r = 0,33\text{ m}$.



7-masala.



8-masala.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Jismning og'irlik markazi umumiy holda qanday topiladi?*
2. *Bir jinsli hajmning og'irlik markazi qanday topiladi?*
3. *Bir jinsli sirtning og'irlik markazi qanday topiladi?*
4. *Bir jinsli egri chiziqning og'irlik markazi qanday topiladi?*
5. *Bo'laklarga ajratish usulini tushuntirib bering.*
6. *Manfiy masalalar usulini tushuntirib bering.*
7. *Simmetriya usulini tushuntirib bering.*
8. *Gulden-Pap teoremlarini tahlil qiling.*

III BOB. TAQSIMLANGAN KUCHLAR SISTEMASI

Statikada qattiq jismning birorta nuqtasiga qo'yilgan jamlangan kuch qaraladi. Haqiqatda esa kuch qattiq jismning biror hajm yoki yuza yoki biror egri chiziq bo'lagiga qo'yilgan bo'ladi. Bunday kuchga taqsimlangan kuch deyiladi. Nazariy mexanika aksioma va teoremlari jamlangan kuchlar uchun beriladi, shu sababli taqsimlangan kuchdan jamlangan kuchga o'tish usullarini qarab chiqishga to'g'ri keladi.

Taqsimlangan kuchlar o'zining taqsimlanish intensivligi bilan tavsiflanadi. Hajm birligiga, yuza birligiga yoki uzunlik birligiga to'g'ri keluvchi kuchga *taqsimlangan kuch intensivligi* deyiladi. Asosan taqsimlangan parallel kuchlar ko'p uchraydi. Taqsimlangan parallel kuchlarga jismning butun hajmi bo'ylab taqsimlangan hajmiy kuchlar misol bo'la oladi. Suyuqlikning idish tubiga va devorlariga beradigan bosimi sirt bo'ylab taqsimlangan kuchlarga, ingichka simning og'irlik kuchi egri chiziq bo'lagi bo'ylab taqsimlangan kuchga misol bo'ladi.

Biz quyida egri chiziq bo'yicha taqsimlangan va intensivligi o'zgarmas yoki chiziqli qonun bilan taqsimlangan kuchlarni qaraymiz.

3.1. Taqsimlangan kuchlar

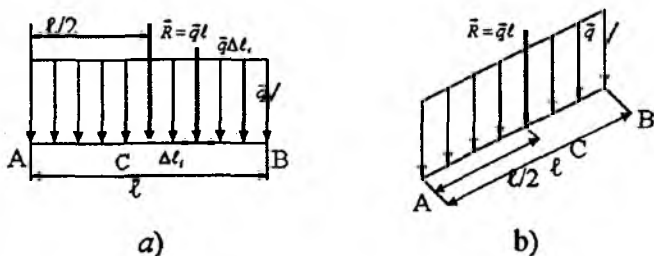
Kuch, kuch intensivligi, teng ta'sir etuvchi, tekis va chiziqli qonun bilan taqsimlanish, reaksiya kuchi, reaksiya momenti.

3.1.1. To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha doimiy intensivlik bilan taqsimlangan parallel kuchlar. To'g'ri chiziqning uzunligi l ga teng bo'lgan AB kesmasi bo'ylab \bar{q} doimiy intensivlik bilan taqsimlangan kuchni qaraymiz (78- a shakl). AB kesma uzunligi kesma uzunligiga nisbatan yetarlicha kichik bo'lakchalarga ajratiladi. Har bir bo'lakchaga $\bar{q}\Delta\ell_i$ kuch ta'sir qiladi. Bunda $\Delta\ell_i$ uzunlik yetarlicha kichik, shuning uchun $\bar{q}\Delta\ell_i$ ni jamlangan kuch deb qarash mumkin. Shunday yo'l bilan hosil qilingan $\bar{q}\Delta\ell_i$ parallel kuchlar sistemasi bitta teng ta'sir etuvchiga keltiriladi, natijada

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{q}\Delta\ell_i = \bar{q} \sum_{i=1}^n \Delta\ell_i = \bar{q}l. \quad (3.1.1)$$

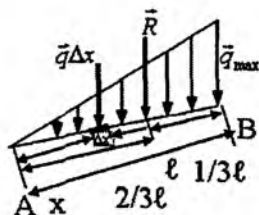
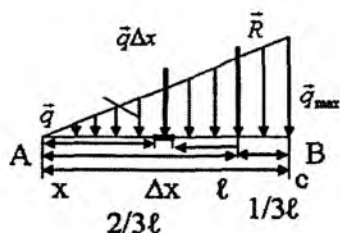
Teng ta'sir etuvchi \bar{R} kuch taqsimlanish intensivligi o'zgar-mas bo'lganligi uchun AB kesmaning o'rtasiga qo'yilgan bo'ladi. Uning moduli AB kesma va \bar{q} vektorga qurilgan to'g'ri to'rtbur-chakning yuziga teng.

Agar o'zgar-mas insensivlik bilan taqsimlangan parallel kuchlarga to'g'ri chiziqning AB kesmasi og'ma ravishda joylashgan bo'lsa, teng ta'sir etuvchining moduli ql ga teng, ammo paralle-logrammning yuzasiga teng bo'lmaydi. Teng ta'sir etuvchining ta'sir chizig'i AB kesmaning o'rtasidan o'tadi (78- b shakl).



78-shakl.

3.1.2. To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha taqsimlanish intensivligi chiziqli qonun bilan o'zgaruvchi parallel kuchlar. Chiziqli qonun bilan taqsimlangan parallel kuchlarni qaraymiz (79- a shakl).



79-shakl.

Bunday taqsimlanishni uchburchak qonuni deyiladi. Uchburchak qonuni bilan taqsimlangan parallel kuchlar moduli

$$R = \frac{q_{\max}}{2} \ell \quad (3.1.2)$$

bo'lgan teng ta'sir etuvchiga keltiriladi. Haqiqatan ham, AB kesmani uzunlikdagi bo'lakchalarga ajratib, har bir bo'lakchaga to'g'ri keluvchi kuchlar qo'shiladi va $\Delta x \rightarrow 0$ da limitga o'tamiz. U holda

$$R = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \bar{q} \Delta x = \int_0^{\ell} q dx.$$

79-a shakldagi uchburchaklarning o'xshashligidan

$\frac{q}{x} = \frac{q_{\max}}{\ell} \Rightarrow q = \frac{q_{\max}}{\ell} x$. q ning bu qiymatini yuqoridagi integralga qo'yib hisoblaniladi:

$$R = \int_0^{\ell} \frac{q_{\max}}{\ell} x dx = \frac{q_{\max}}{\ell} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\ell} = \frac{q_{\max}}{2} \ell.$$

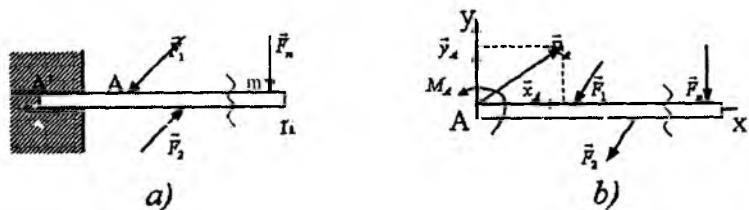
Teng ta'sir etuvchining qo'yilish nuqtasi uchburchak asosidan boshlab hisoblaganda $(1/3)\ell$ masofada, uchburchak uchidan hisoblaganda $(2/3)\ell$ masofada bo'ladi.

Teng ta'sir etuvchining moduli \bar{q}_{\max} vektor hamda A va B nuqtalarga qurilgan uchburchak yuziga teng.

Chiziqli qonun bilan taqsimlangan parallel kuchlar AB kesmaga perpendikular bo'lmasa teng ta'sir etuvchining moduli

$R = \frac{q_{\max}}{2} \ell$ ga teng, lekin uchburchak yuziga teng emas, qo'yilish nuqtasi AB kesmaning oldingi holatidagidek bo'laklarga ajraladi.

3.1.3. Balkaning qistirilgan nuqtasining reaksiyasi. Balkaning uchlaridan birining $A'A$ qismi devorga qistirilgan (80-shakl) hamda unga $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar qo'yilgan bo'lsin. Shu $A'A$ qismining reaksiyasi topiladi. Balkaning $A'A$ qismiga taqsimlangan kuchlar ta'sir qiladi. Bu kuchlarni teng ta'sir etuvchiga keltirganda bitta \vec{R}_A kuchga va M_A momentga ega bo'lamiz.



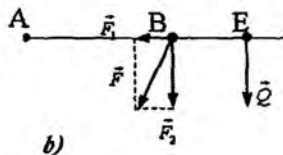
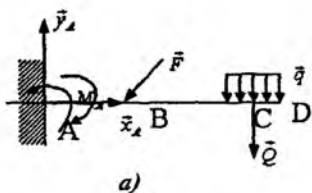
80-shakl.

Shunday qilib, balkani qistirilishi sharnirdan shu bilan farq qilarganki, qistirilgan nuqtada \vec{R}_A reaksiyadan tashqari momenti M_A ga teng bo'lgan juft kuch hosil bo'ladi. M_A moment qo'yilgan kuchlar ta'siridan balkaning aylanish yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi.

3.2. Taqsimlangan kuchlarga doir masalalar

Taqsimlangan kuchlar mavzusiga doir masalalarni yechib ko'rsatamiz.

3.2.1-masala (O.Ə.Kene 2.4.34). AD balkaga momenti $M = 200 N \cdot m$ bo'lgan juft kuch, intensivligi $q = 20 N / m$ bo'lgan taqsimlangan kuch va F kuch qo'yilgan. Balkaning qistirilgan nuqtasining reaksiya momenti $650 N \cdot m$ bo'lishi uchun \vec{F} kuchning miqdori qanday bo'lishi kerak (81-shakl). O'lchamlar: $AB=BC=CD=2m$.



81-shakl.

Berilgan: $M = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$, $q = 20 \text{ N} / \text{m}$, $M_A = 650 \text{ N} \cdot \text{m}$,
 $AB=BC=CD=2\text{m}$. Topish kerak: F .

Yechish. Noma'lum miqdorlar uchta: \bar{x}_A, \bar{y}_A va \bar{F} . Lekin bizdan faqat bitta \bar{F} kuchni topish talab qilingan. Agar A nuqtaga nisbatan moment tenglamasi tuzilsa, bir noma'lumli bitta tenglama hosil bo'ladi, ya'ni

$$M_A - M + \text{mom}_A(\bar{F}) + \text{mom}_A(\bar{Q}) = 0, \quad (\text{a})$$

bunda

$$\text{mom}_A(\bar{F}) = \text{mom}_A(\bar{F}_2) = -AB \cdot \bar{F}_2 = -AB \cdot F \cos 30^\circ.$$

(3.1.1) formulaga asosan

$$Q = q \cdot CD = 20 \text{ N} / \text{m} \cdot 2\text{m} = 40 \text{ N}, \quad \text{mom}_A(\bar{Q}) = -AE \cdot Q.$$

Bularni (a) tenglamaga qo'yiladi:

$$M_A - M - AB \cdot F \frac{\sqrt{3}}{2} - AE \cdot Q = 0$$

yoki $650 \text{ N} \cdot \text{m} - 200 \text{ N} \cdot \text{m} - \sqrt{3}mF - 5m \cdot 40 \text{ N} = 0$, bundan

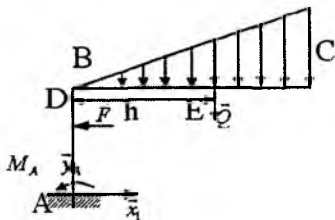
$$F = \frac{250}{\sqrt{3}} \text{ N} = 144 \text{ N}.$$

3.2.2-masala (O.Ə.Kene 2.4.47). Chiziqli qonun bilan taqsimlangan kuchning eng katta qiymati $q_{\text{max}} = 400 \text{ N} / \text{m}$ va balkaning qistirilgan A uchida hosil bo'ladigan moment $300 \text{ N} \cdot \text{m}$ ni muvozanatlashtiruvchi F kuchning qiymati topilsin (82-shakl). $AB=3\text{m}$, $BD = 1\text{m}$, $BC = 2,4\text{m}$.

Berilgan: $M_A = 300 \text{ N} \cdot \text{m}$,
 $q_{\max} = 400 \text{ N} / \text{m}$, $AB = 3 \text{ m}$, $BD = 1 \text{ m}$,
 $BC = 2,4 \text{ m}$.

Topish kerak: F .

Yechish. Qurilma qo'yilgan aktiv kuchlar ta'siridan soat mili yo'nalishida aylanishga intiladi, shuning uchun A nuqtada hosil bo'ladigan reaksiya momentining yo'nalishi bu yo'nalishga qarama-qarshi bo'lishi kerak. Taqsimlangan parallel kuchlarning teng ta'sir etuvchisi (3.1.2) formulaga asosan



82-shakl.

$$Q = \frac{q_{\max} BC}{2} = \frac{400 \text{ N} / \text{m} \cdot 2,4 \text{ m}}{2} = 480 \text{ N}.$$

Teng ta'sir etuvchining qo'yilish nuqtasi

$$BE = h = \frac{2}{3} BC \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 = 1,6 \text{ m}.$$

A nuqtaga nisbatan moment tenglamasini tuziladi:

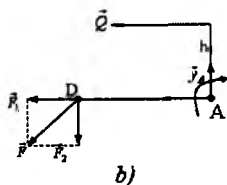
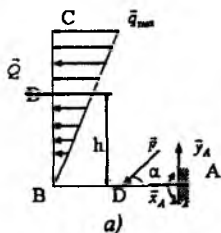
$$M_A + AD \cdot F - hQ = 0, \quad AD = 2 \text{ m}.$$

Berilganlarni bu tenglamaga qo'yamiz:

$$300 \text{ N} \cdot \text{m} + 2 \text{ m} \cdot F - 1,6 \text{ m} \cdot 480 \text{ N} = 0.$$

Bundan $2F = (768 - 300) \text{ N}$, $F = 234 \text{ N}$.

3.2.3-masala (O.Ə.Kene 2.4.49). Taqsimlangan parallel kuch intensivligi $q_{\max} = 40 \text{ N} / \text{m}$, $F = 150 \text{ N}$ va o'lchamlar $AD = BD = 1 \text{ m}$, $BC = 3 \text{ m}$ bo'lsa, A nuqtada hosil bo'ladigan reaksiya momenti topilsin (83-shakl).



83-shakl.

Berilgan: $q_{\max} = 40 \text{ N/m}$, $F = 150 \text{ N}$, $AD=BD=1 \text{ m}$, $BC=3 \text{ m}$, $\alpha = 300$.

Topish kerak: M_A .

Yechish. Parallel kuchlarning teng ta'sir etuvchisi (3.1.2) formulaga asosan $Q = \frac{1}{2} BC q_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ m} \cdot 4 \text{ N/m} = 60 \text{ N}$.

Teng ta'sir etuvchining qo'yilish nuqtasi topiladi:

$$h = BD = \frac{2}{3} BC = 2 \text{ m}.$$

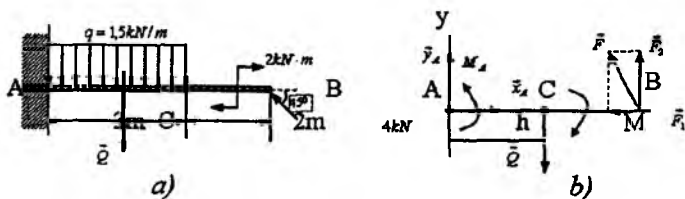
A nuqtaga nisbatan moment tenglamasi

$$-M_A + Qh + F_2 AD = 0, \quad F_2 = F \cos 60^\circ = \frac{1}{2} F.$$

Bundan

$$M_A = 60 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 150 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 195 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad M_A = 195 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

3.2.4-masala (И.В.Мешчерский). То'plangan kuch, tekis taqsimlangan yuk va juft kuch ta'siridagi shaklda tasvirlangan konsol balkaning qistirib mahkamlangan uchidagi reaksiya kuchlari aniqlansin (84-shakl).



84-shakl.

Yechish. Koordinatalar sistemasi shaklda ko'rsatilganday qilib tanlanadi. Tanlangan sistemaga nisbatan proyeksiya tenglamalarini va A nuqtaga nisbatan moment tenglamasi tuziladi:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 F_{ix} = x_A - F_1 = 0, \\ \sum_{i=1}^5 F_{iy} = y_A - Q + F_2 = 0, \\ \sum_{i=1}^5 \text{mom}_A(\vec{F}_i) = M_A - AC \cdot Q + ABF_1 = 0. \end{cases} \quad (a)$$

(a) tenglamalarning birinchi ikkitasidan

$$x_A = F_1 = F \cos 45^\circ = 2,8 \text{ kN};$$

$$y_A = Q - F_2 = Q - F \cos 45^\circ = 4,5 \text{ kN} - 2,8 \text{ kN} = 1,7 \text{ kN},$$

bunda $Q = 3 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ kN} = 4,5 \text{ kN}$.

(a) tenglamalarning ukinchisidan

$$M_A = 1,5 \text{ m} \cdot 4,5 \text{ kN} - 5 \text{ m} \cdot 2,8 \text{ kN} = -5,35 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

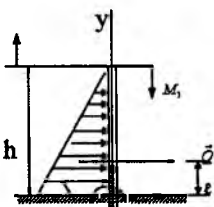
Javob. $x_A = 2,8 \text{ kN}$, $y_A = 1,7 \text{ kN}$, $M_A = -5,35 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

3.2.5-masala (И.В.Мещерский 4.30). Shaklda tasvirlangan juft kuch va uchburchak qonuni bilan taqsimlangan yuk ta'sirida bo'lgan konsol balka qistirilgan uchining reaksiya kuchlari topilsin (85-shakl).

Berilgan: $M_1 = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $h = 12 \text{ m}$, $q_{\max} = 1,5 \text{ kN} / \text{m}$.

Topish kerak: x_A , y_A , M_A .

Yechish. Koordinatalar sistemasini shaklda ko'rsatilganday qilib tanlaymiz. Uchburchak qonuni bilan taqsimlangan parallel kuchlarning teng ta'sir etuvchisini topish formulasi (3.1.2) ga asosan



85-shakl.

$$Q = \frac{q_{\max} \cdot h}{2} = \frac{1,5 \text{ kN} / \text{m} \cdot 12 \text{ m}}{2} = 9 \text{ kN}.$$

Teng ta'sir etuvchining qo'yilish nuqtasi topiladi:

$$\ell = \frac{1}{3} h = 4 \text{ m}.$$

Endi tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan proyeksiya tenglamalarini va A nuqtaga nisbatan moment tenglamasi tuziladi:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 F_{ix} = x_A + Q = 0; & \sum_{i=1}^3 F_{iy} = y_A = 0; \\ \sum_{i=1}^n \text{mom}_A(\vec{F}_i) = -Q\ell - M_1 + M_A = 0. \end{cases} \quad (a)$$

(a) tenglamalarning birinchisidan

$$x = -Q = -9kN,$$

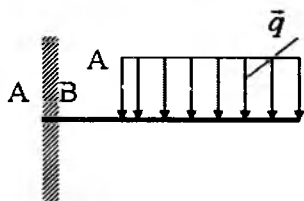
uchinchisidan

$$M = M_1 + Q \cdot \ell; \quad M = 40kN \cdot m.$$

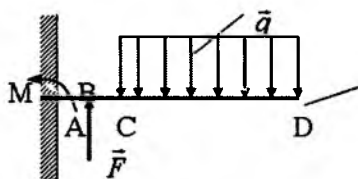
Javob: $x_A = -9kN, \quad y_A = 0, \quad M = 40kN \cdot m.$

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Balkaning mahkamlangan A nuqtasidagi reaksiya kuchining momenti 400 Nm bo'lsa, taqsimlangan kuchning intensivligini toping. $AB=2\text{m}, BC=4\text{m}$.



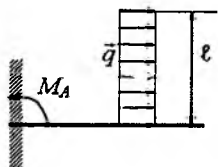
1-masala.



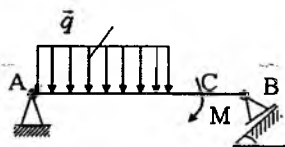
2-masala.

2. AD balkaning mahkamlangan A nuqtasidagi moment 240Nm taqsimlangan kuchning intensivligi $q=40\text{N/m}$ bo'lsa, F vertikal kuchni toping. $CD = 3\text{m}, AB=BC=1\text{m}$.

3. Taqsimlangan kuchning intensivligi qanday bo'lganda, A bog'lanishda hosil bo'ladigan moment $M_A = 200\text{Nm}$ bo'ladi. $\ell = 1\text{m}$.



3-masala.

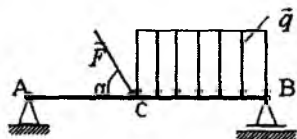


4-masala.

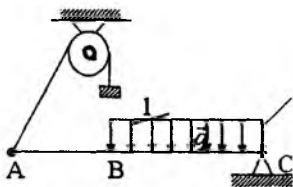
4. B tayanchning reaksiyasi 250N , taqsimlangan kuchning intensivligi $q=2\text{N/m}$ bo'lsa, M momentni toping.

5. AB balkaga intensivligi $q=2\text{N/m}$ bo'lgan taqsimlangan kuch va $F=6\text{N}$ jamlangan kuch ta'sir etadi. $AC=1/3 AB$ va $\alpha=45^\circ$ bo'lsa, B tayanchning reaksiyasini toping.

6. AC balka C sharnir bilan mahkamlangan va blok orqali o'tuvchi ip yordamida gorizontol holatda ushlab turiladi. $BC=5m$, $AC=8m$, $\alpha=45^\circ$. 1 yukning og'irligi 20N bo'lsa, taqsimlangan kuchning intensivligini toping.



5-masala.



6-masala.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Kuch intensivligi deganda nimani tushinasiz?
2. Doimiy intensivlik bilan taqsimlangan kuchning teng ta'sir etuvchisini moduli nimaga teng?
3. Chiziqli qonun bilan taqsimlangan kuch deganda nimani tushinasiz?
4. Chiziqli qonun bilan taqsimlangan kuchning teng ta'sir etuvchisining moduli nimaga teng?
5. Teng ta'sir etuvchi kuch qo'yilish nuqtasi qanday topiladi?
6. Balka qistirilgan nuqtasining reaksiya kuchi va reaksiya momenti qanday topiladi?

3.3. Qattiq jismlar sistemasining muvozanati

Tashqi va ichki kuchlar, kuch momenti, ta'sir va aks ta'sir.

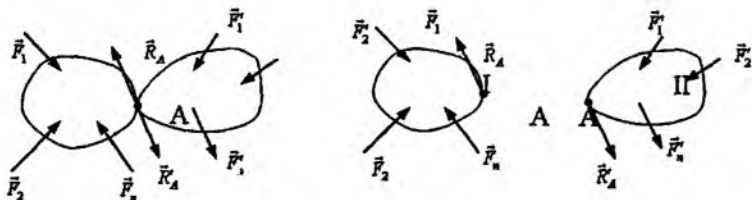
Qattiq jismlar sistemasiga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasini qaraymiz. Qattiq jismlar bir-biri bilan sharmirlar vositasida bog'langan, bir-biriga tegib turgan bo'lishi mumkin. Qattiq jismlar sistemasiga ta'sir etuvchi kuchlarni ichki va tashqi kuchlarga ajratish mumkin.

Qattiq jismlar sistemasiga kirmaydigan jismlar tomonidan sistema qismlariga ko'rsatiladigan ta'sir kuchlari tashqi kuchlar deyiladi. Qattiq jismlar sistemasiga kiruvchi jismlarning o'zaro ta'sir kuchlariga *ichki kuchlar* deyiladi.

Misol sifatida temir yo‘l poyezdini qaraydigan bo‘lsak, bu yerda vagonlarning og‘irlik kuchlari, teplovozning tortish kuchi va relslarning g‘ildiraklarga beradigan reaksiya kuchlari tashqi kuchlar hisoblanadi. Vagonlarning o‘zaro ta’sir kuchlari, gazlarning porshenga beradigan bosim kuchlari va hokazolar ichki kuchlarga misol bo‘ladi.

Qattiq jismlar sistemasiga Yer kirmaydigan bo‘lsa, sistemaning og‘irlik kuchi tashqi kuch hisoblanadi.

Qattiq jismlar sistemasiga qo‘yilgan kuchlar sistemasining muvozanati qaralganda, jismlar sistemasi alohida jismlarga ajratiladi va har bir jismga ta’sir etuvchi kuchlar sistemasining muvozanati tekshiriladi. Bu tenglamalarga ham ichki ham tashqi kuchlar kiradi. Butun sistemaning muvozanati qaralganda ta’sir va aks ta’sir qonuniga asosan jismlarning bir-biriga tegib turgan nuqtasida muvozanatlashgan kuchlar sistemasi hosil bo‘ladi, ya’ni $(\bar{R}_A, \bar{R}'_A) \sim 0$ (86-shakl). Shuning uchun qattiq jismlar sistemasining muvozanati qaralayotganda sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari e’tiborga olinadi.



86-shakl.

86-shaklda tasvirlangan ikkita jism sistemasining har bir jismi uchun muvozanat shartlari tuziladi.

I jism uchun

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \bar{R}_A = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i) + M_0(\bar{R}_A) = 0, \quad (3.3.1)$$

II jism uchun

$$\sum_{i=1}^k \bar{F}'_i + \bar{R}'_A = 0; \quad \sum_{i=1}^k M_0(\bar{F}'_i) + M_0(\bar{R}'_A) = 0, \quad (3.3.2)$$

Ta'sir va aks ta'sir qonuniga asosan

$$\bar{R}_A = \bar{R}'_A, \quad (3.3.3)$$

va

$$M_0(\bar{R}_A) = -M(\bar{R}'_A). \quad (3.3.4)$$

(3.3.3) va (3.3.4) larni e'tiborga olib, (3.3.1) va (3.3.2) tenglamalarni hadma-had qo'shsak, quyidagi munosabatlar hosil bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \sum_{i=1}^k \bar{F} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i) + \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}'_i) = 0.$$

Bu munosabatlar qattiq jismlar sistemasiga qo'yilgan tashqi kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini ifodalaydi.

N ta qattiq jismdan tashkil topgan sistema qaraladigan bo'lsa, tashkil qiluvchi har bir jisimga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarni tekis kuchlar sistemasi deb hisoblansa, har bir qattiq jism uchun uchta muvozanat tenglamalarini tuzish mumkin. Hamma jismlar uchun tuzilsa, $3N$ ta tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Agar izlanayotgan noma'lumlar soni $3N$ tadan oshmasa, masala statik aniq, agar noma'lumlar soni $3N$ tadan oshsa, masala statik aniqmas bo'ladi. Aniqmaslikni ochish uchun sistemani tashkil qiluvchi har bir jism uchun muvozanat tenglamalarini tuzish kerak. Undan keyin jismlarni guruhlariga ajratib, har bir guruh uchun va butun sistema muvozanat tenglamalarini tuzish orqali, yetishmaydigan tenglamalarni hosil qilish mumkin. Guruhlarning muvozanat tenglamalarini tuzishda o'zaro ta'sir kuchlari e'tiborga olinmaydi.

Muvozanatdagi qattiq jismlar sistemasiga oid masalalarni qarashda sistemadagi jismlarning o'zaro bog'lanish xarakteriga qarab, uchta guruhga ajratish mumkin:

1. Sistemaga kiruvchi jismlar bir-biriga erkin tiralib turadi. Bu holda jismlarning o'zaro ta'sir kuchlari shu jismlarning bir-biriga tiralib turgan yuzalarining umumiy normalini bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.

2. Sistemadagi jismlar egiluvchan iplar yoki sterjenlar yordamida bir-biriga bog'langan. Bu holda ip yoki sterjenlar bo'ylab yo'nalgan reaksiya kuchlari ichki kuchlar bo'ladi.

3. Sistemadagi jismlar bir-biri bilan sharnirlar yordamida bog'langan. Bu holda ichki kuchlar sharnirlarga qo'yilgan bo'lib, yo'nalishi noma'lum bo'ladi. Shu sababli, bunday masalalarni yechishda ichki kuchlar koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan ikkita tuzuvchiga ajratiladi.

3.4. Qattiq jismlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar

3.4.1-masala (O.Ə.Kene 3.3.3). Sharnirli to'rt zvenolikning BC zvenosiga $M_2 = 200 N \cdot m$ momentli juft kuch qo'yilgan. Agar $BC = 2 \cdot OA = 400 mm$ bo'lsa, qurilma muvozanatda turishi uchun uning OA krivoshipiga qo'yilishi kerak bo'lgan M_1 moment topilsin (87-shakl).

Yechish. Qattiq jismni tashkil qiluvchi barcha qismlar bir-biri bilan sharnirlar vositasida birlashtirilgan. Masalada sakkizta noma'lum reaksiya kuchlari va M_1 noma'lum moment qatnashadi.

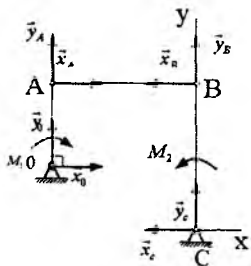
Qurilmani uchta qismga ajratib, har bir qism uchun uchtdan, to'qqizta muvozanat tenglamasini tuzish mumkin. Ammo masalani boshqacha yo'l bilan ham yechish mumkin. Masalan, BC qismiga qo'yilgan barcha kuchlar uchun C nuqtaga nisbatan moment tenglamasini tuzsak, undan x_B ni topish mumkin. Ta'sir va aks ta'sir qonuniga asosan $\vec{x}_A = -\vec{x}_B$ ($x_A = x_B$). Undan keyin OA krivoshipiga qo'yilgan barcha kuchlar uchun O nuqtaga nisbatan moment tenglamasi tuziladi.

BC qism uchun,

$$\sum_{i=1}^n \text{mom}_C(\vec{F}_i) = M_2 + BC \cdot x_A = 0, \quad BC = 400 \text{ mm} = 0,4 \text{ m}.$$

Bundan $x_A = -500 N$.

OA krivoship uchun



87-shakl.

$$\sum_{i=1}^n \text{mom}_O(\vec{F}_i) = -M_1 - OA \cdot x_A = 0, \quad OA = \frac{1}{2} BC = 0,2m.$$

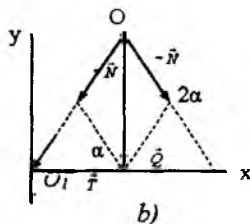
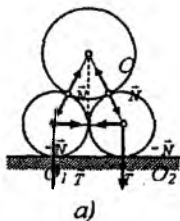
$x_A = x_B = -500N$ ga asosan: $M_1 = -OA \cdot x_A = 100N \cdot m$.

3.4.2-masala (И.В.Мещерский 4.58). Markazlari cho'zil-maydigan ip bilan bog'langan ikkita bir jinsli silindr gorizont tekislikda turibdi, silindrlardan har birining radiusi r , og'irligi P . Ularning ustida radiusi R , og'irligi Q bo'lgan bir jinsli uchinchi silindr bor. Ishqalanishni hisobga olmay, ipning tortish kuchi, silindrlarning tekislikka va bir-biriga tushiradigan bosimi aniqlansin (88-shakl).

Yechish. Silindrlarning yerga beradigan bosim kuchi silindrlar umumiy og'irligining yarmiga teng, ya'ni

$$R = P + \frac{Q}{2}.$$

88- a shaklga asosan $\cos \alpha = \frac{r}{r + R}.$



88-shakl.

O_1 nuqtaga qo'yilgan kuchlarni x o'qiga proyeksiyalab, quyidagi tenglamani tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = T - N \cos \alpha = 0,$$

bundan

$$T = N \cos \alpha = \frac{r}{r + R} N. \quad (a)$$

88- b shaklga asosan

$$\frac{Q}{2} / N = \sin \alpha; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{R^2 + 2rR}}{r + R}.$$

Demak,

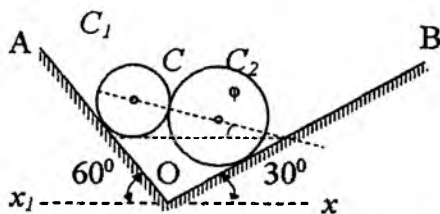
$$N = \frac{r + R}{2\sqrt{R^2 + 2rR}} Q.$$

Buni (a) tenglamaga qo'yiladi:

$$T = \frac{rQ}{2\sqrt{R^2 + 2rR}}.$$

Javob. Pastdagi har qaysi silindrning tekislikka tushiradigan bosimi $P + \frac{Q}{2}$ ga teng. Pastdagi silindrlarning har biri bilan yuqoridagi silindr orasidagi bosim $\frac{Q(R+r)}{2\sqrt{R^2 + 2rR}}$ ga teng. Ipnning tortishish kuchi $\frac{Qr}{2\sqrt{R^2 + 2rR}}$ ga teng.

3.4.3-masala (И.В.Мещерский 4.56). Ikkita silliq OA va OB qiya tekisliklar orasiga, markazi C_1 , og'irligi $P_1=10N$ va markazi C_2 , og'irligi $P_2=30N$ bo'lgan bir-biriga tegib turuvchi ikkita bir jinsli silliq silindr qo'yilgan. Agar $\angle AOx_1 = 60^\circ$, $\angle BOx = 30^\circ$ bo'lsa, C_1C_2 to'g'ri chiziqning gorizontal xOx_1 o'q bilan hosil qilgan φ burchagi, silindrlarning tekisliklarga bosimi N_1 va N_2 , shuningdek, silindrlarning bir-biriga tushiradigan bosimining miqdori N aniqlansin (89-shakl).



89-shakl.

Berilgan: $P_1 = 10N$, $P_2 = 30N$, $\angle AOx_1 = 60^\circ$, $\angle BOx = 30^\circ$.

Topish kerak: φ , N_1 , N_2 , N .

Yechish. Silindrlarning o'rta qirgimi C_1C_2 to'g'ri chiziqdagi C nuqtada bir-biriga tegib turuvchi, doiralardan iborat bo'ladi.

Har qaysi silindrning muvozanati alohida-alohida tekshiriladi.

O'ng tomondagi silindrdan chap tomondagi silindrga tushadigan bosim N_1 C_1C_2 to'g'ri chiziq bo'ylab C_2 dan C_1 ga qarab yo'naladi (89- a shakl), chap tomondagi silindrdan o'ng tomondagi silindrga tushadigan bosim esa C_1 dan C_2 ga qarab yo'nalgan bo'ladi. Ta'sir va aks ta'sir qonuniga asosan $N_1 = N_2 = N$.

Masalani ikki usul bilan yechish mumkin.

Birinchi usul. Birinchi silindrga ta'sir etuvchi uchta kuch bitta C_1 nuqtada kesishadi (90- a shakl). Masala kuch uchburchagidan foydalanib yechiladi (90- b shakl).

Kuch uchburchagidan

$$\frac{N_1}{\sin 60^\circ} = \frac{P_1}{\sin(60^\circ + \varphi)} = \frac{R_D}{\sin(90^\circ - \varphi)}.$$

Bundan

$$N_1 = \frac{P_1 \sin 60^\circ}{\sin(30^\circ + \varphi)} = \frac{\sqrt{3}P_1}{2 \sin(30^\circ + \varphi)}. \quad (a)$$

Ikkinchi va uchinchi nisbatlar tengligidan

$$R_D = \frac{P_1 \sin(90^\circ - \varphi)}{\sin(30^\circ + \varphi)}. \quad (b)$$

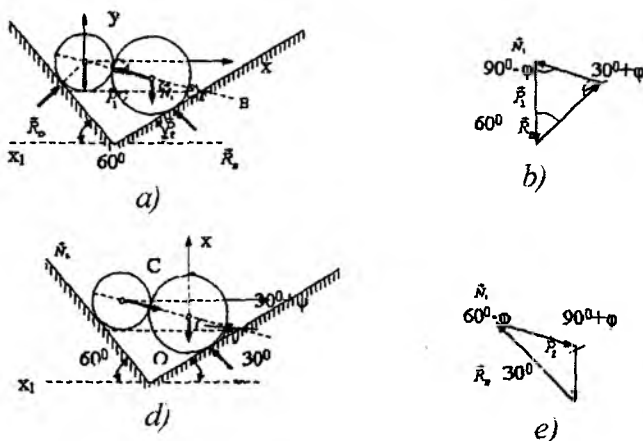
O'ng tomondagi silindr uchun ham qurilgan kuch uchburchagidan (90- d shakl)

$$\frac{N_2}{\sin 30^\circ} = \frac{P_2}{\sin(60^\circ - \varphi)} = \frac{R_D}{\sin(90^\circ + \varphi)} \quad (c)$$

va

$$N_2 = \frac{P_2 \sin 30^\circ}{\sin(60^\circ - \varphi)} = \frac{P_2}{2 \sin(60^\circ - \varphi)}, \quad (d)$$

$$R_B = \frac{P_2 \sin(90^\circ + \varphi)}{\sin(60^\circ - \varphi)} = \frac{P_2 \cos \varphi}{\sin(60^\circ - \varphi)} \quad (f)$$



90-shakl.

kelib chiqadi. $N_1 = N_2$ bo'lgani uchun (a) va (d) tengliklardan

$$\frac{\sqrt{2}P_1}{2 \sin(30^\circ + \varphi)} = \frac{P_2}{2 \sin(60^\circ - \varphi)},$$

bundan

$$10\sqrt{3} \sin(60^\circ - \varphi) = 30 \sin(30^\circ + \varphi),$$

yoki

$$\sin(60^\circ - \varphi) = \sqrt{3} \sin(30^\circ + \varphi),$$

yoki

$$\sin 60^\circ \cos \varphi - \cos 60^\circ \sin \varphi = \sqrt{3} (\sin 30^\circ \cos \varphi + \cos 60^\circ \sin \varphi).$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini $\cos \varphi$ ga bo'lib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \operatorname{tg} \varphi,$$

bundan

$$\operatorname{tg} \varphi = 0 \text{ yoki } \varphi = 0.$$

(a) tenglamadan:

$$N_1 = \frac{10\sqrt{3}}{2 \sin 30^\circ} = 10\sqrt{3} = 17,3N.$$

(b) tenglamadan:

$$R_D = \frac{P_1 \sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 10N \cdot 2 = 20N.$$

(f) tenglamadan:

$$R_B = \frac{P_2 \cos \varphi}{\sin 60^\circ} = \frac{30N}{\sqrt{3}/2} = \frac{60\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}N = 34,6N.$$

Ikkinchi usul. Chapdagi silindar uchun C_1 nuqtani koordinatalar markazi deb olib, koordinatalar sistemasi 73- a shakldagidek qilib tanlanadi va muvozanat tenglamalari tuziladi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 F_{ix} &= -N \cos \varphi + R_D \cos 30^\circ = 0, \\ \sum_{i=1}^3 F_{iy} &= N \sin \varphi + R_D \sin 30^\circ - P_1 = 0. \end{aligned} \quad (\text{a})$$

O'ng tomondagi silindr uchun ham koordinatalar sistemasini 90- c shakldagidek tanlab, muvozanat tenglamalari tuziladi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 F_{ix} &= -R_B \cos 60^\circ + N \cos \varphi = 0, \\ \sum_{i=1}^3 F_{iy} &= R_B \cos 30^\circ - N \sin \varphi - P_2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{b})$$

(a) va (b) tenglamalar birgalikda yechiladi:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} R_D - N \cos \varphi &= 0, & \frac{1}{2} R_D + N \sin \varphi - P_1 &= 0, \\ -\frac{1}{2} R_B + N \cos \varphi &= 0, & \frac{\sqrt{3}}{2} R_B - N \sin \varphi - P_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{c})$$

(c) tenglamalarni birinchisining uchinchisi bilan, ikkinchi tenglamani to'rtinchi tenglama bilan qo'shiladi, natijada

$$\begin{cases} \sqrt{3}R_D - R_B = 0, \\ \frac{1}{2}R_D + \frac{\sqrt{3}}{2}R_B - P_1 - P_2 = 0. \end{cases}$$

Bundan:

$$R_B = \sqrt{3}R_D, \quad \frac{1}{2}R_D + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}R_D}{2} = P_1 + P_2$$

yoki

$$4R_D = 80\text{N} \Rightarrow R_D = 20\text{N}, \quad R_B = \sqrt{3} \cdot 20\text{N} = 34,6\text{N}.$$

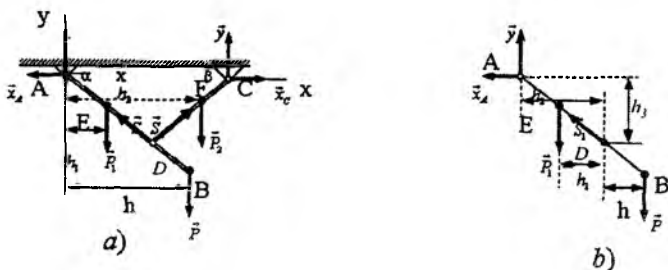
(c) tenglamalarning birinchi va ikkinchisidan

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{R_D \sin 30^\circ - P_1}{R_D \cos 30^\circ} = -\frac{20 \cdot \frac{1}{2} - 10}{20\sqrt{3}/2} = 0,$$

bundan esa $\varphi = 0$ kelib chiqadi. (c) tenglamalarning birinчисidan quyidagi topiladi:

$$N = \frac{\sqrt{3}}{2}R_D = 10\sqrt{3}\text{N} = 17,3\text{N}.$$

3.4.4-masala (И.В.Мешчерский 4.43). O'zaro D sharnir bilan biriktirilgan ikkita AB va CD balkalar A va C sharnirlar vositasida shipga osilgan. AB balkaning og'irligi 60N bo'lib, E nuqtaga qo'yilgan. CD balkaning F nuqtasiga og'irligi 50N , AB balkaning B nuqtasiga vertikal $P=200\text{N}$ kuch qo'yilgan. Quyidagi o'lchamlar berilgan: $AB = 1\text{m}$, $CD = 0,8\text{m}$, $AE = 0,4\text{m}$, $CE = 0,4\text{m}$; AB va CD balkalar gorizontga mos ravishda $\alpha = 60^\circ$ va $\beta = 45^\circ$ burchak bilan og'gan. A va C sharnirlarning reaksiyalari aniqlansin (91-shakl).



91-shakl.

Berilgan: $P_1 = 60N$, $P_2 = 50N$, $P = 200N$, $AB = 1m$,
 $CD = 0,8m$, $AE = 0,4m$, $CE = 0,4m$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

Topish kerak: x_A , x_C , y_A , y_C .

Yechish. Koordinatalar sistemasi shaklda ko'rsatilganday qilib tanlanadi va x o'qiga nisbatan muvozanat tenglamasi tuziladi:

$$\sum_{i=1}^7 F_{ix} = -x_A + x_C = 0 \Rightarrow x_A = x_C. \quad (a)$$

Butun sistemaning muvozanati tekshiriladi. A nuqtaga nisbatan butun sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarning moment tenglamasi tuziladi:

$$\sum_{i=1}^7 \text{mom}_A(\vec{F}_i) = -h_1 P_1 - h P - h_2 P_2 + AC y_A = 0. \quad (b)$$

91- a shaklga asosan

$$h_1 = AC \cos 60^\circ = 0,4m \cdot \frac{1}{2} = 0,2m,$$

$$h = AB \cos 60^\circ = 1m \cdot \frac{1}{2} = 0,5m,$$

$$\frac{AC}{\sin(180 - (\alpha + \beta))} = \frac{CD}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AC = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot CD = 0,9m,$$

$$\frac{AD}{\sin 45^\circ} = \frac{CD}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AD = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot CD = 0,66m.$$

$$h_2 = AC - CF \cos 45^\circ = 0,9m - 0,28m = 0,62m.$$

(b) tenglamadan:

$$AC \cdot y_A = h_1 P_1 + h P + h_2 P_2 = 0,2m \cdot 60N + 0,5m \cdot 200N + 0,62m \cdot 50N$$

yoki

$$0,9m \cdot y_A = 142N \Rightarrow y_A = 158N.$$

Endi bitta AB balkaning muvozanati tekshiriladi. AB balkaga qo'yilgan kuchlarni D nuqtaga nisbatan moment tenglamasi tuziladi (91- b shakl)

$$\sum_{i=1}^5 mom_D(\vec{F}_i) = -hP + h_1P_1 + h_3x_A - h_2y_A = 0 \quad (c)$$

91- b shaklga asosan

$$BD = AB - AD = 1m - 0,66m = 0,34m,$$

$$h = BD \cos 60^\circ = 0,17m;$$

$$DE = AD - AE = 0,66m - 0,4m = 0,26m,$$

$$h_1 = DE \cos 60^\circ = 0,13m; \quad h_3 = AD \sin 60^\circ = 0,66 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} m = 0,57m,$$

$$h_2 = AD \cos 60^\circ = 0,33m.$$

Bularni (c) tenglamaga qo'yib, x_A ni topiladi:

$$0,75m \quad x_A = 0,17m \cdot 200N - 0,13m60N + 0,33m \cdot 150N$$

yoki

$$x_A = 133N.$$

(a) tenglamaga asosan

$$x_C = -x_A = -133N.$$

Endi CD balkaning muvozanatini tekshiramiz. CD balkaga ta'sir etuvchi kuchlarning D nuqtaga nisbatan moment tenglamasini tuzamiz

$$\sum_{i=1}^n mom_D(\vec{F}_i) = - - DF \cos 45^\circ \cdot P_2 + \\ + CD \cos 45^\circ y_C - \cos 45^\circ \cdot x_C = 0$$

$$\text{yoki} \quad -0,4m \frac{\sqrt{2}}{2} 50N + 0,8m \frac{\sqrt{2}}{2} y_C - 0,8 \frac{\sqrt{2}}{2} x_C = 0,$$

$$\text{bundan} \quad 2y_C = 50N + 266N \Rightarrow y_C = 158N.$$

Ushbu bobda sirpanishdagi ishqalanish qonunlari, yumalashda hosil bo‘ladigan ishqalanish kuchi, ferma sterjenlaridagi zo‘riqishlarni tugunlarni qirqish usuli bilan topish kabi masalalar bayon etilgan.

4.1. Sirpanishdagi ishqalanish qonunlari

Bog‘lanish, bog‘lanish reaksiyasi, sirpanib ishqalanish kuchi, ishqalanish burchagi, ishqalanish koeffitsienti, yumalab ishqalanish kuchi, yumalab ishqalanish koeffitsienti.

Bir jismning ikkinchi bir jism sirtidagi nisbiy muvozanati tufayli hosil bo‘ladigan ishqalanish kuchiga ***tinch holatdagi ishqalanish kuchi*** deyiladi. Bir jismning ikkinchi bir jism sirtida nisbiy harakatlanishi natijasida hosil bo‘ladigan ishqalanishga ***harakatdagi ishqalanish (dinamik ishqalanish) kuchi*** deyiladi.

Sirt ustida turgan jismga teng ta’sir etuvchisi $\vec{R}^{(a)}$ bo‘lgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasi ta’sir etayotgan bo‘lsin (92-shakl). Sirtning to‘la reaksiyasi \vec{R} , sirpanib ishqalanish kuchi \vec{F} va sirtning \vec{N} normal reaksiyalarini teng ta’sir etuvchisidan iborat, ya’ni

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{N} + \vec{F}, \\ \vec{R}^{(a)} &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Agar $\vec{R}^{(a)}$ kuchning miqdori \vec{R} kuchning miqdoridan kichik bo‘lsa, jism tinch holatda turaveradi. $\vec{R}^{(a)}$ kuchining miqdorini oshira borilsa, ma’lum miqdorga yetganda jism harakatlanish chegarasida bo‘ladi. Ishqalanish kuchining bu holatdagi qiymati uning eng katta qiymati (maksimal qiymati) bo‘ladi. 92-shaklga asosan: $\vec{R}^{(a)}$ kuchining sirt urinmasi bo‘ylab yo‘nalgan tuzuvchisini \vec{Q} bilan, \vec{R} to‘la reaksiya kuchini urinma bo‘ylab yo‘nalgan tuzuvchisi \vec{F} bilan belgilanadi. Ana shu \vec{F} tuzuvchiga ***sirpanib ishqalanish kuchi*** deyiladi.

Tinch holatdagi sirpanib ishqalanish qonunlari. **Kulon qonunlari:**

1. Ishqalanish kuchi jismlarning urinish nuqtasidagi umumiy urinma tekisligida yotadi va tashqi kuchlar ta'siridan hosil bo'ladigan haqiqiy siljishga qarama-qarshi yo'nalgan. Tinch holatdagi ishqalanish kuchi jismga ta'sir etuvchi aktiv kuchlarga bog'liq va uning moduli nol bilan ishqalanish kuchining eng katta qiymati orasida bo'ladi, ya'ni

$$0 \leq F \leq F_{\max}. \quad (4.1.2)$$

2. Ishqalanish kuchi sirtlarning urinish yuzasiga bog'liq emas. Masalan, gorizontaal sirt ustida turgan g'isht u qaysi tomoni bilan sirtga urinishiga qaramasdan, uni siljitish uchun bir xil kuch kerak bo'ladi.

3. Sirpanib ishqalanish kuchining eng katta qiymati normal bosimga proporsional, ya'ni

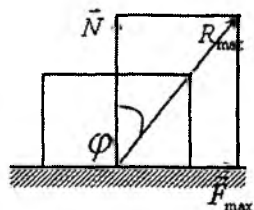
$$F_{\max} = f_{st} N, \quad (4.1.3)$$

bunda F — o'lchovsiz parametr bo'lib, unga ishqalanish koeffitsienti, f_{st} — statik ishqalanish koeffitsienti deyiladi.

4. Sirpanib ishqalanish koeffitsienti urinuvchi sirtlarning materialiga, fizik xususiyatiga, ya'ni sirtlarning dag'alligiga, namligiga, haroratiga va hokazolarga bog'liq. Ishqalanish koeffitsienti tajribalar yo'li bilan aniqlanadi.

Sirpanib ishqalanish kuchi o'zining $\vec{F} = \vec{F}_{\max}$ qiymatiga erishganda, to'la reaksiya kuchi ham o'zining \vec{R}_{\max} qiymatiga erishadi.

\vec{R}_{\max} reaksiya kuchi bilan normal orasidagi burchakka ishqalanish burchagi deyiladi (93-shakl). Shaklga asosan



93-shakl.

$$\vec{F}_{\max} = N \operatorname{tg} \varphi. \quad (4.1.4)$$

Buni (4.1.3) tenglik bilan solishtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\vec{F}_{\max}}{N} = f_{st}. \quad (4.1.5)$$

Demak, ishqalanish burchagi ishqalanish koeffitsientiga bog'liq bo'lar ekan.

4.2. Ishqalanish kuchi tufayli yuzaga keladigan jismlar muvozanatini tekshirishga doir masalalarni yechish uchun uslubiy tavsiyalar

Ishqalanish kuchi tufayli yuzaga keladigan jismlar muvozanatini tekshirishga doir masalalarni yechish uchun quyidagi uslubiy tavsiyalarni berish mumkin:

1. Jismga ta'sir etuvchi barcha aktiv va reaksiya kuchlari (normal va sirpanib ishqalanish reaksiyalari)ni jismga qo'yib olish kerak.

2. Koordinatalar sistemasining boshini imkoni boricha ko'proq kuchlarni ta'sir chiziqlari kesishgan nuqtada olish va o'qlardan bittasini sirtlarning umumiy urinma tekisligida yotuvchi (agar fazoviy jismning muvozanati qaralayotgan bo'lsa, koordinata tekisliklaridan bittasi sifatida urinma tekislikni olish) qilib olish, ikkinchi o'qni sirtning bosh normalini bo'ylab yo'naltirish lozim.

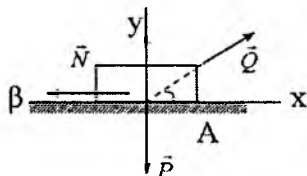
3. Qaralayotgan jismning unga qo'yilgan aktiv kuchlar, bog'lanishlar reaksiyalari ta'siridagi jism deb qarab, tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan muvozanat tenglamalarini tuzish kerak.

4. Hosil qilingan tenglamalarni birgalikda yechish kerak.

Quyida yuqorida bayon etilgan uslubiy tavsiyalar asosida mavzuga doir masalalarni yechib ko'rsatiladi:

4.2.1-masala (И.В. Мещерский 5.7). Og'irligi P ga teng yashik ishqalanish koeffitsienti f bo'lgan g 'adir-budur tekislikda turadi. Yashikni eng kichik Q kuch bilan qo'zg'atish uchun kuchni gorizontga nisbatan qanday β burchak ostida qo'yish kerak? Shu eng kichik kuchning miqdori topilsin.

Yechish. Koordinatalar sistemasini boshini A nuqtada olib, Axy koordinatalar sistemasini ko'rsatilganday qilib tanlaymiz. $(\vec{Q}, \vec{P}, \vec{N}, \vec{T})$ kuchlar ta'siridagi yashikning muvozanatini tekshiriladi. Bir



94-shakl.

nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari tuziladi.

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = Q \cos \beta - T = 0; \quad (a)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = N + Q \sin \beta - P = 0, \quad (b)$$

bunda $T = fN$ sirpanib ishqalanish kuchi. (b) dan $N = P - Q \sin \beta$, buni (a) tenglamaga qo'yiladi:

$$Q \cos \beta - fN = Q \cos \beta - fP + fQ \sin \beta.$$

Bundan

$$Q = \frac{fP}{\cos \beta + f \sin \beta}. \quad (d)$$

(c) tenglikka asosan, agar Q kuchning ifodasidagi kasrning maxraji eng katta bo'lganda Q kuchi eng kichik qiymatga erishadi. Quyidagicha belgilash kiritiladi:

$$q = \cos \beta + f \sin \beta. \quad (e)$$

q dan β bo'yicha hosila olib, nolga tenglashtiriladi:

$$q' = -\sin \beta + f \cos \beta = 0.$$

Bundan $tg \beta = f; \quad \beta = \arctg f.$

Oxirgi tenglikdan ko'rinib turibdiki, β ishqalanish burchagiga teng bo'lar ekan.

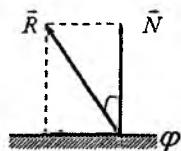
q dan β bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaning ishorasiga qarab, uni ekstremumga tekshiriladi:

$$q'' = -\cos \beta - f \sin \beta = -(\cos \beta + f \sin \beta). \quad (f)$$

$\cos \beta$ va $\sin \beta$ larni f orqali ifodalab olamiz:

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f^2}};$$

$$\sin \beta = \frac{tg \beta}{\sqrt{1 + tg^2 \beta}} = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}.$$



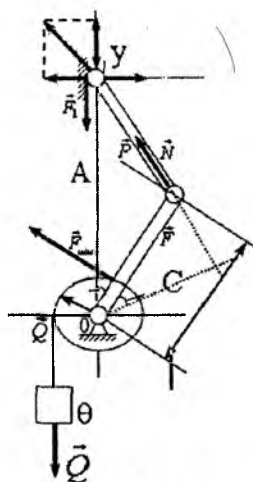
95-shakl.

Bularni (f) ga qo'yiladi:

$$q'' = - \left(\frac{1}{\sqrt{1+f^2}} + \frac{f^2}{\sqrt{1+f^2}} \right) = -\sqrt{1+f^2}. \quad (g)$$

$\sqrt{1+f^2}$ musbat bo'lgani uchun q'' manfiy son, demak β ning topilgan qiymatida (d) tenglikning o'ng tomonidagi ifodaning maxraji eng katta bo'ladi, demak Q kuch o'zining eng kichik qiymatiga erishadi. Shunday qilib,

$$Q_{\min} = \frac{fP}{\cos \beta + f \sin \beta} = \frac{fP}{q} = \frac{fP}{-q''}.$$



96-shakl.

4.2.2-masala (И.В. Мещерский

5.15). Krivoshipli mexanizmda yo'naltiruvchi va A polzun orasidagi, shuningdek, hamma sharnirlar va podshipniklardagi ishqalanishni hisobga olmay, Q yukni mexanizmning shaklda tasvirlangan holatida ushlab turishi uchun zarur bo'ladigan P kuch aniqlansin. Agar A polzun bilan yo'naltiruvchi orasidagi ishqalanish koeffitsienti f ga teng bo'lsa, Q yukning qo'zg'almay qolishini ta'minlaydigan P kuchning minimal va maksimal qiymatlari qanday?

Yechish. \bar{Q} kuch baraban gardishidagi nuqtalarga qo'yilgan bo'lib, uning urinmasi bo'ylab yo'nalgan va miqdori baraban gardishidagi hamma nuqtalar uchun bir xil. Shuning uchun uning modulini o'zgartirmasdan barabanning B nuqtasiga qo'yamiz. \bar{Q} kuchni krivoshipning C nuqtasiga qo'yilgan va CA shatun bo'ylab yo'nalgan \bar{F} kuch bilan shunday almashtiramizki, ularni O nuqtaga nisbatan momentlari teng bo'lsin, ya'ni $\alpha Q = hF$.

96-shaklga asosan

$$\psi = 90 - (\varphi + \theta);$$

$$h = r \cos [90^\circ - (\varphi + \theta)] = r \sin (\varphi + \theta).$$

Shunday qilib,

$$aQ = rF \sin (\varphi + \theta),$$

bundan

$$F = \frac{aQ}{r \sin (\varphi + \theta)}. \quad (\text{a})$$

\vec{F} kuchi o'z ta'sir chizig'i bo'ylab A nuqtaga ko'chiriladi va uni koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan tuzuvchilarga ajratiladi.

Natijada bir nuqtaga qo'yilgan ($\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ish}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$) kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalari tuziladi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 F_{ix} &= -F_{2x} + N = 0; \\ \sum_{i=1}^5 F_{iy} &= F_{1y} + (F_{iu})_y + P_y = 0. \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Kulon qonuniga asosan

$$F_{uu} = fN,$$

bunda $N = F_2 = F \sin \varphi$, natijada

$$F_{uu} = fF \sin \varphi.$$

(a) ga asosan

$$F_{2x} = -F_2 = -F \sin \varphi, \quad F_{1y} = F \cos \varphi,$$

$$F_{uu} = f \frac{aQ \sin \varphi}{r \sin (\varphi + \theta)}. \quad (\text{d})$$

Natijada (b) tenglamalar quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{cases} -\frac{aQ \sin \varphi}{r \sin (\varphi + \theta)} + N = 0; \\ \frac{aQ \cos \varphi}{r \sin (\varphi + \theta)} - f \frac{aQ \sin \varphi}{r \sin (\varphi + \theta)} - P = 0 \end{cases} \quad (\text{g})$$

(e) tenglamalarning birinchisidan

$$N = \frac{aQ \sin \varphi}{r \sin(\varphi + \theta)}$$

ikkinchisidan

$$P = \frac{Qa}{r} \cdot \frac{\cos \varphi = f \sin \varphi}{\sin(\varphi + \theta)} \quad (f)$$

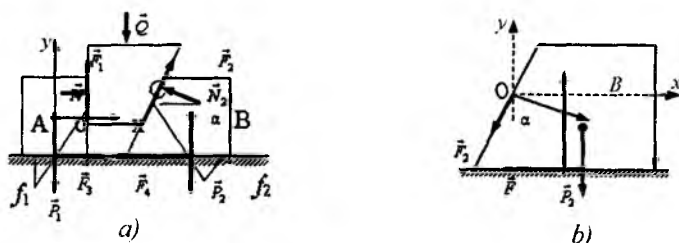
Ishqalanishlarni hisobga olmaganda, ya'ni $f = 0$ bo'lganda P kuchining miqdori quyidagiga teng:

$$P = \frac{Qa \cos \varphi}{r \sin(\varphi + \theta)}$$

(f) formulaga asosan

$$P_{\min} = \frac{Qa \cos \varphi - f \sin \varphi}{r \sin(\varphi + \theta)}, \quad P_{\max} = \frac{Qa \cos \varphi + f \sin \varphi}{r \sin(\varphi + \theta)}$$

4.2.3-masala (И.В.Мещерский 5.12). G'adir-budur gorizontol tekislik ustida turgan ikkita A va B jismlar orasiga C pona kiritib qo'yilgan. Ponaning bir tomoni vertikal bilan $\alpha = \arctg \frac{1}{3}$ burchak hosil qiladi.



97-shakl.

A va B jism og'irliklari mos ravishda 400N va 300N , sirtlar orasidagi ishqalanish koeffitsientlari shaklda ko'rsatilgan. Jismlardan birini siljitadigan Q kuchning qiymati, shuningdek qo'zg'almay qolgan jisimga gorizontol tekislik tomonidan ta'sir etadigan F ishqalanish kuchining qiymati topilsin (97-shakl).

Berilgan: $\alpha = \arctg \frac{1}{3}$, $P_1 = 400 N$, $P_2 = 300 N$, $f_1 = 0,2$,
 $f_1 = 0,25$.

Topish kerak: Q , F .

Yechish. C jismning muvozanati tekshiriladi. Ta'sir etuvchi kuchlar $\vec{N}_1, \vec{F}_1, \vec{N}_2, \vec{F}_2, \vec{Q}$. Koordinatalar sistemasini 97- a shakldagidek qilib tanlanadi va muvozanat tenglamalari tuziladi:

$$\sum_{i=1}^5 F_{ix} = N_1 - N_2 \cos \alpha + F_2 \cos (90 - \alpha) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^5 F_{iy} = F_1 + F_2 \cos \alpha - Q + N_2 \sin \alpha = 0,$$

bunda

$$F_1 = f_1 N_1, \quad F_2 = f_2 N_2.$$

Buni yuqoridagi tenglamalarga qo'yamiz:

$$N_1 - N_2 \cos \alpha + f_2 N_2 \sin \alpha = 0;$$

$$f_1 N_1 + f_2 N_2 \cos \alpha + N_2 \sin \alpha - Q = 0,$$

yoki

$$N_1 = N_2 \cos \alpha - f_2 N_2 \sin \alpha;$$

$$N_1 = \frac{1}{f_1} (Q - f_2 N_2 \cos \alpha - N_2 \sin \alpha), \quad \Rightarrow$$

$$N_2 \cos \alpha - f_2 N_2 \sin \alpha = \frac{1}{f_1} (Q - f_2 N_2 \cos \alpha - N_2 \sin \alpha).$$

Bundan

$Q = f_1 N_2 \cos \alpha - f_1 f_2 N_2 \sin \alpha + f_2 N_2 \cos \alpha + N_2 \sin \alpha$. (a)
 kelib chiqadi.

Endi B jismning muvozanati tekshiriladi: B jismga ta'sir etuvchi kuchlar (97- b shakl): $\vec{N}_2, \vec{F}_2, \vec{P}_2, \vec{F}, \vec{N}$. Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan B jismning muvozanat tenglamalari tuziladi:

$$\sum_{i=1}^5 F_{ix} = N_2 \cos \alpha - F_2 \sin \alpha - F = 0;$$

$$\sum_{i=1}^5 F_{iy} = N - P_2 - N_2 \sin \alpha - F_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\text{bunda} \quad F = f_2 N. \quad (\text{b})$$

Buni yuqoridagi tenglamalarga qo'yamiz

$$\begin{aligned} N_A \cos \alpha - F_2 \sin \alpha - f_2 N &= 0; \\ N &= P_2 + N_2 \sin \alpha + f_2 N_2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (\text{d})$$

$$\text{yoki } N_2 \cos \alpha - 2f_2 N_2 \sin \alpha - f_2 P_2 - f_2^2 N_2 \cos \alpha = 0$$

$$\text{bundan } N_2 = \frac{f_2 P_2}{\cos \alpha - 2f_2 \sin \alpha - f_2^2 \cos \alpha}.$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{3}{\sqrt{10}}; \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Demak,

$$N_2 = \frac{0,25 \cdot 300 N}{\frac{3}{\sqrt{10}} - 2 \cdot 0,25 \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{0,63 \cdot 3}{\sqrt{10}}} = \frac{75 \cdot \sqrt{10} N}{2,32} = 102 N.$$

Buni (a) formulaga qo'yib Q topiladi:

$$Q = N_2 (f_1 \cos \alpha - f_1 f_2 \sin \alpha + f_2 \cos \alpha + \sin \alpha) = 70 N.$$

Endi F topiladi. (d) formulaga asosan

$$\begin{aligned} N &= P_2 + N_2 (\sin \alpha + f_2 \cos \alpha) = 300 N + 102 N \left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{0,25}{\sqrt{10}} \right) = \\ &= 300 N + 56 N = 356 N. \end{aligned}$$

Buni (b) formulaga qo'yib $F = f_2 N = 0,25 \cdot 356 = 89 N$ topiladi.

4.3. Yumalashda hosil bo'ladigan ishqalanish kuchi

Yumalash, ishqalanish, jism, kuch, gorizonta, silindr, moment, reaksiya, normal, qayishlik, qiymat.

Tajribalar shuni ko'rsatadiki, og'ir silindr shaklidagi jism unga qo'yilgan aktiv kuchlar ta'siridan boshqa bir jism sirtida yumalaganda jismlarning deformatsiyasi tufayli ularning urinish nuqtasida nafaqat sirpanishga, balki yumalashga ham qarshilik ko'rsatadigan reaksiya kuchi hosil bo'ladi.

Silindrik jism gorizontaal tekislikda aktiv kuchlar ta'sirida bo'lsin. Jism bilan tekislik bitta yasovchisi bo'ylab emas balki, deformatsiya tufayli ma'lum bir yuzasi bilan urinadi. Agar ta'sir etuvchi aktiv kuchlar silindrning o'rta kesimiga nisbatan simmetrik bo'lsa, ya'ni uning butun yasovchisi bo'ylab bir xil deformatsiya hosil qilsa, silindrning bitta o'rta kesimini o'rganish yetarli. Sirt ustida yumalovchi jismga ta'sir etuvchi aktiv kuchlar quyidagi kuchlarga bo'linadi: \vec{P} og'irlik kuchi, silindr bilan sirtning urinish nuqtasidagi umumiy urinmaga parallel \vec{Q} tashqi kuch va silindrni aylantirishga intiltiradigan momentli juftlarga bo'linadi (98-shakl).

Agar $\vec{M}^{(a)} = 0, Q \neq 0$ bo'lsa, jism yumalamasdan sirpanadi, $\vec{M} \neq 0, \vec{Q} = 0$ bo'lsa, jism sirpanmay yumalaydi.

Agar \vec{Q} kuch o'ng tomonga yo'nalgan bo'lsa, jism bilan sirtning urinish nuqtasi A ning chap tomonida bosim kamayadi, o'ng tomonida oshadi. Natijada

\vec{N} normal reaksiya o'ng tomonidagi biror B nuqtaga ko'chadi va BD chiziq bo'ylab silindrga taqsimlangan reaksiya kuchi ta'sir etadi (99-shakl).

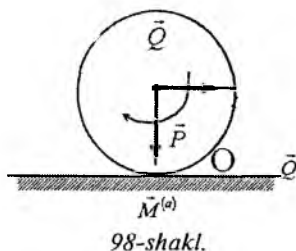
Agar bu taqsimlangan kuchni A nuqtaga keltirsak, bitta umumiy \vec{R} reaksiya kuchiga va \vec{M} momentli juftga ega bo'lamiz \vec{R} kuch ikkita: \vec{N} normal bosim va \vec{F} ishqalanish kuchlariga ajraladi.

G'ildirakka ta'sir etuvchi aktiv kuchlarni A nuqtaga keltirilsa, bitta $\vec{R}^{(a)}$ bosh vektorga va $\vec{M}^{(a)}$ momentli bitta juftga ega bo'lamiz.

Agar g'ildirak muvozanatda bo'lsa, unga ta'sir etuvchi aktiv kuchlar bog'lanish reaksiyasi bilan muvozanatda bo'ladi, ya'ni

$$-\vec{R} = \vec{R}^{(a)} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(a)}; \quad -\vec{M} = \vec{M}^{(a)} = \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i^{(a)}). \quad (4.3.1)$$

G'ildirakka qo'yilgan aktiv kuchlar oshira borilsa, natijada \vec{M} qarshilik momenti ham osha boradi, g'ildirak yumalash



98-shakl.

chegarasiga borganda qarshilik momenti o'zining eng katta qiymatiga erishadi.

G'ildirakning yumalashiga qarshilik ko'rsatuvchi \vec{M} momentning eng katta qiymatiga doir quyidagi taqribiy **qonunlar o'rinli**:

1. G'ildirakni yumalashiga qarshilik ko'rsatuvchi juft kuch momentining eng katta qiymati yetarlicha katta chegaralar uchun g'ildirak radiusiga bog'liq emas.

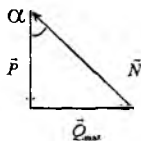
2. Qarshilik momentining eng katta \vec{M}_{\max} qiymati normal bosimga proporsional

$$M_{\max} = \delta N, \quad (4.3.2)$$

bunda δ — yumalab ishqalanish koeffitsienti yoki ikkinchi tur ishqalanish koeffitsienti, u uzunlikni ifodalab, taqribiy qiymati AD kesmaning uzunligiga teng (100-shakl).

3. Yumalab ishqalanish koeffitsienti δ urinuvchi jismlarning materialiga va ular sirtining fizik xossalriga bog'liq.

\vec{Q} kuchining eng katta qiymatini kuch uchburchagini qurib ham topish mumkin. Kuch uchburchagi bilan (100-shakl) OAD uchburchak (99-shakl) o'xshash.



100-shakl.

$OA = R$, $AD = \delta$ deb olib, uchburchaklar o'xshashligidan

$$\frac{Q_{\max}}{\delta} = \frac{P}{R}.$$

Bundan

$$Q_{\max} = \frac{\delta}{R} P.$$

Jism tekislikda muvozanatda bo'lsa, yumalashda hosil bo'ladigan ishqalanish kuchi \vec{T} quyidagi formuladan topiladi:

$$T \leq \frac{\delta}{R} N. \quad (4.3.3)$$

(4.1.3) va (4.3.3) formulalar taqqoslansa, jism tinch turgan vaqtdagi yumalab ishqalanish kuchi tinch turgan vaqtdagi sirpanib ishqalanish kuchidan ancha kichik bo'lishini ko'ramiz, chunki

δ/R nisbat f dan, ya'ni sirpanib ishqalanish koeffitsientidan ancha kichik.

4.4. Yumalashda hosil bo'ladigan ishqalanish kuchini topishga doir masalalar

4.4.1-masala (O.Ə.Kene 2.6.7). Og'irligi 4 kg bo'lgan (2) g'ildirak cho'zilmaydigan ip yordamida 1 yuk bilan bog'langan. $R=0,5$ m, yumalab ishqalanish koeffitsienti $\delta = 0,005$ m, juft kuchning momenti $M = 50$ N·m. G'ildirak va yuk uchun sirpanib ishqalanish koeffitsienti $f = 0,2$ bo'lsa, 1 yukning sirpanishi uchun uning eng katta og'irligi qanchaga teng bo'lishi kerak?

Berilgan: $Q = 4$ kN, $R = 0,5$ m, $\delta = 0,005$ m, $M = 50$ N·m, $f = 0,2$.

Topish kerak: R .

Yechish. (4.3.1) muvozanat tenglamalari tuziladi, ya'ni ishqalanish qonuniga asosan

$$M - 2RF_{ish} - M_{kar} = 0 \quad (a)$$

Sirpanib ishqalanish qonuniga asosan

$$F_{ish} = fP,$$

yumalab ishqalanish qonuniga asosan $M_{kar} = \delta Q$ bo'ladi. Bularni (a) tenglamaga qo'yamiz $M - 2RfP - \delta Q$.

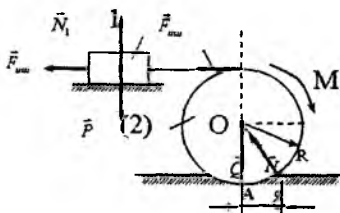
Bundan

$$P = \frac{M - \delta Q}{2Rf} = \frac{50 \text{ Nm} - 0,005 \text{ m} \cdot 4000 \text{ N}}{2 \cdot 0,5 \text{ m} \cdot 0,2} = 150 \text{ N}.$$

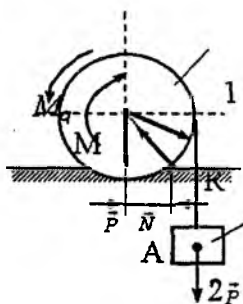
4.4.2-masala. (O.Ə.Kene). Og'irligi 5 kN bo'lgan bir jinsli 1 g'ildirakka momenti $M = 210$ N·m bo'lgan juft kuch ta'sir etadi. Yumalab ishqalanish koeffitsienti $\delta = 0,003$ m, $R = 0,453$ m bo'lsa, 1 g'ildirakni chapga yumalashi uchun 2 yukning eng katta og'irligi qancha bo'lishini toping.

Berilgan: $Q = 5$ kN, $M = 210$ N·m, $\delta = 0,003$ m, $R = 0,453$ m.

Topish kerak: R .



101-shakl.



102-shakl.

Yechish. G'ildirakning yumalash chegarasida M_k qarshilik momenti o'zining eng katta qiymatiga erishadi. M_k qarshilik momentining eng katta qiymati uchun muvozanat tenglamasini, ya'ni A nuqtaga nisbatan momentlar tenglamasi tuziladi:

$$M - M_k - RP = 0.$$

Yumalab ishqalanish qonuniga asosan

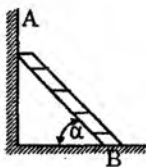
$$M_k = \delta Q.$$

Natijada $M - \delta Q - RP = 0$. Bundan

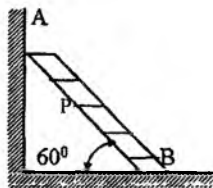
$$P = \frac{M - \delta Q}{R} = \frac{210 \text{ Nm} - 0,003 \text{ m} \cdot 5000 \text{ N}}{0,453 \text{ m}} \approx 430 \text{ N}.$$

Muammoli masala va topshiqalar

1. AB narvon notekis devor va g'adir-budur polga tayanib, pol bilan 60° burchak tashkil etadi. Narvonga R yuk qo'yilgan. Narvon og'irligini hisobga olmay, u muvozanat holatida qoladigan eng katta BR masofa grafik usul bilan topilsin. Devor va pol uchun ishqalanish burchagi 15° ga teng.



1-masala.

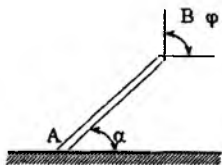


2-masala.

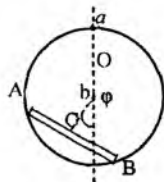
2. Bir jinsli brus A nuqtada g'adir-budur gorizontol polga tayangan. B nuqtada u arqon vositasida ushlab turiladi. Brus va pol orasidagi ishqalanish koeffitsienti f ga teng. Brus o'qining pol bilan hosil qilgan burchagi $\alpha = 45^\circ$. Arqon gorizont bilan qanday φ burchak hosil qilganda brus sirg'ana oladi?

3. Bir jinsni sterjen A va B uchlari bilan a radiusli notekis aylana bo'ylab sirg'anishi mumkin. Sterjendan vertikal tekislikda

joylashgan aylananing O markazigacha bo'lgan OC masofa b ga teng. Sterjen bilan aylana orasidagi ishqalanish koeffitsienti f ga teng. Sterjenning muvozanat holatlarida OC to'g'ri chiziq bilan aylananing vertikal diametri orasidagi φ burchak topilsin.



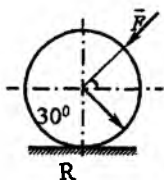
3-masala.



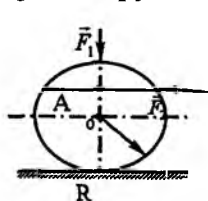
4-masala.

4. Og'irligi $700N$ bo'lgan bir jinsli g'ildirakka \vec{F} kuch qo'yilgan. G'ildirakning radiusi $R = 1m$, sirg'anib va yumalab ishqalanish koeffitsientlari: $f = 0,2$; $\delta = 0,008 m$ bo'lsa, g'ildirak yumalashi uchun kerak bo'lgan \vec{F} kuchning eng kichik qiymati aniqlansin.

5. Og'irligi $2kN$ bo'lgan bir jinsli g'ildirakka $\vec{F}_2 = 10N$ gorizontal kuch va \vec{F}_1 vertikal kuchlar ta'sir etadi. Yumalab ishqalanish koeffitsienti $\delta = 0,005m$, $R = 0,8m$ bo'lsa, g'ildirak sirpanib yumalashi uchun kerak bo'lgan \vec{F} kuchining eng katta qiymati topilsin.

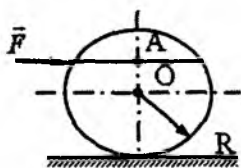


5-masala.

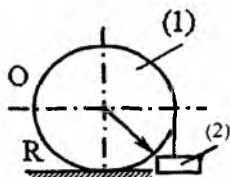


6-masala.

6. Og'irligi $2kN$ bo'lgan bir jinsli g'ildirakka \vec{F} gorizontal kuch qo'yilgan. Sirpanib va yumalab ishqalanish koeffitsientlari: $\delta = 0,006m$, $f = 0,2$, $R = 0,6m$, $OA = 4m$ g'ildirakning sirpanmasligi va yumalamasligi uchun kerak bo'lgan \vec{F} kuchining eng katta qiymati aniqlansin.



6-masala.



7-masala.

7. (1) g'ildirakka cho'zilmaydigan ip yordamida (2) yuk osilgan. (1) g'ildirakning og'irligi $3,2kN$, yumalab ishqalanish ko'effitsienti $\delta = 0,004m$, $R = 32,4sm$ bo'lsa, (1) g'ildirak muvozanatda qolishi uchun (2) yukning eng katta og'irligi topilsin.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Sirpanib ishqalanish kuchi bog'lanish reaksiyasining qanday tuzuvchisini tashkil qiladi?
2. Sirpanib ishqalanish qonunlarini yozib tahlil qiling.
3. Sirpanib ishqalanish ko'effitsientini xarakterlab bering.
4. Qanday holda yumalab ishqalanish kuchi hosil bo'ladi?
5. Qanday holda sof sirpanib ishqalanish hosil bo'ladi?
6. Yumalab ishqalanish qonunlarini yozib tahlil qiling.

4.5. Fermalar hisobi. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni tugunlarni qirqish usuli bilan topish

Ferma, sterjen, sharnir (tugun), ta'sir-aks ta'sir, ichki va tashqi kuchlar

Sharnirlar yordamida geometrik o'zgarmas qilib tutashtirilgan sterjenlardan hosil bo'lgan qurilmaga **ferma** deyiladi. Sterjenlar uchlarini tutashtiruvchi sharnirlarga **tugunlar** deyiladi. Tugunlari soni n bilan sterjenlari soni m quyidagi

$$m = 2n - 3$$

tenglamani qanoatlantiradigan fermaga statik aniq ferma deyiladi.

Agar

$$m > 2n - 3$$

shart bajarilsa, bunday ferma statik aniqmas deyiladi.

Agar

$$m < 2n - 3$$

shart bajarilsa, qurilmaning geometrik o'zgarماسligi bajarilmaydi.

Kelgusida fermaga qo'yilgan aktiv kuchlar fermaning tugunlariga qo'yilgan va bu kuchlar ferma bilan bir tekislikda yotadi deb qaraymiz. Sharnirlardagi ishqalanishlar hisobga olinmaydi. Bu shartlar bajarilganda sterjenlar yo siqiladi yoki cho'ziladi. Shuning uchun ulardagi zo'riqishlar sterjenlar bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.

Aktiv kuchlar va tayanch reaksiyalari ferma uchun tashqi kuchlar, sterjenlardagi zo'riqishlar ichki kuchlar hisoblanadi. Sterjenlardagi zo'riqishlarni hisoblashda fermanni qismlarga ajratib, alohida qismlarning muvozanati qaraladi va bu qism uchun zo'riqishlar tashqi kuch hisoblanadi.

4.6. Fermalar hisobiga doir masalalarning tugunlarni qirqish usuli bilan yechishga doir uslubiy tavsiyalar

1. Fermaning muvozanati tekshirilayotgan qismini ajratib olish kerak.
2. Aktiv kuchlar tasvirlab olinishi lozim.
3. Bog'lanish aksiomasidan foydalanib, qurilmaga bog'lanish reaksiyalarini qo'yib olish kerak.
4. Qaralayotgan qism berilgan aktiv kuchlar va bog'lanishlar reaksiyalari ta'siridagi qattiq jism deb hisoblanadi.
5. Butun fermaning muvozanat shartlaridan foydalanib, bog'lanish reaksiyalari topiladi.
6. Ikkita sterjen tutashgan tugun qirqib olinadi va bu tugunning berilgan aktiv kuchlar hamda qirqilgan sterjenlardagi reaksiyalar ta'siridagi muvozanati tekshiriladi. Har bir tugunda ikkitadan noma'lum zo'riqish bo'ladi, ular uchun ikkita proyeksiya tenglamalari tuziladi.

Quyida ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni tugunlarni qirqish usuli bilan topishga doir masalalarni yechib ko'rsatamiz.

4.6.1-masala (И.В.Мещерский 4.71). Shaklda qo'yilgan kuchlari bilan birga ko'rsatilgan ko'prik fermasining tayanchlaridagi reaksiyalar va sterjenlaridagi zo'riqishlar aniqlansin (103- a shakl). $P_1 = 3kN$, $P_2 = 2kN$, $P_3 = 2kN$. Qolgan o'lchamlar shaklda berilgan.

Yechish. A va B tayanch reaksiyalarini topish uchun butun fermani aktiv kuchlar va bog'lanish reaksiyalari ta'siridagi muvozanat tekshiriladi, ya'ni muvozanat tenglamasi tuziladi:

$$\sum_{i=1}^6 F_{ix} = x_A + P_3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^6 \text{mom}_B(\vec{F}_i) = -3m \cdot P_3 + 3m \cdot P_2 + 7m \cdot P_1 - 10m \cdot y_A = 0, \quad (a)$$

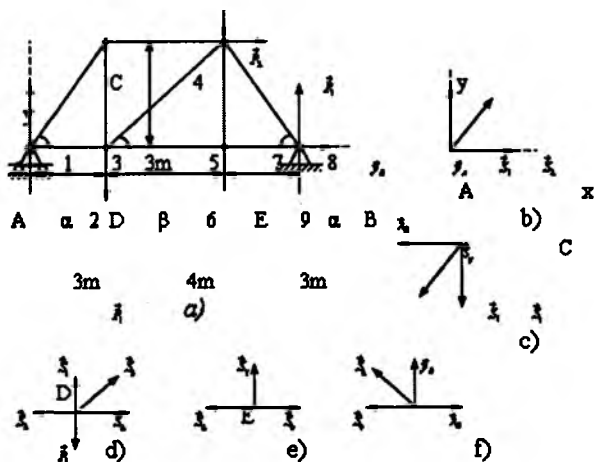
$$\sum_{i=1}^6 \text{mom}_A(\vec{F}_i) = -3m \cdot P_1 - 7m \cdot P_2 - 3m \cdot P_2 + 10m \cdot y_B = 0$$

(a) tenglamalarning birinchisidan

$$x_A = -P_3 = -2kN,$$

Ikkinchisidan $y_A = 2,1kN,$

Uchinchisidan $y_B = 2,9kN.$



103-shakl.

Endi ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni topishga o'tamiz.

A tugunni kesib, unga ta'sir etuvchi tashqi va ichki kuchlarni qo'yiladi (103- b shakl). x va y o'qlardagi proyeksiya tenglamalari tuziladi:

$$\begin{cases} S_2 + S_1 \cos \alpha = 0; \\ y_A + S_1 \sin \alpha = 0, \end{cases} (\alpha = 45^\circ) \Rightarrow \begin{cases} S_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 = 0; \\ S_1 = -\sqrt{2} y_A = -2,97 \text{ kN}, \end{cases}$$

birinchi tenglamadan

$$S_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} S_1 = 2,1 \text{ kN}.$$

Endi *C* tugunni qirqib, unga ta'sir etuvchi tashqi va ichki kuchlar qo'yiladi (103- c shakl) va muvozanat tenglamalar tuziladi:

$$\begin{cases} -S_4 - S_1^I \cos \alpha = 0; \\ -S_3 - S_1^I \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Bu tenglamalardan

$$S_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} S_1 = -2,1 \text{ kN}, \quad S_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} S_1 = 2,1 \text{ kN}.$$

Endi *D* tugunni qirqib, unga ta'sir etuvchi tashqi va ichki kuchlarning muvozanat tenglamalari tuziladi (103- d shakl)

$$\begin{cases} S_5 \cos \beta + S_6 - S_2^I = 0; \\ S_5 \sin \beta + S_3^I - P_1 = 0, \end{cases} \quad \text{tg } \beta = \frac{3}{4}, \quad \cos \beta = \frac{4}{5}, \quad \sin \beta = \frac{3}{5}.$$

Natijada

$$\begin{cases} \frac{4}{5} S_5 + S_6 = 2,1; \\ \frac{3}{5} S_5 = P_1 - S_3, \end{cases} \quad S_5 = 1,5 \text{ kN}, \quad S_6 = 0,9 \text{ kN}.$$

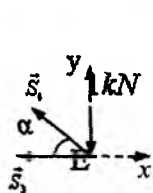
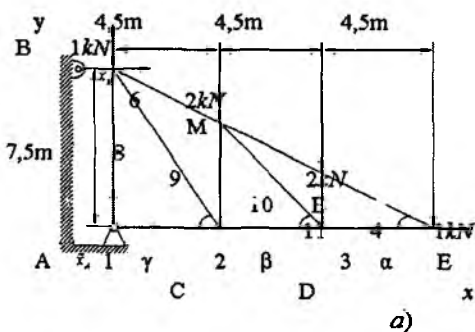
E tugunning muvozanati tekshiriladi (103- c shakl)

$$S_9 - S_6' = 0; \quad S_9 = S_6' = 0,9 \text{ kN};$$

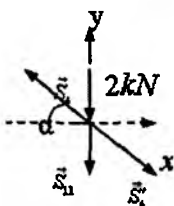
$$S_7 = 0, \quad S_7 = 0.$$

B tugunning qirqib, uni muvozanatini tekshiriladi (103- f shakl)

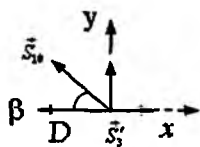
$$y_B + S_8 \cos \alpha = 0; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} S_8 = -y_B; \quad S_8 = -4,1 \text{ kN}.$$



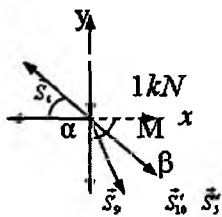
b)



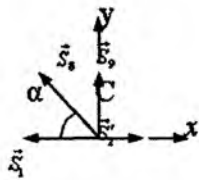
c)



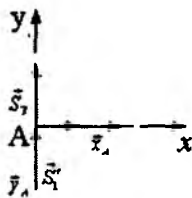
d)



e)



f)



m)

104-shakl.

4.6.2-masala (И.В.Мещерский 4.73). Shaklda ta'sir qiluvchi kuchlari bilan birga ko'rsatilgan osma fermaning tayanchlaridagi reaksiyalar va sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin (104- a shakl).

Avval butun fermaning muvozanati tekshiriladi. Fermaga ta'sir etuvchi aktiv kuchlar va bog'lanishlar reaksiyalari uchun muvozanat tenglamalari tuziladi (104-shakl):

$$\sum_{i=1}^6 F_{ix} = x_A + x_B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^6 F_{iy} = y_A - 1kN - 2kN - 2kN - 1kN, \quad (a)$$

$$\sum_{i=1}^6 mom_A(\vec{F}_i) = -7,5m \cdot x_B - 4,5m \cdot 2kN - 9m \cdot 2kN - 13,5m \cdot 1kN = 0$$

oxirigi tenglamalardan $x_B = -5,4kN$.

(a) tenglamalarning ikkinchisidan $y_A = 6kN$,

birinchisidan: $x_A = -x_B = 5,4kN$.

Endi tugunlarni qirqish usuli bilan sterjenlardagi zo'riqishlar topiladi.

E tugunni qirqib, unga ta'sir etuvchi aktiv kuchlar va fermaning qolgan qismidan beriladigan zo'riqishlarni qo'yamiz va mazkur tugunning muvozanati tekshiriladi (104-b shakl):

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = -S_3 - S_4 \cos \alpha = 0, \quad \sum_{i=1}^3 F_{iy} = S_4 \cos \alpha - 1kN = 0. \quad (b)$$

104- a shaklga asosan

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7,5}{13,5} = \frac{5}{9}, \quad \cos \alpha = \frac{9}{\sqrt{106}}, \quad \sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{106}}.$$

(b) tenglamalardan

$$S_4 = 2,06kN, \quad S_3 = -1,8kN.$$

Endi M tugun xuddi shunday qirqiladi va muvozanat tenglamalari tuziladi (104- c shakl):

$$\sum_{i=1}^4 F_{ix} = S_3' \cos \alpha - S_5 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = S_5 \sin \alpha - S_4' \sin \alpha - S_{11} - 2kN = 0.$$

Bu tenglamalardan

$$S_5 = 2,06kN; \quad S_{11} = -2kN.$$

D tugunga faqat ichki kuchlar ta'sir qiladi. Tugunning ana shu kuchlar ta'siridagi muvozanati tekshiriladi (104- d shakl):

$$\sum_{i=1}^4 F_{ix} = S_3' - S_2 - S_{10} \cos \beta = 0;$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = S_{11}' + S_{10} \sin \beta = 0. \quad (c)$$

104- a shaklga asosan

$$\frac{CM}{AB} = \frac{CE}{AE}; \quad CM = \frac{7,5m}{13,5m} \cdot 9m = 5m.$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{4,5} = \frac{10}{9}; \quad \cos \beta = \frac{9}{\sqrt{181}}, \quad \sin \beta = \frac{10}{\sqrt{181}}.$$

Bu munosabatlardan foydalanib (c) tenglamalardan quyidagilar topiladi:

$$\frac{10}{\sqrt{181}} S_{10} = -S_{11}; \quad S_{10} = \frac{\sqrt{181}}{10} \cdot 2 = 2,7kN,$$

$$S_2 = S_3' = \frac{9}{\sqrt{181}} \cdot S_{10}; \quad S_2 = -1,8kN - 1,8kN = -3,6kN.$$

Endi *M* tugunning muvozanati tekshiriladi. Bu tugunga qo'yilgan aktiv kuchlar va sterjenlarda hosil bo'lgan ichki kuchlar uchun muvozanat tenglamalari tuziladi (104- e shakl):

$$\sum_{i=1}^5 F_{ix} = S_{10}' \cos \beta + S_5' \cos \alpha - S_6 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^5 F_{iy} = -S_9 - S_{10}' \sin \beta - S_5' \sin \alpha = 0.$$

Bu tenglamalardan

$$\frac{9}{\sqrt{106}} S_6 = \frac{\sqrt{181}}{5} \frac{9}{\sqrt{181}} + \frac{\sqrt{106}}{5} \frac{9}{\sqrt{106}}; \quad S_6 = 4,1kN,$$

$$S_6 = -\frac{\sqrt{181}}{5} \frac{10}{\sqrt{181}} - \frac{\sqrt{106}}{5} \frac{5}{\sqrt{106}}; \quad S_9 = -3kN.$$

C tugunning muvozanati tekshiriladi. Bu tugunga faqat ichki kuchlar ta'sir qiladi (104- f shakl):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 F_{ix} &= S_2' - S_1 - S_8 \cos \gamma = 0; \\ \sum_{i=1}^5 F_{iy} &= S_9 + S_8 \sin \gamma = 0. \end{aligned} \quad (d)$$

104- a shaklga asosan

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{7,5}{4,5} = \frac{5}{3}; \quad \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{34}}, \quad \sin \gamma = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

Bu munosabatlarni (d) tenglamalarga qo'yib, quyidagilar topiladi:

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sqrt{34}} S_8 &= -S_9; & S_8 &= \frac{3\sqrt{34}}{5} kN = 3,5kN; \\ S_1 &= S_2 - S_8 \cos \gamma; & S_1 &= -54kN. \end{aligned}$$

7-sterjendagi zo'riqishni topish uchun A tugunni qirqib, unga ta'sir etuvchi tashqi va ichki kuchlar uchun muvozanat tenglamalari tuziladi (104- m shakl). y o'qiga nisbatan proyeksiya tenglamasini tuzish yetarli:

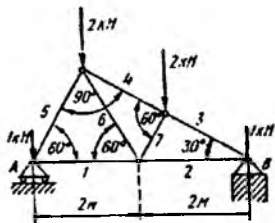
$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = y_A + S_7 = 0 \Rightarrow S_7 = -y_A = -6kN.$$

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, sterjenlarning uchlariga qo'yilgan ichki zo'riqishlar juft-jufti bilan ta'sir va aks ta'sir qonuniga asosan modullari teng yo'nalishlari qarama-qarshi. Shuning uchun $S_1 = S_1'$, $S_2 = S_2'$, ... deb olingan.

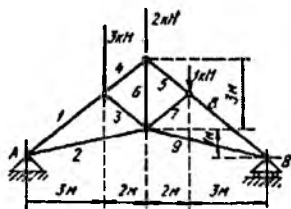
Muammoli masala va topshiriqlar

1. Rasmda ta'sir qiluvchi kuchlar bilan birga ko'rsatilgan stropila fermasining tayanchlaridagi reaksiyalar va sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin.

Javob: $R_A = 3,4kN$; $R_B = 2,6kN$.



1-masala.



2-masala

Sretjenning nomeri	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zo'riqishlar, kN	-7,3	+5,8	-2,44	-4,7	-4,7	+3,9	-0,81	-5,5	+4,4

2. Rasmda ta'sir qiluvchi kuchlar bilan birga ko'rsatilgan suyri fermaning tayanchlaridagi reaksiyalar va sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin.

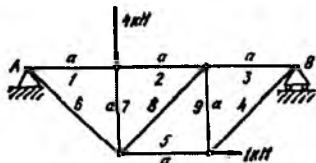
Javob: $R_A = 3,25kN$; $R_B = 2,75kN$.

Sretjenning nomeri	1	2	3	4	5	6	7
Zo'riqishlar, kN	+1,3	+3,03	-3,5	-2,5	-2,6	+1,73	-1,73

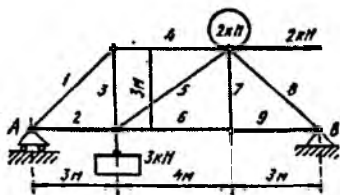
3. Rasmda yuklari bilan birga ko'rsatilgan fermaning tayanchlaridagi reaksiyalar va sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin.

Javob: $X_A = -1kN$, $Y_A = 3kN$, $Y_B = 1kN$.

Sretjenning nomeri	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zo'riqishlar, kN	-2	-2	-1	+1,41	+2	+4,24	-4	+1,41	-1



3-masala.



4-masala.

4. Rasmda yuklari bilan birga ko'rsatilgan ko'priq fermasining tayanchlaridagi reaksiyalar va sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin.

Javob: $Y_A = 2,1kN$, $X_B = -2kN$, $Y_B = 2,9kN$.

Sretjenning nomeri	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zo'riqishlar, kN	-2,97	+2,1	+2,1	-2,1	+1,5	+0,9	0	-4,1	+0,9

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Qanday qurilmaga ferma deyiladi?
2. Qachon ferma statik aniq bo'ladi?
3. Tugunlarning qirqish usulini tahlil qiling.
4. Fermaning alohida qismlariga ta'sir etuvchi kuchlarni ayting.
5. Ferma uchun qanday kuchlar tashqi kuchlar hisoblanadi?

V BOB. FAZODA KUCHLAR SISTEMASI

Ushbu bobda fazoda ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishuvchi va ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari, juftlar sistemasini qo'shish, fazoda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasini berilgan markazga va ularni bitta bosh vektorga hamda bosh momentga keltirish, bosh vektor va bosh momentning hisoblash formulalari, kuchlar sistemasini keltirishning xususiy hollari, fazoda parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari kabi masalalar bayon etiladi.

5.1. Fazoda ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Kuch, kuchlar sistemasi, kesishuvchi kuchlar sistemasi, teng ta'sir etuvchi, dinamo.

Tekislikda kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari I-bobning 3-§ da keltirilgan.

Teorema. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun berilgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi nolga teng, yani

$$\vec{R} \equiv \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad (5.1.1)$$

bo'lishi zarur va yetarli.

To'g'ri burchakli $Oxyz$ dekart koordinatalar sistemasini tanlab, (5.1.1) tenglamani koordinata o'qlariga proyeksialaymiz, natijada uchta skalar tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi, ya'ni

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (5.1.2)$$

Teng ta'sir etuvchining dekart koordinatalari o'qlaridagi proyeksiyalari berilgan kuchlarning mos o'qlardagi proyeksiyalari yig'indisiga teng, ya'ni

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \quad (5.1.3)$$

Teng ta'sir etuvchining moduli va yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagi formula bilan topiladi:

$$\begin{aligned} |\vec{R}| &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \\ \cos(x, \hat{\vec{R}}) &= \frac{R_x}{|\vec{R}|}, \quad \cos(y, \hat{\vec{R}}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(z, \hat{\vec{R}}) = \frac{R_z}{R}. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Muvozanatdagi qattiq jism erkin bo'lmasa, bog'lanishlar aksiomasidan foydalanib, bog'lanishlarning jismga ko'rsatadigan

ta'sirini ularning reaksiya kuchi bilan almashtiriladi. Natijada bunday jismni berilgan kuchlar va bog'lanish reaksiya kuchlari ta'siridagi erkin jism deb qarash mumkin.

(5.1.2) tenglamalardan foydalanib kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini quyidagicha ifodalash ham mumkin: bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemi muvozanatda bo'lishi uchun berilgan kuchlarning mos koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

5.2. Fazoda kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish uslubi

Fazoda kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish uslubi tavsiya etiladi.

1. Koordinatalar sistemasini qulay qilib tanlash lozim. Ko'p hollarda koordinatalar sistemasining boshi sifatida kuchlar ta'sir chiziqlari kesishgan nuqta tanladi, koordinata o'qlaridan birortasini iloji boricha ko'proq noma'lum reaksiya kuchlariga perpendikular qilib olish maqsadga muvofiq.

2. Qattiq jismga ta'sir etuvchi barcha aktiv kuchlarni va bog'lanish reaksiyalarni shaklda tasvirlab olish kerak.

3. Bog'lanish reaksiyalarni shaklda tasvirlashda bog'lanish turiga e'tibor berish lozim. Agar bog'lanish silindrik bo'lsa, bog'lanish reaksiyasini koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan ikkita tuzuvchilarga ajratish kerak, agar bog'lanish sharnirlni bog'lanish bo'lsa, reaksiya kuchni koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan uchta tuzuvchiga ajratish kerak.

4. Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan (5.1.2.) tenglamalar sistemasini tuzish kerak.

5. Hosil qilingan tenglamalar sistemasini birgalikda yechib, izlanayotgan noma'lumlar topiladi.

Quyida fazoda kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechib ko'rsatamiz.

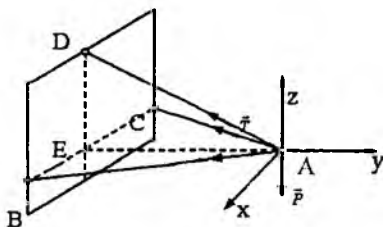
5.2.1-masala (И.В.Мещерский 6.4). Agar $CBA=BCA=60^\circ$, $EAD=30^\circ$ ekanligi berilgan bo'lsa, AB va AC sterjenlardagi S_1 va S_2 zo'riqishlar hamda AD sim arqondagi T zo'riqish topilsin.

P yukning og'irligi $300N$ ga teng. ADC tekislik gorizontaal, sterjenlar A , B va C nuqtalarda sharnirlar bilan biriktirilgan (105-shakl).

Berilgan: $CBA=BCA=60^\circ$, $EAD=30^\circ$, $P=300N$.

Topish kerak: S_1 , S_2 , T .

Yechish. Koordinatalar sistemasi shaklda korsatilganday tanlanadi. Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan (5.1.2) muvozanat tenglamalari tuziladi:



105-shakl.

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = S_1 \cos 60^\circ - S_2 \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = -S_1 \cos 30^\circ - S_2 \cos 30^\circ - T \cos 30^\circ = 0, \quad (a)$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iz} = T \cos 60^\circ - P = 0.$$

$$(a) \text{ tenglamalardan } \begin{cases} S_1 = S_2, \\ 2S_1 = -T, \Rightarrow T = 2 \cdot 300N = 600N, \\ T = 2P, \end{cases}$$

$$S_1 = S_2 = -300N.$$

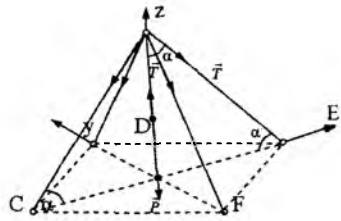
5.2.2-masala (И.В.Мешчерский 6.13) AB machtani simmetrik ravishda joylashgan to'rtta tortqich vertikal holatda ushlab turadi. Har qaysi ikkita yondosh tortqichlar orasidagi burchak 60° ga teng. Agar har qaysi tortqichdagi taranglik kuchi $1kN$ ga va machtaning og'irligi $2kN$ ga teng bo'lsa, machtadan yerga tushadigan bosimining qancha bo'lishi aniqlansin (106-shakl).

Berilgan: $\angle CBF = \angle CBD = \angle DBE = \angle EBF = 60^\circ$, $T = 1kN$,

$P = 2kN$.

Topish kerak: P_1

Yechish. Koordinatalar sistemasi shaklda ko'rsatilganday qilib tanlanadi. Tanlangan sanoq sistemasi nisbatan (5.1.2) muvozanat tenglamalari tuziladi. $CDEF$ to'rtburchak kvadrat va yon tomondagi uchburchaklar teng tomonli uchburchaklar bo'lganligi uchun α burchak 45° ga teng. Taranglik kuchlarining miqdorlari teng bo'lgani uchun bu kuchlarni x va y o'qlaridagi proyeksiyalari yig'indisi nolga teng bo'ladi, ya'ni:



106-shakl.

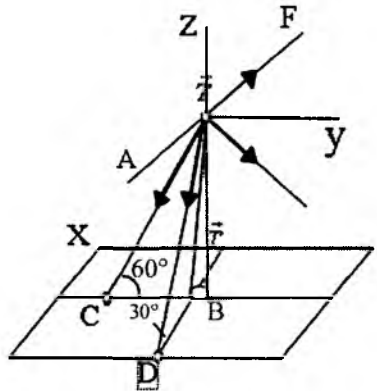
$$\sum_{i=1}^6 F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^6 F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^6 F_{iz} = P_1 - P - 4T \cos \alpha = 0.$$

Bundan:

$$P_1 = P + 4T \cos 45^\circ = 2kN + 4 \cdot 1kN \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,83kN.$$

Javob: $P_1 = 4,83kN$.

5.2.3-masala. (И.В. Мещерский. 6.12). Muiyulishda havo kabelini tutib turuvchi AB simyog'och ikkita AC va AD tortqichlar bilan ushlab turiladi, bundagi $\angle CBD=90^\circ$. Simyog'ochdagi va tortqichlardagi zo'riqishlar, kabelning bir simi bilan CBA tekislik orasida hosil bo'lgan φ burchakka bog'liq ravishda aniqlansin. Kabelning simlari gorizontal va bir-biriga tik, ularning tortilish kuchlari bir xil bo'lib, T ga teng.



107-shakl.

Berilgan: $\angle ACB = \angle ADB = 60^\circ$, $\angle EAF = 90^\circ$, φ .

Topish kerak: S_{AC} , S_{AD} va S_{AB} .

Yechish. Koordinatalar sistemasining boshi sifatida kuchlarning ta'sir chiziqlarini kesishish nuqtasi A ni olamiz va koordinata o'qlarini shaklda ko'rsatilgandek tanlanadi. Muvozanat tenglamalari tuziladi:

$$\sum_{i=1}^5 F_{ix} = S_{AC} \cos 60^\circ + T \cos \varphi - T \sin \varphi = 0;$$

$$\sum_{i=1}^5 F_{iy} = -S_{AC} \cos 60^\circ + T \sin \varphi + T \cos \varphi = 0;$$

$$\sum_{i=1}^5 F_{iz} = -S_{AD} \cos 30^\circ - S_{AC} \cos 30^\circ - S_{AB} = 0.$$

Bulardan

$$S_{AD} = 2T(\sin \varphi - \cos \varphi), \quad S_{AC} = 2T(\sin \varphi + \cos \varphi),$$

$$\begin{aligned} S_{AB} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}(S_{AD} + S_{AC}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}2T(\sin \varphi - \cos \varphi + \sin \varphi + \cos \varphi) = \\ &= -2\sqrt{3}T \sin \varphi. \end{aligned}$$

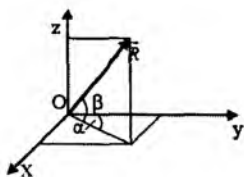
Muammoli masala va topshiriqlar

1. \vec{F} kuch vektori bilan Ox o'qi orasidagi burchak kosinusi topilsin $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

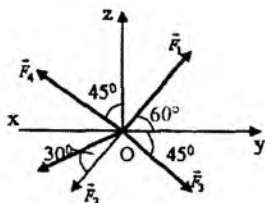
2. $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \sqrt{11}\vec{k}$ kuch vektorning moduli va yo'naltiruvchi kosinuslari topilsin.

3. Fazoda kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining moduli $R = 150N$. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ bo'lsa, teng ta'sir etuvchining Oy o'qidagi proyeksiyasi topilsin.

4. Shaklda tasvirlangan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi topilsin. \vec{F}_2 va \vec{F}_3 kuchlar (xy) tekislikda, \vec{F} kuch (yz) tekisligida, \vec{F}_4 kuch (xz) tekisligida yotadi, $F_1 = 2N$, $F_2 = F_3 = 4N$, $F_4 = 6N$.



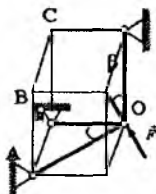
3-masala.



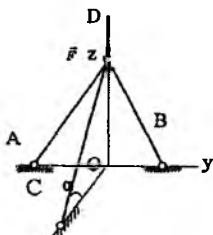
4-masala.

5. AO , BO va CO sterjenlar O nuqtada sharnirli mahkamlangan va O nuqtaga $F=18N$ kuch qo'yilgan. Agar $\alpha=300$, $\beta=450$ bo'lsa, AO sterjendagi zo'riqishni toping.

6. AD , BD va CD sterjenlar D nuqtada sharnir vositasida birlashtirilgan. Agar $F=8N$ kuch Oyz tekisligida yotsa va burchak $\alpha=20^\circ$ bo'lsa, CD sterjendagi zo'riqishni aniqlang.

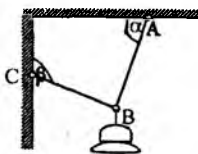


5-masala.

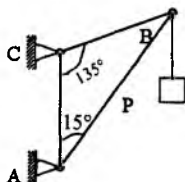


6-masala.

7. Og'irligi $20N$ bo'lgan elektr lampa AB shnur yordamida ipga osilgan va keyin BC arqon bilan devorga tortib qo'yilgan. Burchak $\alpha=60^\circ$ va burchak $\beta=1350$ deb olib, AB shnurning \vec{T}_A , BC arqonning \vec{T}_C taranglik kuchlari aniqlansin. Shnur va arqonning og'irliklari hisobga olinmasin.



7-masala.



8-masala.

8. Machta krani AB strela va CB zanjirdan iborat; AB strela machtaga A sharnir vositasida biriktirilgan. Strelaning B uchiga $R = 2kN$ yuk osilgan; burchaklar: $BAC = 15^\circ$, $ACB = 135^\circ$ CB zanjirdagi T taranglik kuchi va AB streladagi Q zo'riqish aniqlansin.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Fazoda bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining moduli va yo'naltiruvchi kosinuslari qanday topiladi?
2. Fazoda bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday tenglamalar bilan ifodalanadi?
3. Fazoda juft kuchlar sistemasiga ekvivalent bo'lgan natijaviy juft haqidagi teoremani isbotlang.
4. Natijaviy juftning momenti qanday topiladi?

5.3. Fazoda juftlar sistemasini qo'shish

Juft kuch, juftlar sistemasi, moment, bosh moment, kuch, kuchlar sistemasi, teng ta'sir etuvchi, bosh moment, dinamo.

Teorema. Qattiq jismga ta'sir etuvchi juftlar sistemasi bitta juftga ekvivalent bo'lib, uning momenti berilgan juftlar momentlarining vektorli yig'indisiga teng.

1. Avval bir tekislikda ta'sir etuvchi juftlar sistemasi qaraladi. Faraz qilaylik, bir tekislikda yotuvchi

$$(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), (\vec{F}_3, \vec{F}'_3), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n)$$

juftlar sistemasi berilgan bo'lsin. Juftlarning yelkalari mos ravishda d_1, d_2, \dots, d_n bilan belgilanadi (108-shakl). 6-§ dagi teoremalardan foydalanib, berilgan juftlarni bitta $AB = d$ yelkaga keltiriladi. Berilgan juftlarni o'z tekisligida ko'chirish natijasida hosil bo'ladigan ekvivalent juftlarning kuchlarini mos ravishda $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n, \vec{Q}'_1, \vec{Q}'_2, \dots, \vec{Q}'_n$ bilan belgilanadi (108-shakl).

A va B nuqtalarga qo'yilgan \vec{Q}_i va \vec{Q}'_i ($i = \overline{1, n}$) kuchlarni qo'shib, yelkasi d ga teng bo'lgan (\vec{R}, \vec{R}') juftni hosil qilamiz. 108-shaklga asosan:

$$R' = R = Q_1 - Q_2 - Q_3 + \dots + Q_n.$$

(\bar{R}, \bar{R}') juft berilgan juftlar sistemasiga ekvivalent bo'radi, ya'ni

$$\left[(\bar{F}_1, \bar{F}'_1), (\bar{F}_2, \bar{F}'_2), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}'_n) \right] \sim (\bar{R}, \bar{R}').$$

(\bar{R}, \bar{R}') natijaviy juftning momenti quyidagiga teng:

$$\text{mom}(\bar{R}, \bar{R}') = RD = (Q_1 D) + (-Q_2 D) + (-Q_3 D) + \dots + (Q_n D) \quad (5.3.1)$$

Ikkinchi tomondan I bobning 6-§ dagi 4-teoremaga asosan:

$$\begin{aligned} Q_1 D &= F_1 d_1 = \text{mom}(\bar{F}_1, \bar{F}'_1), \\ -Q_2 D &= -F_2 d_2 = \text{mom}(\bar{F}_2, \bar{F}'_2), \\ Q_n D &= F_n d_n = \text{mom}(\bar{F}_n, \bar{F}'_n). \end{aligned}$$

Bu tengliklarni hadma-had qo'shib, (5.3.1) ga asosan quyidagi topiladi:

$$\text{mom}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{i=1}^n \text{mom}(\bar{F}_i, \bar{F}'_i), \quad (5.3.2)$$

ya'ni tekis juftlar sistemasi bitta juftga ekvivalent bo'lib, uning momenti berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng.

2. Endi fazoda ta'sir etuvchi juftlar sistemasini qaraymiz.

O'zaro kesishuvchi tekislik-

larda yotuvchi ikkita juftlar

sistemasini berilgan bo'lsin.

Faraz qilaylik, α tekislikda

ixtiyoriy ravishda joylashgan

(\bar{F}_1, \bar{F}'_1) juft va β tekislikda

ixtiyoriy ravishda ta'sir etuv-

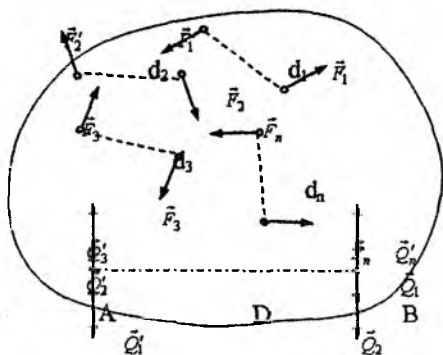
chi (\bar{F}_2, \bar{F}'_2) juft berilgan bo'l-

sin. α va β tekisliklarni kes-

ishish chizig'ida biror AB

kesma olinadi (109-shakl).

I-bobning 6-§ dagi teore-



108-shakl.

malardan foydalanib, berilgan juftlarni AB yelkaga keltiriladi. I bobning 6-§ dagi 4-teoremaga asosan hosil bo'lgan yangi juftlarning momentlari teng bo'ladi, lekin tuzuvchi kuchlar o'zgaradi.

Bu holda (\vec{F}_1, \vec{F}_1') va (\vec{F}_2, \vec{F}_2') juftlar o'rniga (\vec{P}_1, \vec{P}_1') va (\vec{P}_2, \vec{P}_2') juftlar yuzaga keladi, ya'ni

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_1') \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_1'), \quad (\vec{P}_2, \vec{P}_2') \sim (\vec{F}_2, \vec{F}_2'),$$

bundan

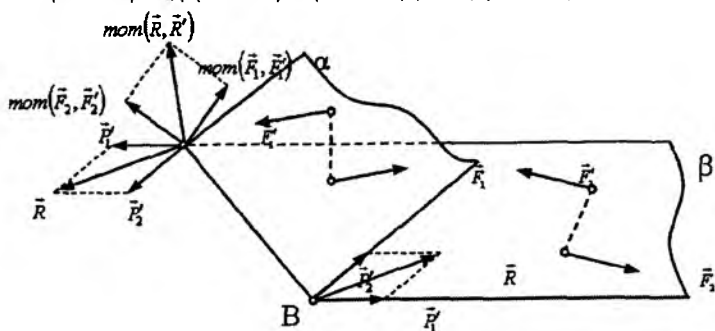
$$\begin{aligned} \text{mom}(\vec{P}_1, \vec{P}_1') &= \text{mom}(\vec{F}_1, \vec{F}_1'), \\ \text{mom}(\vec{P}_2, \vec{P}_2') &= \text{mom}(\vec{F}_2, \vec{F}_2'), \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

va

$$|\text{mom}(\vec{P}_1, \vec{P}_1')| = P_1 d, \quad |\text{mom}(\vec{P}_2, \vec{P}_2')| = P_2 d. \quad (5.3.4)$$

(\vec{P}_1, \vec{P}_1') va (\vec{P}_2, \vec{P}_2') kuchlar AB kesmaga perpendikular yo'nalgan, (\vec{P}_1, \vec{P}_1') va (\vec{P}_2, \vec{P}_2') juftlarning yelkasi $AB=d$ kesmadan iborat. \vec{P}_1 bilan \vec{P}_2 va \vec{P}_1' bilan \vec{P}_2' kuchlarni qo'shib (\vec{R}, \vec{R}') yangi juftni hosil qilamiz. (\vec{R}, \vec{R}') juft berilgan juftlarga ekvivalent, ya'ni

$$(\vec{R}, \vec{R}') \sim [(\vec{P}_1, \vec{P}_1'), (\vec{P}_2, \vec{P}_2')] \sim [(\vec{F}_1, \vec{F}_1'), (\vec{F}_2, \vec{F}_2')].$$



109-shakl.

(\vec{P}_1, \vec{P}_1') va (\vec{P}_2, \vec{P}_2') juftlarning moment vektorlari mos ravishda α va β tekisliklarga perpendikular yo'nalgan.

Moment vektorlariga parallelogramm quramiz, parallelogrammning dioganali (\vec{R}, \vec{R}') juft tekisligiga perpendikular, uzunligi esa Rd ga teng bo'ladi. Demak, parallelogrammning dioganali (\vec{P}_1, \vec{P}_1') va (\vec{P}_2, \vec{P}_2') juftlar teng ta'sir etuvchisi (\vec{R}, \vec{R}') juftning momentini ifodalaydi, ya'ni

$$\overline{mom}(\vec{P}_1, \vec{P}_1') + \overline{mom}(\vec{P}_2, \vec{P}_2') = \overline{mom}(\vec{R}, \vec{R}').$$

(5.1.3) tengliklarga asosan

$$\overline{mom}(\vec{F}_1, \vec{F}_1') + \overline{mom}(\vec{F}_2, \vec{F}_2') = \overline{mom}(\vec{R}, \vec{R}'). \quad (5.3.5)$$

Agar bir nechta juftlar sistemasi berilgan bo'lsa, (5.1.5) tenglikni ketma-ket qo'llab, qo'yidagi umumiy formulani hosil qilish mumkin:

$$\overline{mom}(\vec{R}, \vec{R}') = \sum_{i=1}^n \overline{mom}(\vec{F}_i, \vec{F}_i'). \quad (5.3.6)$$

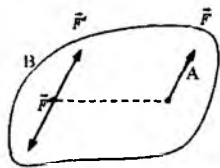
5.4. Fazoda ixtiyoriy ravishda yo'nalgan kuchlar sistemasi

Kuch, kuchlar sistemasi, teng ta'sir etuvchi, bosh vektor, bosh moment, dinamo, Puanso teoremasi.

5.4.1. Kuchni berilgan markazga keltirish.

Teorema. *Qattiq jismning biror A nuqtasiga qo'yilgan ixtiyoriy kuch jismning boshqa bir B nuqtasiga qo'yilgan xuddi shunday kuchga va bitta juftga ekvivalent bo'lib, juftning momenti berilgan kuchning B nuqtaga nisbatan momentiga teng.*

Qattiq jismning biror A nuqtasiga qo'yilgan \vec{F} kuch berilgan bo'lsin (110-shakl). Qattiq jismning boshqa bir B nuqtasiga modullari berilgan kuchning moduliga teng va berilgan



110-shakl.

kuchga parallel to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan ikkita \vec{F}' va \vec{F}'' kuchlar qo'yiladi.

$$(\vec{F}', \vec{F}'') \sim 0$$

bo'lgani uchun

$$\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$$

\vec{F} va \vec{F}'' kuchlar juftni hosil qilganligi sababli

$$\vec{F} \sim [\vec{F}' \text{ va } (\vec{F}, \vec{F}'')],$$

(\vec{F}, \vec{F}'') juftning momenti berilgan \vec{F} kuchning B nuqtaga nisbatan momentiga teng, ya'ni

$$\overline{mom}(\vec{F}, \vec{F}'') = \overline{mom}_B(\vec{F}). \quad (5.4.1)$$

5.4.2. Kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirish. Statikaning asosiy teoremasi (Puanso teoremasi).

Qattiq jismga ta'sir etuvchi ixtiyoriy kuchlar sistemasini bitta kuchga va bitta juftga keltirish mumkin.

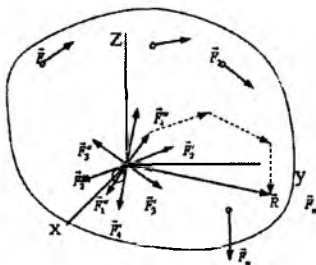
Kuchlar sistemasini bitta kuchga va bitta juftga keltirishni kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirish deyiladi.

Qattiq jismga qo'yilgan ixtiyoriy $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasini berilgan bo'lsin. Keltirish markazi sifatida qattiq jismning ixtiyoriy O nuqtasi tanlanadi va berilgan kuchlar shu O nuqtaga keltiriladi (111-shakl).

Natijada

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim [\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n; (\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n)],$$

hosil bo'ladi.



111-shakl.

Shunday qilib, berilgan n ta kuchlar sistemasi boshqa n ta O nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasi va n ta

$$\left[(\vec{F}_1, \vec{F}_1^*), (\vec{F}_2, \vec{F}_2^*), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n^*) \right]$$

juftlar sistemasi bilan almashtirildi.

(5.4.1) formulaga asosan juftlarning momentlari quyidagiga teng:

$$\vec{M}_i = \vec{M}(\vec{F}_i, \vec{F}_i^*) = \vec{M}_0(\vec{F}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.4.2)$$

O nuqtaga kesishuvchi $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$ kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi \vec{R} berilgan kuchlarning vektorli yig'indisiga teng, ya'ni

$$(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n) - \vec{R}$$

bunda

$$\vec{R} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i.$$

$(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$ kesishuvchi kuchlar sistemasi uchun \vec{R} kuch teng ta'sir etuvchi, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ berilgan kuchlar sistemasi uchun esa bosh vektor hisoblanadi.

Berilgan kuchlar sistemasi uchun bosh vektor deb kuchlarning vektorli yig'indisiga aytiladi. Bu vektor berilgan kuchlarga qurilgan kuch ko'pburchagining yopuvchisini ifodalaydi (111-shakl), ya'ni

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (5.4.3)$$

Juftlarni qo'shish teoremasiga asosan $\left\{ (\vec{F}_1, \vec{F}_1^*), (\vec{F}_2, \vec{F}_2^*), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n^*) \right\}$ juftlarni bitta juft bilan almashtiriladi. Natijaviy juftning momenti $\vec{M}(\vec{\Phi}, \vec{\Phi}') = \vec{M}_0$ ga bosh moment deyiladi. Bosh moment \vec{M}_0 juftlar momentlarining vektorli yig'indisiga teng. (5.4.2) formulaga asosan

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_0(\vec{F}_1) + \vec{M}_0(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_0(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_i). \quad (5.4.4)$$

Indeksdagi O harf keltirish markazini bildiradi. Berilgan kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan bosh momenti deb berilgan kuchlarning o'sha O nuqtaga nisbatan vektorli momentlari yig'indisiga aytiladi.

Shunday qilib, statikaning quyidagi asosiy teoremasi isbotlandi: qattiq jismga qo'yilgan ixtiyoriy kuchlar sistemasini shu kuchlar sistemasining bosh vektoriga teng bo'lgan bitta kuchga va momenti kuchlar sistemasining bosh momentiga teng bo'lgan bitta juftga keltirish mumkin.

Bu teoremani qisqacha quyidagicha ta'riflash ham mumkin: har qanday kuchlar sistemasini bitta bosh vektorga va ixtiyoriy markazga nisbatan bitta bosh momentga keltirish mumkin, ya'ni

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{R}, \vec{M}_0).$$

Ta'sir chiziqlari bir tekislikda yotuvchi kuchlar sistemasiga tekis kuchlar sistemasi deyiladi. Tekis kuchlar sistemasi uchun ham statikaning asosiy teoremasi o'rinli. Ixtiyoriy tekis kuchlar sistemasini bitta kuchga va bitta juftga keltirish mumkin. Tekis kuchlar sistemasining bosh vektori kuchlar tekisligida yotadi, keltirish markazi sifatida tekislikning biror O nuqtasi olinsa, kuchlar sistemasining bosh momenti \vec{M}_0 kuchlar tekisligiga perpendikular bo'ladi.

5.5. Bosh vektor va bosh momentni hisoblash formulalari

Ixtiyoriy $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasining bosh vektori shu kuchlarning vektorli yig'indisiga teng, ya'ni

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (5.5.1)$$

Biror O markazga nisbatan bosh momenti berilgan kuchlarning o'sha markazga nisbatan vektorli momentlari yig'indisiga teng, ya'ni

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_i). \quad (5.5.2)$$

(5.5.1) tenglikning ikkala tomonini koordinata o'qlariga proyeksiyalab, bosh vektorning proyeksiyalari uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \quad (5.5.3)$$

Bosh vektorning moduli va yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$\begin{aligned} |\vec{R}| &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \\ \cos(x, \hat{\vec{R}}) &= \frac{R_x}{|\vec{R}|}, \quad \cos(y, \hat{\vec{R}}) = \frac{R_y}{R}, \\ \cos(z, \hat{\vec{R}}) &= \frac{R_z}{R}. \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

(5.5.3) tenglikning ikkala tomonini koordinata o'qlariga proyeksiyalab, bosh momentning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari topiladi:

$$\begin{aligned} M_{Ox} = M_x &= \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}); \\ M_{Oy} = M_y &= \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}); \\ M_{Oz} = M_z &= \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}). \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Bosh momentning moduli va yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagi formulalardan topiladi:

$$\left. \begin{aligned} |M_0| &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \\ \cos(x, \hat{\vec{M}}_0) &= \frac{M_x}{M_0}, \quad \cos(y, \hat{\vec{M}}_0) = \frac{M_y}{M_0}, \\ \cos(z, \hat{\vec{M}}_0) &= \frac{M_z}{M_0} \end{aligned} \right\} \quad (5.5.6)$$

Tekis kuchlar sistemasi berilgan bo'lsa, Oz o'qini kuchlar tekisligiga perpendikular qilib olinadi, Ox va Oy o'qlari kuchlar tekisligida yotadi. Bosh vektor Oxy tekisligida yotadi, shu sababli tekis kuchlar sistemasi uchun

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad R_z = 0;$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \cos(x, \wedge \vec{R}) = \frac{R_x}{R}, \quad (5.5.7)$$

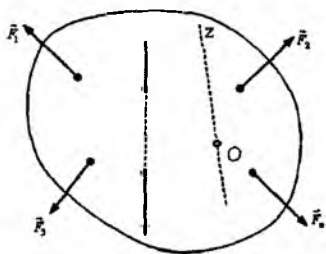
$$\cos(y, \wedge \vec{R}) = \frac{R_y}{R}. \quad (5.5.7)$$

Tekis kuchlar sistemasining bosh momenti bosh vektorga perpendikular va demak Oz o'qiga parallel bo'ladi. U holda

$$M_x = 0, \quad M_y = 0,$$

$$M_0 = M_z = \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i). \quad (5.5.8)$$

Teng ta'sir etuvchi kuchning momenti haqidagi teorema (Varinon teoremasi). Kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining ixtiyoriy nuqtaga nisbatan vektorli momenti berilgan kuchlarning o'sha nuqtaga nisbatan vektorli momentlari yig'indisiga teng.



112-shakl.

Faraz qilaylik, qattiq jismga ta'sir etuvchi $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi \vec{R}^* bo'lsin, ya'ni

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}^*. \quad (5.5.8)$$

Berilgan kuchlar sistemasiga uni muvozanatlashtiruvchi \vec{R}^* kuch qo'shiladi. \vec{R}^* kuchning moduli teng ta'sir etuvchi kuchning moduliga teng va unga qarama-qarshi yo'nalgan (112- shakl). U holda

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{R}^*\right) \sim \left(\vec{R}^*, \vec{R}^*\right) \sim 0. \quad (5.5.9)$$

Hosil bo'lgan yangi kuchlar sistemasi muvozanatlashgan kuchlar sistemasi bo'lganligi uchun ularni ixtiyoriy O markazga nisbatan vektorli momentlari yig'indisi nolga teng, ya'ni

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_i) + \vec{M}_0(\vec{R}^*) = 0. \quad (5.5.10)$$

\vec{R}^* va \vec{R}^* kuchlar qarama-qarshi yo'nalganligidan

$$\vec{M}_0(\vec{R}^*) = -\vec{M}_0(\vec{R}^*).$$

Buni (5.5.10) tenglamaga qo'yiladi:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_i) - \vec{M}_0(\vec{R}^*) = 0$$

bundan

$$\vec{M}_0(\vec{R}^*) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_i). \quad (5.5.11)$$

(5.5.11) tenglamaning ikkala tomonini O nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy Oz o'qiga proyeksiyalab, Oz o'qiga nisbatan Varinon teoremasini hosil qilamiz:

$$\vec{M}_z(\vec{R}^*) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_z(\vec{F}_i), \quad (5.5.12)$$

ya'ni, teng ta'sir etuvchi kuchning ixtiyoriy o'qqa nisbatan momenti berilgan kuchlarning o'sha o'qqa nisbatan momentlari yig'indisiga teng.

5.6. Kuchlar sistemasini keltirishning xususiy hollari

5.6.1. Keltirish markazini almashtirish. Fazoda qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasi biror O markazga keltirilib, bitta \vec{R} bosh vektor va momenti \vec{M}_0 ga teng bo'lgan bitta juft bilan

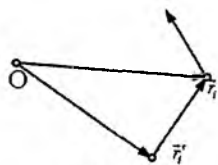
almashtirilgan bo'lsin. Yangi O' markazni tanlab kuchlar sistemasini shu markazga keltirganimizda \vec{R}' bosh vektorni va momenti $\vec{M}_{O'}$ bo'lgan bitta juftni hosil qilamiz. Ma'lumki, ixtiyoriy markazga nisbatan bosh vektor

$$\vec{R} = \sum_{(i)} \vec{F}_i = \vec{R}'$$

ga teng, ya'ni keltirish markazini o'zgarishi bilan kuchlar sistemasining bosh vektori o'zgarmaydi.

Keltirish markazini o'zgarishi bilan har bir kuchning yangi markazga nisbatan momenti o'zgaradi va demak, bosh moment ham o'zgaradi. O markazga nisbatan bosh momentni \vec{M} bilan, O' nuqtaga nisbatan esa \vec{M}' bilan belgilanadi. U holda

$$\vec{M}' = \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times \vec{F}_i,$$



113-shakl.

bunda $\vec{r}'_i = \vec{F}_i$ kuch qo'yilgan nuqtaning O' nuqtaga nisbatan radius-vektori (113-shakl).

Shakldan ko'rinib turibdiki

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{OO}'$$

\vec{r}'_i yuqoridagi ifodaga qo'yiladi:

$$\vec{M}' = \sum_{(i)} \left[(\vec{r}_i - \vec{OO}') \times \vec{F}_i \right] = \sum_{(i)} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) - \sum_{(i)} \left[\vec{OO}' \times \vec{F}_i \right].$$

$$\sum_{(i)} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{M}, \quad \sum_{(i)} \vec{F}_i = \vec{R}.$$

bo'lganligi uchun

$$\vec{M}' = \vec{M} - \vec{OO}' \times \vec{R} = \vec{M} + \vec{O'O} \times \vec{R}. \quad (5.6.1)$$

Demak, keltirish markazini o'zgarishi bilan kuchlar sistemasining bosh momenti yangi markazga nisbatan bosh vektorning momentiga teng miqdoriga o'zgaradi.

5.6.2. Kuchlar sistemasining invariantlari.

1-invariant. Biz ko'rdikki, keltirish markazini o'zgarishi bilan kuchlar sistemasining bosh vektori o'zgarmay qoladi, ya'ni

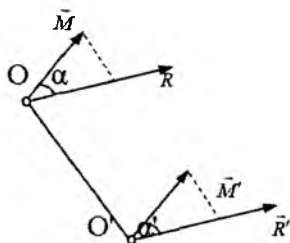
$$\vec{R} = \vec{R}'. \quad (5.6.2)$$

Shunday qilib, kuchlar sistemasining bosh vektori vektorli invariant bo'ldi.

2-invariant. Kuchlar sistemasining bosh vektorini uning bosh momentiga skalar ko'paytmasi keltirish markazini tanlashga bog'liq emas, ya'ni

$$\vec{R} \cdot \vec{M} = RM \cos(\vec{R}, \hat{M})$$

kuchlar sistemasining ikkinchi invarianti hisoblanadi. Ikkinchi invariantni boshqacha ham talqin qilish mumkin. Bosh momentning bosh vektor yo'nalishidagi proyeksiyasi, ya'ni $M \cos(\vec{R}, \hat{M})$ o'zgarmaydi. Keltirish markazi O nuqtaga nisbatan (114-shakl)



114-shakl.

$$\vec{R} = \sum_{(i)} \vec{F}_i, \quad \vec{M} = \sum_{(i)} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i).$$

O' keltirish markaziga nisbatan (5.6.1) va (5.6.2) tengliklarga asosan:

$$\vec{R}' = \vec{R}, \quad \vec{M}' = \vec{M} + \overline{O'O} \times \vec{R}.$$

Bundan

$$\vec{R}' \cdot \vec{M}' = \vec{R} \cdot (\vec{M} + \overline{O'O} \times \vec{R}) = \vec{R}' \cdot \vec{M} + \vec{R} \cdot (\overline{O'O} \times \vec{R}).$$

\vec{R} va $\overline{O'O} \times \vec{R}$ vektorlar o'zaro perpendikularligidan

$$\vec{R} \cdot (\overline{O'O} \times \vec{R}) = 0$$

va demak

$$\vec{R}' \cdot \vec{M}' = \vec{R} \cdot \vec{M} = const \quad (5.6.3)$$

$\vec{R}' \cdot \vec{M}' = RM \cos(\vec{R}, \hat{M})$, $R = const$ bo'lgani uchun

$$M \cos(\vec{R}, \hat{M}) = M' \cos(\vec{R}', \hat{M}') = const. \quad (5.6.4)$$

Shunday qilib, kuchlar sistemasining bosh vektori bilan bosh momentning skalar ko'paytmasi o'zgarmas yoki bosh momentning bosh vektor yo'nalishidagi proyeksiyasi o'zgarmas bo'lar ekan. Bu kuchlar sistemasining ikkinchi invarianti hisoblanadi.

Fazoda ixityoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasini bitta \vec{R} bosh vektorga va bitta \vec{L}_0 bosh momentga keltirish mumkin. Bu vektorlarning modullari va yo'nalishlariga qarab, kuchlar sistemasini quyidagi oddiy hollarga keltirish mumkin:

1. Bitta juftga keltirish. Agar $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$ bo'lsa, kuchlar sistemasini bitta juftga keltirish mumkin va bu holda bosh moment keltirish markazini tanlanishiga bog'liq emas.

2. Bitta teng ta'sir etuvchiga keltirish. Ikkita hol bo'lishi mumkin:

a) agar $\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_0 \neq 0$ ($\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_0 \cdot \vec{R} = 0$) bo'lsa, kuchlar sistemasini bitta teng ta'sir etuvchiga keltirish mumkin;

b) agar $\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_0 \neq 0$ bo'lib, $\vec{R} \perp \vec{M}_0$ bo'lsa, kuchlar sistemasini bitta teng ta'sir etuvchiga keltirish mumkin. Bu holda teng ta'sir etuvchining ta'sir chizig'i keltirish markazidan $d = \vec{M}_0 / R$ masofadan o'tadi.

3. Dinamoga keltirish. Agar $\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_0 \neq 0$ bo'lib, \vec{R} va \vec{M}_0 vektorlar perpendikular bo'lmasa, ($\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_0 \cdot \vec{R} = 0$) kuchlar sistemasini dinamoga keltirish mumkin. Kuchlar sistemasini dinamoga keltirish mumkin bo'lsa, \vec{R} bosh vektor va \vec{M}_0 bosh momentlar kollinear vektorlar bo'ladi, ya'ni

$$\vec{M}_0 = k_0 \vec{R}.$$

O keltirish markaziga nisbatan kuchlar sistemasining bosh vektori \vec{R} , bosh momenti \vec{M}_0 , boshqa O_1 keltirish markaziga nisbatan bosh vektori \vec{R}' , bosh momenti \vec{M}'_0 bo'lsin, u holda

$$\vec{R} = \vec{R}', \quad \vec{M}'_0 = \vec{M}_0 - \vec{O}\vec{O}_1 \cdot \vec{R} = k_0 \vec{R}. \quad (5.6.4)$$

(5.6.4) tenglama markaziy vint o'qining vektor tenglamasini ifodalaydi. (5.6.4) tenglama proyeksiyalarda yoziladi:

$$(M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}) - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = k_0 (R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}), \quad (5.6.5)$$

(5.6.5) vektor tenglamadan quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilish mumkin:

$$\frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_z - (xR_y - yR_x)}{R_z} \quad (5.6.6)$$

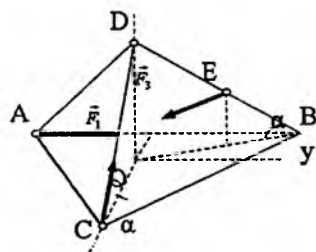
(5.6.6) markaziy vint o'qining tenglamasini ifodalaydi.

5.7. Kuchlar sistemasini keltirishga doir masalalar

5.7.1-masala (И.В.Мещерский 7.4). Qirralari a ga teng bo'lgan $ABCD$ muntazam tetraedrning AB qirrasi bo'yiga \vec{F}_1 kuch, CD qirrasi bo'yiga \vec{F}_2 kuch, E nuqtaga, ya'ni BD qirraning o'rtasiga \vec{F}_3 kuch qo'yilgan. \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarning miqdorlari ixtiyoriy, \vec{F}_3 kuchning x , y va z o'qlardagi proyeksiyalari esa

$\vec{F}_2 \frac{5\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{F_2}{2}$; $-F_2\sqrt{\frac{2}{3}}$. Bu kuchlar

sistemasining teng ta'sir etuvchiga keltirish mumkinmi? Agar mumkin bo'lsa, teng ta'sir etuvchining moduli, yo'nalishi va qo'yilish nuqtasi topilsin (115-shakl).



115-shakl.

Berilgan: a , F_1 , F_2 ,

$\vec{F}_3 \left(5\sqrt{3} / 2 \vec{F}_2; -F_2 / 2; -\sqrt{2/3} F_2 \right)$.

Topish kerak: R .

Yechish. O nuqtaga nisbatan bosh vektor va bosh momentning proyeksiyalari topiladi:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x};$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y};$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z}.$$

115-shaklga asosan:

$$F_{1x} = 0, \quad F_{2x} = F_2 \cos \alpha, \quad F_{3x} = \frac{5\sqrt{3}}{6} F_2;$$

$$F_{1y} = F_1, \quad F_{2y} = 0, \quad F_{3y} = -\frac{1}{2}F_2; \quad (a)$$

$$F_{1z} = 0, \quad F_{2z} = F_2 \sin \alpha, \quad F_{3z} = -\sqrt{\frac{2}{3}}F_2.$$

Uchburchakning balandligi $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ga teng. Shaklga asosan:

$$OC = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Natijada

$$R_x = F_2 \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad R_y = F_1 - \frac{1}{2}F_2, \quad R_z = 0. \quad (b)$$

Endi bosh momentning o'qlardagi proyeksiyalari topiladi. Buning uchun kuchlarning qo'yilish nuqtalarining koordinatalari va o'qlardagi proyeksiyalari topiladi. 115-shaklga asosan

$$x_A = -\frac{1}{3}h = -\frac{\sqrt{3}}{6}a, \quad y_A = -\frac{a}{2}; \quad z_A = 0; \quad A \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a; -\frac{a}{2}; 0 \right)$$

$$x_C = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \quad y_C = 0; \quad z_C = 0; \quad C \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a, 0, 0 \right) \quad (c)$$

$$x_E = -\frac{1}{6}h = -\frac{\sqrt{3}}{12}a, \quad y_E = \frac{a}{4}; \quad z_E = \frac{\sqrt{6}}{6}a; \quad E \left(-\frac{\sqrt{3}}{12}a; \frac{a}{4}; \frac{\sqrt{6}}{6}a \right)$$

(a) va (c) lardan foydalanib, bosh momentning o'qlardagi proyeksiyalari topiladi:

$$M_x = \sum_{(i)} (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = -\frac{a}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} F_2 + \frac{\sqrt{6}}{6} a \frac{F_2}{2} = 0,$$

$$M_y = \sum_{(i)} (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = -\frac{\sqrt{3}}{3} a \sqrt{\frac{2}{3}} F_2 + \frac{\sqrt{6}}{6} a \frac{5\sqrt{3}}{6} a F_2 - \frac{\sqrt{3}}{12} a \sqrt{\frac{2}{3}} F_2 = 0 \quad (d)$$

$$M_z = \sum_{(i)} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = \frac{\sqrt{3}}{12} a \frac{F_2}{2} - \frac{a}{4} \frac{5\sqrt{3}}{6} F_2 - \frac{\sqrt{3}}{6} a F_1 = -\frac{\sqrt{3}a}{6} (F_1 + F_2).$$

Endi (b) va (d) munosabatlardan foydalanib, $\vec{M} \cdot \vec{R}$ skalar ko'paytma hisoblanadi:

$$\vec{M} \cdot \vec{R} = M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z = 0.$$

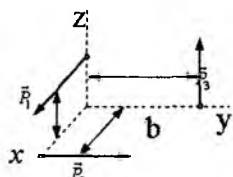
Demak, $\vec{M} \perp \vec{R}$. Bu holda kuchlar sistemasini bitta teng ta'sir etuvchiga keltirish mumkin. Teng ta'sir etuvchining yo'nalishi bosh vektor yo'nalishi bilan bir xil, moduli bosh vektor moduliga teng, ya'ni

$$R^* = R.$$

Teng ta'sir etuvchining qo'yilish nuqtasi O keltirish markazidan $d = M_0 / R$ masofada yotadi:

$$d = \frac{M_0}{R} = \frac{\sqrt{3}a}{6} \frac{F_1 + F_2}{\sqrt{F_1^2 - F_1 F_2 + F_2^2}}.$$

5.7.2-masala (И.В.Мещерский 7.7). Uchta \vec{P}_1, \vec{P}_2 va \vec{P}_3 kuch koordinata tekisliklarida yotadi hamda koordinata o'qlariga parallel, lekin ular ikki tomonga yo'nalgan bo'lishi ham mumkin. Bu kuchlar qo'yilgan A, B va C nuqtalar koordinatalar boshidan mos ravishda berilgan a, b va c masofada joylashgan. Ular bir teng ta'sir etuvchiga keltirilishi uchun bu kuchlarning miqdorlari qanday shartlarni qanoatlantirishi kerak? Koordinatalar boshidan o'tadigan markaziy vint o'qining mavjud bo'lishi uchun bu kuchlarning miqdorlari qanday shartlarni qanoatlantirishi kerak (116-shakl)?



116-shakl.

Yechish. Bosh vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari 116-shaklga asosan

$$R_x = P_1, \quad R_y = P_2, \quad R_z = P_3. \quad (a)$$

Bosh momentning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari topiladi:

$$M_x = \sum_{(i)} (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = b P_3,$$

$$M_y = \sum_{(i)} (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = c P_1, \quad (b)$$

$$M_z = \sum_{(i)} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = aP_2.$$

Endi $\vec{M} \cdot \vec{R}$ skalar ko'paytmasi hisoblanadi:

$$\vec{M} \cdot \vec{R} = bP_1P_3 + cP_1P_2 + aP_2P_3 \neq 0.$$

$\vec{R} \neq 0$, $\vec{M} \neq 0$, va $\vec{M} \cdot \vec{R} \neq 0$. Bu kuchlar sistemasi bitta teng ta'sir etuvchiga keltirilishi uchun $\vec{M} \cdot \vec{R} = 0$ shart bajarilishi kerak, ya'ni

$$bP_1P_3 + cP_1P_2 + aP_2P_3 = 0.$$

Bu tenglikning ikkala tomonini $P_1 P_2 P_3$ ga bo'lamiz, natijada

$$\frac{a}{P_1} + \frac{b}{P_2} + \frac{c}{P_3} = 0. \quad (c)$$

Demak, kuchlar sistemasi bitta teng ta'sir etuvchiga keltirilishi uchun (c) shart bajarilishi kerak.

Koordinatalar boshidan o'tuvchi markaziy vint o'qining mavjudligini topish uchun (5.6.6) tenglamalarga $x = y = z = 0$ ni qo'yiladi, natijada

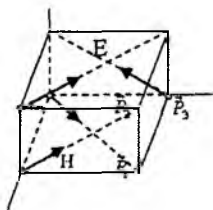
$$\frac{M_x}{R_x} = \frac{M_y}{R_y} = \frac{M_z}{R_z} = P$$

(a) va (b) larga asosan

$$\frac{P_1}{bP_3} = \frac{P_2}{cP_1} = \frac{P_3}{aP_2}. \quad (d)$$

Demak, (d) shartlar bajarilganda koordinatalar boshidan o'tuvchi markaziy vint o'qi mavjud bo'ladi.

5.7.3-masala (И.В.Мещерский 7.3). Kubning to'rtta A, H, B va D uchlariga miqdorlari bir-biriga teng to'rtta $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$ kuch qo'yilgan. \vec{P}_1 kuch AC bo'yicha, \vec{P}_2 kuch HF bo'yicha, \vec{P}_3 kuch BE bo'yicha, \vec{P}_4 kuch DG bo'yicha yo'nalgan. Shu sistema sodda holga keltirilsin.



117-shakl.

Yechish. Kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momenti topiladi. Kub tomonla-

rining diagonallari uning qirralari bilan 45° li burchaklar hosil qiladi. Shuning uchun

$$R_x = P_1 \cos 45^\circ - P_2 \cos 45^\circ = 0;$$

$$R_y = P_1 \cos 45^\circ + P_2 \cos 45^\circ - P_3 \cos 45^\circ + P_4 \cos 45^\circ = \sqrt{2}P;$$

$$R_z = P_3 \cos 45^\circ + P_4 \cos 45^\circ = \sqrt{2}P;$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = -aP_2 \cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} aP;$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n (z_i P_{ix} - x_i P_{iz}) = -aP_2 \cos 45^\circ - aP_4 \cos 45^\circ = -\sqrt{2}aP;$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n (x_i P_{iy} - y_i P_{ix}) = aP_2 \cos 45^\circ + aP_4 \cos 45^\circ = \sqrt{2}aP.$$

Endi bosh vektor va bosh momentning moduli topiladi:

$$R = \sqrt{2P^2 + 2P^2} = 2P, \quad M = \sqrt{2a^2 P^2 + 2a^2 P^2 + \frac{1}{2} aP^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} aP.$$

Demak,

$$\vec{R} \neq 0, \quad \vec{M} \neq 0; \quad \vec{R} \cdot \vec{M} = 0 + \sqrt{2}P \cdot (-\sqrt{2}aP) + \sqrt{2}P\sqrt{2}aP = 0.$$

Shunday qilib, $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M} \neq 0$ va $\vec{R} \perp \vec{M}$. Bu holda kuchlar sistemasini bitta teng ta'sir etuvchiga keltirish mumkin. Bu teng ta'sir etuvchining moduli $2R$ ga teng bo'lib, A keltirish markazidan $d=M/R=a$ masofada, DG diagonal bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.

5.7.4-masala. (И.В. Мешчерский 7.10). То'g'ri burchakli parallelepipedning mos ravishda 10m, 4m va 5m ga teng bo'lgan qirralari bo'yicha shaklda ko'rsatilgan oltita $P_1=4N$, $P_2=6N$, $P_3=3N$, $P_4=2N$, $P_5=6N$, $P_6=8N$ kuch ta'sir qiladi. Shu kuchlar sistemasi kanonik holga keltirilsin va markaziy vint o'qining Oxy tekislik bilan kesishgan nuqtasining x va y koordinatalari aniqlansin.

Berilgan: $P_1=4N$, $P_2=6N$, $P_3=3N$, $P_4=2N$, $P_5=6N$, $P_6=8N$.

Yechish. Teng ta'sir etuvchi va bosh vektor topiladi:

$$R_x = -P_5 + P_2 = -6H + 6H = 0;$$

$$R_y = P_1 - P_4 = 4 - 2 = 2;$$

$$R_z = -P_3 + P_6 = -3 + 8 = 5;$$

$$M_x = \sum (yF_z - zF_y) = -5P_1 - 10P_3 = -50HM;$$

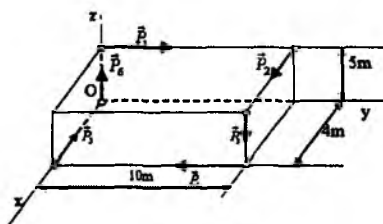
$$M_y = \sum (zF_x - xF_z) = 5P_2 + 4P_3 = 42HM;$$

$$M_z = \sum_{i=1}^6 (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = -10P_2 - 4P_4 = -68HM;$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{2500 + 1764 + 4624}H \approx 94,3$$

$$\vec{R} \cdot \vec{M} = 0 + 84 - 340 = -256 \neq 0$$

$$R = \sqrt{4 + 25} \approx 5,4H.$$



118-shakl.

Shunday qilib, $\vec{R} \cdot \vec{M} \neq 0$ ya'ni \vec{R} va \vec{M} vektorlar perpendikular emas. Bu holda kuchlar sistemasini dinamoga keltirish mumkin. Markaziy vint o'qining tenglamasini, ya'ni (5.6.5) tenglama tuziladi:

$$\frac{-50 - 5y + 2z}{0} = \frac{42 + 5x}{2} = \frac{-65 - 2x}{5}. \quad (a)$$

Bu tenglamani Oy tekisligi bilan kesishish nuqtasining koordinatalari topiladi. Bu holda

$$z=0;$$

buni (a) tenglamaga qo'yib, x va y topiladi:

$$x = -11,9 \text{ m}; \quad y = -10 \text{ m}.$$

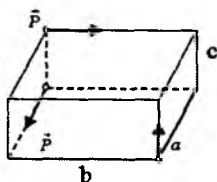
Muammoli masala va topshiriqlar

1. Kuchlar sistemasining bosh vektori $\vec{R} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$, bosh momenti $\vec{M}_0 = 8\vec{j} + 10\vec{k}$ bo'lsa, kuchlar sistemasini bitta teng ta'sir etuvchiga keltirish mumkinmi?

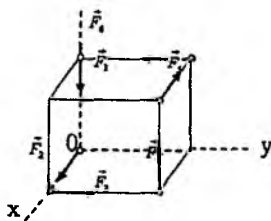
2. To'g'ri burchakli parallelepipedning bir-biri bilan kesishmaydigan va bir-biriga parallel bo'lmagan qirralari bo'ylab miqdor jihatidan o'zaro teng bo'lgan uchta P kuch qo'yilgan. Bu kuchlar bitta teng ta'sir etuvchiga keltirilishi uchun a , b va c qirralar orasida qanday munosabat bo'lishi kerak?

3. Qirralarining uzunligi 5 sm bo'lgan kubning uchlariga har qaysisi 2 N bo'lgan oltita o'zaro teng kuchlar rasmda ko'rsatilgandek qilib qo'yilgan.

Shu sistema soddalashtirilsin.

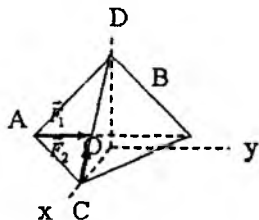


2-masala.

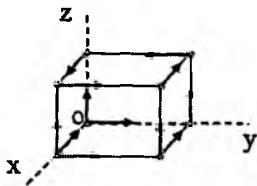


3-masala.

4. Qirralari a ga teng bo'lgan muntazam $ABCD$ tetraedrning AB qirradi bo'ylab, F_1 kuch va CD qirradi bo'ylab F_2 kuch qo'yilgan. Marakaziy vint o'qining Oxy tekislik bilan kesishgan nuqtasining x va y koordinatalarini toping.



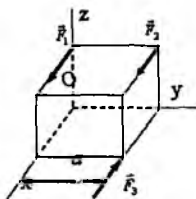
4-masala.



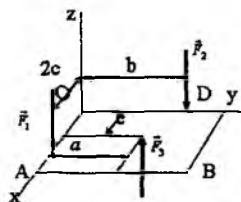
5-masala.

5. Kubning a ga teng qirralari bo‘ylab, shaklda ko‘rsatilgandek, o‘n ikkita miqdorlari o‘zaro teng P kuchlar ta’sir qiladi. Shu kuchlar sistemasi kanonik holga keltirilsin va markaziy vint o‘qining Oxy tekisligi bilan kesishish nuqtasining x va y koordinatalari aniqlansin.

6. Kubning qirralari bo‘ylab yo‘nalgan kuchlar shaklda ko‘rsatilgandek qo‘yilgan. F_3 kuchining qanday qiymatida berilgan kuchlar sistemasini bitta juftga keltirish mumkin? $F_2 = 2F_1 = 10N$, $a = 1m$.



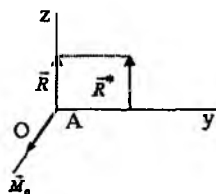
6-shakl.



7-shakl.

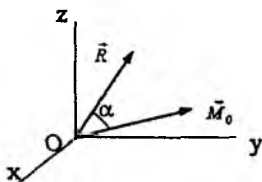
7. Oxz tekisligiga qo‘yilgan kuchlarning bosh vektori R va bosh momenti M_0 . Agar $R=6N$, $M_0=7,2Nm$ va $\alpha=60^\circ$ bo‘lsa, dinamo o‘qigacha bo‘lgan OA masofani toping.

8. Kuchlar sistemasining bosh vektori $R=8N$ va bosh momenti $M_0=26 Nm$ bo‘lib, o‘zaro perpendikular bo‘lsa, kuchlar sistemasining teng ta’sir etuvchisi qanday OA masofaga qo‘yilishi kerak?

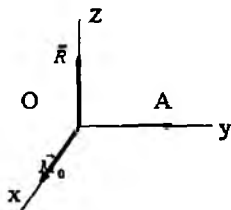


8-masala.

9. Kuchlar sistemasining bosh vektori $\vec{R} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$; bosh momenti bo‘lsa, dinamo momentini toping.



11-shakl.



12-shakl.

10. O keltirish markaziga nisbatan bosh vektor \vec{R} va bosh moment \vec{M}_0 larning skalar ko'paytmasi $\vec{R} \cdot \vec{M}_0 = 240 N^2 \cdot M$ ga teng. Agar $R=40N$ bo'lsa, dinamo momentini toping.

11. O keltirish markaziga nisbatan kuchlar sistemasining bosh vektor $R=15N$ va bosh momenti $\vec{M}_0 = 60 Nm$ hamda bu vektorlar $\alpha = 60^\circ$ li burchak hosil qiladi.

Dinamo momentini toping.

12. O keltirish markaziga nisbatan kuchlar sistemasining bosh momenti $M_0=20Nm$ va bosh vektori $R=10N$. Agar $OA=2m$ bo'lsa, A nuqtaga nisbatan bosh momentning modulini toping.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Kuchlarni bitta markazga keltirish haqidagi teoremani isbotlang.
2. Fazoda kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momenti qanday hisoblanadi?
3. Fazoda kuchlar sistemasi qachon bitta teng ta'sir etuvchiga keltiriladi?
4. Kuchlar sistemasi qachon bitta juftga keltiriladi?
5. Kuchlar sistemasi qachon dinamoga keltiriladi?
6. Dinamo o'qining tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
7. Qanday kuchlar sistemasi dinamoni hosil qiladi?

5.8. Fazoda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Kuch, kuchlar sistemasi, kuch momenti, bosh moment, kuchning o'qqa nisbatan momenti, muvozanat shartlari.

Kuchlar sistemasini bir markazga keltirish teoremasidan foydalanib, qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasini bitta kuchga va bitta juftga keltirilishi mumkin.

Fazoda kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun bosh vektor va bosh momentning nolga teng bo'lishi zarur va yetarli, ya'ni

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \quad \vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \overline{mom}_0 (\vec{F}_i) = 0. \quad (5.8.1)$$

Bosh vektor va bosh momentning nolga tengligidan ularning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarining ham nolga tengligi kelib chiqadi. Shuning uchun (5.8.1) tenglamalarning koordinata o'qlariga proyeksiylab, oltita skalar tenglamalar sistemasini hosil qilish mumkin, ya'ni

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad (5.8.2)$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n \text{mom}_x(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = 0,$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n \text{mom}_y(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = 0, \quad (5.8.3)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n \text{mom}_z(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0.$$

(5.8.2) va (5.8.3) tenglamalardan foydalanib, fazoda kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini boshqacha talqin qilish ham mumkin: fazoda kuchlar sistemi muvozanatda bo'lishi uchun sistema kuchlarining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari yig'indisi va koordinata o'qlariga nisbatan momentlari yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

5.9. Fazoda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish bo'yicha tavsiyalar

Fazoda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi.

1. Koordinatalar sistemi boshini iloji boricha ko'proq noma'lum reaksiya kuchlarining ta'sir chiziqlari kesishgan nuqtada olish, koordinata o'qlari yo'nalishini kuchlar momentlarini hisoblashga qulay qilib tanlash kerak.

2. Qattiq jismga ta'sir etayotgan aktiv kuchlarni shaklga koordinat o'qlariga parallel tuzuvchilarga ajratib qo'yish kerak.

3. Bog'lanish aksiomasidan foydalanib, bog'lanish reaksiyalari shaklga qo'yib olinadi.

4. Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan (5.8.2) va (5.8.3) muvozanat tenglamalarini tuzish lozim.

5. Tuzilgan muvozanat tenglamalarini yechib, noma'lumlarni topish kerak. Topilgan noma'lumning ishorasiga qarab, ularning haqiqiy yo'nalishi aniqlanadi.

2.1-masala. (И.В.Мещерский 8.7). Yorug'lik mashinasi lyukining qopqog'ini FG tirgak gorizontol holatda ushlab turadi, bu tirgak shu qopqoq o'qidan $EF = 1,5$ m masofadagi F nuqtada qopqoqqa tiralgan. Qopqoqning og'irligi $P = 180$ N; uning bo'yi $CD = 2,3$ m, eni $CE = 0,75$ m; A va B sharnirlar bilan qopqoq chetlari orasidagi masofa $AE = BS = 0,15$ m. A va B sharnirlar reaksiyasi hamda FG tirgakdagi C zo'riqish topilsin.

Berilgan: $P = 180$ N; $CD = 2,3$ m, $CE = 0,75$ m, $AE = BS = 0,15$ m, $EF = 1,5$ m.

Topish kerak: y_A, z_A, y_B, z_B, S .

Yechish. Koordinatalar sistemi shaklda ko'rsatilganday tanlanadi. Qopqoqqa ta'sir etuvchi aktiv kuchlarni va bog'lanish reaksiyalarini shaklda tasvirlanadi. Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan (5.8.2) va (5.8.3) tenglamalar sistemasi tuziladi:

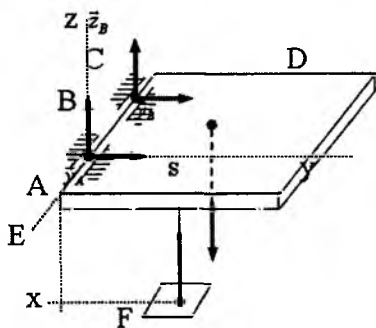
$$\sum_{i=1}^6 F_{ix} \equiv 0; \quad \sum_{i=1}^6 F_{iy} = Y_A + Y_B = 0;$$

$$\sum_{i=1}^6 F_{iz} = Z_A + Z_B + S - P = 0;$$

$$\sum_{i=1}^6 \text{mom}_x(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^6 (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = -\frac{CD}{2}P + EF \cdot S = 0;$$

$$\sum_{i=1}^6 \text{mom}_y(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^6 (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = AB \cdot Z_B - \frac{AB}{2}P - AE \cdot S = 0;$$

$$\sum_{i=1}^6 \text{mom}_z(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^6 (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = -AB \cdot Y_B = 0.$$



119-shakl.

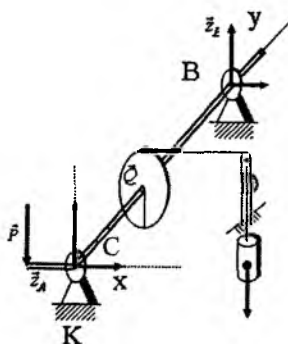
Bu tenglamalarning birinchi va oxirgisidan $y_B=y_A=0$, uchin-chidan

$$S = \frac{CD}{2EF} P = \frac{2,3M}{2 \cdot 1,5} \cdot 180N = 138N,$$

to'rtinchi va ikkinchisidan

$$z_B = \frac{1}{2} P + \frac{AE}{AB} S = 90N + 46N = 136N,$$

$$z_A = P - z_B - S = (180 - 136 - 138)N = -94N.$$



120-shakl.

$AC=CB=50\text{ sm}$.

Topish kerak: R, x_A, z_A, x_B, z_B

Yechish. Koordinatalar sistemasi shaklda ko'rsatilgandek tanlanadi va bu sistemaga nisbatan (5.8.3) muvozanat tenglamalari tuziladi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^6 F_{ix} = X_A + X_B + Q = 0; \\ \sum_{i=1}^6 F_{iy} \equiv 0; \\ \sum_{i=1}^6 F_{iz} = Z_A - P + Z_B = 0; \end{array} \right.$$

2.2-masala. (И.В. Мешчерский 8.15). Ishchi, shaklda sxema tarzida ko'rsatilgan chig'iriy yordamida $Q=800N$ yukni ushlab turadi. Baraban radiusi $R=5\text{ sm}$, dasta uzunligi $AK=40\text{ sm}$, $AC=CB=50\text{ sm}$. AK dastaning gorizontal P holatida dastaga tushadigan P bosim va chig'iriy o'qining A va B tayanchlariga tushiradigan bosimlari aniqlansin. P kuch vertikal.

Berilgan: $Q=800N, R=5\text{ sm}, AK=40\text{ sm}$,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = AB \cdot Z_B = 0; \\ \sum_{i=1}^6 (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = -AK \cdot P + R \cdot Q = 0; \\ \sum_{i=1}^6 (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = -AC \cdot Q - AB \cdot X_B = 0. \end{cases}$$

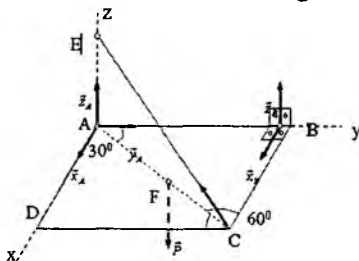
Bu tenglamalarning to'rtinchisidan $z_B = 0$, beshinchi va oltinchisidan $x_B = -400 N$, $P = 100 N$, birinchi va ikkinchisidan $z_A = 100 N$, $x_A = -Q - x_B = -400 N$.

2.3-masala (И.В.Мещерский 8.24). Og'irligi $200 N$ bo'lgan bir jinsli to'g'ri burchakli rom A sharli sharnir va B halqa yordami bilan devorga biriktirilgan bo'lib, uni CE arqon gorizontol holda ushlab turadi, arqon devorning A bilan bir vertikalda E nuqtasiga qoqilgan mixga va romning C nuqtasiga bog'langan; $\angle ECA = \angle BAC = 30^\circ$. Arqondagi tortilish kuchi va tayanchlardagi reaksiyalar aniqlansin (121-shakl).

Berilgan: $P = 200$, $\angle ECA = \angle BAC = 30^\circ$.

Topish kerak: $x_A, y_A, z_A, x_B, z_B, T$.

Yechish. Koordinatalar sistemasi 121-shaklda tasvirlangan. Bog'lanish reaksiyalarini shaklda ko'rsatilganday qilib olamiz.



121-shakl.

(5.8.2) va (5.8.3) tenglamalar sistemasi tuziladi:

$$R_x = \sum_{i=1}^7 F_{ix} = x_A + x_B - T \cos 30^\circ \cos 60^\circ = 0,$$

$$R_y = \sum_{i=1}^7 F_{iy} = y_A - T \cos 30^\circ \cos 30^\circ = 0, \quad (\text{a})$$

$$R_z = \sum_{i=1}^7 F_{iz} = z_A + z_B + T \cos 60^\circ - P = 0;$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = \frac{b}{2}(-P) + bT \cos 60^\circ + b \cdot z_B = 0$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = -\frac{a}{2}(-P) - aT \cos 60^\circ = 0 \quad (\text{b})$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = -bx_B = 0,$$

bunda a va b lar romning o'lchamlari. Tenglamalar sodda holga keltirib yoziladi:

$$\begin{cases} x_A + x_B - \frac{\sqrt{3}}{2} T = 0; & y_A - \frac{3}{4} T = 0; \\ z_A + z_B + \frac{1}{2} T - P = 0; & z_B + \frac{1}{2} T - \frac{1}{2} P = 0; \\ \frac{1}{2} T - \frac{1}{2} P = 0; & x_B = 0. \end{cases} \quad (\text{c})$$

Bu sistemani yechib, noma'lumlar topiladi:

$$x_B = 0, \quad T = P = 200N, \quad z_B = \frac{1}{2}(P - T) = 0,$$

$$z_A = P - z_B - \frac{1}{2}T = 100N, \quad y_A = \frac{3}{4}T = 150N,$$

$$x_A = \frac{\sqrt{3}}{4}T - x_B = 86,6N.$$

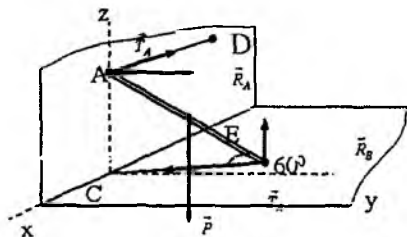
2.4-masala (И.В.Мешчерский 8.30). AB sterjenni ikkita gorizontal AD va BC arqonlar qiya holda ushlab turadi. Bunda sterjen A nuqtaga vertikal devorga, B nuqtaga esa gorizontal polda tiralgan. D nuqta ham vertikal devorda yotadi. A va C nuqtalar bir vertikal chiziqda yotadi. Sterjenning og'irligi $8N$. A va B nuqtalardagi ishqalanish hisobga olinmaydi. Sterjenning muvozanat holatda qolish mumkinligi tekshirilsin va arqonlarning T_A va T_B tortilish

kuchlari hamda tayanch tekisliklarning reaksiyalari aniqlansin: $\angle ABC = \angle BCE = 60^\circ$ (122-shakl).

Berilgan: $P = 8\text{N}$, $\angle ABC = \angle BCE = 60^\circ$.

Topish kerak: T_A, T_B, R_A, R_B .

Yechish. Koordinatalar sistemasi 122-shaklda ko'rsatilganday qilib tanlanadi. AB sterjenning uzunligi ℓ bilan belgilanadi. Kuchlar qo'yilish nuqtalarining koordinatalari va koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari hisoblanadi.



122-shakl.

\vec{P} kuchining qo'yilish nuqtasining koordinatalari:

$$x_E = -\frac{\ell}{2} \cos 60^\circ \cos 60^\circ = -\frac{1}{8} \ell;$$

$$y_E = \frac{\ell}{2} \cos 60^\circ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} \ell;$$

$$z_E = \frac{\ell}{2} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell; \text{ proyeksiyalari } (0; 0; -P) \text{ bo'ladi. } \vec{T}_A \text{ va}$$

\vec{R}_A kuchlari qo'yilish nuqtasining koordinatalari:

$$x_A = 0; \quad y_A = 0; \quad z_A = \ell \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ell;$$

proyeksiyalari $\vec{R}_A (0; R_A; 0)$, $\vec{T}_A (-T_A; 0; 0)$ larga teng. \vec{T}_B va \vec{R}_B kuchlari qo'yilish nuqtasining koordinatalari:

$$x_B = -\ell \cos 60^\circ \cos 60^\circ = -\frac{1}{4} \ell,$$

$$y_B = \ell \cos 60^\circ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell, \quad z_B = 0,$$

proyeksiyalari: $\vec{R}_B(0;0;\vec{R}_B)$, $\vec{T}_B\left(\frac{1}{2}T_B; -\frac{\sqrt{3}}{2}T_B;0\right)$ bo'ladi.

Endi (5.8.2) va (5.8.3) muvozanat tenglamalari tuziladi:

$$\sum_{i=1}^5 F_{ix} = -T_A + \frac{1}{2}T_B = 0, \quad \sum_{i=1}^5 F_{iy} = R_A - \frac{\sqrt{3}}{2}T_B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^5 F_{iz} = -P + R_B = 0, \quad (a)$$

$$\sum_{i=1}^5 (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ell R_A - \frac{\sqrt{3}}{8}\ell P + \frac{\sqrt{3}}{4}\ell R_B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^5 (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = -\frac{1}{4}\ell P - \frac{\sqrt{3}}{2}\ell T_A + \frac{1}{4}\ell R_B = 0,$$

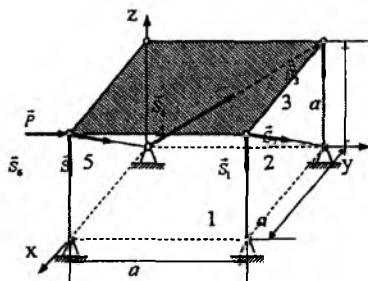
$$\sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0,$$

(a) tenglamalarni yechib, noma'lumlar topiladi:

$$R_B = P = 8H, \quad R_A = \frac{1}{4}(2R_B - P) = 2H,$$

$$T_A = \frac{1}{4\sqrt{3}}(R_B - P) = 1,15N, \quad T_B = 2T_A = 2,3N.$$

2.5-masala (И.В.Мещерский 8.28). ABCD kvadrat plitaning BD tomoni bo'ylab gorizontal P kuch ta'sir qilsa, uni ushlab turadigan oltita tayanch sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin. O'lchamlar shaklda ko'rsatilgan (123-shakl).



123-shakl.

Yechish. Uchlari sharnir bilan birlashtirilgan og'irligi hisobga olinmaydigan sterjenlarning reaksiya kuchlari shu sterjenlar bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Reaksiya kuchlarini shaklda tasvirlab olinadi. Koordinatlar sistemasi shaklda ko'rsatilganday qilib tanlanadi.

Muvozanat tenglamalari tuziladi:

$$\sum_{i=1}^8 F_{ix} = -S_2 \cos 45^\circ - S_5 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^8 F_{iy} = P + S_4 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^8 F_{iz} = -S_1 - S_2 \cos 45^\circ - S_3 + S_4 \cos 45^\circ - S_5 \cos 45^\circ - S_6 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^8 \text{mom}_x(\bar{F}_i) = S_1 a + S_2 a \cos 45^\circ - P \cdot a = 0$$

$$\sum_{i=1}^8 \text{mom}_y(\bar{F}_i) = S_1 a + S_6 a = 0, \quad \sum_{i=1}^8 \text{mom}_z(\bar{F}_i) = S_2 a \cos 45^\circ - P \cdot a = 0.$$

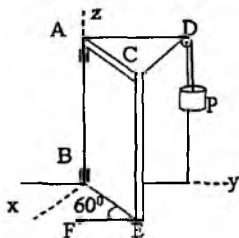
Bu tenglamalar sistemasini yechib, noma'lumlar topiladi:

$$S_2 = -\sqrt{2}P; \quad S_1 = P - \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 = 2P, \quad S_4 = -\sqrt{2}P,$$

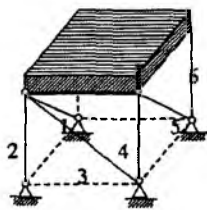
$$S_5 = \sqrt{2}P, \quad S_6 = -2P, \quad S_3 = -P.$$

Muammoli masala va topshiriqlar

1. AB aylanish o'qi vertikal bo'lgan to'g'ri burchakli eshik $CAD=60^\circ$ burchakka ochilgan, uni shu vaziyatda ikki arqon ushlab turadi. CD arqon blokdan o'tkazilgan bo'lib, uni $P=320N$ yuk tortib turadi, ikkinchisi EF arqon polning F nuqtasiga bog'langan. Eshikning og'irligi $640N$; uning eni $AD=AC=1,8 m$; balandligi $AB=2,4m$. Blokda ishqalanishni hisobga olmay, EF arqonning tortilish kuchi T hamda A nuqtadagi silindrik sharnirning va B nuqtadagi podshipnikning reaksiyalari aniqlansin.

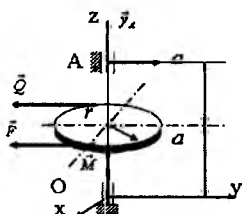


1-masala.

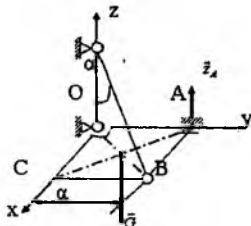


2-masala.

2. To'g'ri burchakli parallelepiped shaklidagi bir jinsli gorizontall plita oltita to'g'ri chiziqli sterjenlar bilan qo'zg'almas qilib yerga birlashtirilgan; plitaning og'irligi R ga teng. Agar sterjenlarning uchlari plita va qo'zg'almas asoslarga sharnirlar bilan birlashtirilgan bo'lsa, plitaning og'irligi ta'sirida sterjenlarda hosil bo'ladigan zo'riqishlarni aniqlang. 3. Shkivga qo'yilgan $F=2Q=120N$ kuchlar momenti $M=18Nm$ ga teng bo'lgan juft kuch bilan muvozanatlashadi. Ox o'qiga nisbatan momentlar tenglamasini tuzib, A podshipnikning reaksiyasini aniqlang.



3-masala.

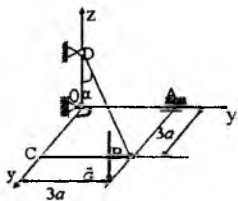


4-masala.

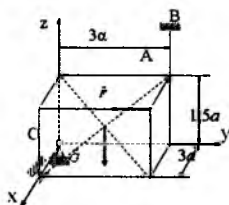
4. Bir jinsli kvadrat rom $G=140N$ og'irlik kuchi va bog'lanishlar reaksiyalari ta'sirida gorizontall holatda ushlab turiladi. OB o'qqa nisbatan momentlar tenglamasini tuzib, A sharnirning reaksiyasini toping. Romning tomonlari $a = 0,5m$ va $\alpha=60^\circ$.

5. Og'irligi $G=30N$ bo'lgan bir jinsli $OABC$ plita O va A sharnirlar hamda BD tros bilan gorizontall holatda ushlab turiladi. Agar $\alpha = 60^\circ$; $a = 2m$ bo'lsa, trosning tortilish kuchini toping.

6. Og'irligi $G=11kN$ bo'lgan jism bog'lanishlar va $F=3kN$ kuch ta'sirida muvozanatda turadi. Ox o'qiga nisbatan momentlar tenglamasini tuzib, AB sim arqonning tortilish kuchini toping. $a = 0,2m$.



5-masala.

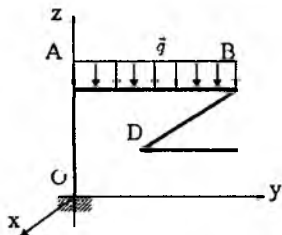


6-masala.

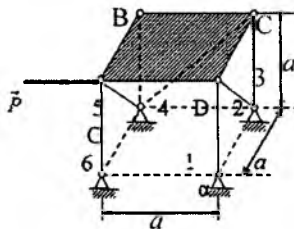
7. Figurali $OABD$ balka muvozanat holatda turadi. Balkaga $F=1t$ to'plangan kuch va $q=2t/m$ taqsimlangan kuch ta'sir qiladi. Agar $OA=1,7m$, $AB=2m$, $BD=3,4m$ va $BD \parallel Ox$ bo'lsa, O nuqtalardagi bog'lanishning Oz o'qi bo'ylab yo'nalgan tuzuvchisini toping.

8. $ABCD$ kvadrat plitaning BD tomoni bo'ylab gorizontal P kuch ta'sir qilsa, uni ushlab turadigan oltita tayanch sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin.

O'lchovlar shaklda ko'rsatilgan.



7-masala.



8-masala.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Fazoda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasi nechta muvozanat tenglamalariga ega?
2. Kuchlar sistemasining bosh vektori qanday hisoblanadi?
3. Kuchlar sistemasining bosh momenti qanday hisoblanadi?
4. Fazoda juftlar sistemasining muvozanat tenglamalari qanday ko'rinishda bo'ladi?

5.10. Fazoda parallel kuchlar sistemasining muvoznat shartlari

Kuch, parallel kuchlar sistemasi, teng ta'sir etuvchi, nuqta va koordinata tekisliklariga nisbatan statik moment

Fazoda ixtiyoriy ravishda ta'sir etuvchi parallel kuchlar sistemasi berilgan bo'lsin. Koordinata o'qlaridan bittasini, masalan z o'qini berilgan kuchlarga parallel qilib olamiz. U holda berilgan

kuchlarning hammasi Oxy tekisligiga perpendikulardir, shuning uchun kuchlarning x va y o'qlaridagi proyeksiyalari yig'indisi aynan nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} \equiv 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} \equiv 0$$

Berilgan kuchlar z o'qiga parallel bo'lgani uchun ularning shu o'qqa nisbatan momentlari nolga teng va demak z o'qiga nisbatan bosh momenti ham aynan nolga teng,

ya'ni

$$M_z = \sum_{i=1}^n \text{mom}_z(\vec{F}_i) \equiv 0.$$

Natijada (5.8.2) va (5.8.3) tenglamalarning uchtasi ayniyatga aylanib, qolgan uchtasi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini ifodalaydi, ya'ni

$$R_z = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0,$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n \text{mom}_x(\vec{F}_i) = 0,$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n \text{mom}_y(\vec{F}_i) = 0.$$

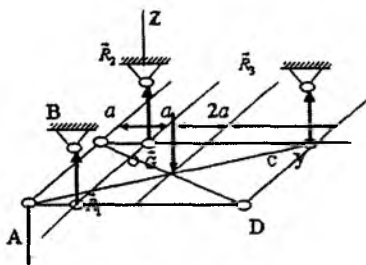
(5.10.1)

Demak, fazoda parallel kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning ularga parallel o'qdagi proyeksiyalari yig'indisi va kuchlarga perpendikular bo'lgan ikkita koordinata o'qlardagi proyeksiyalari yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Fazoda parallel kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechishda I bobning 7-§dagi uslubiy tartibga rioya qilishni tavsiya etamiz.

5.11. Fazoda parallel kuchlar sistemasining muvoznat shartlariga doir masalalar

5.11.1-masala. (O.Ə. Kene 5.5.7) ABCD kvadrat shaklidagi bir jinsli plita (1), (2) va (3) sterjenlar yordamida gorizontol holatda ushlab turiladi. (3) sterjenda hech qanday zo'riqish hosil bo'lmashligi uchun A nuqtaga qanday Q kuch qo'yilishi kerak? $G=100N$, $a=1m$ (124-shakl).



124-shakl.

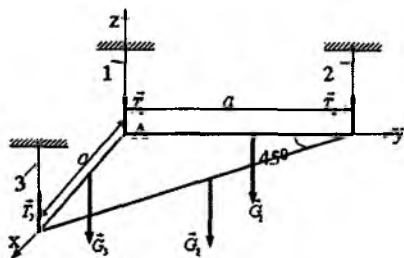
Berilgan. $G=100N$, $a=1m$.
 $R_3=0$ bo'lishi uchun Q qanday bo'lishi kerak?

Yechish. Fazoda parallel kuchlar sistemasining muvoznat shartlarini ifodalovchi (5.10.1) tenglamalardan foydalanib Q ni topish mumkin, ya'ni

$$\sum_{i=1}^n mom_x(\vec{F}_i) = aQ - aG + 3aR_3 = 0,$$

$R_3=0$ ni bu tenglamaga qo'yib, Q topiladi, ya'ni
 $Q = G = 100N$.

5.11.2-masala. (O.Ə. Kene 5.5.11). Bir jinsli uchburchakli rom uchta vertikal sim arqon yordamida gorizontol holatda ushlab turiladi. Rom qismlarining og'irliklari mos ravishda $G_1 = G_3 = 101N$, $G_2 = 143N$ bo'lsa, sim arqonlardagi tortilish kuchlari topilsin (125-shakl).



125-shakl.

Yechish. Koordinatalar sistemasi shaklda ko'rsatilgandek tanlanadi. (5.10.1) tenglamalar sistemasi tuziladi:

$$\sum_{i=1}^6 F_{iz} = T_1 + T_2 + T_3 - G_1 - G_2 - G_3 = 0,$$

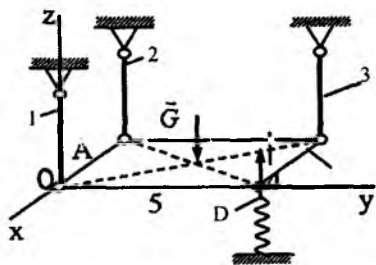
$$\sum_{i=1}^6 \text{mom}_x(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^6 (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = -\frac{a}{2} G_1 - \frac{a}{2} G_2 + a T_2 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^6 \text{mom}_y(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^6 (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = \frac{a}{2} G_2 + \frac{a}{2} G_3 - a T_3 = 0$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib, noma'lumlar topiladi:

$$T_3 = \frac{1}{2}(G_2 + G_3) = 122 \text{ N}, \quad T_2 = \frac{1}{2}(G_1 + G_2) = 72 \text{ N}$$

$$T_1 = G_1 + G_2 + G_3 - T_2 - T_3 = 151 \text{ N}.$$



126-shakl.

5.11.3-masala. (O.Ə.Kene 5.5.15).

To'g'ri burchakli gorizontaal $OABD$ platforma uchta vertikal sterjenlarga sharnirlar bilan mahkamlangan. D nuqtada vertikal prujina kuch bilan ko'taradi. O'lchamlar: $OA = 1, 5AB$, platformaning og'irligi $G = 1 \text{ kN}$. Sterjenlardagi reaksiya kuchlari topilsin (126-shakl).

Yechish. Koordinatalar sistemasi shaklda ko'rsatilganday qilib tanlanadi. Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan (5.10.1) tenglamalar tuziladi:

$$\sum_{i=1}^5 F_{iz} = T_1 + T_2 + T_3 + Q - G = 0,$$

$$\sum_{i=1}^6 (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = -\frac{AB}{2} G + AB T_3 + AB Q = 0,$$

$$\sum_{i=1}^5 (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = \frac{OA}{2} G - OA T_1 - OA Q = 0.$$

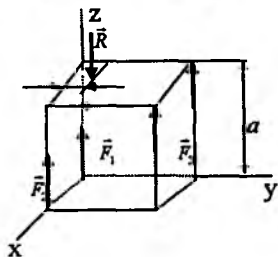
Bu tenglamalar sistemasini yechib, noma'lumlar topiladi:

$$T_1 = \frac{G}{2} - Q = 0, \quad T_3 = \frac{G}{2} - Q = 0,$$

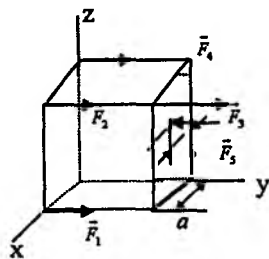
$$T_2 = G - Q - T_1 - T_3 = 0, 5 \text{ kN}.$$

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Kubga qo'yilgan \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 va \vec{F}_4 kuchlar \vec{R} kuch bilan muvozanatlashadi. \vec{R} kuchning qo'yilish nuqtasi Oxz tekisligidan qanday b masofada bo'lishi aniqlansin. Kubning qirralari $a=1\text{m}$, $F_1=F_2=15\text{N}$, $F_3=F_4=5\text{N}$ va $R=40\text{N}$.



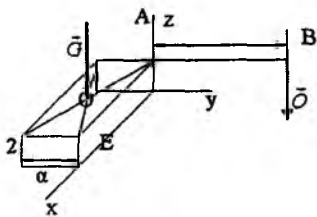
1-masala.



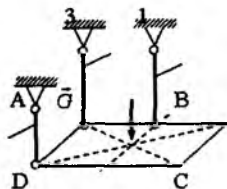
2-masala.

2. Parallelepipedga Oy o'qiga parallel $F_1=F_2=F_3=F_4=10\text{N}$ va $F_5=40\text{N}$ kuchlar qo'yilgan. F_5 Kuch Oyz tekislikdan qanday masofada joylashgan. Parallelepiped qirralari $a = 0,4\text{m}$.

3. Og'irligi $G=100\text{kN}$ bo'lgan fundamentga $AB \parallel Oy$ konsol balka mahkamlangan. Fundamentni Ox o'qi atrofida ag'aratish uchun kerak bo'lgan eng kichik kuchni toping. $a = 0,5\text{m}$, $b = 5\text{m}$. Balkaning og'irligi hisobga olinmasin.



3-masala.



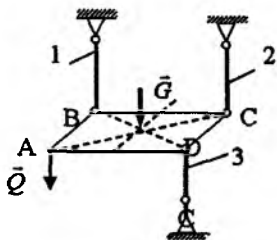
4-masala.

4. Og'irligi $G=500\text{N}$ bo'lgan bir jinsli plita A , D , E nuqtalarida (1), (2), (3) sterjenlarga osilgan. $AD=2AE$ bo'lsa, (1) sterjendagi zo'riqishni toping.

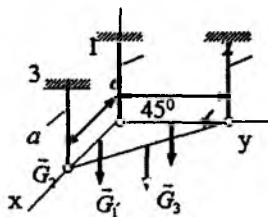
5. 4-masalaning shartlari berilganda (2) va (3) sterjenlardagi zo‘riqishlar topilsin.

6. $ABCD$ kvadrat shaklidagi plita gorizontal holatda (1), (2), (3) sterjenlarga mahkamlangan. A nuqtaga $Q=185\text{N}$ kuch qo‘yilgan. (2) sterjendagi zo‘riqishni toping. $G=115\text{N}$.

7. 6-masalaning shartlari berilganda (2) sterjenda hech qanday zo‘riqish bo‘lmasligi uchun Q kuchning miqdori qancha bo‘lishini toping.



6-masala.

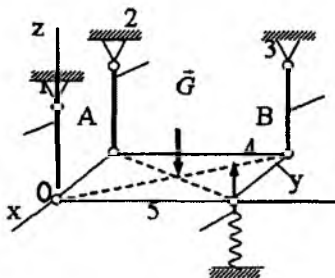


7-masala.

8. ABC bir jinsli uchburchakli plita (1), (2), (3) vertikal sim arqonlar yordamida gorizontal holatda ushlab turiladi. Agar $G_1=G_3=101\text{N}$, $G_2=143\text{N}$ bo‘lsa, (3) sim arqonning tortilish kuchini toping.

9. 8-masala shartlari berilganda (1) va (2) sim arqonlardagi tortilish kuchlari topilsin.

10. To‘g‘ri burchakli platforma (1), (2) va (3) vertikal sterjenlar yordamida gorizontal holatda ushlab turiladi. Sterjenlar shar-



20-masala.

nirlar yordamida mahkamlangan. Platformaning o'lchamlari $OA=1,5 AB$, og'irligi $G=1kN$. D nuqtada 5 prujina $Q=0,5kN$ kuch bilan platformaga ta'sir ko'rsatadi. (2) sterjendagi zo'riqishni toping.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Fazoda parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday tenglamalar bilan ifodalanadi?*
2. *Parallel kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi qanday topiladi?*
3. *Agar parallel kuchlar bir tekislikda yotsa, muvozanat tenglamalarini qanday ko'rishda yozish mumkin?*
4. *Berilgan kuchni ikkita parallel kuchga ajratish masalasi qachon aniq masala bo'ladi?*
5. *Parallel kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchsining yo'nalishi berilgan kuchlar sistemasining nimasiga bog'liq?*

VI BOB. NUQTA HARAKATINING TENGLAMASI VA KINEMATIK ELEMENTLARI

Kinematika nazariy mexanikaning bo'limi bo'lib, unda moddiy obyektlarining (nuqta, qattiq jism, tutash muhit va hokazo) harakati shu harakatni yuzaga keltirib chiqaruvchi sabablarga bog'lamay o'rganiladi. Harakatning bunday tarzda o'rganishda qaralayotgan obyektga ta'sir etuvchi kuchlar e'tiborga olinmaydi va obyektning massasi yoki inersiya momentini bilish talab qilinmaydi, ya'ni harakat geometrik nuqtayi nazardan o'rganiladi. Ushbu bobda moddiy nuqtaning har xil harakatlari va harakatning kinematik xarakteristikalarini o'rganiladi.

6.1. Asosiy tushunchalar

Moddiy nuqta, sanoq sistemasi, trayektoriya, ko'chish, tezlik va tezlanish.

Moddiy obyektlarning yoki moddiy nuqtaning harakati fazoda vaqt o'tishi bilan sodir bo'ladi. Kinematika geometriyadan shu bilan

farq qiladiki, kinematikada obyektning fazoda ko'chishida uni ko'chish vaqti ham e'tiborga olinadi. Demak, kinematikada obyektning ixtiyoriy paytdagi holati uning geometrik koordinatalaridan tashqari vaqtga ham bog'liq bo'lar ekan. Shuning uchun ham kinematikani ba'zan to'rt o'lchovli fazodagi geometriya deb ham atash mumkin. To'rtinchi koordinata sifatida vaqt olinadi. Vaqt bu shunday o'zgaruvchiki, u fazoda ham va shu fazoda harakatlanuvchi obyektga ham bog'liq emas, ya'ni fazoning hamma joyida bir xil o'zgaradi. Moddiy obyektning harakati boshqa bir obyektga, ya'ni sanoq obyektiga nisbatan kuzatiladi. Sanoq obyektiga biror koordinalar sistemasini mahkamlab, moddiy obyektning harakati shu sanoq sistemasiga nisbatan o'rganiladi.

Vaqtning harakatga bog'liqligisligi shundan iboratki, har xil sanoq sistemalariga nisbatan harakatlanuvchi jismlar uchun vaqt bir xil o'zgaradi. Mexanik masalalarni yechishda vaqtning hisob boshi har safar kelishib olinadi. Texnik masalalarini yechishda, odatda, Yerga qo'zg'almas qilib mahkamlangan sanoq sistemasini olinadi. Yerga nisbatan qo'zg'almas bo'lgan sanoq sistemasiga asosiy yoki **qo'zg'almas sanoq sistemasini** deyiladi. Tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan jismning vaziyati vaqt o'tishi bilan o'zgarib, jism tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan tinch holatda deyiladi. Agar tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan vaqt o'tishi bilan jismning vaziyati o'zgarib tursa, jism shu sanoq sistemasiga nisbatan harakatda deyiladi. Tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan ixtiyoriy paytda jismning vaziyatini aniqlash mumkin bo'lsa, uning harakati shu sanoq sistemasiga nisbatan berilgan deyiladi.

Qattiq jismning harakati uni tashkil qiluvchi nuqtalar (zarralari)ning harakati bilan aniqlanadi. Shuning uchun ham dastlab nuqta kinematikasi, undan keyin qattiq jism kinematikasi o'rganiladi.

Ko'chish va harakat kinematikaning asosiy tushunchalari hisoblanadi. Biror sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning vaqt oralig'ida fazoda bir holatdan boshqa bir holatga ixtiyoriy ravishda o'tishiga uning ko'chishi deyiladi. Nuqtaning ko'chishi uning boshlang'ich va oxirgi holatlari hamda o'tgan vaqt oralig'i bilan aniqlanadi.

Qattiq jismning yoki moddiy nuqtaning holati fazoda maxsus parametr (koordinata)lar bilan aniqlanadi. Jismning harakati esa bu parametrlar bilan vaqt orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi tenglamalar bilan beriladi.

Kinematikaning asosiy masalasi: absolut qattiq jism (moddiy nuqta)ning berilgan harakat tenglamalariga qarab, uning barcha kinematik tavsifnomalarini (barcha nuqtalarning trayektoriyalari, tezliklari, tezlanishlari va hokazo) topishdan iborat.

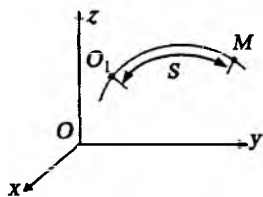
Nuqta kinematikasida harakatning berilish usullariga qarab, nuqtaning kinematik tavsifnomalarini topish o‘rganiladi. Nuqta kinematikasida trayektoriya tushunchasi asosiy hisoblanadi. Trayektoriya-ning ko‘rinishiga qarab, nuqtaning harakati to‘g‘ri yoki egri chiziqli harakatlarga bo‘linadi.

6.2. Nuqta harakatining berilish usullari

Moddiy nuqta, trayektoriya, masofa, radius-vektor, egri chiziq va sirt.

Nuqtaning harakati bir necha xil usullar bilan berilgan bo‘lishi mumkin. Agar nuqtaning harakati biror usulda berilgan bo‘lsa, tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan ixtiyoriy paytda nuqtaning holatini aniqlash mumkin.

6.2.1. Tabiiy usul. Biror sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning trayektoriyasi berilgan bo‘lsa, uning harakati tabiiy usulda berilgan deyiladi. Nuqtaning trayektoriyasi $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan berilgan bo‘lsin (127-shakl). Trayektoriya-ning biror O_1 nuqtasini sanoq boshi deb qabul qilib, trayektoriya bo‘ylab musbat



127-shakl.

$O_1M=S$ yo‘nalishini tanlaymiz. Nuqtaning boshlang‘ich O_1 holati bilan keyingi M holati orasidagi S yoy vaqtning funksiyasi ko‘rinishida berilgan bo‘lsa, bu qonunga asosan nuqtaning ixtiyoriy paytda trayektoriya ustidagi holatini bir qiymatli aniqlash mumkin.

Agar vaqtning har bir payti uchun nuqtaning holatini tasvirolovchi masofa aniqlangan bo‘lsa, ya‘ni

$$S = f(t) \quad (6.2.1)$$

bog'lanish berilgan bo'lsa, nuqtaning harakati tabiiy usulda aniqlangan deyiladi. (6.2.1) tenglamaga nuqtaning harakat tenglamasi deyiladi.

Aniqlanishiga ko'ra $S=f(t)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi: bir qiymatli, chunki nuqta bir vaqtning o'zida fazoning turli joyida bo'la olmaydi; uzluksiz, bu degani harakat uzluksiz, ya'ni t vaqtning cheksiz kichik o'zgarishiga, S masofaning cheksiz kichik o'zgarishi mos keladi; differensiallanuvchi. Bu shartlarning zaruriyligi kinematika va dinamikaning asosiy talablaridan kelib chiqadi.

Agar $S=C=const$ bo'lsa, bu nuqtaning berilgan sanoq sistemasiga nisbatan tinch holatda ekanini bildiradi.

6.2.2. Koordinatalar usuli. Nuqtaning holati koordinatalar usulida berilgan bo'lishi uchun: sanoq obyektiga mahkamlangan biror koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlanuvchi nuqtaning koordinatalari vaqtning funksiyasi ko'rinishida berilishi kerak.

Uch o'lchovli fazoda nuqtaning holati q_1, q_2, q_3 koordinatalar bilan aniqlanadi. Bu koordinatalarga egri chiziqli koordinatalar deyiladi. Demak, nuqtaning koordinatalari

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t) \quad (6.2.2)$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, nuqtaning harakati koordinatalar usulida berilgan hisoblanadi.

Oldingi holdagidek, bu yerda ham hamma funksiyalar bir qiymatli, uzluksiz va differensiallanuvchi deb qaraladi.

Agar nuqtaning holati to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida berilgan bo'lsa, nuqtaning ixtiyoriy paytidagi holati

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \quad (6.2.3)$$

tenglamalar bilan aniqlanadi.

(6.2.3) tenglamalar bir tomondan nuqtaning harakat qonunini ifodalaydi, ya'ni vaqtning ixtiyoriy paytida x, y, z koordinatalarni va demak M nuqtaning holatini aniqlash imkonini beradi, ikkinchi tomondan trayektorianing parametrik tenglamalarini ifodalaydi. Bu tenglamalardan t parametrni yo'qotish mumkin bo'lsa, quyidagi tenglamalar sistemalarini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0; \\ \chi(x, z) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \psi(y, z) = 0; \\ \chi(x, z) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \chi(x, z) = 0; \\ \psi(y, z) = 0. \end{cases} \quad (6.2.4)$$

Bu sistemalarning har biri nuqta trayektoriyasini ikkita sirtning kesishishi ko'rinishida tasvirlaydi.

Nuqta harakatini o'rganishda boshqa koordinatalar sistemalaridan ham foydalanish mumkin. Masalan, silindrik, sferik va qutb koordinatalar sistemalari.

6.2.3. Vektor usuli. Nuqtaning ixtiyoriy paytdagi holatini biror markazga nisbatan uning radius-vektori bilan aniqlash mumkin bo'lsa, ya'ni nuqtaning holatini aniqlovchi radius-vektor t vaqtning funksiyasi ko'rinishda berilgan bo'lsa, nuqtaning harakati vektor usulida berilgan deyiladi. Ta'rifga asosan biror O markazga nisbatan nuqtaning holatini aniqlovchi radius-vektor vaqtning funksiyasi bo'ladi, ya'ni

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (6.2.5)$$

Agar nuqtaning dekart koordinatalari x, y, z bo'lsa, uning koordinatalar boshiga nisbatan radius-vektorining proyeksiyalari ham x, y, z bo'ladi, ya'ni

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (6.2.6)$$

Agar nuqta tekislikda harakatlansa, uning harakati vektor usulda

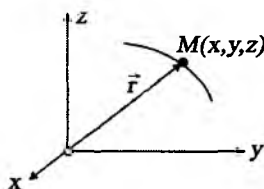
$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad (6.2.7)$$

ko'rinishida yoziladi.

Agar nuqtaning harakati koordinatalar usulda berilgan bo'lsa, harakatni vektor usuliga o'tkazish mumkin va aksincha. Agar nuqtaning harakati koordinatalar usulda berilgan ya'ni (6.2.3) tenglamalar berilgan bo'lsa, uning radius-vektori quyidagi ifodadan topiladi:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Agar nuqtaning harakati dekart koordinatalarida berilgan bo'lsa, undan nuqta harakatining tabiiy tenglamasiga ham o'tish mumkin.



128-shakl.

Nuqtaning trayektoriya bo‘ylab harakat qonuni differensial ko‘rinishda quyidagicha yoziladi:

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

bundan,

$$S = \int_0^t \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_0^t \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \quad (6.2.8)$$

Mexanikada vaqt bo‘yicha hosilalarni quyidagicha yozish kiritilgan. Masalan, $x(t)$ funksiyadan birinchi tartibli hosilani $\dot{x}(t)$, ikkinchi tartibli hosila $\ddot{x}(t)$ va hokazo ko‘rinishda yoziladi.

6.3. Nuqtaning trayektoriya bo‘ylab harakat qonuniga doir masalalarni yechish bo‘yicha uslubiy tavsiyalar.

Masalalar

Nuqtaning harakat tenglamalariga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi:

1. Masalani yechish uchun tegishli koordinatalar sistemasini tanlash kerak.

2. Berilgan shartlardan foydalanib, tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan nuqtaning harakat tenglamalari tuziladi.

3. Nuqtaning tuzilgan harakat tenglamalariga qarab, ya’ni (6.2.4) va (6.2.8) tenglamalaridan foydalanib, (6.2.4) trayektoriya tenglamalari topiladi.

1-masala (И.В. Мещерский 10.4). Nuqta harakatining berilgan $x=3 \sin t$, $y=3 \cos t$ tenglamalariga qarab uning trayektoriya tenglamasi topilsin; shuningdek, masofani nuqtaning boshlang‘ich holatidan hisoblab, uning trayektoriya bo‘ylab harakatlanish qonuni ko‘rsatilsin.

Yechish. Nuqtaning berilgan harakat tenglamalaridan t parametrlarini yo‘qotib, uning trayektoriya tenglamasi topiladi, ya’ni

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Demak, nuqta trayektoriyasi markazi koordinatalar boshida va radiusi 3 ga teng bo'lgan aylana bo'lar ekan (129-shakl).

Endi nuqtaning trayektoriya bo'ylab harakatlanish qonuni topiladi. Buning uchun (6.2.8) formuladan foydalanamiz. Berilgan harakat tenglamalariga asosan:

$$\dot{x} = 3 \cos t, \quad \dot{y} = -3 \sin t.$$

Buni (6.2.8) formulaga qo'yiladi:

$$S = \int_0^t \sqrt{9(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = 3t + C,$$

bunda C berilgan boshlang'ich shartlardan topiladi. Masalan: $t = 0$ bo'lganda $S_0 = 0$ deb olinsa, $C = 0$ bo'iyadi, natijada nuqtaning trayektoriya bo'ylab harakatlanish tenglamasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$S = 3t.$$

2-masala (И.В.Мещерский 10.14). Snaryadning harakati

$x = v_0 t \cdot \cos \alpha$, $y = v_0 t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$ tenglamalar bilan berilgan,

bunda v_0 — snaryadning boshlang'ich tezligi, α — x o'qi bilan \vec{v}_0 orasidagi burchak, g — og'irlik kuchining tezlanishi. Snaryadning harakat trayektoriyasi, H — balandlik, L — uchish uzoqligi va T uchish vaqti aniqlansin.

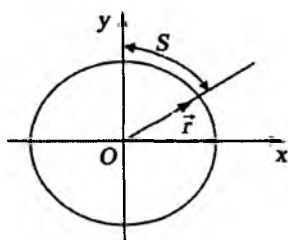
Yechish. Nuqtaning berilgan harakat tenglamalaridan t ni yo'qotib, uning trayektoriya tenglamasi topiladi. Tenglamalarning birinchisidan:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}.$$

Buni tenglamalarning ikkinchisiga qo'yiladi:

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Demak, snaryadning harakat trayektoriyasi paraboldan iborat ekan.



129-shakl.

Endi H balandlik topiladi. Nuqta parabola bo'ylab eng katta balandlikka ko'tarilganda y koordinata o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Harakat tenglamalarning ikkinchisining birinchi tartibli hosilasini nolga tenglashtiramiz:

$$\dot{y} = v_0 \sin \alpha - gt = 0.$$

Bundan:

$$t = \frac{v_0}{g} \sin \alpha.$$

Shoxlari pastga qaragan parabolada y faqat eng katta qiymatga ega, shuning uchun

$$H = y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Endi uchish masofasi topiladi. Nuqta Yerga kelib tushganda uning y koordinatasi nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 0.$$

Bundan

$$t_1 = 0; \quad t_2 = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha.$$

t_1 — nuqtaning boshlang'ich holatiga, t_2 — nuqtaning uchish vaqtini ifodalaydi. Demak,

$$T = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha.$$

T ning bu qiymatini harakat tenglamalarining birinchisiga qo'yib, nuqtaning uchish masofasi topiladi, ya'ni

$$L = x_{\max} = \frac{v_0^2}{g} 2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

3-masala (И.В. Мещерский 10.21). Nuqtaning dekart koordinatalari sistemasida berilgan

$$x = R \cos^2 \frac{kt}{2}, \quad y = \frac{R}{2} \sin kt, \quad z = R \sin \frac{kt}{2}$$

harakat tenglamalariga asosan uning trayektoriyasi va sferik koordinatalar sistemasidagi harakat tenglamalari topilsin.

Yechish. Nuqtaning trayektoriya tenglamasi topiladi. Harakat tenglamalarining birinchi va ikkitasidan:

$$\begin{cases} x - \frac{R}{2} = \frac{R}{2} \cos kt \\ y = \frac{R}{2} \sin kt \end{cases} \Rightarrow \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$

Harakat tenglamalarining uchinchisidan:

$$\sin \frac{kt}{2} = \frac{z}{R}.$$

Buni birinchi ikkita tenglamaga qo'yiladi:

$$x = R \left(1 - \sin^2 \frac{kt}{2}\right) = \frac{R^2 - z^2}{R}, \quad y = R \sin \frac{kt}{2} \cos \frac{kt}{2} = \frac{z \sqrt{R^2 - z^2}}{R}.$$

Bu tenglamalarning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib qo'shiladi, natijada

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

tenglama hosil bo'ladi. Demak, nuqta trayektoriyasi

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ sfera va } \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$

silindrlarning kesishish chizig'idan iborat bo'lar ekan.

Nuqtaning berilgan harakat tenglamalari quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x = R \cos \frac{kt}{2} \cos \frac{kt}{2}, \quad y = R \cos \frac{kt}{2} \sin \frac{kt}{2}, \quad z = R \sin \frac{kt}{2}$$

Bu tenglamalarni nuqtaning sferik koordinatalari bilan dekart koordinatalari orasidagi bog'lanish tenglamalari bilan solishtirib, quyidagi tenglamalarga kelimiz:

$$r = R, \quad \varphi = \frac{kt}{2}, \quad \theta = \frac{kt}{2}.$$

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Kinematikaning asosiy tushunchalari nimalar?
2. Nuqta kinematikasining asosiy masalasi nimalardan iborat?
3. Nuqtaning harakati qanday usullar bilan berilishi mumkin?
4. Bir koordinatalar sistemasidan boshqasiga qanday o'tiladi?

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Nuqtaning harakat tenglamasi $\vec{r} = 3t\vec{i} + 4t\vec{j}$ ko'rinishida berilgan. $r = 5m$ bo'lgan paytda nuqtaning y koordinatasi topilsin.

2. Nuqtaning harakat tenglamalari $x = 3t$, $y = t^2$ ko'rinishida berilgan. $t = 2c$ bo'lgan paytda koordinatalar boshidan nuqttagacha bo'lgan masofa topilsin.

3. Nuqtaning harakat tenglamalari $x = cost$, $y = 2sint$ ko'rinishida berilgan. $t = 2,5c$ bo'lgan paytda nuqtadan koordinatalar boshigacha bo'lgan masofa topilsin.

4. Nuqtaning harakat tenglamalari $x = 2t$, $y = t$ ko'rinishida berilgan. Koordinatalar boshidan nuqttagacha bo'lgan masofa 10 m ga yetgan vaqt t topilsin.

5. A nuqtaning harakat tenglamalari $x = 2cost$, $y = 3sint$ ko'rinishida berilgan. $t = 1,5c$ bo'lgan paytda nuqtaning radius-vektori OA bilan Ox o'qi orasidagi burchak topilsin.

6. Nuqtaning harakati $x = 5\cos 5t^2$, $y = 5\sin 5t^2$ tenglamalar bilan berilgan. Nuqtaning trayektoriya tenglamasi shuningdek, masofani nuqtaning boshlang'ich holatidan hisoblab, uning trayektoriya bo'ylab harakatlanish qonuni topilsin.

7. Nuqtaning turli chastotali o'zaro perpendikular tebranishlari $x = a\sin 2\omega t$ tenglamalar bilan berilgan. Trayektoriya tenglamasi topilsin.

8. Nuqta $x = a\cos kt$, $y = a\sin kt$, $z = vt$ vint chizig'i bo'ylab harakatlanadi. Nuqta harakatining tenglamalari silindrik koordinatalarda aniqlansin.

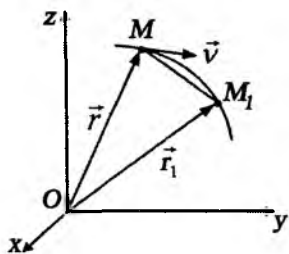
6.4. Moddiy nuqtaning tezligi

Harakat, harakat trayektoriyasi, trayektoriya urinmasi, radius-vektor, tezlik, burchak tezlik, radial va transversal tezlik, sektorial tezlik.

6.4.1. Egri chiziqli harakatdagi nuqtaning tezligi

Agar nuqtaning harakat trayektoriyasi egri chiziqdan iborat bo'lsa, uning bunday harakatiga **egri chiziqli harakat** deyiladi.

Nuqta harakatining asosiy tavsifnomalaridan biri uning tezligi hisoblanadi. Harakatlanuvchi nuqtaning qaralayotgan koordinatalar sistemasiga nisbatan t paytdagi M holati \vec{r} radius-vektor bilan, $t+\Delta t$ paytdagi holati \vec{r}_1 radius-vektor bilan aniqlansin (131-shakl). Δt vaqt oralig'ida harakatlanuvchi nuqtaning radius-vektori $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ ga o'zgarsin (131-shakl).



131-shakl.

$$\vec{v}^* = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

nisbatga nuqtaning Δt vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlik deyiladi.

Demak, nuqtaning o'rtacha tezligi $\Delta\vec{r}$ vektor yo'nalishidagi, ya'ni harakat yo'nalishidagi vektor bo'lar ekan.

O'rtacha tezlikning Δt vaqt oralig'i nolga intilgandagi (ba'zan oniy tezlik deb ham ataladi) limitik holati nuqtaning ixtiyoriy t paytidagi tezlikni ifodalaydi, ya'ni

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (6.4.1)$$

Shunday qilib, nuqtaning ixtiyoriy paytidagi tezligi vektor kattalik bo'lib, nuqtaning radius-vektoridan vaqt bo'yicha olingan

birinchi tartibli hosilaga teng. $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ vektorning $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limitik holati trayektoriyaning urinmasi bilan ustma-ust tushadi, demak, tezlik vektori trayektoriyaning urinmasi bo'ylab, harakat yo'nalishi tomonga qarab yo'nalgan vektordir. Tezlik vektorini quyidagicha almashtiriladi:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dr} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \dot{S}. \quad (6.4.2)$$

(6.4.2) tenglikning o'ng tomonidagi $\frac{d\vec{r}}{ds}$ ko'paytmani qaraymiz.

$|\Delta S|$ va $|\Delta\vec{r}|$ miqdorlar bir xil tartibli kichik miqdorlar ekanligidan

$$\lim \frac{|\Delta\vec{r}|}{|\Delta S|} = 1$$

bo'lad i (132-shakl). Demak, $\Delta \vec{r} / \Delta s$ miqdorning $\Delta S \rightarrow 0$ (yoki) $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limitik holati nuqtaning urinmasi bo'ylab yo'nalgan birlik vektorni ifodalaydi, ya'ni

$$\lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} = \vec{\tau}^0,$$

bunda $\vec{\tau}^0$ — urinmaning musbat yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan birlik vektor. Shunday qilib, (6.4.2) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{v} = \dot{S} \vec{\tau}^0. \quad (6.4.3)$$

$v = \frac{dS}{dt}$ miqdor tezlikning algebraik qiymati modulini bildiradi yoki tezlik trayektoriyaning M nuqtasida o'tkazilgan urinmadagi proyeksiyasini bildiradi, ya'ni

$$v = v_r = \frac{dS}{dt}. \quad (6.4.4)$$

Nuqtaning radius-vektori uning proyeksiyalari orqali yoziladi:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Tezlikning ta'rifiga asosan:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \quad (6.4.5)$$

Tezlik vektorini kordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali yoziladi:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}. \quad (6.4.6)$$

(6.4.5) va (6.4.6) ifodalarni solishtirib, tezlikning proyeksiyalari uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (6.4.7)$$

Shunday qilib, tezlikning kordinata o'qlaridagi proyeksiyalari nuqtaning mos kordinatalaridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilalarga teng bo'lar ekan.

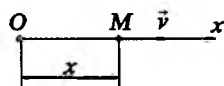
Tezlik vektorining kordinata o'qlaridagi proyeksiyalari ma'lum bo'lsa, uning moduli va yo'nalishini topish mumkin:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};$$

$$\cos(\vec{v}, \hat{x}) = \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\dot{s}}, \quad \cos(\vec{v}, \hat{y}) = \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\dot{s}}, \quad (6.4.8)$$

$$\cos(\vec{v}, \hat{z}) = \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{\dot{s}}.$$

Agar nuqtaning harakat trayektoriyasi to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsa, bunday harakatga to'g'ri chizikli harakat deyiladi. Nuqta to'g'ri chizikli harakatda bo'lsa, koordinatalar o'qlaridan bittasini masalan, Ox o'qini harakat to'g'ri chizig'i bo'ylab yo'naltiramiz. U holda tezlikning qolgan o'qlaridagi proyeksiyalari aynan nolga teng bo'ladi (133-shakl). Natijada nuqtaning tezligi uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:



133-shakl.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v = |\dot{x}|.$$

Shunday qilib, to'g'ri chizikli harakatdagi nuqtaning tezligi masofadan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng ekan.

Agar harakatning berilgan qismida $v = \frac{dx}{dt}$ tezlik va x koordinata bir xil ishoraga ega bo'lsa, nuqtaning bu holdagi harakatiga to'g'ri harakat deyiladi. Agar v va x lar har xil ishorali bo'lsa, nuqtaning bunday harakatiga teskari harakat deyiladi.

Agar nuqtaning tezligi vaqtning biror paytida nolga teng bo'lsa, shu paytda x masofa o'zining stasionar qiymatiga ega bo'ladi. x o'zining maksimum yoki minimum qiymatiga erishgan paytda nuqtaning tezligi nolga teng bo'lib, shu payt tezlik o'zining yo'nalishini o'zgartiradi va harakat agar teskari bo'lsa, to'g'ri harakatga o'tadi.

Agar nuqtaning tezligi qandaydir vaqt oralig'ida nolga teng bo'lsa, shu vaqt oralig'ida $x = const$ bo'lib, nuqta tinch holatda bo'ladi.

Tezlikning o'lchov birligi: $[v] = \frac{[uzunlik]}{[vaqt]}$. Tezlikning o'lchov birligi sifatida: sm/sek , m/sek , $km/soat$ olinadi.

Agar butun harakat davomida nuqtaning tezligi o'zgarmas, ya'ni $v = v_0 = \text{const}$ bo'lsa, nuqtaning bunday harakatiga to'g'ri chiziqli tekis harakat deyiladi.

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0.$$

Bundan

$$x = x_0 + v_0 t, \quad (6.4.9)$$

bunda x_0 — nuqtaning boshlang'ich koordinatasi. (6.4.9) tenglama to'g'ri chiziqli tekis harakat tenglamasini ifodalaydi.

6.4.2. Aylana bo'ylab harakatlanayotgan nuqtaning tezligi.

Burchak tezlik. Nuqtaning R radiusli aylana bo'ylab harakatini qaraymiz. Bu holda M nuqta tezligining son qiymati quyidagiga teng bo'ladi:

$$v = \frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}, \quad (6.4.10)$$

bunda $dS = R d\varphi$.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (6.4.11)$$

miqdorga R radiusning aylanish burchak tezligi deyiladi.

Shunday qilib, aylana bo'ylab harakatlanuvchi nuqta tezligining miqdori quyidagicha topiladi:

$$v = R\omega. \quad (6.4.12)$$

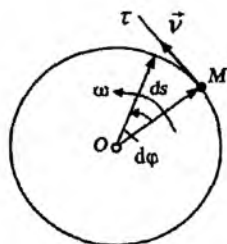
Tezlik vektori aylana urinmasi bo'ylab, harakat yo'nalishi tomonga yo'nalgan bo'ladi.

6.4.3. Nuqta tezligining qutb koordinatalaridagi ifodasi

Nuqta radius-vektorini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\vec{r} = r\vec{r}^0 \quad (6.4.13)$$

bunda \vec{r}^0 — radius-vektor bo'ylab yo'nalgan birlik vektor (135-shakl). Nuqtaning harakati vaqtida \vec{r} vektorning ham moduli ham yo'nalishi o'zgaradi, ya'ni r va \vec{r}^0 miqdorlar vaqtning biror funksiyasi bo'ladi. (6.4.13)



134-shakl.

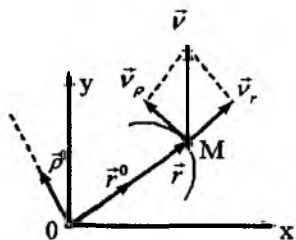
tenglikning ikkala tomonini vaqt bo'yicha differensiallab, nuqta tezligi uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{r}^0 + \frac{d\vec{r}^0}{dt} r. \quad (6.4.14)$$

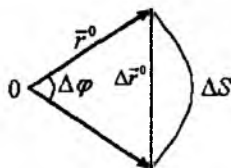
(6.4.14) tenglikning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi nuqtaning radius-vektori bo'ylab yo'nalgan vektor bo'lib, vektorni shu vektor yo'nalishi bo'yicha o'zgarishini xarakterlaydi. Bu qo'shiluvchiga tezlikning radial tuzuvchisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\vec{v}_r = \frac{dr}{dt} \vec{r}^0. \quad (6.4.15)$$

Endi (6.4.14) tenglikning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchini qaraymiz. \vec{r}^0 vektorni $\Delta\varphi$ burchakka buramiz (136-shakl). \vec{r}^0 vektorni $\Delta\varphi$ burchakka burishdan hosil bo'lgan $\Delta\vec{r}^0$ vektor va ΔS yoy bir xil tartibli kichik miqdorlar, shuning uchun quyidagi munosabatni yozish mumkin:



135-shakl.



136-shakl.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}^0}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta S|}{\Delta t} = \frac{|dS|}{dt},$$

$$|dS| = |\vec{r}^0| d\varphi = d\varphi, \quad |\vec{r}^0| = 1.$$

bularga asosan:

$$\left| \frac{d\vec{r}^0}{dt} \right| = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Osonlikcha ko'rsatish mumkinki, birlik vektorning differensial shu vektorning o'ziga perpendikular bo'ladi, ya'ni $\vec{r}^0 \perp d\vec{r}^0$.

\vec{r}^0 vektorga perpendikular qilib birlik vektorni yo‘naltiramiz (135-shakl). U holda:

$$r \frac{d\vec{r}^0}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} \vec{\rho}^0.$$

Shunday qilib, (6.4.14) ni o‘ng tomonidagi ikkinchi qo‘shiluvchi \vec{r} radius-vektoriga perpendikulyar yo‘nalgan vektor bo‘lib, \vec{r} vektorning yo‘nalishining o‘zgarishini xarakterlaydi. \vec{r}^0 dan $\vec{\rho}^0$ vektorga o‘tish soat mili harakati yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda amalga oshirilsa, yo‘nalish musbat, aks holda manfiy bo‘ladi.

$$\vec{v}_p = r \frac{d\varphi}{dt} \vec{\rho}^0 \quad (6.4.16)$$

vektorga nuqta tezligining traneverzal tuzuvchisi deyiladi.

Shunday qilib, (6.4.15) va (6.4.16) munosabatlarga asosan nuqtaning tezligini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p = \vec{v}_r + \vec{v}_p = \frac{dr}{dt} \vec{r}^0 + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{\rho}^0 \quad (6.4.17)$$

Nuqta tekislikda harakatlansin va harakat qonuni qutb koordinatalarida berilgan bo‘lsin, ya’ni

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \varphi = \varphi(t) \quad (6.4.18)$$

(6.4.17) ga asosan

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p = v_r \vec{r} + v_\varphi \vec{\rho}^0,$$

bunda

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}. \quad (6.4.19)$$

Tezlikning moduli quyidagi formuladan topiladi:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}. \quad (6.4.20)$$

Shunday qilib, nuqtaning harkat tenglamalari qutb koordinatalarida berilganda, tezlikning moduli (6.4.20) formula bilan topiladi.

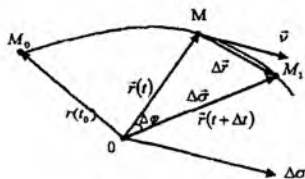
6.4.4. Sektorial tezlik

M nuqta quyidagi qonun bo‘yicha harakatlansin:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (6.4.21)$$

yoki $\vec{r} = \vec{r}(t)$. (6.4.22)

Nuqta fazoda harakatlenganda uning radius-vektori fazoda konus sirtini chizadi. Bu konus sirtini $\vec{r}(t_0)$ va $\vec{r}(t)$ radius-vektorlar va nuqta trayektoriyasi bilan chegaralangan qismi egri chiziqli sektor yuzasini ifodalaydi (137-shakl). Sektor yuzasini σ bilan belgilanadi.



137-shakl

Vaqtning t paytida nuqta \vec{r} radius-vektor bilan aniqlangan M holatda, $t + \Delta t$ paytda $\vec{r}(t + \Delta t)$ radius-vektori bilan aniqlangan M_1 holatda bo'lsin (137-shakl).

Sektor yuzasining Δt cheksiz kichik vaqt oralig'idagi o'zgarishi $\Delta\sigma$ bilan OMM_1 uchburchakning yuzasi bir xil tartibli cheksiz kichik miqdorlar bo'lgani uchun $\Delta\sigma$ ni uchburchakning yuzasi bilan almashtirib olamiz, ya'ni

$$\Delta\sigma \approx \frac{1}{2}(\vec{r} \times \Delta\vec{r}). \quad (6.4.23)$$

Agar $\Delta\vec{\sigma}$ ni O nuqtaga qo'yilgan va $\Delta\sigma$ yuzaga perpendikular vektor deb qarasaq, bu yuzaga quyidagiga teng bo'ladi:

$$\Delta\sigma \approx S_{OMM_1} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \Delta\vec{r}|. \quad (6.4.24)$$

Yuza orttirmasi $\Delta\vec{\sigma}$ ni unga mos vaqt orttirmasiga nisbatining $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limitiga O markazga nisbatan nuqtaning sektorial tezligi deyiladi, ya'ni

$$\vec{v}_\sigma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\sigma}}{dt}. \quad (6.4.25)$$

(6.4.23) tenglikning ikkala tomonini Δt ga bo'lib, $\Delta t \rightarrow 0$ da limitga o'tkaziladi:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2 \frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right)$$

yoki

$$2\vec{v}_\sigma = \vec{r} \times \vec{v}. \quad (6.4.26)$$

(6.4.26) dan ko'rinib turibdiki, biror markazga nisbatan nuqtaning ikkilangan sektorial tezligi, o'sha markazga nisbatan nuqta tezligining momentiga teng bo'lar ekan.

$$\cos(x, \hat{v}) = \frac{v_x}{v} = \frac{2}{2} = 1, \quad \cos(y, \hat{v}) = \frac{v_y}{v} = 0.$$

2-masala. Vertikal yuqoriga otilgan M nuqta qarshiliksiz muhitda quyidagi tenglamaga muvofiq harakatlanadi:

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad (a)$$

bunda v_0 va g — o'zgarmas koeffitsientlar.

Nuqtaning tezligi, eng katta ko'tarilish balandligi va eng katta balandlikka ko'tarilishga ketgan vaqt topilsin.

Yechish. Tezlikning vertikal o'qdagı proyeksiyasi topiladi:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 - gt. \quad (b)$$

(b) tenglamadan ko'rish mumkinki, $t = 0$, $v_x = v_0$. Demak, tezlikning boshlang'ich paytdagi proyeksiyasining qiymatini ifodalaymiz.

Nuqta eng katta balandlikka chiqqan paytda uning tezligi nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$v_x = v_0 - gt = 0.$$

Bundan

$$T = \frac{v_0}{g}.$$

Eng katta balandlikni topish uchun T ning topilgan qiymati nuqtaning berilgan harakat tenglamasiga qo'yiladi:

$$H = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

3-masala. M moddiy nuqta v_0 boshlang'ich tezlik bilan vertikal yuqoriga otiladi. M nuqta eng katta balandlikka ko'tarilib, qaytishda yo'lning o'rtasida uchrashishi uchun birinchi nuqta otilgan joydan ikkinchi M_1 nuqtani qanday $v_1 < v_0$ boshlang'ich tezlik bilan otilish kerak.

Yechish. Vertikal yuqoriga otilgan nuqta qarshiliksiz muhitda quyidagi tenglamaga muvofiq harakat qiladi:

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

bunda v_0 nuqtaning boshlang'ich tezligi, g — erkin tushish tezlanishi.

Oldingi masalada birinchi nuqtaning eng katta balandligi topilgan edi, ya'ni

$$H = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (a)$$

Yuqoridan pastga vertikal harakatlanadigan birinchi nuqta uchun boshlang'ich tezlik nolga teng, ya'ni $v_0 = 0$. Uning harakat tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 = \frac{gt_1^2}{2}. \quad (b)$$

v_1 boshlang'ich tezlik bilan yuqoriga vertikal otilgan nuqtaning qarshiliksiz muhitdagi harakat tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$x_2 = v_1 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}. \quad (c)$$

Masalaning shartiga ko'ra

(b) va (c) tenglamalarga asosan:

$$\frac{gt_1^2}{2} = v_1 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}. \quad (d)$$

(b) tenglamadan:

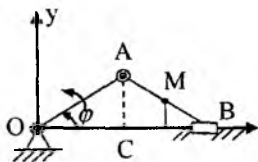
$$\frac{v_0^2}{4g} = \frac{gt_1^2}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g\sqrt{2}}. \quad (e)$$

Masalaning shartiga ko'ra $t_1 = t_2$. Bunga asosan (e) ni (d) ga qo'yamiz:

$$\frac{v_0^2}{4g} = v_1 \frac{v_0}{g\sqrt{2}} - \frac{v_0^2}{4g}.$$

Bundan:

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$



138-shakl.

4-masala (И.В.Мещерский 11.4). OA krivoship ω o'zgarmas burchak tezlik bilan aylanadi. Krivoship-polzunli mexanizm shatuni o'rtasidagi M nuqtaning tezligi va polzunning tezligi vaqt funksiyasi sifatida topilsin; $OA=AB=a$.

Yechish. M nuqta va B polzunning koordinatalari topiladi. $\triangle OAB$ teng yonli bo'lgani uchun $\angle B = \varphi$, $CD=DB$.

Shaklga asosan:

$$x_M = AO \cos \varphi + \frac{OA}{2} \cos \varphi,$$

$$y_m = \frac{OA}{2} \sin \varphi$$

yoki

$$x_M = \frac{3}{2} a \cos \omega t, \tag{a}$$

$$y_M = \frac{1}{2} a \sin \omega t.$$

(a) tenglamalardan:

$$v_{Mx} = \dot{x}_M = -\frac{3}{2} a \omega \sin \omega t, \quad v_{My} = \dot{y}_M = \frac{1}{2} a \omega \cos \omega t.$$

Endi tezlikning moduli topiladi:

$$v_M = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} = \frac{a}{2} \omega \sqrt{8 \sin^2 \omega t + 1}.$$

Xuddi shunday

$$x_B = 2a \cos \omega t \Rightarrow v_{Bx} = \dot{x}_B = -2a \omega \sin \omega t$$

$$y_B = 0 \quad v_{By} = 0$$

B nuqta tezligining moduli

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = 2a \omega \sin \omega t.$$

5-masala (И.В.Мещерский 11.9). Radiusi $R=1m$ bo'lgan elektrovoz g'ildiragining o'qidan $a=0,5m$ narida yotuvchi nuqta-

sining harakat tenglamalari va trayektoriyasi aniqlansin. G'ildirak gorizontol va to'g'ri chiziqli yo'lda sirg'anmasdan g'ildirab boradi; g'ildirak o'qining tezligi $v = 10 \text{ m/s}$. Ox o'q rels bilan ustma-ust tushadi, Oy o'q nuqtaning boshlang'ich pastki holatidagi radiusga mos keladi. Shuningdek, g'ildirakning shu nuqta yotgan diametri gorizontol va vertikal holatni egallagan paytlarda nuqta tezligining qancha bo'lishi aniqlansin.

Yechish. Boshlang'ich paytda g'ildirak bilan relsning urinish nuqtasining koordinatalar boshi deb olib, x o'qni rels bo'ylab, y o'qini vertikal bo'ylab yo'naltiramiz. G'ildirak Q nuqtasining ixtiyoriy t paytdagi holati aniqlanadi. G'ildirak markazi gorizontol to'g'ri chiziq bo'ylab tekis harakat qilgani uchun

$$C_0C = v_0t = 10t$$

$CA \parallel C_0O$ bo'lganligidan t vaqt ichida g'ildirakning o'z o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan burchakni $\angle QCA = \varphi$ bilan belgilanadi.

Q nuqtaning koordinatalari topiladi:

$$x_Q = OB, \quad y_Q = QB$$

bo'ladi.

$$OB = OA - BA = S_0S - SE, \quad QB = QE + EB,$$

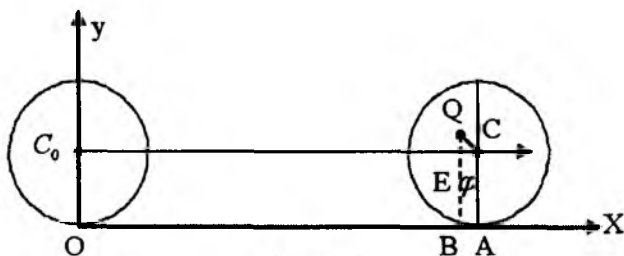
yoki

$$x_Q = 10t - CE, \quad y_Q = R + QE.$$

$\triangle QEC$ dan:

$$QE = a \sin(\varphi - 90^\circ) = -a \cos \varphi,$$

$$EC = a \cos(\varphi - 90^\circ) = a \sin \varphi$$



139-shakl.

Bularga asosan

$$\begin{aligned}x_Q &= 10t - a \sin \varphi, \\y_Q &= R - a \cos \varphi.\end{aligned}\quad (a)$$

Endi φ burchakni t ning funksiyasi ko'rinishida topiladi. G'ildirak yo'lda sirg'anmasdan yumalagani sababli. $\vec{OA} = R\varphi$
 $OA = C_0 C = 10t$. Natijada

$$R\varphi = 10t \Rightarrow \varphi = \frac{10t}{R} = 10t.$$

Buni (a) tenglamalariga qo'yib, nuqtaning harakat tenglamalari topiladi:

$$\begin{aligned}x_Q &= 10t - 0,5 \sin 10t, \\y_Q &= 1 - 0,5 \cos 10t.\end{aligned}$$

Endi nuqta gorizont va vertikal diametrda yotgan holatlar uchun tezliklar topiladi:

1. Nuqta gorizont diametrlarda yotgan holda:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

bo'ladi. (b) tenglamalardan vaqt bo'yicha hosilalarni olib, tezlikning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari topiladi, ya'ni

$$v_x = \dot{x}_Q = 10 - 5 \cos 10t, \quad v_y = \dot{y}_Q = 5 \sin 10t.$$

$\varphi = 10t = \frac{\pi}{2}$ bo'lgan paytda $v_x = 10 \text{ m/s}$, $v_y = 5 \text{ m/s}$.

Tezlikning moduli $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 11,18 \text{ m/s}$ ga teng ekani kelib chiqadi. $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ bo'lgan paytda

$$v_x = 10 \text{ m/s}, \quad v_y = -5 \text{ m/s}$$

va

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 11,18 \text{ m/s}.$$

2) Nuqta vertikal diametrda yotgan holda:

$\varphi = 0$; $\varphi = \pi$ bo'ladi.

$\varphi = 0$ bo'lgan paytda:

$$v_x = 5m/s, \quad v_y = 0, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5m/s.$$

$\varphi = \pi$ bo'lgan paytda:

$$v_x = 15m/s, \quad v_y = 0 \quad \text{va} \quad v = 15m/s.$$

6-masala (И.В.Мещерский 11.12). Nuqta bir vaqtning o'zida $x = Aye^{-ht} \cos(kt + \varepsilon)$, $y = Ae^{-ht} \sin(kt + \varepsilon)$ tenglamalarga asosan o'zaro perpendikular so'nuvchi tebranishlarda ishtirok etadi. Nuqta tezligining dekart va qutb koordinatalaridagi proyeksiyalari va shuningdek, nuqta tezligining moduli aniqlansin.

Yechish. Nuqta tezligining dekart koordinatalari o'qlaridagi proyeksiyalari topiladi:

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= -Ahe^{-ht} \cos(kt + \varepsilon) - Ake^{-ht} \sin(kt + \varepsilon) = \\ &= -Ae^{-ht} (h \cos(kt + \varepsilon) + k \sin(kt + \varepsilon)), \\ v_y = \dot{y} &= -Ahe^{-ht} \sin(kt + \varepsilon) + Ake^{-ht} \cos(kt + \varepsilon) = \\ &= Ae^{-ht} (k \cos(kt + \varepsilon) - h \sin(kt + \varepsilon)). \end{aligned}$$

Berilgan tenglamalardan:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = Ae^{-ht}, \quad \varphi = kt + \varepsilon.$$

Endi tezlikning qutb koordinatalaridagi proyeksiyalari topiladi:

$$v_r = \dot{r} = -Ahe^{-ht}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = Ake^{-ht}.$$

Tezlikning moduli:

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} = \sqrt{h^2 + k^2} Ae^{-ht} = r\sqrt{h^2 + k^2}.$$

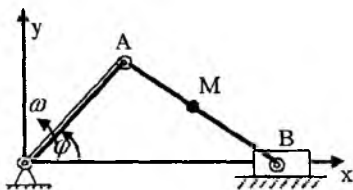
Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Nuqta tezligi qanday aniqlanadi?
2. Nuqta tezligining dekart koordinatalari sistemasi o'qlaridagi proyeksiyalari, yo'nalishi va moduli qanday topiladi?
3. Tabiiy koordinatalar sistemasida nuqta tezligi qanday topiladi?
4. Qutb koordinatalar sistemasida nuqta tezligining proyeksiyalari va moduli qanday topiladi?
5. Nuqtaning sektorial tezligi deganda nimani tushunasiz?

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Nuqta $x = 2 \cos t$, $y = 4 \cos 2t$ (x , y -santimetrlar, t -sekundlar hisobida) tenglamalarga muvofiq lissaju figurasini chizadi. Nuqta Oy o'qda bo'lganida tezlikning miqdori bilan yo'nalishi topilsin.

2. OA krivoship ω o'zgarmas burchak tezlik bilan aylanadi. Krivoship-polzunli mexanizm shatunining o'rtasidagi M nuqta va polzunning tezligi vaqt funksiyasi sifatida topilsin;



$$OA = AB = a.$$

3. O'qi gorizont bilan 30° burchak tashkil qilgan to'pdan 500 m/s tezlik bilan snaryad otiladi. Snaryad faqat $g=9,81 \text{ m/s}^2$ og'irlik kuchi tezlanishiga ega deb faraz qilib, uning tezlik godograti va godograf chizuvchi nuqtaning tezligi topilsin.

2-masala.

4. M nuqtaning harakat tenglamalari silindrik koordinatalar sistemasida $r = a$, $\varphi = kt$, $z = vt$ ko'rinishga ega. M nuqta tezligining silindrik koordinatalar sistemasidagi proyeksiyalari, tezlik godografini chizuvchi M_1 nuqtaning harakat tenglamalari va M_1 nuqta tezligining proyeksiyalari topilsin.

5. M nuqta aylana bo'ylab $r = 2a \cos \frac{kt}{2}$, $\varphi = \frac{kt}{2}$ tenglamalarga asosan harakatlanadi (r, φ — qutb koordinatalari). M nuqta tezligining qutb koordinatalar sistemasida o'qlaridagi proyeksiyalari, tezlik godografini chizuvchi M_1 nuqta harakat tenglamalari va M_1 nuqta tezligining proyeksiyalari topilsin.

6. Nuqtaning to'la tezligi 20 m/s , radial tezligi 10 m/s bo'lsa, uning transversal tezligini toping.

7. Nuqtaning harakat tenglamalari $\varphi = t$, $r = t^2$ ko'rinishda berilgan. $\varphi = 180^\circ$ bo'lgan paytda nuqtaning qutb radiusini toping.

8. Nuqtaning harakati qutb koordinatalarida berilgan: $\varphi = t^2$, $r = 0,5t^2$. Qutb burchagi $\varphi = 2,25 \text{ rad}$. bo'lgan paytda nuqtaning radial tezligini toping.

9. Nuqtaning harakati tenglamalar bilan berilgan. $t = 2c$ bo'lgan paytda nuqta tezligining modulini toping.

10. Nuqta tekislikda harakatlanadi. Nuqtaning qutb burchagi $\varphi = 0,3t$. $\frac{dr}{dt} = 0,4m/s$ va $t_0 = 0$, $r_0 = 0$ bo'lsa, qutb burchagi 3 rad. ga yetgan paytda qutb radiusini toping.

11. Nuqtaning harakat tenglamalari $x = t^2$, $y = \sin \pi t$, $z = \cos \pi t$ ko'rinishida berilgan. $t = 1c$ bo'lgan paytda nuqta tezligining moduli topilsin.

12. Nuqtaning tezligi $v = 0,2t$ tenglama bilan berilgan. $t_0 = 0$ da $S_0 = 0$ bo'lsa, nuqtaning $t = 10c$ bo'lgan paytdagi S egri chiziqli koordinatasini toping.

13. Nuqtaning harakati $x = 3t^2$, $y = 4t^2$ tenglamalar bilan berilgan. $t_0 = 0$ da $S_0 = 0$ bo'lib, nuqta koordinataning musbat yo'nalishi bo'ylab harakatlanadi deb olib, egri chiziqli koordinata $S = 110m$ bo'ladigan t vaqtni toping.

14. Nuqtaning harakati $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$ tenglamalar bilan berilgan. $t_0 = 0$ da $S_0 = 0$ deb olib, nuqtaning egri chiziqli koordinatasi m bo'ladigan t vaqtni toping.

15. Nuqtaning harakat tenglamalari $x=2t$, $y=3t$, $z=5t$ ko'rinishida berilgan. $t_0 = 0$ da $S_0 = 14$ m deb olib, $t = 10c$ bo'lgan paytda nuqtaning S egri chiziqli koordinatasini va tezligini toping.

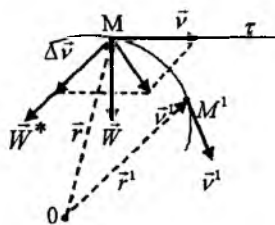
6.6. Moddiy nuqtaning tezlanishi

Trayektoriya, urinma, normal, binormal, urinma tekislik, normal tekislik, yopishma tekislik, egrilik, egrilik radiusi, tezlanish, urinma va normal tezlanish.

Moddiy nuqtaning harakat qonuni vektor yoki koordinata usulida berilgan bo'lsin, ya'ni

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \text{ yoki } x=x(t), y=y(t), z=z(t). \quad (6.6.1)$$

Moddiy nuqta (6.6.1) qonun bo'yicha harakatlanib, vaqtning biror t paytida M holatda va tezligi $\vec{v} = \vec{v}(t)$, $t + \Delta t$ paytda M^1 holatda va tezligi $\vec{v}^1 = \vec{v}^1(t + \Delta t)$ bo'lsin (140-shakl). \vec{v}^1 vektorni



140-shakl.

o‘z-o‘ziga parallel ravishda M nuqtaga ko‘chiramiz (140-shakl). U holda $\vec{v} - \vec{v}' = \Delta\vec{v}$, bunda $\Delta\vec{v}$ — tezlikning Δt vaqt oralig‘ida erishgan orttirmasi. $\Delta\vec{v}$ ning Δt ga nisbati nuqtaning Δt vaqt oralig‘idagi o‘rtacha tezlanishi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\vec{W}^* = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (6.6.2)$$

\vec{W}^* o‘rtacha tezlanishining $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limitiga nuqtaning berilgan t paytdagi tezlanishi deyiladi, ya‘ni

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (6.6.3)$$

yoki tezlikning ta‘rifiga asosan:

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (6.6.4)$$

Shunday qilib, nuqtaning tezlanishi vektor kattalik bo‘lib, tezlik vektoridan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosilaga yoki radius-vektordan olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng bo‘lar ekan. \vec{W}^* yoki $\Delta\vec{v}$ vektor $M\tau$ urinmani qaysi tomonida yotsa, \vec{W} tezlanish vektori ham o‘sha tomonda yotadi, shuning uchun u hamma vaqt trayektoriyaning botiq tomoniga qarab yo‘nalgan bo‘ladi.

Nuqta trayektoriyasining $M\tau$ urinmasi va M^1 nuqta orqali o‘tuvchi tekislikning M^1 nuqta M nuqtaga intilgandagi limitik holatiga trayektoriyaning M nuqtasidagi yopishma tekisligi deyiladi. Egri chiziq tekis egri chiziqdan iborat bo‘lsa, uning yopishma tekisligi egri chiziq tekisligining o‘zi bo‘ladi.

(6.6.3) tenglikka asosan \vec{W}^* vektor $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ vektor yotgan tekisligining $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limitik tekisligida yotadi. Demak, tezlanish vektori \vec{W} yopishma tekislikda yotib, trayektoriyaning botiq tomonga qarab yo‘nalgan bo‘ladi.

Nuqta radius-vektori quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Bu tenglikning ikkala tomonini ikki marta vaqt bo'yicha differensiallanadi:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{W} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}.$$

Bundan

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \quad (6.6.5)$$

tezlanish vektorining moduli

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \quad (6.6.6)$$

yo'naltiruvchi kosinuslari

$$\cos(\vec{W}, \hat{x}) = \frac{W_x}{W}, \quad \cos(\vec{W}, \hat{y}) = \frac{W_y}{W}, \quad \cos(\vec{W}, \hat{z}) = \frac{W_z}{W} \quad (6.6.7)$$

(6.6.5) tenglikka asosan, tezlanishning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari mos ravishda nuqta koordinatalaridan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilalarga teng bo'lar ekan.

Agar nuqta to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsa, koordinata o'qlaridan bittasini, masalan x o'qini harakat to'g'ri chizig'i bo'ylab yo'naltiriladi u holda nuqta tezlanishining proyeksiyalari

$$W_x = \ddot{x}, \quad W_y = 0, \quad W_z = 0.$$

bo'ladi. Tezlanish vektori x o'qi bo'ylab yo'nalishi bilan bir xil yoki harakat yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi.

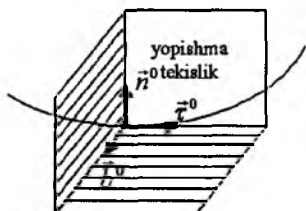
Agar \vec{W} vektorning yo'nalishi \vec{v} vektor bilan bir xil bo'lsa, harakat tezlashuvchan, qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, harakat sekinlashuvchan bo'ladi.

6.7. Differensial geometriyadan ba'zi ma'lumotlar

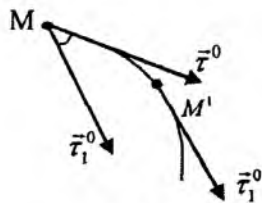
1. Tabiiy uchoyq. Nuqta trayektoriyasining M va M^1 nuqtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqning M^1 nuqta M nuqtaga intilgandagi limitik holatiga trayektoriyaning M nuqtasidagi urinmasi deyiladi. M nuqtada egri chiziq urinmasiga perpendikular to'g'ri chiziqqa

egri chiziqning M nuqtadagi normali deyiladi. Bu ta'rifga asosan M nuqtada egri chiziqqa cheksiz ko'p normallar o'tkazish mumkin. Bu normallarning hammasi M nuqtadan o'tuvchi urinmaga perpendikular tekislikda yotadi. Bu tekislikka egri chiziqning M nuqtasidagi normal tekisligi deyiladi. Egri chiziqning M nuqtasidagi uzunma tekisligida yotuvchi normalga uning bosh normali deyiladi. Shunday qilib, M nuqtadagi urinma tekislik bilan normal tekislik egri chiziqning bosh normali bo'ylab kesishar ekan. Egri chiziqning M nuqtasidan o'tuvchi uzunma tekislikka perpendikular bo'lgan normalga M nuqtadagi binormal deyiladi.

Egri chiziqning M nuqtasidagi urinma bo'ylab yo'nalgan birlik vektorni $\vec{\tau}^0$ bilan, bosh normali bo'ylab yo'nalgan birlik vektorni \vec{n}^0 bilan va binormal bo'ylab yo'nalgan birlik vektorni \vec{b}^0 bilan belgilaymiz (141-shakl). Bu vektorlar orqali quyidagi tekisliklar o'tadi: $(\vec{\tau}^0, \vec{n}^0)$ uzunma tekislik, (\vec{n}^0, \vec{b}^0) normal tekislik va $(\vec{b}^0, \vec{\tau}^0)$ urinma tekislik. $\vec{\tau}^0$, \vec{n}^0 va \vec{b}^0 vektorlar uchta o'zaro perpendikular to'g'ri burchakli uchyoqni hosil qiladi. Bu uchyoqqa tabiiy uchyoq deyiladi. Bu tabiiy uchyoq M nuqta bilan birgalikda harakatlanadi. Tabiiy uchyoqdan tashkil topgan koordinatalar sistemasiga tabiiy koordinatalar sistemasi deyiladi.



141-shakl.



142-shakl.

2. Egri chiziqning egriligi va egrilik radiusi. M nuqta trayektoriyasining bir-biriga juda yaqin M va M^1 nuqtalaridan $M\tau$ va $M^1\tau$ urinmalari o'tkaziladi. Urinmalar orasidagi burchakni $\Delta\theta$ bilan, MM^1 yoy uzunligi ΔS bilan belgilanadi (142-shakl).

Quyidagi $\frac{\Delta\theta}{\Delta S} = k^*$ nisbatga egri chiziqning MM^1 qismidagi o'rtacha egriligi deyiladi. O'rtacha egrilikning $\Delta S \rightarrow 0$ dagi limitiga

(agar mavjud bo'lsa) egri chiziqning M nuqtadagi egriligi deyiladi, ya'ni

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{|\Delta \theta|}{\Delta S} = \frac{d\theta}{dS} = k. \quad (6.7.1)$$

θ burchakka egri chiziqning siljish burchagi deyiladi. Siljish burchagi egri chiziqning har xil nuqtalarida har xil bo'ladi. Egri chiziqning berilgan nuqtasidagi egriligi, elementar siljish burchagini elementar yoy uzunligiga nisbatiga teng, ya'ni

$$k = \frac{d\theta}{dS}. \quad (6.7.2)$$

R radiusli aylananing egriligi topiladi (143-shakl). M va M' nuqtalardagi urinmalar orasidagi siljish burchagi $d\theta$, aylananing unga mos markaziy burchagiga teng, shuning uchun

$$dS = R d\theta$$

bo'ladi. U holda

$$k = \frac{d\theta}{dS} = \frac{d\theta}{R d\theta} = \frac{1}{R}.$$

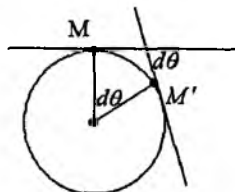
Demak, aylananing egriligi o'zgaras bo'lib, aylana radiusiga teskari miqdor ekan. Ixtiyoriy egri chiziqning egriligi umuman olganda o'zgaruvchi miqdordir. Egri chiziqning berilgan nuqtasidagi egriligiga teskari miqdorga egri chiziqning shu nuqtasidagi egrilik radiusi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{dS}{d\theta}. \quad (6.7.3)$$

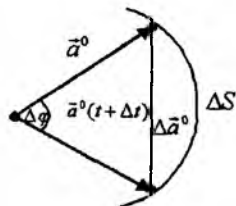
3. Birluk vektorning differensial. \vec{a}^0 birlik vektorning differensialini qaraymiz. Bu vektorni o'z-o'ziga skalar ko'paytiriladi, ya'ni

$$\vec{a}^0 \cdot \vec{a}^0 = 1.$$

Tenglikning ikkala tomoni vaqt bo'yicha differensiallanadi:



143-shakl.



144-shakl.

$$\frac{d\vec{a}^0}{dt} \cdot \vec{a}^0 + \vec{a}^0 \frac{d\vec{a}^0}{dt} = 0 \quad \text{yoki} \quad 2 \frac{d\vec{a}^0}{dt} \cdot \vec{a}^0 = 0.$$

Demak, birlik vektorning differensial vektorning o'ziga perpendikular bo'lar ekan.

144-shakldagi ΔS va $|\Delta \vec{a}^0|$ miqdorlar bir xil tartibli cheksiz kichik miqdorlar bo'lgani uchun $\Delta S \approx |\Delta \vec{a}^0|$. Bunga asosan:

$$\Delta S \approx |\Delta \vec{a}^0| = |\vec{a}^0| \Delta \varphi = \Delta \varphi \quad (6.7.3)$$

144-shakldagi uchburchakdan:

$$|\Delta \vec{a}^0| = 2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2} = \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \Delta \varphi. \quad \text{Bu tenglikning ikkala tomonini}$$

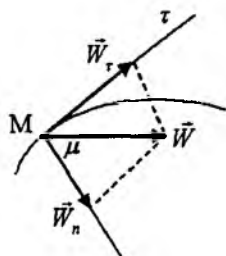
Δt ga bo'lib, $\Delta t \rightarrow 0$ nda ($\Delta \varphi \rightarrow 0$) limitiga o'tamiz:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{a}^0|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta t},$$

bundan

$$\frac{d\vec{a}^0}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{yoki} \quad |d\vec{a}^0| = d\varphi. \quad (6.7.4)$$

6.8. Harakati tabiiy usulda berilgan nuqtaning tezlanishi



146-shakl.

Agar nuqtaning harakati tabiiy usulda berilgan bo'lsa, (6.4.3) va (6.4.4) formulalarga asosan uning tezligi

$$\vec{v} = v_r \vec{r}^0 = v \vec{r}^0, \quad (6.8.1)$$

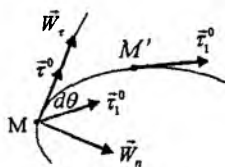
ko'rinishda tasvirlanadi, bunda $v = v_r = \dot{S}$ tezlik vektorining $M\vec{r}^0$ o'qdagi proyeksiyasi. (6.8.1) tenglikning ikkala tomoni vaqt bo'yicha differensiallanadi:

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}^0 + \frac{d\vec{\tau}^0}{dt} v. \quad (6.8.2)$$

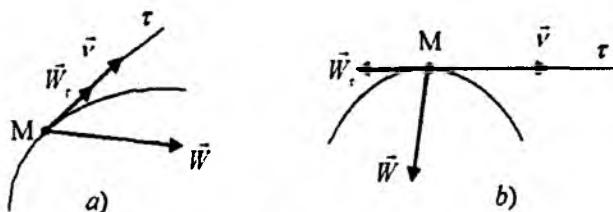
(6.8.2) formulaning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi $\frac{dv}{dt} \vec{\tau}^0$ trayektoriyaning urinmasi bo'ylab yo'nalgan vektorni ifodalaydi, shuning uchun unga tezlanishning urinma (tangensial) tuzuvchisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\vec{W}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}^0. \quad (6.8.3)$$

Ikkinchi qo'shiluvchini qaraymiz. Biz bilamizki, birlik vektorining differensiali uning o'ziga perpendikular. Demak, $v \frac{d\vec{\tau}^0}{dt}$ vektor $\vec{\tau}^0$ vektorga perpendikular bo'lib, bu vektor \vec{n}^0 bosh normal bo'ylab yo'nalgan va uzunma tekislikda yotadi.



145-shakl.



147-shakl.

(6.7.4) formulaga asosan $|d\vec{\tau}^0| = d\theta$ va $d\vec{\tau}^0 = d\theta \vec{n}^0$, natijada

$$\frac{d\vec{\tau}^0}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{n}^0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{v}{\rho}$$

bunda $\frac{dS}{dt} = v$, $\frac{d\theta}{dS} = \frac{1}{\rho}$, ρ egri chiziqning M nuqtadagi egrilik radiusi. Shunday qilib, $\frac{d\vec{\tau}^0}{dt} v$ trayektoriyaning bosh normal bo'y-

lab yoʻnalgan vektorni ifodalaydi. Unga tezlanishning normal tuzuvchisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\vec{W}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^0 \quad (6.8.4)$$

(6.8.3) va (6.8.4) ifodalarga asosan (6.8.2) formula quyidagi koʻrinishga keladi:

$$\vec{W} = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}^0 + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^0. \quad (6.8.5)$$

(6.8.3) va (6.8.4) formulalarga asosan tezlanish vektorining tabiiy koordinatalar sistemasi oʻqlaridagi proyeksiyalari

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}, \quad W_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad W_\sigma = 0 \quad (6.8.6)$$

boʻladi. Tezlanish vektorining moduli quyidagicha topiladi:

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (6.8.7)$$

\vec{W} tezlanish vektori bilan bosh normal orasidagi burchak quyidagiga teng:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{W_\tau}{W_n}. \quad (6.8.8)$$

Shunday qilib, agar nuqtaning harakati tabiiy usulda berilgan boʻlsa, (6.8.6), (6.8.7) va (6.8.8) formulalar yordamida nuqta tezlanishining proyeksiyalari, moduli va yoʻnalishi topiladi.

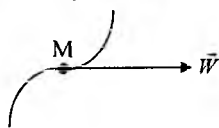
Tezlik vektori \vec{v} va tezlanish vektori \vec{W} larning proyeksiyalariga qarab, quyidagi hollar boʻlishi mumkin:

Agar $v = \frac{dS}{dt}$ va $W_\tau = \frac{dv}{dt}$ miqdorlar bir xil ishoraga ega boʻlsa, nuqtaning harakati tezlanuvchan (147- a shakl), har xil ishoraga ega boʻlsa, harakat sekinlanuvchan (147- b shakl) boʻladi.

Agar berilgan paytda $\frac{dv}{dt} = W_\tau = 0$ (bu hol nuqta tezligi maksimum yoki minimumiga erishganda sodir boʻladi) boʻlsa, nuqtaning

tezlanishi shu paytda bosh normal bo‘ylab yo‘nalgan bo‘ladi ($\vec{W} = \vec{W}_n$, $\mu = 0$). Agar $\frac{dv}{dt} = W_\tau = 0$ shart biror vaqt oralig‘ida bajarilsa, u holda tezlikning son qiymati bu vaqt oralig‘ida o‘zgarmaydi va harakat egri chiziqli tekis harakat bo‘ladi. Bu holda tezlanish vektori butun vaqt oralig‘ida bosh normal bo‘ylab yo‘nalgan bo‘ladi.

Agar vaqtning berilgan paytida $W_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ bo‘lsa, shu paytda nuqtaning tezlanishi urima bo‘ylab yo‘naladi ($\vec{W} = \vec{W}_\tau$, $\mu = 90^\circ$). Bunday hol yo nuqtaning tezligi shu paytda nolga teng bo‘lganda (nuqta shu paytda harakat yo‘nalishini o‘zgartiradi), yoki harakatlanuvchi nuqta trayektoriyaning egilish nuqtasida bo‘lganda ($\rho = \infty$) sodir bo‘ladi (148-shakl).



148-shakl.

Agar nuqta harakatda bo‘lib, $W_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ shart biror vaqt oralig‘ida bajarilsa, nuqta shu vaqt oralig‘ida to‘g‘ri chiziqli harakat qiladi.

Agar biror vaqt oralig‘ida nuqtaning to‘la tezlanishi nolga teng bo‘lsa, ($\vec{W} = 0$) bu vaqt oralig‘ida $W_\tau = 0$, $W_n = 0$ bo‘lib, nuqta tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan to‘g‘ri chiziqli tekis harakatda bo‘ladi.

6.9. Nuqtaning tekis va tekis o‘zgaruvchan harakati

Agar butun harakat davomida nuqtaning tezligi o‘zgarmasa, ya’ni $v = v_0 = const$ bo‘lsa, nuqtaning bu holdagi harakatiga egri chiziqli tekis harakat deyiladi. $\frac{dS}{dt} = v_0$ yoki $dS = v_0 dt$ tenglikni integrallab, egri chiziqli tekis harakat qonunini topish mumkin, ya’ni

$$S = S_0 + v_0 t, \quad (6.9.1)$$

bunda S_0 — nuqtaning boshlang'ich masofasi.

Agar butun harakat davomida nuqtaning urinma tezlanishi o'zgarmasa, ya'ni $W_\tau = a = const$ bo'lsa, nuqtaning bu holdagi harakatiga egri chizikli tekis o'zgaruvchi harakat deyiladi. $\frac{dv}{dt} = a$ yoki $dv = a dt$ tenglamani integrallab, nuqta tezligining o'zgarish qonuni topiladi:

$$v = v_0 + at, \quad (6.9.2)$$

bunda v_0 — nuqtaning boshlang'ich tezligi. $v = \frac{dS}{dt}$ tenglikni e'tiborga olib, (6.6.22) quyidagicha yoziladi:

$$\frac{dS}{dt} = v_0 + at \quad \text{yoki} \quad dS = (v_0 + at)dt.$$

Bu tenglikni integrallab, egri chizikli tekis o'zgaruvchan harakat qonunini topish mumkin, ya'ni

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (6.9.3)$$

Agar harakat to'g'ri chizikli va $W = a = const$ bo'lsa, nuqtaning bunday harakatiga to'g'ri chizikli tekis o'zgaruvchan harakat deyiladi:

$$\frac{dv}{dt} = W = a = const$$

demak,

$$v = v_0 + at, \quad v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at.$$

Bundan to'g'ri chizikli tekis o'zgaruvchan harakat qonuni topiladi:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (6.9.4)$$

6.10. Aylana bo'ylab harakatlanuvchi nuqtaning tezlanishi

Agar nuqta R radiusli aylana bo'ylab harakatlansa, nuqta tezligining miqdori quyidagicha topiladi:

$$v = R\omega.$$

Bu tenglikning ikkala tomonini vaqt bo'yicha differensiallab, nuqta urinma tezlanishi topiladi:

$$W_{\tau} = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon, \quad (6.10.1)$$

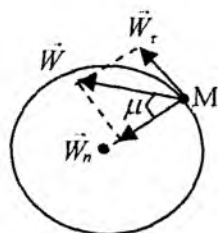
bunda

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

miqdorga R radiusli aylana bo'ylab harakat qilayotgan nuqtaning burchak tezlanishi deyiladi.

Endi nuqtaning normal tezlanishi topiladi. Biz ko'rgan edikki, aylananing egrilik radiusi shuning uchun (149-shakl)

$$W_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = R\omega^2 \quad (6.10.2)$$



149-shakl.

Tezlanish moduli

$$W = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (6.10.3)$$

W tezlanish aylananing radiusi bilan hosil qilgan μ burchak quyidagicha topiladi:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{W_{\tau}}{W_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (6.10.4)$$

Agar $v = \text{const}$ bo'lsa, nuqtaning aylana bo'ylab harakat tezlanishi aylana radiusi bo'ylab yo'nalgan bo'ladi va

$$W_{\tau} = \frac{dv}{dt} = 0.$$

6.11. Nuqta tezlanishining qutb koordinatalaridagi ifodasi

Nuqta tekis egri chiziq bo'ylab harakatlansin va harakat qonuni $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ko'rinishida berilgan bo'lsin. (6.4.17) formulaga asosan:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{r}^0 + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{p}^0.$$

Bu tenglikning ikkala tomoni t bo'yicha differensiallanadi:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{W} = \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{r}^0 + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{r}^0}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{p}^0 + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{p}^0 + r \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\vec{p}^0}{dt}. \quad (6.11.1)$$

$\frac{d\vec{p}^0}{dt}$ vektorining moduli va yo'nalishi topiladi.

\vec{p}^0 birlik vektor bo'lgani uchun $d\vec{p}^0 \perp \vec{p}^0$ bo'lib, \vec{p}^0 vektordan $d\vec{p}^0$ vektorga o'tish uchun vektorni soat miliga teskari yo'nalishda 90° ga burish kerak (150-shakl), undan tashqari

$|d\vec{p}^0| = d\varphi$. Natijada

$$\frac{d\vec{p}^0}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \vec{r}^0. \quad (6.11.2)$$

Shuningdek,

$$\frac{d\vec{r}^0}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{p}^0 \quad (6.11.3)$$

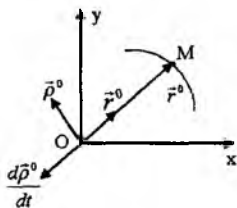
(6.11.2) va (6.11.3) ni (6.11.1) formulaga qo'yiladi:

$$\vec{W} = \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} \vec{r}^0 + \left\{ r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right\} \vec{p}^0. \quad (6.11.4)$$

(6.11.4) formulaning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi nuqtaning radius-vektori bo'ylab yo'nalgan vektorni ifodalaydi. Bu vektorga nuqta tezlanishining radial tuzuvchisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\vec{W}_r = \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} \vec{r}^0. \quad (6.11.5)$$

Ikkinchi qo'shiluvchi nuqta radiusiga perpendikular yo'nalgan vektorni ifodalaydi. Bu vektorni nuqta tezlanishining transversal tuzuvchisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:



150-shakl.

$$\vec{W}_p = \left(r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \vec{p}^0. \quad (6.11.6)$$

\vec{W}_p vektorining modulini quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$W_p = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right). \quad (6.11.7)$$

$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)$ miqdorni (6.10.12) formulaga asosan quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{dv_\sigma}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2}. \quad (6.11.8)$$

$\frac{d^2\sigma}{dt^2}$ miqdorga vektorial tezlanish deyiladi. (6.4.26) formulaga asosan biror markazga nisbatan

$$mom_0 \vec{v} = \vec{r} \times \vec{v} = 2 \frac{d\vec{\sigma}}{dt}.$$

Bu tenglikning ikkala tomoni vaqt bo‘yicha differensiallanadi:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \frac{d^2\vec{\sigma}}{dt^2}.$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} = 0$ va $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{W}$ bo‘lgani uchun

$$\vec{r} \times \vec{W} = 2 \frac{d^2\vec{\sigma}}{dt^2}$$

yoki

$$mom_0 \vec{W} = 2 \frac{d^2\vec{\sigma}}{dt^2}.$$

Demak, biror markazga nisbatan nuqta tezlanishining momenti, o‘sha markazga nisbatan ikkilangan sektorial tezlanishga teng bo‘lar ekan.

Nuqtaning harakati qutb koordinatalarida berilgan bo'lsin, ya'ni

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (6.11.9)$$

Nuqta tezlanishining proyeksiyalarini va (6.6.33) formulalardan foydalanib topish mumkin:

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad W_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \quad W_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \quad (6.11.10)$$

Tezlanishning moduli quyidagi formuladan topiladi:

$$W = \sqrt{W_r^2 + W_\varphi^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}. \quad (6.11.11)$$

6.12. Nuqta tezlanishini topishga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar. Masalalar

Nuqta tezlanishini topishga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi:

1. Nuqtaning harakat qonunini berilishiga qarab tegishli koordinatalar sistemasini tanlash kerak.

2. Nuqtaning harakati koordinatalar (dekart koordinatalari) usulida berilgan bo'lsa, tegishli formulalardan foydalanib, tezlanishning proyeksiyalari, moduli va yo'nalishi topadi.

3. Nuqtaning harakati tabiiy usulda berilgan bo'lsa, tegishli formuladan foydalanib tezlanishning proyeksiyalari, moduli va yo'nalishi topiladi.

4. Agar nuqtaning harakati qutb koordinatalarida berilgan bo'lsa, tezlanishning proyeksiyalari va moduli (6.11.10) va (6.11.11) formulalardan foydalanib topiladi.

1-masala. Nuqta $x=\cos 4t$, $y=\sin 4t$, $z=2t$ tenglamalarga asosan harakat qiladi, bunda uzunlik birligi uchun metr, vaqt sekunda

olingan. $t = \frac{\pi}{2} c$ bo'lgan paytda nuqta tezlanishining proeksiyalari, moduli va yo'nalishlari topilsin.

Yechish. Nuqtaning harakati dekart koordinatalarida berilgan. Tezlanishning proyeksiyalarini vaqtning funksiyasi ko'rinishida topiladi:

$$W_x = -16 \cos 4t; \quad W_y = -16 \sin 4t; \quad W_z = 0 \quad (a)$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{(-16 \cos)^2 + (-16 \sin 4t)^2} = 16m / s^2 \quad (b)$$

$$\cos(\vec{W}, \hat{x}) = \frac{W_x}{W} = \frac{-16 \cos 4t}{16} = -\cos 4t$$

$$\cos(\vec{W}, \hat{y}) = \frac{W_y}{W} = \frac{-16 \sin 4t}{16} = -\sin 4t; \quad (c)$$

$$\cos(\vec{W}, \hat{z}) = \frac{W_z}{W} = \frac{0}{16} = 0.$$

(a), (b) va (c) formulalarga $t = \frac{\pi}{2} c$ ni qo'yib, nuqta tezlanishi-ning proyeksiyalari, moduli va yo'naltiruvchi kosinuslari topiladi:

$$W_x = -16 \cos 2\pi = -16m / s^2, \quad W_y = -16 \sin 2\pi = 0, \quad W_z = 0;$$

$$W = 16 m/c^2; \quad \cos(\vec{W}, \hat{x}) = -1; \quad \cos(\vec{W}, \hat{y}) = 0; \quad \cos(\vec{W}, \hat{z}) = 0.$$

2-masala. M nuqta r radiusli aylana bo'ylab $W_\sigma = a = const$ urinma tezlanish bilan harakatlanadi. Nuqta boshlang'ich paytda M_0 holatda bo'lib, tezligi nolga teng. Vaqtning qaysi paytida normal tezlanishning miqdori urinma tezlanish miqdoriga teng bo'ladi, bu vaqt oralig'ida nuqta bosib o'tgan yoy uzunligi topilsin.

Yechish. Nuqtaning urinma tezlanishini topish formulasiga asosan:

$$W_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}. \quad (a)$$

Agar $W_\tau = a = const$ bo'lsa, (a) tenglamadan:

$$v_\tau = W_\tau t + C, \quad (b)$$

bunda C integrallash o'zgarishi bo'lib, u $t = 0$, $v_\tau = 0$ boshlang'ich shartdan topiladi, ya'ni $C = 0$. Natijada

$$v_\tau = at. \quad (c)$$

Nuqtaning normal tezlanishi quyidagi formula bilan topiladi:

$$W_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{a^2 t^2}{r}.$$

Normal va urima tezlanishlarining miqdorlari teng bo'lgan vaqtni topish uchun ularning miqdorlari tenglashtiriladi, ya'ni

$$\frac{a^2 t^2}{r} = a.$$

Bundan
$$t_1 = \sqrt{\frac{r}{a}}.$$

Nuqta tezligi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$v_\tau = \frac{dS}{dt} = at.$$

Buni integrallab

$$S = \frac{at^2}{2} + C_1$$

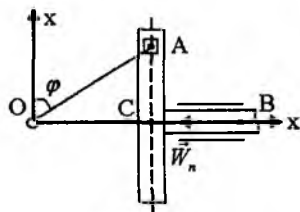
ni topiladi. C_1 o'zgarimasini $t=0$; $S=0$ boshlang'ich shartdan topiladi, ya'ni $C_1=0$. Natijada

$$S = \frac{at^2}{2}.$$

Bu tenglamaga $t=t_1$ ni qo'yib, o'tilgan yoy uzunligi topiladi, ya'ni

$$S = \frac{a}{2} t_1^2 = \frac{a}{2} \frac{r}{a} = \frac{r}{2}.$$

3-masala (O.E.Kepe 7.4.5). $OA=15\text{sm}$ bo'lsa, $t=5\text{c}$ bo'lgan paytda B nuqtaning tezlanishi topilsin, burchakning o'zgarish qonuni $\varphi = 4t$ (151-shakl).



151-shakl.

Yechish. B nuqta hamma vaqt Ox o'qi bo'ylab harakatlanadi.

Kulisaning hamma nuqtalari bir xil tezlanish bilan harakatlanadi, shuning uchun C nuqtaning tezlanishini topish yetari. Koordinatalar sistemasi 151-shaklda

ko'rsatilgan. C nuqtaning x koordinatasi topiladi. 151-shakldan:

$$x_C = OC = OA \sin \varphi \quad \text{yoki} \quad x_C = 15 \sin 4t \text{ sm}$$

Bundan ikki marta hosila olib, C nuqtaning yoki B nuqtaning tezlanishi topiladi:

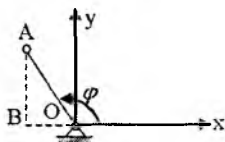
$$W_C = W_B = -240 \sin 4t.$$

Bunga $t = 5s$ ni qo'yiladi:

$$W_B = -240 \sin 1146^\circ \approx -240 \sin 66^\circ \approx -219 \frac{\text{sm}}{\text{s}^2} = -2,19 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

B nuqtaning tezlanishi O nuqtaga qarab yo'nalgan bo'ladi.

4-masala (O.E.Kepe 7.4.7). OA krivoshi pning holati $\varphi = 2t$ burchak bilan aniqlanadi. $OA = 1m$ bo'lsa, $t = 1s$ bo'lgan paytda A nuqta tezlanishining x o'qidagi proyeksiyasi topilsin (152-shakl).



152-shakl.

Yechish. Koordinatalar sistemasi 152-shaklda ko'rsatilgan. A nuqtaning x koordinatasi topiladi. 152-shakldan:

$$x = OB = OA \cos(180^\circ - \varphi) = -OA \cos \varphi.$$

yoki

$$x = -\cos 2t.$$

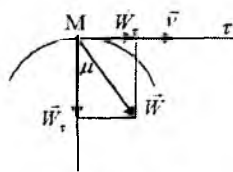
Bundan t bo'yicha ikki marta hosila olib, tezlanishning x o'qidagi proyeksiyasi topiladi, ya'ni

$$W_x = \ddot{x} = 4 \cos 2t \quad (a)$$

$t = 1s$ ni (a) formulaga qo'yiladi:

$$W_x = 4 \cos 2 \cdot 1 \approx 4 \cos 115^\circ = -4 \sin 25^\circ \approx -1,66 \text{ m/s}.$$

5-masala. M nuqta $S = ae^{\mu t}$ tenglamaga muvofiq harakatlanadi. Nuqtaning to'la tezlanishi bilan bosh normal orasidagi burchak o'zgarmas va $\mu = 30^\circ$ ga teng. Nuqtaning tezligi, urinma, normal va to'la tezlanishi hamda trayektoriyaning egrilik radiusi topilsin (153-shakl).



153-shakl.

Yechish. Berilgan harakat tenglamasidan foydalanib, tezlikning urinmadagi proyeksiyasi topiladi, ya'ni

Nuqtaning urinma tezlanishi quyidagiga teng:

$$W_r = \frac{dv_r}{dt} = ak^2 e^{kt} = k^2 S.$$

Trayektoriyaning bosh normali bilan to'la tezlanishi orasida burchak $\mu = 30^\circ$ bo'lganligi uchun tezlanishining moduli quyidagi tenglikdan topiladi:

$$W \cos(90^\circ - \mu) = W_r,$$

bundan

$$W = \frac{W_r}{\sin 30^\circ} = 2k^2 S.$$

Nuqtaning normal tezlanishi topiladi:

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_r^2} = \sqrt{3}k^2 S.$$

Trayektoriyaning egrilik radiusi quyidagi formuladan topiladi:

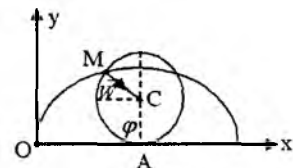
$$\rho = \frac{v^2}{W_n} = \frac{k^2 S^2}{\sqrt{3}k^2 S} = \frac{\sqrt{3}}{3} S = \frac{\sqrt{3}}{3} a e^{kt}.$$

Demak, nuqta proyeksiyasining egrilik radiusi vaqt o'tishi bilan cheksiz o'sadi.

6-masala (И.В.Мешчерский 12.17). Ox gorizontal o'q bo'ylab sirpanmasdan yumalovchi g'ildirak nuqtasi tezlanishining miqdori va yo'nalishi hamda trayektoriyasining egrilik radiusi topilsin; nuqta quyidagi tenglamalarga asosan sikloida chizadi:

$$x = 20 t - \sin 20t, \quad y = 1 - \cos 20t$$

(t —sekundlar, x, y —metrlar hisobida). Shuningdek, $t = 0$ bo'lganda egrilik radiusi ρ aniqlansin (154-shakl).



154-shakl.

Yechish. Nuqtaning berilgan harakat tenglamalaridan vaqt bo'yicha ikki marta hosila olib, nuqta tezlanishning proyeksiyalari topiladi, ya'ni

$$W_x = \ddot{x} = 400 \sin 20t, \quad W_y = \ddot{y} = 400 \cos 20t.$$

Tezlanishning moduli
$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = 400 m / s^2.$$

Endi tezlanishning yoʻnalishi topiladi:

$$\cos(\vec{W}, \hat{x}) = \frac{W_x}{W} = \frac{400 \sin 20t}{400} = \sin 20t,$$

$$\cos(\vec{W}, \hat{y}) = \frac{W_y}{W} = \frac{400 \cos 20t}{400} = \cos 20t.$$

Demak, tezlanish vektori MC boʻylab C markazga yoʻnalgan. Endi egrilik radiusi topiladi. Buning uchun W_τ topiladi:

$$W_i = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad v_x = \dot{x} = 20 - 20 \cos 20t, \quad v_y = 20 \sin 20t.$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{800(1 - \cos 20t)} = 40 \sin 10t.$$

$$W_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = 400 \sin 10t, \quad W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = 400 \cos 10t.$$

Normal tezlanishni topish formulasidan:

$$\rho = \frac{v^2}{W_n} = \frac{1600 \sin^2 10t}{400 \cos 10t} = 4 \sin 10t.$$

$t=0$ boʻlganda $\rho = 0$.

7-masala (И.В.Мешчерский 12.25). Nuqta $x=2\cos 4t$, $y=2\sin 4t$, $z=2t$ tenglamalar bilan ifodalangan vint harakatini qiladi, bunda uzunlik birligi uchun metr olingan. Trayektoriyaning egrilik radiusi ρ aniqlansin.

Yechish. Berilgan tenglamalardan foydalanib, nuqta tezligi va tezlanishning modullari topiladi:

$$v_x = \dot{x} = -8 \sin 4t; \quad v_y = \dot{y} = 8 \cos 4t, \quad v_z = 2.$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{64 \sin^2 4t + 64 \cos^2 4t + 4} = \sqrt{68} \text{ m/s}.$$

$$W_x = \ddot{x} = -32 \cos 4t, \quad W_y = -32 \sin 4t, \quad W_z = 0,$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = 32 \text{ m/s}^2.$$

$$v = \sqrt{68} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{const} \quad \text{boʻlgani uchun } W_\tau = \frac{dv}{dt} = 0.$$

Demak, nuqtaning to'la tezlanishi normal tezlanishga teng bo'lar ekan, ya'ni

$$W_n = W = 32 \frac{m}{s^2}.$$

Normal tezlanishni topish formulasidan foydalanib, trayektoriyaning egrilik radiusi topiladi, ya'ni

$$\rho = \frac{v^2}{W_n} = \frac{68 \frac{m^2}{s^2}}{32 \frac{m}{s^2}} = \frac{17}{8} m = 2 \frac{1}{8} m.$$

8-masala (И.В.Мещерский 12.26). Nuqta harakati qutb koordinatalarida $r = ae^{kt}$ va $\varphi = kt$ tenglamalar bilan berilgan, bunda a va k berilgan o'zgarmas miqdorlar. Nuqtaning trayektoriya tenglamasi, tezligi, tezlanishi va trayektoriyasining egrilik radiusi uning radius-vektori r ning funksiyasi sifatida aniqlansin.

Yechish. Nuqtaning berilgan harakat tenglamalariga asosan, nuqta trayektoriyasi $r = ae^\varphi$ logarifmik spiraldan iborat.

Nuqtaning tezligini topamiz. Buning uchun tezlikning qutb koordinatalaridagi proyeksiyalarini topiladi:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = ake^{kt}; \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = ake^{kt},$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{2}ake^{kt} = \sqrt{2}kr.$$

Endi nuqta tezlanishi topiladi. Buning uchun W_r va W_φ lar topiladi:

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2; \quad W_r = ak^2e^{kt} - ak^2e^{kt} = 0,$$

$$W_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 2ak^2e^{kt} = 2k^2r, \quad W = \sqrt{W_r^2 + W_\varphi^2} = 2k^2r.$$

Nuqta trayektoriyasining egrilik radiusi topiladi:

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} = \sqrt{2}k\dot{r} = \sqrt{2}k^2ae^{kt} = \sqrt{2}k^2r_3,$$

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = \sqrt{4k^4r^2 - 2k^4r^2} = \sqrt{2}k^2r.$$

Normal tezlanishni topish formulasiga asosan:

$$\rho = \frac{v^2}{W_n} = \frac{2k^2 r^2}{\sqrt{2}k^2 r} = \sqrt{2}r.$$

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Nuqtaning tezlanishi dekart koodinatalar sistemasida qanday topiladi?
2. Qanday tekislikka yopishma tekislik deyiladi?
3. Qanday tekislikka normal tekislik deyiladi?
4. Trayektoriyaning bosh normal qaysi tekisliklarning kesishish chizig'idan iborat?
5. Nuqta trayektoriyasi qaysi tekislikda yotadi?
6. Egri chiziqning egriligi yoki egrilik radiusi qanday topiladi?
7. Tabiiy koodinatalar sistemasida nuqtaning tezlanishi qanday topiladi?
8. Nuqta tezlanishining radial va transversal tuzuvchilari qanday topiladi?
9. Nuqtaning tezlanishi qutb koodinatalar sistemasida qanday topiladi?

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Poyezd 72 km/soat tezlik bilan harakat qiladi, tormoz qilinganda u $0,4 \text{ m/s}^2$ ga teng sekinlasha oladi. Poyezdning stansiyaga kelmasdan qancha vaqt oldin va stansiyadan qancha narida tormozlay boshlash kerakligi topilsin.

2. Nuqta tezligining proyeksiyalari quyidagi tenglamalar bilan berilgan: $v_x = 0,2t^2$, $v_y = 3m/s$. $t = 2,5s$ bo'lgan paytda nuqtaning urinma tezlanishini toping.

3. Nuqtaning tezligi dekart koodinatalar sistemasida quyidagi ko'rinishda berilgan: $v = 1,5\vec{i} + 1,5\vec{j} + 0,5t^2\vec{k}$. $t = 2c$ bo'lgan paytda nuqtaning urinma tezlanishi topilsin.

4. Nuqta tezlanishining proyeksiyalari quyidagi ifodalar bilan berilgan: $W_x = 0,8tm/s^2$, $W_y = 0,8m/s^2$. Agar $t_0 = 0$ paytda $v_0 = 0$ bo'lsa, $t = 2s$ bo'lganda nuqtaning urinma tezlanishini toping.

5. Nuqta radiusi $r = 7m$ bo'lgan aylana bo'ylab $s = 0,3t^2$ qonunga asosan harakatlanadi. $W_n = 1,5 \text{ m/s}^2$ bo'ladigan vaqtni toping.

6. Nuqta $r = 20m$ radiusli aylana bo'ylab $v = e^t$ tezlik bilan harakat qiladi. $W_n = 3m / s^2$ bo'ladigan vaqtni toping.

7. Polzun to'g'ri chiziqli yo'naltiruvchi bo'ylab $W_x = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} tm / s^2$ tezlanish bilan harakat qiladi. Agar polzunning boshlang'ich tezligi $v_{0x} = 2\pi m / s$, boshlang'ich holati esa polzunning koordinata boshi deb qabul qilingan o'rta holatiga to'g'ri kelsa, polzun harakatining tenglamasi topilsin.

8. Poyezdning boshlang'ich tezligi 54 km/soat bo'lib, birinchi 30s da u 600m yo'l bosadi. Poyezd radiusi $R = 1km$ bo'lgan aylanma yo'lda tekis o'zgaruvchan harakat qiladi deb hisoblab, uning 30s oxiridagi tezligi va tezlanishi aniqlansin.

9. Radiusi $R = 800m$ bo'lgan aylana yoyi bo'ylab poyezd tekis sekinlashuvchan harakat qiladi va $s = 800m$ yo'l bosadi. Uning boshlang'ich tezligi $v_0 = 54km / soat$ va oxirgi tezligi $v = 18km / soat$. Poyezdning yoy boshidagi va oxiridagi to'la tezlanishi, shuningdek shu yoy bo'ylab qancha vaqt harakatlanishi aniqlansin.

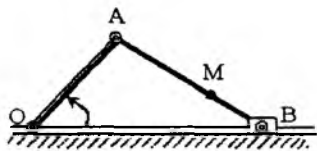
10. Nuqta $s = \frac{g}{a^2} (at + e^{-at})$ qonunga muvofiq to'g'ri chiziqli harakat qiladi, bunda a va g o'zgarmas miqdorlar. Nuqtaning boshlang'ich tezligi, shuningdek, uning tezlanishi tezlikning funksiyasi sifatida aniqlansin.

11. Ishga tushirish davrida dizel krivoshipi palesning harakati $x = 75 \cos 4t^2$, $y = 75 \sin 4t^2$ (x, y —santimetrlar, t —sekundlar hisobida) ko'rinishdagi tenglamalar bilan berilgan. Palesning tezligi, urinma va normal tezlanishi topilsin.

12. $x = -a \sin 2\omega t$, $y = -\sin \omega t$ tenglamalarga muvofiq lissaju shaklini chizuvchi nuqta trayektoriyasining $x=y=0$ holatidagi egrilik radiusi topilsin.

13. Agar $r = \ell = 60\text{sm}$, $MB = \frac{1}{3}\ell$,

$\varphi = 4\pi t$ (t —sekundlar hisobida) bo'lsa, krivoship-polzun mexanizmi shatunidagi M nuqtaning trayektoriyasi topilsin, tezlanishi va trayektoriyasining egrilik radiusi aniqlansin $AB = \ell$, $OA = r$.



13-masala.

14. M nuqta vint chizig'i bo'ylab harakatlanadi. Silindrik koordinatalar sistemasida uning harakat tenglamalari $r = a$, $\varphi = kt$, $z = yt$ ko'rinishga ega. Nuqta tezlanishining silindrik koordinatalar sistemasi o'qlardagi proyeksiyalari hamda tezlanishning urinma, normal tashkil etuvchilari va vint chizig'ining egrilik radiusi topilsil.

6.13. Egri chiziqli koordinatalar

Koordinatalar, harakat tenglamalari, egri chiziq, tekislik, sirt, sferik va silindrik koordinatalar.

M nuqtaning dekart koordinatalari x, y, z bo'lsin. x, y, z o'zgaruvchilarning bir qiymatli differensiallanuvchi

$$q_1 = f_1(x, y, z), \quad q_2 = f_2(x, y, z), \quad q_3 = f_3(x, y, z) \quad (6.13.1)$$

funksiyalarni qaraymiz. x, y, z o'zgaruvchilarni (6.8.1) tenglamalardan bir qiymatli aniqlash mumkin bo'lsa, ya'ni

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3) \quad (6.13.2)$$

ko'rinishdagi bir qiymatli almashtirish mavjud bo'lsa, q_1, q_2, q_3 o'zgaruvchilarni M nuqtaning koordinatalari sifatida qabul qilish mumkin. Haqiqatan ham (x, y, z) koordinatalarning har qanday qiymatlari sistemasiga (6.13.1) tenglamalar bilan aniqlangan (q_1, q_2, q_3) qiymatlar mos keladi. (q_1, q_2, q_3) parametrlarga M nuqtaning egri chiziqli koordinatalari deyiladi. (q_1, q_2, q_3) o'zgaruvchilarni har bir xususiy qiymatlariga (6.13.2) tenglamalar bilan aniqlangan

$$x = c_1, \quad y = c_2, \quad z = c_3 \quad (6.13.3)$$

ko‘rinishdagi koordinat tekisligi mos keladi. Bu tekisliklar asosiy koordinat tekisliklariga parallel bo‘lib, ular (c_1, c_2, c_3) nuqtada kesishadi. Xuddi shunday (x, y, z) o‘zgaruvchilarning har bir xususiy qiymatlariga q_1, q_2, q_3 larni

$$q_1 = \alpha, \quad q_2 = \beta, \quad q_3 = \gamma \quad (6.13.4)$$

ko‘rinishdagi qiymatlari mos keladi. (6.13.4) tenglamalar fazoda biror sirtning ifodalaydi. Haqiqatan ham q_1, q_2, q_3 larning o‘rniga (6.8.1) ifodalarni qo‘yamiz, u holda

$$f_1(x, y, z) = \alpha, \quad f_2(x, y, z) = \beta, \quad f_3(x, y, z) = \gamma \quad (6.13.5)$$

tenglamalarni hosil qilamiz. (6.13.5) tenglamalar dekart koordinatalar sistemasida qandaydir sirtlarni ifodalaydi. Shunday qilib, nuqtaning (x, y, z) dekart koordinatalari (6.13.1) ko‘rinishidagi tenglamalar yordamida q_1, q_2, q_3 parametrlar bilan bog‘langan bo‘lsa, q_1, q_2, q_3 parametrlar boshqa bir koordinatalar sistemasiga nisbatan o‘sha nuqtaning koordinatalari bo‘ladi. (q_1, q_2, q_3) koordinatalar sistemasida koordinata tekisliklari rolini (6.13.4) tenglamalar bilan aniqlangan sirtlar o‘ynaydi. Koordinata chiziqlari esa (6.13.3) tenglamalar bilan aniqlangan sirtlarni ikkitalab kesishishidan hosil bo‘ladigan egri chiziqlar bo‘ladi. Shuning uchun (q_1, q_2, q_3) sistemaga egri chiziqli koordinatalar sistemasi deyiladi. Shunday qilib, (q_1, q_2, q_3) koordinatalar sistemasida nuqtaning o‘rni (6.13.4) ko‘rinishdagi sirtlarning kesishish nuqtasi yoki koordinata egri chiziqlarini kesishish nuqtasi sifatida topiladi.

Egri chiziqli koordinatalar sistemalaridan eng ko‘p qo‘llaniladiganlari sferik va silindrik koordinatalar sistemalaridir.

6.13.1. Sferik koordinatalar sistemasi

Sferik koordinatalar sistemasida M nuqtaning holati r, φ, θ parametrlar bilan aniqlanadi: r - M nuqtaning O koordinatalar boshiga nisbatan radius-vektori, bunga qutb radiusi deyiladi, φ -qutb radiusi bilan Oxy tekisligi orasidagi burchak, θ -qutb radiusi va z o‘qi orqali o‘tuvchi tekislik bilan Oxz tekisligi orasidagi

ikki yoqli burchak (155-shakl). z o'qiga qutb o'qi deyiladi. 155-shakldan foydalanib, M nuqtaning dekart koordinatalari bilan sferik koordinatalar orasidagi bog'lanishlarni topish mumkin:

$$x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \cos \theta \sin \varphi, \quad z = r \sin \theta. \quad (6.13.6)$$

Sferik koordinatalar sistemasida koordinat sirtlari quyidagi tenglamalar bilan aniqlanadi:

$$r = a, \quad \varphi = \beta, \quad \theta = \gamma. \quad (6.13.7)$$

bunda α, β, γ lar o'zgaruvchi parametrlar. Bu parametrlar quyidagi sirtlarni tasvirlaydi:

$r = \alpha$ — markazi O nuqtada bo'lgan α radiusli sfera;

$\alpha = \beta$ — qutb o'qi va M nuqta orqali o'tuvchi yarim tekislik;

$\theta = \gamma$ uchi O nuqtada bo'lgan va uchidagi burchagi $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ga teng hamda

o'qi z o'qi bo'lgan doiraviy konus (155-shakl).

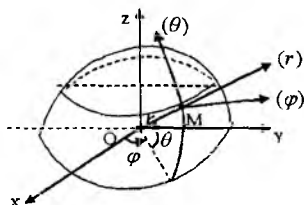
Koordinat chiziqlari, koordinat sirtlarini kesishish chiziqlari bo'ladi, ya'ni

$$(a) \begin{cases} r = \alpha; \\ \varphi = \beta, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \varphi = \beta; \\ \theta = \gamma, \end{cases} \quad (c) \begin{cases} \theta = \gamma; \\ r = \alpha. \end{cases} \quad (6.13.8)$$

(a) — α radiusli meridian aylanasi;

(b) — r radius bilan ustma-ust tushuvchi OM to'g'ri chiziq;

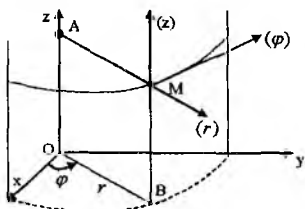
(c) — $\alpha \cos \varphi$ parallel aylanasi.



155-shakl.

6.13.2. Silindrik koordinatalar sistemasi

Silindrik koordinatalar sistemasida nuqtaning holati r, φ, z parametrlar bilan aniqlanadi: r - Oz o'qidan M nuqtagacha bo'lgan masofa, φ — Oxz tekisligi bilan M nuqta va z o'qi orqali o'tuvchi tekislik orasidagi burchak (156-shakl). Nuqtaning silindrik koordinatalari bilan dekart koordinatalari orasidagi bog'lanishni 156-shakldan foydalanib topish mumkin:



156-shakl.

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (6.13.9)$$

Silindrik koordinatalar sistemasida koordinat sirtlari quyidagi tenglamalar bilan beriladi:

$$r = \alpha, \quad \varphi = \beta, \quad z = \gamma. \quad (6.13.10)$$

Bu tenglamalar quyidagi sirtlarni tasvirlaydi:

$r = \alpha$ — z o'qi bo'lgan, α radiusli silindr;

$\varphi = \beta$ — z o'qi va M nuqta orqali o'tuvchi tekislik;

$z = \gamma$ — M nuqtadan z o'qiga perpendikular bo'lib o'tuvchi tekislik.

Koordinat chiziqlari

$$(a) \begin{cases} r = \alpha; \\ \varphi = \beta, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \varphi = \beta; \\ z = \gamma, \end{cases} \quad (c) \begin{cases} z = \gamma; \\ r = \alpha. \end{cases} \quad (6.13.11)$$

Sirtlarni kesishish chiziqlari bo'ladi, ya'ni

(a) — BM to'g'ri chiziq,

(b) — AM to'g'ri chiziq,

(c) — M nuqtadan o'tuvchi va radiusi r ga teng aylana.

Sferik va silindrik koordinatalar sistemalarida koordinat chiziqlari to'g'ri burchak ostida kesishadi, shuning uchun bu sistemalar ortogonal sistemalar bo'ladi.

6.14. Tezlikning egri chizikli koordinatalardagi ifodasi

(q_1, q_2, q_3) egri chizikli koordinatalar sistemasining ba'zi

vektorlari $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bilan belgilanadi $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ vektori bilan \vec{e}_i ba'zi

vektorlari har bir nuqtada koordinat chiziqlarining urunmalari bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.

Umumiy holda ba'zi vektorlari ortogonal bo'lmasligi mumkin. Ba'zi vektorlardan foydalanib, quyidagi munosabatlarni yozamiz:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| \vec{e}_i, \quad (6.14.1)$$

yoki

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = h_i \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.14.2)$$

bunda $h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|$ skalar miqdorga Lambl koeffitsiyenti deyiladi.

Dekart koordinatalar sistemasida nuqtaning radius-vektori quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (6.14.3)$$

bunda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -lar dekart koordinatalar sistemasining birlik vektorlari (6.14.3) dan

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \vec{k}. \quad (6.14.4)$$

Natijada

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}. \quad (6.14.5)$$

Nuqtaning q_1, q_2, q_3 egri chiziqli koordinatalari vaqtdan bog'liq bo'lgani uchun uning radius-vektori ham vaqtga bog'liq bo'ladi, ya'ni

$$\vec{r} = \vec{r}[q_1(t), q_2(t), q_3(t)].$$

Tezlikning aniqlanishi va differensiallash qoidasiga asosan

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3, \quad (6.14.6)$$

bunda $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ ($i = 1, 2, 3$) larga umumlashgan tezliklar deyiladi.

(6.14.2) va (6.14.4) formulalardan foydalanib, tezlik vektori uchun quyidagi formula yoziladi:

$$\bar{v} = h_1 \dot{q}_1 \bar{e}_1 + h_2 \dot{q}_2 \bar{e}_2 + h_3 \dot{q}_3 \bar{e}_3 = \sum_{i=1}^3 h_i \dot{q}_i \bar{e}_i. \quad (6.14.7)$$

Natijada tezlik vektorining egri chiziqli koordinatalardagi proyeksiyalari uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$v_i = h_i \dot{q}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.14.8)$$

Tezlik vektorining moduli uchun qo'iydagi formulani hosil qilamiz:

$$v = \sqrt{(h_1 \dot{q}_1)^2 + (h_2 \dot{q}_2)^2 + (h_3 \dot{q}_3)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (h_i \dot{q}_i)^2} \quad (6.14.9)$$

Hususiyl holda sferik va silindrik koordinatalar sistemasi ortogonal. Ular uchun tezlik (6.14.9) dan foydalanib topiladi.

Sferik koordinatalar sistemasida:

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \theta.$$

(6.14.5) dan foydalanib h_i lar topiladi:

$$h_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 = \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \varphi) + \cos^2 \theta = 1,$$

$$h_2 = r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi = r^2 \cos^2 \theta,$$

$$h_3 = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta = r^2.$$

Natijada tezlikning moduli uchun quyidagi ifoda olinadi:

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}. \quad (6.14.10)$$

Silindrik koordinatalar sistemasida: $q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z.$

$a_{ii} (i = 1, 2, 3).$ h_i koeffitsientlar topiladi, ya'ni

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r^2, \quad h_3 = 1.$$

Natijada silindrik koordinatalarda tezlikning moduli quyidagiga teng bo'ladi:

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}. \quad (6.14.12)$$

6.15. Tezlanishning egri chiziqli koordinatalardagi ifodasi

Harakatlanuvchi nuqtaning radius-vektori dekart koordinatalarini ham egri chiziqli koordinatalarning ham funksiyasi bo'ladi, ya'ni

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) \quad \text{yoki} \quad \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3).$$

O nuqtani shunday tanlanadi uning uchun egri chiziqli koordinatalar nolga teng bo'lsin. $\vec{r} = \vec{r}(q_1, 0, 0)$ deb q_1 uchun koordinat chizig'ining tenglamasini hosil qilamiz. Xuddi shunday $\vec{r} = \vec{r}(0, q_2, 0)$ va $\vec{r} = \vec{r}(0, 0, q_3)$ deb q_2 va q_3 koordinatalar uchun ham koordinat chiziqlari tenglamalarini hosil qilamiz.

Fazoning har bir nuqtasidan shu nuqtada kesishuvchi uchta koordinat chizig'ini o'tkazish mumkin. Har bir koordinat chizig'i bo'ylab faqat bitta koordinata o'zgaradi, qolgan ikkitasi o'zgarmas bo'lib qoladi.

Radius-vektordan olingan $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ xusisiy hosilalar qaraladi.

Koordinat egri chiziqlari radius-vektorni godograflari bo'lib, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ vektorlar qaralayotgan nuqtada koordinat chiziqlarining urinmalari bo'ylab yo'nalgan vektorni ifodalaydi. Qaralayotgan nuqtada $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ vektorni o'sish tomoniga qarab yo'nalgan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlarga bazis vektorlari deyiladi.

Umumiy holda bazis vektorlari ortogonal bo'lmasligi ham mumkin. Bazis vektorlaridan foydalanib, quyidagini yozish mumkin:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| \vec{e}_i. \quad (6.15.1)$$

Quyidagicha belgilash kiritiladi:

$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|$ — skalar miqdorga Lamé koeffitsienti deyiladi.

Nuqtaning radius-vektorini dekart koordinatalari orqali

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (6.15.2)$$

ko'rinishda yoziladi. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lar dekart koordinatalar sistemasi o'qlari bo'ylab yo'nalgan birlik vektorlar. (6.15.2) munosabatdan:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \vec{k}$$

va demak

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}. \quad (6.15.3)$$

Bazis vektorlari ortogonal bo'lgan koordinatalar sistemasiga ortogonal koordinatalar sistemasi deyiladi. Ortogonal koordinatalar sistemasida tezlanishning koordinatalar sistemasi o'qlaridagi proyeksiyalarini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$W_i = \vec{W} \cdot \vec{e}_i = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.15.4)$$

Bazis vektorlari

$$\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

ko'rinishda yoziladi. Natijada (6.15.4) tenglikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$W_i = \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{h_i} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right). \quad (6.15.5)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_i} \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} \quad (6.15.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_i} \quad \text{yoki} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{v}}}{\partial q_i} \quad (6.15.7)$$

(6.15.6) va (6.15.7) Lagranj ayniyatlarining o'rinli ekanligi isbotlanadi:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3, \quad (6.15.8)$$

bunda $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ ga umumlashgan tezlik deyiladi. $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ hosila \dot{q}_i ga bog'liq emas, shuning uchun (6.15.8) dan

$$\frac{\partial \vec{v}}{d\dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}.$$

(6.15.8) ni q_i umumlashgan koordinata bo'yicha differensiallanadi:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_3 \partial q_i} \dot{q}_3 \quad (6.15.9)$$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ ni \dot{q}_i umumlashgan tezliklarga bog'liqligini e'tiborga olib, uni vaqt bo'yicha differensiallanadi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial q_3} \dot{q}_3 \quad (6.15.10)$$

Aralash hosilalarning tengligini e'tiborga olsak, (6.15.9) va (6.15.10) tengliklarning o'ng tomonlari bir xil, demak chap tomonlari ham teng, ya'ni

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}.$$

(6.14.3) va (6.14.4) ayniyatlarni qo'llab quyidagi almashtirish bajariladi:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) - \vec{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.15.11)$$

$\vec{v}^2 = v^2$ ni e'tiborga olib, $T = \frac{v^2}{2}$ funksiyani kiritib, (6.15.11)

dan tezlanishning proyeksiyasi uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$W_i = \frac{1}{h_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \quad (i=1,2,3). \quad (6.15.12)$$

6.15.1. Tezlanishning sferik koordinatalardagi ifodasi

Sferik koordinatalar sistemasi ortogonal koordinatalar sistema-sidir. Nuqtaning sferik koordinatalari bilan dekart koordinatalari quyidagicha bog‘lanadi:

$$x = r \cos \theta \cos \varphi; \quad y = r \cos \theta \sin \varphi; \quad z = r \sin \theta \quad (6.15.13)$$

(6.14.1) formuladan foydalanib Lyame koeffitsentlari hisoblanadi:

$$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2} = \sqrt{(\cos \theta \cos \varphi)^2 + (\cos \theta \sin \varphi)^2 + \sin^2 \theta} = 1;$$

$$h_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2} = \sqrt{(-r \cos \theta \sin \varphi)^2 + (r \cos \theta \cos \varphi)^2} = r \cos \theta.$$

$$h_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2} = \sqrt{(-r \sin \theta \cos \varphi)^2 + (-r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (r \cos \theta)^2} = r.$$

Tezlikning sferik koordinatalar sistemasi o‘qlaridagi proyeksiyalari

$$v_i = h_i \cdot \dot{q}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

formuladan foydalanib topiladi, ya’ni

$$v_r = h_r \dot{r} = \dot{r}, \quad v_\varphi = h_\varphi \dot{\varphi} = r \dot{\varphi} \cos \theta, \quad v_\theta = h_\theta \dot{\theta} = r \dot{\theta}. \quad (6.15.14)$$

Tezlikning kvadrati va T funksiya uchun quyidagi ifodalari topiladi:

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 + v_\theta^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2;$$

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2).$$

Tezlanishning sferik koordinatalar sistemasi o'qlaridagi proyeksiyalari (6.14.9) formulalardan foydalanib topiladi:

$$\left. \begin{aligned} W_r &= \frac{1}{h_r} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} \right] = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta - r\dot{\theta}^2; \\ W_\varphi &= \frac{1}{h_\varphi} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right] = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi} \cos^2 \theta); \\ W_\theta &= \frac{1}{h_\theta} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) + r\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta. \end{aligned} \right\} (6.15.15)$$

Tezlanish vektori uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\vec{W} = W_r \vec{e}_r + W_\varphi \vec{e}_\varphi + W_\theta \vec{e}_\theta.$$

Tezlanish vektorining moduli $W = \sqrt{W_r^2 + W_\varphi^2 + W_\theta^2}$ formuladan topiladi.

6.15.2. Tezlanishning silindrik koordinatalaridagi ifodasi

Silindrik koordinatalar sistemasi ham ortogonal koordinatalar sistemasidir. Nuqtaning dekart koordinatalari quyidagi formulalar bilan bog'langan:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (6.15.16)$$

(6.14.2) formulalardan foydalanib, Lamé koeffitsiyentlari hisoblanadi:

$$\begin{aligned} h_r &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1, \\ h_\varphi &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2} = \sqrt{(-r \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2} = r, \\ h_z &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right)^2} = 1. \end{aligned} \quad (6.15.17)$$

Tezlikning silindrik koordinatalar sistemasi o'qlaridagi proyeksiyalari

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}. \quad (6.15.18)$$

Bularga asosan

$$v^2 = \dot{r}^2 + 2^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2,$$

$$T = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

Endi tezlanishning silindrik koordinatalar sistemasini o'qlaridagi proyeksiyalari topiladi:

$$W_r = \frac{1}{h_r} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} \right] = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2;$$

$$W_\varphi = \frac{1}{h_\varphi} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right] = r\ddot{\varphi}; \quad (6.15.19)$$

$$W_z = \frac{1}{h_z} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \ddot{z}.$$

Tezlanish vektori va moduli uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$\vec{W} = W_r \vec{e}_r + W_\varphi \vec{e}_\varphi + W_z \vec{e}_z = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + r\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z,$$

$$W = \sqrt{W_r^2 + W_\varphi^2 + W_z^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + r^2\ddot{\varphi}^2 + \ddot{z}^2}.$$

6.16. Egri chiziqli koordinatalar sistemasida nuqta tezligi va tezlanishini topishga doir uslubiy tavsiyalar.

Masalalar

1-masala (И.В.Менчкерский 12.16). Nuqta sfera va silindrning kesishish chizig'i bo'ylab $r=R$, $\varphi = \frac{kt}{2}$, $\theta = \frac{kt}{2}$ tenglamalarga ko'ra harakatlanadi (r, φ, θ — sferik koordinatalar). Nuqta tezligining sferik koordinatalar sistemasini o'qlaridagi proyeksiyalari va moduli topilsin.

Yechish. Nuqtaning dekart koordinatalari bilan sferik koordinatalarini bog'lovchi tenglamalarni olamiz, ya'ni

$$x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \cos \theta \sin \varphi, \quad z = r \sin \theta.$$

(6.14.5) formulardan foydalanib, h_i lar hisoblanadi:

$$h_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1,$$

$$h_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = (-r \cos \theta \sin \varphi)^2 + (r \cos \theta \cos \varphi)^2 = r^2 \cos^2 \varphi,$$

$$h_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = (-r \sin \theta \cos \varphi)^2 + (-r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (r \cos \theta)^2 = r^2.$$

Endi tezlikning proyeksiyalari topiladi: $v_r = h_1 \dot{r} = 0$,

$$v_\varphi = h_2 \dot{\varphi} = \frac{Rk}{2} \cos \varphi,$$

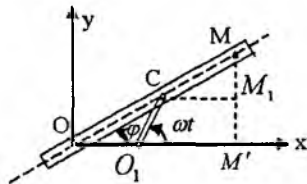
$$v_\theta = h_3 \dot{\theta} = \frac{Rk}{2}.$$

Tezlikning moduli

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\frac{R^2 k^2}{4} \cos^2 \theta + \frac{R^2 k^2}{4}} = \frac{Rk}{2} \sqrt{1 + \cos^2 \left(\frac{kt}{2}\right)}.$$

2-masala (И.В.Мещерский 12.29).

Uzunligi $\frac{a}{2}$ bo'lgan O_1S krivoship O_1 o'q atrofida o'zgarmas ω burchak tezlik bilan aylanadi (157-shakl). C nuqtada krivoship



bilan O_1 aylanish o'qidan $\frac{a}{2}$ masofada

157-shakl.

turgan, har doim O nuqta atrofida aylanib-tebranuvchi mufta orqali o'tadigan AB lineyka sharnir bilan bog'langan. O nuqtani qutb sifatida qabul qilib, qutb koordinatalarida lineykaning C sharnirdan a masofadagi M nuqtasining harakat tenglamalari, trayektoriyasi, tezlik va tezanishi topilsin, boshlang'ich paytda burchak $\varphi = \angle COO_1 = 0$.

Yechish. M nuqtaning O qutb nuqtasiga nisbatan radius-vektorini vaqtning funksiyasi sifatida topiladi:

$$r = OC + CM.$$

OO_1S uchburchak teng yonli bo'lgani uchun $OC = 200_1$,
 $\cos \varphi = a \cos \varphi$, $CM = a$.

Natijada $r = a + a \cos \varphi = a(1 + \cos \varphi)$. (a)

ωt uchburchakning tashqi burchagi, shuning uchun $2\varphi = \omega t$, $\varphi = \frac{\omega t}{2}$.

Bu a tenglamaga qo'yiladi:

$$r = a\left(1 + \cos \frac{\omega t}{2}\right), \quad \varphi = \frac{\omega t}{2}. \quad (b)$$

(a) tenglama nuqta harakatining qutb koordinatalaridagi tenglamalarini ifodalaydi, (a) tenglama trayektoriya tenglamasini ifodalaydi.

Endi nuqtaning tezligi topiladi. Buning uchun tezlikning qutb koordinatalaridagi proyeksiyalari topiladi:

$$v_r = \dot{r} = -\frac{a\omega}{2} \sin \frac{\omega t}{2}; \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = \frac{a\omega}{2} \left(1 + \cos \frac{\omega t}{2}\right), \quad \dot{\varphi} = \frac{\omega}{2};$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \frac{a\omega}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\omega t}{2} + \left(1 + \cos \frac{\omega t}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{a\omega}{2} \sqrt{2\left(1 + \cos \frac{\omega t}{2}\right)} = a\omega \cos \frac{\omega t}{4} \end{aligned}$$

Tezlanishning proyeksiyalari

$$W_2 = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{a\omega^2}{4} \cos \frac{\omega t}{2} - \frac{a\omega^2}{4} \left(1 + \cos \frac{\omega t}{2}\right) = -\frac{a\omega^2}{4} \left(1 + 2 \cos \frac{\omega t}{2}\right);$$

$$W_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -\frac{a\omega^2}{2} \sin \frac{\omega t}{2}, \quad (\ddot{\varphi} = 0);$$

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{W_r^2 + W_\varphi^2} = \sqrt{\frac{a^2\omega^4}{16} \left(1 + 4 \cos \frac{\omega t}{2} + 4 \cos^2 \frac{\omega t}{2} + 4 \sin^2 \frac{\omega t}{2}\right)} = \\ &= \frac{a\omega^2}{4} \sqrt{5 + 4 \cos \frac{\omega t}{2}}. \end{aligned}$$

3-masala (И.В.Мещерский 12.39). M nuqta vint chizig'ini bo'ylab harakatlanadi. Silindrik koordinatalar sistemasida uning

harakat tenglamalari $r = a$, $\varphi = Kt$, $z = vt$ ko'inishiga ega. Nuqta tezlanishining silindrik koordinatalar sistemasi o'qlaridagi proyeksiyalari hamda tezlanishning urinma va normal tashkil etuvchilari hamda vint chizig'ining egrilik radiusi topilsin.

Yechish. (6.15.2) formulalarga asosan silindrik koordinatalar sistemasi uchun Lamé koeffitsiyentlari quyidagilarga teng bo'ladi:

$$h_r = 1, \quad h_\varphi = r, \quad h_z = 1.$$

$v_i = h_i \dot{q}_i$ formulalardan foydalanib, tezlikning silindrik koordinatalar sistemasidagi proyeksiyalar topiladi, ya'ni

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r}, & v_\varphi &= r\dot{\varphi}, & v_z &= \dot{z}, \\ \dot{r} &= 0, & \dot{\varphi} &= K, & \dot{z} &= v. \end{aligned}$$

Natijada tezlikning proyeksiyalari quyidagilarga teng bo'ladi:

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = rK, \quad v_z = v.$$

Bularga asosan

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2 = z^2 k^2 + v^2. \quad (\text{a})$$

T funksiyaning ko'inishi quyidagicha bo'ladi:

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

Endi tezlanishning silindrik koordinatalar sistemasi o'qlaridagi proyeksiyalari topiladi:

$$W_r = \frac{1}{h_r} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} \right] = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -aK^2, \quad \ddot{r} = 0.$$

$$W_\varphi = \frac{1}{h_\varphi} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right] = r\ddot{\varphi} = 0, \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

$$W_\theta = \frac{1}{h_\theta} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] = \ddot{z} = 0.$$

Tezlanishning moduli

$$W = \sqrt{W_r^2 + W_\varphi^2 + W_\theta^2} = ak^2.$$

(a) tengliklardan ko‘rinib turibdiki, $\vartheta = \text{const}$ va demak $W_r = \frac{dv}{dt} = 0$.

Shunday qilib, nuqtaning to‘la tezlanishi uning normal tezlanishiga teng bo‘lar ekan, ya’ni

$$W = W_n = ak^2.$$

Normal tezlanishni topish formulasidan foydalanib, vint chizig‘ining egrilik radiusi topiladi:

$$\rho = \frac{v^2}{W_n} = \frac{a^2 k^2 + v^2}{ak^2}.$$

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Nuqtaning harakat tenglamalari $\varphi = 0,5t$, $z = 0,5t$ qutb koordinatalarida berilgan. Qutb radiusi $r = 2m$ ga teng bo‘lgan paytda nuqta tezligining transversal tuzuvchisi sm/s larda topilsin.

2. Nuqtaning harakat tenglamalari $\varphi = t^2$, $r = 0,5t^2$ qutb koordinatalarida berilgan. Qutb burchagi $\varphi = 2,25$ rad bo‘lgan paytda nuqtaning radial tezligi topilsin.

3. Nuqtaning harakat tenglamalari $\varphi = 2t$, $r = t^2$ qutb koordinatalarida berilgan. $t_1 = 2c$ bo‘lgan paytda nuqta tezligining moduli topilsin.

4. M nuqtaning harakat tenglamalari silindrik koordinatalar sistemasida $r = a$, $\varphi = kt$, $z = vt$ ko‘rinishiga ega. M nuqta tezligining silindrik koordinatalar sistemasidagi proyeksiyalari topilsin.

5. M nuqta aylana bo‘ylab $r = 2a \cos \frac{kt}{2}$, $\varphi = \frac{kt}{2}$ tenglamalarga asosan harakatlanadi (r, φ – qutb koordinatalari). M nuqta tezligining

qutb koordinatalar sistemasi o'qlaridagi proyeksiyalari, tezlik godogrofini chizuvchi M_1 nuqta tezligining proyeksiyalari topilsin.

6. Nuqta harakati qutb koordinatalarida $r = ae^{kt}$ va $\varphi = kt$ tenglamalar bilan berilgan, bunda a va k berilgan o'zgarmas miqdorlar. Nuqtaning trayektoriya tenglamasi, tezligi, tezlanishi va trayektoriyasining egrilik radiusi uning radius-vektori r ning funksiyasi sifatida aniqlansin.

7. M nuqta $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sfera bilan $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$

silindrning kesishish chizig'i bo'ylab harakatlanadi. Nuqtaning sferik koordinatalar sistemasidagi harakat tenglamalari

$$r = R, \quad \varphi = \frac{kt}{2}, \quad \theta = \frac{kt}{2}$$

ko'rinishga ega. Nuqta tezlanishining sferik koordinatalaridagi proyeksiyalari va moduli topilsin.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Qanday koordinatalarga egri chiziqli koordinatalar deyiladi?
2. Koordinata tekisliklari deganda nimani tushunasiz?
3. Koordinata chiziqlari deganda nimalarni tushunasiz?
4. Qanday sistemalarga ortogonal sistemalar deyiladi?
5. Egri chiziqli koordinatalarda nuqtaning tezligi qanday topiladi?
6. Egri chiziqli koordinatalarda nuqta tezlanishining proyeksiyalari qanday topiladi?
7. Ortogonal koordinatalar sistemasida nuqtaning tezlanishi qanday topiladi?

VII BOB. QATTIQ JISMNING ILGARILANMA VA QO'ZG'ALMAS O'Q ATROFIDAGI AYLANMA HARAKATI

Mazkur bobda mexanik sistema va qattiq jismlar kinematikasining asosiy tushunchalari va ta'riflari bilan tanishamiz. Shuningdek, qattiq jismning oddiy harakatlari: ilgarilanma, qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatlariga doir nazariyalar qichqacha keltirilgan.

7.1. Asosiy tushunchalar va ta'riflar.

Mexanik sistema va qattiq jismning erkinlik darajasi

Tayanch iboralar: moddiy nuqta, mexanik sistema, bog'lanishlar, o'zaro bog'langan va bog'lanmagan koordinatalar.

Har bir nuqtasining harakati qolgan nuqtalarning holati va harakatiga bog'liq bo'lgan moddiy nuqtalar to'plamiga mexanik sistema deyiladi. Mexanik sistema n ta moddiy nuqtadan tashkil topgan bo'lsin. Tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan har bir nuqtasining fazodagi holati uchta koordinata bilan aniqlanadi, shuning uchun mexanik sistemaning o'sha sanoq sistemasiga nisbatan holati $3n$ ta.

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$$

koordinata bilan aniqlanadi.

Sistema nuqtalarining holati va harakatiga chek qo'yuvchi sabablarga **bog'lanishlar** deyiladi. Sistema nuqtalarining faqat holatiga chek qo'yuvchi bog'lanishga geometrik yoki chekli bog'lanish deyiladi. Sistema nuqtalarining nafaqat holatiga, balki tezligiga ham chek qo'yuvchi bog'lanishga kinematik yoki differensial bog'lanish deyiladi. Bog'lanishlar analitik usulda sistema nuqtalarining koordinatalari, tezliklari va vaqt orasidagi bog'lanishini ifodalovchi tenglamalar bilan beriladi.

Geometrik bog'lanish tenglamalarida sistema nuqtalarining koordinatalari va vaqt qatnashadi, ya'ni

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; t) = 0. \quad (7.1.1)$$

Kinematik bog‘lanish tenglamalarida sistema nuqtalarining koordinatalari va tezliklarining proyeksiyalari hamda vaqt qantashadi, ya‘ni

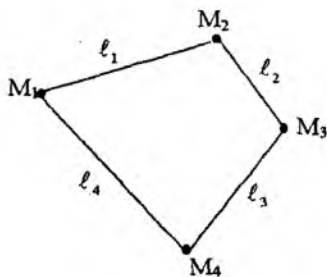
$$\varphi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t) = 0. \quad (7.1.2)$$

Sistemaga x ta geometrik bog‘lanish qo‘yilgan bo‘lsin, ya‘ni

$$f_\nu(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; t) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, k) \quad (7.1.3)$$

$3n$ ta koordinata k ta tenglama bilan o‘zaro bog‘langan, demak o‘zaro bog‘lanmagan koordinatalar soni $3n - k$ ga teng. Bu o‘zaro bog‘lanmagan koordinatalarga sistemasining umumlashgan koordinatalari deyiladi. O‘zaro bog‘lanmagan koordinatalar soniga **sistemasining erkinlik darajasi** deyiladi.

Ixtiyoriy ikkita nuqtasi orasidagi masofa o‘zgarmas bo‘lgan mexanik sistemaga absolyut qattiq jism yoki qattiq jism deyiladi. Qattiq jismning erkinlik darajasi oltiga teng. Masalan, qattiq jismning bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtasi olinadi (158-shakl).



158-shakl.

To‘qqizta koordinata bu nuqtalar orasidagi masofaning o‘zgarmasligini ifodalovchi uchta tenglama bilan bog‘langan, ya‘ni

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \ell_1 = \text{const},$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = \ell_2 = \text{const},$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = \ell_3 = \text{const}.$$

O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan koordinatalar soni $3 \cdot 3 - 3 = 6$. Demak, uchta nuqtaning holati 6 ta koordinata bilan aniqlanadi. Agar bu nuqtalarga to‘rtinchi M_4 nuqtani qo‘shib olsak, 12 ta koordinata hosil bo‘ladi. Har ikkitasining orasidagi masofani o‘zgarmasligini ifodalovchi tenglamalar soni 6 ta, ya‘ni M_1M_2 ,

$M_1M_3, M_1M_4, M_2M_3, M_2M_4, M_3M_4 = \text{const.}$ Demak, 12 ta koordinata 6 ta tenglama bilan o'zaro bog'langan, o'zaro bog'lanmagan koordinatalar soni 3·4—6-6 ga teng. Bundan shunday xulosa qilish mumkinki, fazoda qattiq jismning holati bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtasining holati bilan aniqlanadi.

Qattiq jismning har qanday harakatini ikkita asosiy harakatga keltirish mumkin: ilgarilanma va aylanma harakatlar.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Mexanik sistemaga ta'rif bering.
2. Bog'lanish ta'rifini keltiring va tahlil qiling.
3. Qanday bog'lanishga geometrik bog'lanish deyiladi?
4. Qanday bog'lanishga kinematik bog'lanish deyiladi?
5. Mexanik sistemaning erkirlik darajasi deganda nimani tushunasiz?

7.2. Qattiq jismning ilgarilanma harakati

Tayanch iboralar: *harakat, harakat tenglamasi, harakat trayektoriyasi, tezlik va tezlanish.*

Qattiq jismning harakati davomida unga mahkamlangan to'g'ri chiziq kesmasi ixtiyoriy paytida o'zining boshlang'ich holatiga parallelligicha qolsa, uning bunday harakatiga ilgarilanma harakat deyiladi.

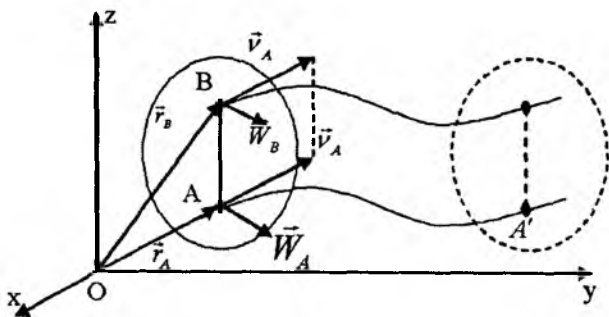
Ilgarilanma harakatdagi qattiq jism nuqtalarining trayektoriyalari umumiy holda parallel egri chiziqlar bo'lishi mumkin. Ilgarilanma harakat xossalarini quyidagi teorema bilan xarakterlash mumkin.

Teorema. Ilgarilanma harakatdagi qattiq jism hamma nuqtalarining trayektoriyalari, tezlik va tezlanishlari bir xil bo'ladi.

Qattiq jismning ixtiyoriy ikkita A va B nuqtasining harakatini qaraymiz (159-shakl).

159-shaklga asosan quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB} \quad (7.2.1)$$



159-shakl.

Qattiq jismning ta'rifiga asosan \overline{AB} vektorining moduli o'zgarmas, ilgarilanma harakatning ta'rifiga asosan bu vektorning yo'nalishi ham o'zgarmas bo'ladi. Ilgarilanma harakatning ta'rifidan yana shunday xulosa qilish mumkinki, A nuqtaning trayektoriyasini o'ziga parallel ravishda $|\overline{AB}|$ masofaga ko'chirsa, B nuqta trayektoriyasi bilan ustma-ust tushadi.

(7.18.1) tenglikning ikkala tomoni vaqt bo'yicha differensiallanadi, ya'ni

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt} \quad (7.2.2)$$

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B, \quad \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A. \quad \overline{AB} \text{ vektorining ham moduli, ham yo'na-}$$

lishi o'zgarmas bo'lgani uchun $\frac{d(\overline{AB})}{dt} = 0$. Natijada (7.18.2)

tenglik quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A \quad (7.2.3)$$

(7.18.3) (7.2.3.)tenglikning ikkala tomonini vaqt bo'yicha

differensiallab, $\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{W}_B$, $\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{W}_A$ larni e'tiborga olib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$M_1M_3, M_1M_4, M_2M_3, M_2M_4, M_3M_4 = \text{const.}$ Demak, 12 ta koordinata 6 ta tenglama bilan o'zaro bog'langan, o'zaro bog'lanmagan koordinatalar soni 3-4—6-6 ga teng. Bundan shunday xulosa qilish mumkinki, fazoda qattiq jismning holati bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtasining holati bilan aniqlanadi.

Qattiq jismning har qanday harakatini ikkita asosiy harakatga keltirish mumkin: ilgarilanma va aylanma harakatlar.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Mexanik sistemaga ta'rif bering.*
2. *Bog'lanish ta'rifini keltiring va tahlil qiling.*
3. *Qanday bog'lanishga geometrik bog'lanish deyiladi?*
4. *Qanday bog'lanishga kinematik bog'lanish deyiladi?*
5. *Mexanik sistemaning erkinlik darajasi deganda nimani tushunasiz?*

7.2. Qattiq jismning ilgarilanma harakati

Tayanch iboralar: *harakat, harakat tenglamasi, harakat trayektoriyasi, tezlik va tezlanish.*

Qattiq jismning harakati davomida unga mahkamlangan to'g'ri chiziq kesmasi ixtiyoriy paytida o'zining boshlang'ich holatiga parallelligicha qolsa, uning bunday harakatiga ilgarilanma harakat deyiladi.

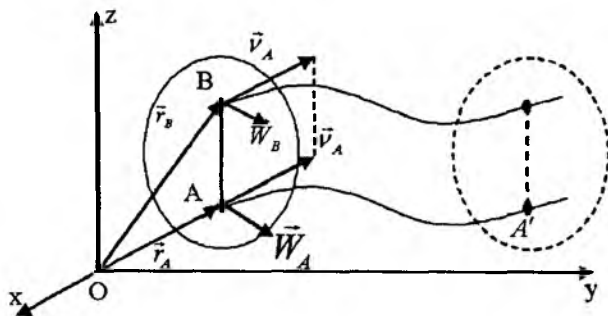
Ilgarilanma harakatdagi qattiq jism nuqtalarining trayektoriyalari umumiy holda parallel egri chiziqlar bo'lishi mumkin. Ilgarilanma harakat xossalarini quyidagi teorema bilan xarakterlash mumkin.

Teorema. Ilgarilanma harakatdagi qattiq jism hamma nuqtalarining trayektoriyalari, tezlik va tezlanishlari bir xil bo'ladi.

Qattiq jismning ixtiyoriy ikkita A va B nuqtasining harakatini qaraymiz (159-shakl).

159-shaklga asosan quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB} \quad (7.2.1)$$



159-shakl.

Qattiq jismning ta'rifiga asosan \overline{AB} vektorining moduli o'zgarmas, ilgari lanma harakatning ta'rifiga asosan bu vektorning yo'nalishi ham o'zgarmas bo'ladi. Ilgari lanma harakatning ta'rifidan yana shunday xulosa qilish mumkinki, A nuqtaning trayektoriyasini o'ziga parallel ravishda $|\overline{AB}|$ masofaga ko'chirsa, B nuqta trayektoriyasi bilan ustma-ust tushadi.

(7.18.1) tenglikning ikkala tomoni vaqt bo'yicha differensiallanadi, ya'ni

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt} \quad (7.2.2)$$

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B, \quad \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A. \quad \overline{AB} \text{ vektorning ham moduli, ham yo'na-}$$

lishi o'zgarmas bo'lgani uchun $\frac{d(\overline{AB})}{dt} = 0$. Natijada (7.18.2)

tenglik quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A \quad (7.2.3)$$

(7.18.3) (7.2.3.) tenglikning ikkala tomonini vaqt bo'yicha

differensiallab, $\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{W}_B$, $\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{W}_A$ larni e'tiborga olib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A. \quad (7.2.4)$$

A va B nuqtalar qattiq jismning ixtiyoriy nuqtalari bo'lgani uchun (7.2.3) va (7.2.4) tengliklardan quyidagi xulosa kelib chiqadi: qattiq jismning ilgari lanma harakati vaqtida uning hamma nuqtalarining trayektoriyalari, tezlik va tezlanishlari bir bo'ladi.

Agar qattiq jism nuqtalarining tezliklari vaqtning faqat bitta paytida teng bo'lib, qolgan paytlarda teng bo'lmasa, jismning shu paytdagi harakatiga oniy ilgari lanma harakat deyiladi. Oniy ilgari lanma harakatdagi jism nuqtalarining tezlanishlari umumiy holda teng bo'lmasligi mumkin.

Qattiq jismning ilgari lanma harakatini uning ixtiyoriy bitta nuqtasining harakati bilan to'laligicha xarakterlash mumkin. Jismning ilgari lanma harakati uning bitta nuqtasining harakat qonuni bilan beriladi, ya'ni

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (7.2.5)$$

(7.2.5) tenglamalar qattiq jismning ilgari lanma harakat tenglamalarini ifodalaydi.

7.3. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati

Tayanch iboralar: *harakat, harakat tenglamasi, trayektoriya, burchak tezlik, burchak tezlanish, tekis va tekis o'zgaruvchan harakat.*

7.3.1. Burchak tezlik va burchak tezlanish

Qattiq jismning butun harakati davomida uning ikkita nuqtasi qo'zg'almasdan qolsa, uning bunday harakatiga qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat deyiladi. Qo'zg'almas nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa aylanish o'qi deyiladi (160-shakl).

A va B nuqtalar qattiq jismning qo'zg'almas nuqtalari bo'lsa, Oz o'q jismning aylanish o'qi bo'ladi. Qattiq jismning

aylanish o'qi fazoda ixtiyoriy yo'nalishga ega bo'lishi mumkin. Aylanish o'qining ustida yotgan hamma nuqtalar qo'zg'almas bo'ladi. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi qattiq jism nuqtalarining trayektoriyalari aylanish o'qiga perpendikular tekisliklarda yotuvchi aylanalardan iborat bo'ladi. Bu aylanalarning markazlari aylanish o'qi ustida yotadi.

Qattiq jismning aylanish o'qi orqali qo'zg'almas Π_0 tekisligi va jismga mahkamlangan Π tekisliklari o'tkaziladi. Boshlang'ich paytda bu tekisliklar ustma-ust tushsin. Aylanuvchi jismning ixtiyoriy t paytdagi holatini bu tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchak bilan aniqlash mumkin. φ burchakka jismning aylanish burchagi deyiladi.

Agar φ burchak t vaqtning ikki marta differensiallanuvchi

$$\varphi = f(t) \quad (7.3.1)$$

funksiyasi ko'rinishida berilgan bo'lsa, qattiq jismning ixtiyoriy paytdagi holatini aniqlash mumkin. (7.19.1) tenglama qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat tenglamasini ifodalaydi.

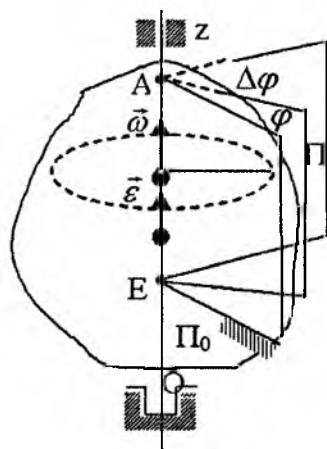
Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi qattiq jismning erkinlik darajasi birga teng, chunki uning ixtiyoriy paytdagi holatini bitta aylanish burchagi bilan aniqlash mumkin.

Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatini xarakterlash uchun burchak tezlik va burchak tezlanish tushunchalari kiritiladi.

Qattiq jism Δt vaqt oralig'ida $\Delta\varphi$ burchakka burilsin (160-shakl).

$$\omega^* = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (7.3.2)$$

miqdorga jismning $\Delta\varphi$ vaqt oralig'idagi o'rtacha burchak tezligi deyiladi.



160shakl.

O'rtacha burchak tezlik ω^* ning $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limitiga qattiq jismning t paytidagi algebraik burchak tezligi deyiladi, ya'ni

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (7.3.3)$$

Umuman olganda jismning burchak tezligi vaqtning differensiallanuvchi funksiyasi bo'lishi mumkin. Biror Δt vaqt oralig'ida jismning burchak tezligi $\Delta \omega$ miqdoriga o'zgarsin:

$$\varepsilon^* = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad (7.3.4)$$

miqdorga jismning Δt vaqt oralig'idagi o'rtacha burchak tezlanishi deyiladi. ε^* ning $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limitiga jismning t paytdagi algebraik burchak tezlanishi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (7.3.5)$$

Burchak radianda o'lchansa, burchak tezlik va burchak tezlanishlarning o'lchamlari quyidagicha bo'ladi:

$$[\omega] = \text{burchak} / \text{vaqt} = \text{rad} / \text{c} = \text{c}^{-1}$$

$$[\varepsilon] = \text{burchak} / (\text{vaqt})^2 = \text{rad} / \text{c}^2 = \text{c}^{-2}.$$

Algebraik burchak tezlik va burchak tezlanishlar musbat ham, manfiy ham bo'lishi mumkin. Agar jism soat strelkasi yo'nalishida aylansa, $\omega < 0$ bo'ladi. Agar jismning aylanishi tezlanuvchan bo'lsa, $\varepsilon > 0$; sekinlanuvchan bo'lsa, $\varepsilon < 0$ bo'ladi.

Agar $\dot{\varphi} > 0$, $\ddot{\varphi} > 0$ bo'lsa, jismning harakati musbat yo'nalishidagi tezlanuvchan harakat; $\dot{\varphi} > 0$ va $\ddot{\varphi} > 0$ bo'lsa, harakat musbat yo'nalishidagi sekinlanuvchan harakat; $\dot{\varphi} < 0$ va $\ddot{\varphi} > 0$ bo'lsa, harakat manfiy yo'nalishdagi tezlanuvchan harakat bo'ladi.

$\omega = \dot{\varphi}$ va $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ miqdorlarining ishoralari va miqdorlariga qarab jismning harakat yo'nalishini aniqlash mumkin, shuning

uchun ham jismning burchak tezligi va burchak tezlanishi vektor kattaliklar bo'lad.

$\bar{\omega}$ burchak tezlik vektori jismning aylanish o'qi bo'ylab, bu vektor uchidan qaraganda jism soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalishida aylansa $\bar{\omega}$ vektorning yo'nalishi musbat, soat strelkasi bo'yicha aylansa, $\bar{\omega}$ ning yo'nalishi manfiy bo'ladi. Burchak tezlik va burchak tezlanish vektorlarining moduli algebraik burchak tezlik va algebraik burchak tezlanishlarning absolut qiymatlariga teng.

Burchak tezlik vektori aylanish o'qining ixtiyoriy nuqtasiga qo'yilishi mumkin, ya'ni bu vektor ozod vektor hisoblanadi (160-shakl).

Burchak tezlanish vektori ham jismning aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'lib. agar harakat tezlanuvchan bo'lsa, burchak tezlik vektori bilan bir xil, harakat sekinlanuvchan bo'lsa, burchak tezlik vektoriga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi. Burchak tezlanish vektori aylanish o'qining ixtiyoriy nuqtasiga qo'yilgan bo'lishi mumkin, ya'ni burchak tezlanish vektori ham ozod vektor.

Agar jismning butun harakati davomida $\omega = \text{const}$ bo'lsa, uning bunday harakatiga tekis aylanma harakat deyiladi. Agar boshlang'ich ($t = 0$) paytda $\varphi = \varphi_0$ bo'lsa, tekis aylanma harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (7.3.6)$$

Agar jismning butun harakati davomida $\varepsilon = \text{const}$ bo'lsa, uning bu holdagi harakatiga tekis o'zgaruvchan aylanma harakat deyiladi. Tekis harakat qonuni

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} t^2 \quad (7.3.7)$$

ko'rinishida bo'ladi. φ_0 — jismning boshlang'ich burchag tezligi. Tekis o'zgaruvchan harakatda burchak tezligining o'zgarishi qonuni

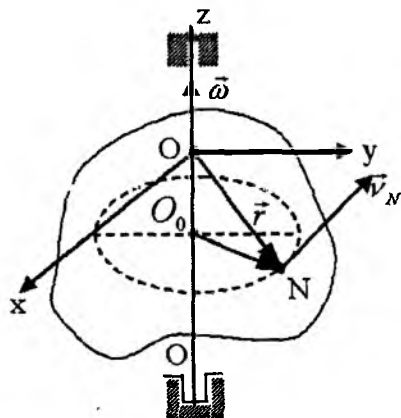
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad (7.3.8)$$

ko'rinishida bo'ladi.

7.3.2. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi qattiq jism nuqtalarining tezlik va tezlanishlari

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtalari markazlari aylanish o'qida bo'lgan aylanalar bo'ylab harakatlanadi, shuning uchun ixtiyoriy N -nuqtasining tezligi aylana bo'ylab harakatlanuvchi nuqtaning tezligi kabi topiladi, ya'ni

$$v_N = O_0N \cdot \omega \quad (7.3.9)$$



161-shakl.

bunda O_0N — jismning aylanish o'qidan N nuqtagacha bo'lgan eng qisqa masofa (161-shakl). Jism nuqtalarining tezliklari trayektoriya (aylana)larining urinmalari bo'ylab yo'nalgan bo'ladi va demak, aylanish radiusiga perpendikular bo'ladi.

Ko'rsatish mumkiniki, tezlik vektorining moduli va yo'nalishi

$$\vec{v}_N = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (7.3.10)$$

vektorning moduli va yo'nalishi bilan bir xil bo'ladi. Haqiqatan ham, \vec{v}_N vektor ham, $\vec{\omega} \times \vec{r}$

vektor ham $\vec{\omega}$ va \vec{r} vektorlar tekisligiga perpendikular va nuqta trayektoriyasining urinmasi bo'ylab aylanish tomoniga qarab yo'nalgan bo'ladi:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot r \sin(\vec{\omega}, \vec{r}),$$

161-shaklga asosan: $r \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) = O_0N$.

Bunga asosan:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = O_0N \cdot \omega.$$

Bunga asosan va vektorlarining modullari ham teng.

O nuqta aylanish o'qining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin va $\vec{r} = O\vec{N}$. U holda

$$\vec{v}_N = \overline{mom}_N(\vec{\omega}) = \overline{NO} \times \vec{\omega} = -\overline{ON} \times \vec{\omega} = -\vec{r} \times \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

yoki

$$\vec{v}_N = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (7.3.11)$$

(7.3.11) formulaga Eylér formulasi deyiladi.

Demak, $\vec{\omega} \times \vec{r}$ moduli va yo'nalishi bo'yicha N nuqta tezligini to'la aniqlaydi.

O nuqtani koordinatalar sistemasini boshi deb olib, Z o'qini aylanish o'qi bo'ylab yo'naltiriladi (161-shakl). U holda $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$ va (7.3.11) formulani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}. \quad (7.3.12)$$

Bundan

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0. \quad (7.3.13)$$

(7.3.13) formulalar jism nuqtalari tezliklarining koordinatalarini topish formulalarini ifodalaydi. (7.3.13) formulalarning ko'rinishi $Oxyz$ koordinatalar sistemasida qo'zg'almas bo'lganda ham, jismga mahkamlangan bo'lganda ham o'zgarmaydi. Demak, tezlikning proyeksiyalari qo'zg'almas koordinatalar sistemasidan qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga o'tishiga nisbatan **kovariant** bo'lar ekan.

(7.3.11) formulaning ikkala tomoni vaqt bo'yicha differensiallanadi:

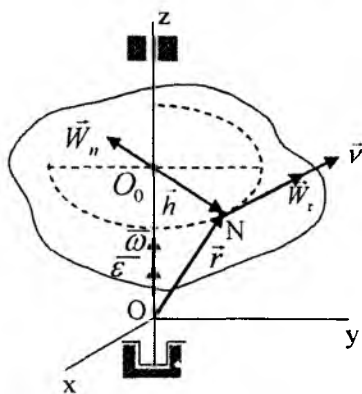
$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$; $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ larni e'tiborga olib, quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$\vec{W} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (7.3.14)$$

(7.3.14) tenglikning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchining moduli

$$|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = \varepsilon r \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}) = \varepsilon h$$



162-shakl.

ga teng, bu esa aylana bo'ylab harakatlanuvchi nuqta urinma tezlanishining moduli bilan bir xil. $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ vektorning yo'nalishi ham urinma tezlanishining yo'nalishi bilan bir xil (162-shakl). Demak, $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ vektor N nuqtaning urinma tezlanishini ifodalaydi, ya'ni

$$\vec{W}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \quad (7.3.15)$$

(7.3.14) tenglikning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchini qaraymiz:

$$|\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega v \sin(\vec{\omega}, \vec{v}).$$

$\vec{\omega}$ va \vec{v} vektorlar o'zaro perpendikular va $v = h\omega$ bo'lgani uchun yuqoridagi tenglikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$|\vec{\omega} \times \vec{v}| = h\omega^2.$$

$\vec{\omega} \times \vec{v}$ vektorning yo'nalishi normal tezlanishning yo'nalishiga parallel va N nuqtadan aylanish o'qiga qarab yo'nalgan, shuning uchun

$$\vec{W}_n = \vec{h}\omega^2, \quad (7.3.16)$$

bunda \vec{h} vektor aylanish o'qidari N nuqtaga tomon yo'nalgan. Demak, (7.3.14) formula nuqtaning to'la tezlanishini ifodalaydi.

Urinma va normal tezlanishlarning modullari quyidagicha hisoblanadi:

$$W_t = h\varepsilon, \quad W_n = h\omega^2. \quad (7.3.17)$$

Tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan (162-shakl) $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$,

$\varepsilon_r = \varepsilon$ (ε -algebraik burchak tezlanish) va $\vec{W}_n = -\omega^2 \vec{O_0N}$ deb olsak, (7.3.15) va (7.3.16) formulalarga asosan:

$$\vec{W} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \overline{O_0 N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ o & o & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} - \omega^2 \overline{O_0 N}. \quad (7.3.18)$$

Bundan tezlanishning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari topiladi:

$$W_x = -\varepsilon y - \omega^2 x, \quad W_y = \varepsilon x - \omega^2 y, \quad W_z = 0. \quad (7.3.19)$$

Bu formulalar ham qo'zg'almas koordinatalar sistemasidan qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga o'tishga nisbatan kovariant.

7.4. Qattiq jismning ilgari lanma va qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatiga doir masalalar yechish bo'yica uslubiy tavsiyalar. Masalalar

Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatiga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi:

Birinchi tur masalalar — qattiq jismning aylanma harakat tenglamasi berilganda uning burchak tezligi, burchak tezlanishi, nuqtalarning chiziqli tezlik va tezlanishlarini topish.

1. Koordinatalar sistemasini shunday tanlash kerakki, o'qlarning bittasi, masalan, Z o'qi jismning aylanishi o'qi bilan ustma-ust tushsin.

2. Burchakning o'zgarish qonunidan foydalanib, burchak tezlik va burchak tezlanishlarning aylanish o'qidagi proyeksiyalari topiladi.

3. Burchak tezlik va burchak tezlanishlarni topilgan qiymatlaridan foydalanib, jism nuqtalarining chiziqli tezligi, normal va urinma tezlanishlari topiladi.

4. Urinma va normal tezlanishlar topilgandan keyin jism nuqtalarining to'la tezlanishlari topiladi.

Ikkinchi tur masalalarda aylanma harakat burchak tezligi yoki burchak tezlanishi berilganda, jismning harakat tenglamasi, nuqtalarning tezlik va tezlanishlarini topish.

1. Burchak tezlanishni ifodalovchi differensial tenglamani integrallab, jismning burchak tezligi topiladi. Integrallash o'zgarmlari boshlang'ich shartlardan topiladi.

2. Burchak tezlikni ifodalovchi differensial tenglamani integrallab, jismning aylanma harakat tenglamasi topiladi.

3. Burchak tezlik va burchak tezlanishlarning berilgan qiymatlaridan foydalanib, jism nuqtalarining tezliklari, urinma va normal tezlanishlari topiladi.

4. Urinma va normal tezlanishlarning topilgan qiymatlaridan foydalanib, jism nuqtalarining to'la tezlanishlari topiladi.

1-masala. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi maxovikning aylanish o'qidan $r = 0,3$ m masofadagi nuqtasi $S = 3t + t^3$ qonunga muvofiq harakat qiladi. (S — metrda, t — sekundda). $t_1 = 3c$ bo'lgan paytda maxovikning burchak tezligi va burchak tezlanishi topilsin.

Yechish. r radiusli aylana bo'ylab harakatlanuvchi nuqta tezligining moduli

$$v = \frac{dS}{dt}$$

tenglamalardan foydalanib topiladi:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(3t + t^3)}{dt} = 3 + 3t^2. \quad (a)$$

Nuqtaning urinma tezlanishining moduli

$$W_r = \frac{dv}{dt}$$

formuladan foydalanib topiladi:

$$W_r = \frac{d(3 + 3t^2)}{dt} = 6t. \quad (b)$$

Nuqta tezligi va urinma tezlanishlari modullari burchak tezlik va burchak tezlanishlar orqali ifodalanadi, ya'ni

$$v = r\omega, \quad W_r = r\varepsilon.$$

Bu formulalardan

$$\omega = \frac{v}{r}, \quad \varepsilon = \frac{W_{\tau}}{r}.$$

(a) va (b) tengliklarga asosan:

$$\omega = \frac{3(1+t^2)}{0,3} = 10(1+t^2), \quad \varepsilon = \frac{6t}{0,3} = 20t$$

$t = 3$ c bo'lgan paytda

$$\omega = 10(1+9) \frac{1}{c} = 100 \frac{1}{c}, \quad \varepsilon = 20 \cdot 3 \frac{1}{c^2} = 60 \frac{1}{c^2}.$$

2-masala. Elektromotor ishga tushirilganda uning $r = 0,4$ radiusli rotori qonunga muvofiq harakatlanadi (φ — radianda, t — sekunda). $T = 10$ c bo'lgan paytda rotorning burilish burchagi, burchak tezligi, burchak tezlanishi, shuningdek rotor gardishidagi nuqtaning tezligi, normal va urinma tezlanishlari topilsin.

Yechish. $t_1 = 10$ s ni harakat tenglamasiga qo'yib, burilish burchagi topiladi:

$$t_1 = 10 \text{ s}; \quad \varphi = 0,3 \cdot 10^2 = 30 \text{ rad}.$$

Harakat tenglamasidan tegishli hosilalarini olib, burchak tezlik va burchak tezlanishlari topiladi, ya'ni

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 0,6t; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0,6 \frac{\text{rad}}{c^2} = 0,6 \text{ s}^{-2};$$

$$t_1 = 10 \text{ c}; \quad \omega = 0,6 \cdot 10 = 6 \frac{\text{rad}}{s} = 6 \text{ s}^{-1}.$$

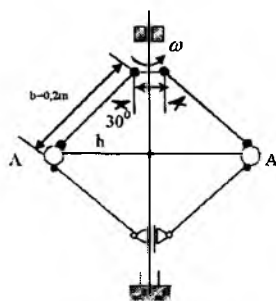
Rotor gardishidagi nuqtaning tezligi:

$$v = r\omega = 0,4 \text{ m} \cdot 6 \frac{1}{s} = 2,4 \frac{\text{m}}{s}.$$

Nuqtaning normal va urinma tezlanishlari:

$$W_n = \frac{v^2}{r} = \frac{5,76 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{0,4 \text{ m}} = 14,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$W_n = r\varepsilon = 0,4 \text{ m} \cdot 0,6 \frac{1}{c^2} = 0,24 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



163-shakl.

3-masala. Markazdan qochma regulyator vali $n = 240 \text{ min}^{-1}$ chastota bilan aylanadi. A sharlar markazlarining normal tezlanishlari topilsin (163-shakl). $l = 0,4 \text{ m}$, qolgan o'lchamlar shaklda ko'rsatilgan.

Yechish. Qattiq jismning aylanish chastotasi berilganda uning burchak tezligi quyidagi formuladan topiladi:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} c^{-1}.$$

Bunga asosan:

$$\omega = \frac{\pi \cdot 240}{30} = 8\pi s^{-1}.$$

Normal tezlanish (7.3.17) formuladan foydalanib topiladi, ya'ni

$$W_n = h\omega^2,$$

bunda h — A shardan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa. 163-shaklga asosan:

$$h = (0,2 + 0,1)M = 0,3m.$$

Natijada

$$W_n = 0,3m \cdot (8\pi s^{-1})^2 \approx 189,3 \frac{m}{s^2}.$$

4-masala (И.В. Мешчерский 13.8). Motor o'chirilgan paytda $40\pi \text{ rad/s}$ ga to'g'ri keladigan burchak tezlik bilan aylanayotgan samolyot propelleri to'xtaguncha 80 marta aylanadi. Propeller aylanishini tekis sekinlashuvchan deb hisoblab, motor o'chirilganda propeller to'xtagunicha qancha vaqt o'tishi topilsin.

Yechish. Tekis sekinlashuvchan aylanma harakatda burchak tezlikni va burchakning o'zgarish qonunlari olinadi, ya'ni

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t,$$

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Motor to'xtaganda: $\omega = 0$; $\varphi = 80 \cdot 2\pi = 160\pi$, $\omega_0 = 40\pi \text{ rad/s}$.
 Bular yuqorida keltirgan tenglamalarga qo'yiladi:

$$\begin{cases} 0 = 40\pi - \varepsilon t; & \varepsilon t = 40\pi; \\ 160\pi = 40\pi t - \frac{\varepsilon t^2}{2} \Rightarrow & 160\pi = 40\pi t - \frac{40\pi}{2} t. \end{cases}$$

Bundan: $t = 8\text{s}$.

5-masala (И.В. Мешчерский 14.3). Tinch holatdagi *A* shkivli stanok elektromotorning uzluksiz tasma bilan harakatga keltiriladi; shkivlarning radiuslari $r_1 = 75\text{sm}$, $r_2 = 30\text{sm}$; elektromotorning harakatga keltirilgandan keyin burchak tezlanishi $0,4\pi \text{ rad/s}^2$. Tasmaning shkivlar bo'ylab sirg'anishini hisobga olmay, stanok qancha vaqtdan keyin $10\pi \text{ rad/s}$ ga teng burchak tezlikka ega bo'lishi aniqlansin (164-shakl).



164-shakl.

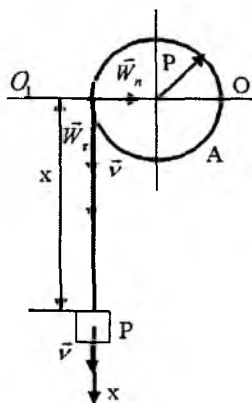
Yechish. *A* va *B* shkivlar gardishlaridagi nuqtalarning urinma tezlanishlarini (7.3.17) formuladan foydalanib topiladi:

$$\vec{W}_B^{(\tau)} = \vec{r}_1 \varepsilon_B, \quad \vec{W}_A^{(\tau)} = \vec{r}_2 \varepsilon_A.$$

Tasma shkivlar bo'ylab sirg'anmaydi, shuning uchun $\vec{W}_B^{(\tau)} = \vec{W}_A^{(\tau)}$ bo'ladi. Bu munosabatdan:

$$r_2 \varepsilon_A = r_1 \varepsilon_B \quad \text{bundan} \quad \varepsilon_A = \frac{r_1}{r_2} \varepsilon_B = \pi \text{ rad/s}^2.$$

A shkiv tekis tezlanuvchan harakat qiladi, shuning uchun uning burchak tezligi (7.3.4) formulaga asosan quyidagicha hisoblanadi:



165-shakl.

$$\omega_A = \omega_{AO} + \varepsilon_A t.$$

A shkivning boshlang'ich burchak tezligi

$\omega_{AO} = 0$, $t = T$ paytda $\omega_A = 10\pi \text{ rad/s}$ ga teng. Bular yuqoridagi tenglamaga qo'yiladi:

$$10\pi \frac{\text{rad}}{\text{c}} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot T.$$

Bundan

$$T = 10\text{s}$$

6-masala. Radiusi $R=10$ sm bo'lgan A val unga osilgan P tosh bilan aylantiriladi.

Toshning harakati $x = 100t^2$ tenglama bilan ifodalanadi, bunda x -toshdan qo'zg'almas OO_1 gorizontgacha bo'lgan santimترلar hisobida ifodalangan masofa, t -vaqt (sekundlar hisobida). T paytda valning burchak tezligi ω va burchak tezlanishi ε , shuningdek, val sirtidagi nuqtaning to'la tezlanishi W aniqlansin.

Yechish. Masofaning o'zgarish qonunidan foydalanib, P toshning tezligini topiladi, ya'ni

$$v = \frac{dx}{dt} = 200t \frac{\text{sm}}{\text{sek}}$$

P toshning tezligi baraban chetidagi nuqtalar tezligi bilan bir xil bo'lganligi uchun bu tezlikni baraban nuqtasining tezligi deb topamiz, ya'ni

$$v = R \cdot \omega.$$

Bundan

$$\omega = \frac{v}{\rho} = 20t \frac{\text{rad}}{\text{sek}}.$$

Endi P toshning tezlanishi topiladi:

$$W = \frac{dv}{dt} = 200 \frac{\text{sm}}{\text{sek}^2}.$$

P toshning tezlanishi baraban chetidagi nuqtalarning urinma tezlanishi bo'ladi, ya'ni

$$W_{\tau} = W = 200 \frac{sm}{sek^2}, \quad W_{\tau} = R\varepsilon.$$

Bulardan:

$$\varepsilon = 20 \frac{rad}{sek^2}.$$

(7.3.17) formulalardan foydalanib, normal tezlanishi topiladi:

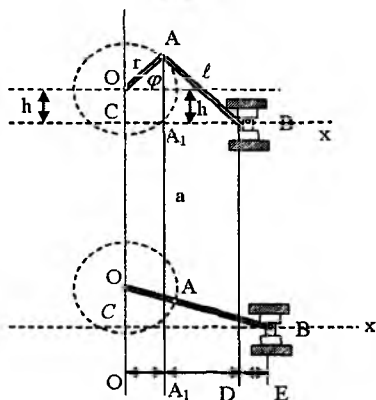
$$W_n = R\omega^2, \quad \text{bundan} \quad W_n = 400r^2 \frac{rad}{sek^2}.$$

Endi to'la tezlanish moduli topiladi:

$$W = \sqrt{W_n^2 + W_{\sigma}^2} = 200\sqrt{1 + 400} \frac{sm}{s^2}.$$

7-masala (И.В. Мещерский

14.14). Markazlashtirilmagan krivoship-polzunli mexanizm porsheni-ning harakat tenglamasi yozilsin; krivoshipning aylanish o'qidan yo'naltiruvchi lineykagacha bo'lgan masofah h ga, krivoship uzunligi r ga, shatun uzunligi l ga teng; Cx o'q polzun yo'naltiruvchisi bo'ylab yo'nalgan. Masofalar polzunning chetki o'ng holatidan boshlab hisoblanadi (166-shakl).



166-shakl.

Yechish. 166-shaklga asosan:

$$X = OE - OD. \quad (a)$$

$O'E$ masofani COB uchburchakdan topiladi:

$$O'E = \sqrt{(r+l)^2 - h^2}. \quad (b)$$

166- a shakl mexanizmning ixtiyoriy paytidagi vaziyatiga mos, 166-b shakl mexanizmning boshlang'ich holatiga mos. 166-shakldan:

$$\begin{aligned} O'D &= O'A_1 + A_1B, & A_1B &= \sqrt{l^2 - (AA_1)^2}, \\ AA_1 &= r \sin \varphi + h; & O A_1 &= r \cos \varphi. \end{aligned}$$

Demak,

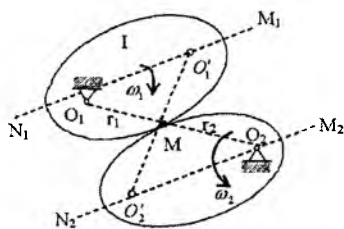
$$O'D = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - (h + r \sin \varphi)^2} \quad (c)$$

(b) va (c) lar (a) tenglamaga qo'yiladi:

$$x = \sqrt{(r + l)^2 - h^2} - \sqrt{l^2 - (h + r \sin \varphi)^2} - r \cos \varphi,$$

yoki

$$x = r \left[\sqrt{\left(1 + \frac{l}{r}\right)^2 - \left(\frac{h}{r}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{l}{r}\right)^2 - \left(\sin \varphi + \frac{h}{r}\right)^2} - \cos \varphi \right]$$



167-shakl.

8-masala (И.В. Мещерский 14.7). Yarim o'qlari a va b bo'lgan bir juft elliptik tishli g'ildiraklarning aylanma harakatini uzatish qonuni chiqarilsin. I g'ildirakning burchak tezligi $\omega_1 = \text{const}$. O'qlar orasidagi masofa $O_1O_2 = 2a$; φ -aylanish o'qlarini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq bilan I elliptik g'ildirakning katta o'qi orasidagi burchak. O'qlar ellipslarining fokuslari orqali o'tadi (167-shakl).

Yechish. M nuqta har ikki g'ildirakka ham tegishli bo'lganligi uchun

$$r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$$

bo'ladi. Bundan

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_1.$$

167-shaklga asosan:

$$r_2^2 = 4a^2 - 4ar_1 + r_1^2, \quad (b)$$

$$r_2^2 = r_1^2 + 4c^2 - 4cr_1 \cos \varphi \quad (c)$$

Ellipsning xossalariga asosan $c^2 = a^2 - b^2$. (b) va (c) tengliklardan:

$$4a^2 - 4ar_1 + r_1^2 = r_1^2 + 4c^2 - 4cr_1 \cos \varphi.$$

Bundan

$$a^2 - ar_1 = c^2 - cr_1 \cos \varphi \Rightarrow r_1 = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \varphi}.$$

Buni (c) ga qo'yib, r_2 topiladi:

$$r_2 = \frac{a^2 - 2ac \cos \varphi + c^2}{a - c \cos \varphi}.$$

r_1 va r_2 larning topilgan qiymatlari (a) tenglamaga qo'yiladi:

$$\omega_2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac \cos \varphi + c^2} \omega_1.$$

Muammoli masala va topshiriqlar

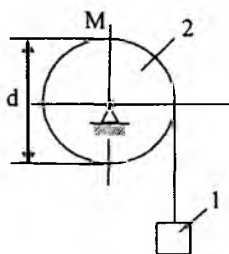
1. Tinch holatda turgan jism tekis tezlanish bilan aylana boshlab, birinchi 2 minutda 3600 marta aylanadi. Burchak tezlanishi aniqlansin.

2. Tinch holatda turgan maxovik tekis tezlanish bilan aylana boshlaydi; birinchi 5 sekundda u 12,5 marta aylanadi. Shu 5s o'tgandan so'ng uning burchak tezligi qancha bo'ladi?

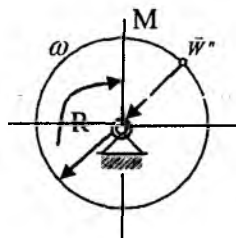
3. 1 yuk lebyodka yordamida ko'tariladi, 2 baraban $\varphi = 5 + 2t^3$ qonunga asosan aylanadi. Agar barabanning diametri $d = 0,6m$ bo'lsa, $t = 1c$ bo'lganda baraban M nuqtasining tezligini toping.

4. Soat balansirining burchak tezligi $\omega = \pi \sin 4\pi t$ qonun bilan o'zgaradi. $T = 0,125s$ bo'lgan paytda balansirning aylanish o'qidan masofadagi nuqtalarning tezligini sm/s larda aniqlang.

5. Aylanish o'qidan $r = 0,2m$ masofadagi nuqtalarning tezligi $v = 4t^2$ qonun bilan o'zgaradi. $t = 2c$ bo'lgan paytda jismning burchak tezlanishini toping.



3-masala.



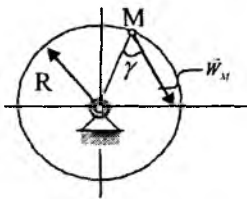
7-masala.

6. Jism qo'zg'almas o'q atrofida $\varphi = 2t^2$ qonunga muvofiq aylanadi. $t = 2c$ bo'lgan paytda aylanish o'qidan $r = 0,2m$ masofadagi nuqtalarning normal tezlanishini toping.

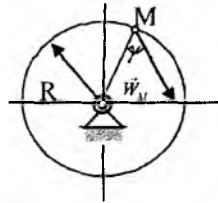
7. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi disk M nuqtasining normal tezlanishi $W_M^n = 6,4m/s^2$. Agar diskning radiusi $R = 0,4m$ bo'lsa, uning burchak tezligini toping.

8. Jism qo'zg'almas o'q atrofida $\varphi = 2t^2$ qonunga asosan aylanadi. Jismning aylanish o'qidan $r = 0,2m$ masofadagi nuqtalarning $t = 2c$ paytdagi urinma tezlanishini toping.

9. Jismning burchak tezligi qonunga asosan o'zgaradi. $t = 2c$ bo'lgan paytda, jismning aylanish o'qidan masofadagi nuqtalarning urinma tezlanishini toping.



10-masala.



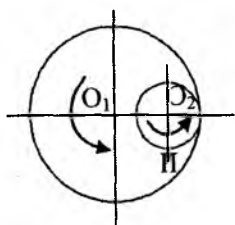
11-masala.

10. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi disk M nuqtasining tezlanishi $W_M = 4m/s^2$. Agar diskning radiusi $R = 0,5m$ va $\gamma = 60^\circ$ bo'lsa, diskning burchak tezligini toping.

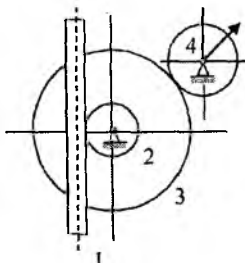
11. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi disk M nuqtasining tezlanishi $W_M = 8m/s^2$. Agar diskning radiusi $R = 0,4m$ va $\gamma = 30^\circ$ bo'lsa, diskning burchak tezlanishini toping.

12. Diametri $D_I = 360mm$ bo'lgan I tishli g'ildirakning burchak tezligi $10\pi / 3 rad/s$ ga teng. I g'ildirak bilan ichki biriktirilgan va burchak tezligi unga qaraganda uch marta katta bo'lgan II tishli g'ildirakning diametri qanchaga teng bo'lishi kerak?

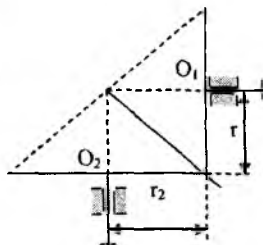
13. Strelkali indikator mexanizmida harakat o'lchov shtiftining 1 reykasidan 2 shesternyaga uzatiladi; 2 shesternyaning o'qiga 3 tishli



12-masala.



13-masala.



14-masala.

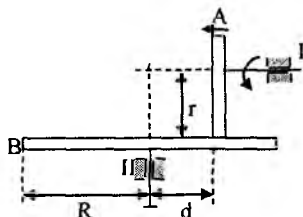
g'ildirak o'rnatilgan. 3 g'ildirak esa strelka biriktirilgan 4 shesternya bilan tishlashadi. Agar shtiftning harakati $x = a \sin kt$ tenglama bilan berilgan bo'lsa va tishli g'ildiraklarning radiuslari mos ravishda r_2 , r_3 va r_4 bo'lsa, strelkaning burchak tezligi aniqlansin.

14. Radiusi $r = 10 \text{ sm}$ bo'lgan tishli konus shaklidagi O_1 g'ildirakning qancha vaqtdan keiyn $144\pi \text{ rad/s}$ ga teng burchak tezligiga ega bo'lishi aniqlansin; tinch harakatdagi bu g'ildirakni

radiusi $r_2 = 15 \text{ sm}$ ga teng va $4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ burchak tezlanishiga ega bo'lib, tekis tezlanish bilan aylanadigan konus shaklidagi O_2 g'ildirak aylantiradi.

15. Friksion uzatmaning I yetakchi vali $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$ burchak tezlik bilan aylanadi va harakat vaqtida shunday siljiydiki (yo'nalishi strelka bilan ko'rsatilgan), oraliq $d = (10 - 0,5t) \text{ sm}$ (t -sekundlar hisobida) qonunga muvofiq o'zgaradi. 1) II valning burchak tezlanishi d oraliq funksiyasi sifatida aniqlansin;

2) Friksion g'ildirakning radiuslarini $r = 5 \text{ sm}$, $R = 15 \text{ sm}$, deb olib, $d = r$ bo'lgan paytda B g'ildirak gardishidagi nuqtaning to'la tezlanishi topilsin.



15-masala.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Qattiq jismning qanday harakatiga uning ilgariylanma harakati deyiladi?
2. Ilgariylanma harakatdagi qattiq jism nuqtalarining tezlik va tezlanishlari qanday bo'ladi?
3. Oniy ilgariylanma harakat deganda qanday harakatni tushunasiz?
4. Qattiq jismning qanday harakatiga qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat deyiladi?
5. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi qattiq jismning burchak tezligi va burchak tezlanishi deganda nimani tushunasiz?
6. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning burchak tezlik va burchak tezlanish vektorlari qanday yo'nalgan bo'ladi?
7. Qattiq jismning qanday harakatiga tekis aylanma harakat deyiladi?
8. Qattiq jismning qanday harakatiga tekis o'zgaruvchan harakat deyiladi?
9. Qattiq jism nuqtalarining tezliklari qanday topiladi?
10. Qattiq jism nuqtalarining urinma va normal tezlanishlari qanday topiladi?
11. Qattiq jism nuqtalarining urinma va normal tezlanishlari qanday yo'nalgan bo'ladi?
12. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtalarining to'la tezlanishi qanday topiladi?

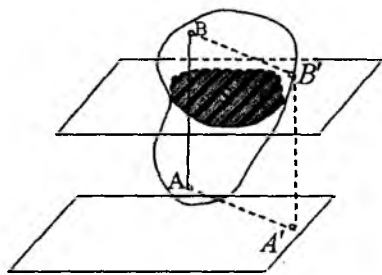
VIII BOB. QATTIQ JISMNING TEKIS PARALLEL HARAKATI

8.1. Asosiy tushunchalar

Qattiq jism nuqtalari biror qo'zg'almas tekislikka parallel tekisliklarda harakatlansa, uning bunday harakatiga **tekis parallel harakat** deyiladi. Bu ta'rifdan shunday xulosa chiqarish mumkinki, qattiq jismga qo'zg'almas tekislikka perpendikular qilib mahkamlangan ixtiyoriy to'g'ri chiziq kesmasi ilgariylanma harakat qiladi, ya'ni o'z-o'ziga parallel ko'chadi. Haqiqatan ham, qattiq jismning qo'zg'almas tekislikka perpendikular AB kesmasi biror Δt vaqt oralig'ida $A'B'$ holatga o'tsin. Qattiq jismning ta'rifiga asosan $AB = A'B'$, AA' va BB' ko'chishlar esa qo'zg'almas tekislikka

parallel bo'lishi kerak, bundan $ABB'A'$ shakl parallelogramm ekanligi kelib chiqadi. Demak, $ABIA'B'$ (168-shakl).

Bundan shunday xulosa qilish mumkinki, qattiq jismning asosiy tekislikka perpendikular to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtalarining harakati uning bitta nuqtasining harakati bilan aniqlanadi. Butun jismning harakati qattiq jismni qo'zg'almas tekislikka parallel tekislik bilan kesishdan hosil bo'lgan S kesimning o'z tekisligidagi harakati bilan aniqlandi. Shunday qilib, qattiq jismning tekis parallel harakati tekis shaklning o'z tekisligidagi harakatiga keltiriladi.



168-shakl.

O'zgarmas tekis shaklning o'z tekisligidagi holati uning ikkita nuqtasining holati bilan yoki ikkita nuqtasini tutash-tiruvchi kesmaning holati bilan to'liq aniqlanadi.

Tekis shaklning o'z tekisligidagi harakati ilgarilanma va aylanma harakatlardan iborat bo'ladi.

Tekis shaklning ilgarilanma harakati deb shunday harakatga aytiladiki, uning harakat tekisligida yotgan ixtiyoriy to'g'ri chiziq kesmasi o'z-o'ziga parallel ko'chadi.

Tekis shaklning o'z tekisligidagi harakati davomida uning aylanish markazi deb ataluvchi bitta nuqtasi qo'zg'almasdan qolsa, bunday harakatga aylanma harakat deyiladi. Qattiq jismning bunday harakati davomida nuqtalarining trayektoriyalari markazi qo'zg'almas nuqtada bo'lgan konsentrik aylanalardan iborat bo'ladi. Nuqtalarining tezlik va tezlanishlari aylanish markazigacha bo'lgan masofalarga proporsional bo'ladi, ya'ni

$$v_Q = OQ \cdot \omega, \quad (8.1.1)$$

$$W_Q = OQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (8.1.2)$$

bunda ω va ε - lar aylanish burchak tezligi va burchak

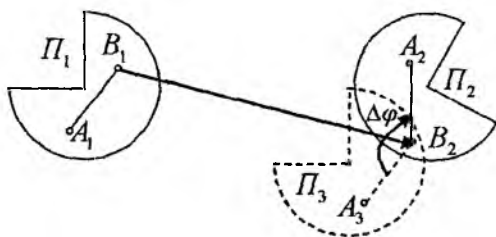
tezlanishi. Qattiq jismning aylanma harakatida nuqtalarning tezlanishlari OQ aylanish radiusidan μ burchakka og‘gan bo‘ladi. Bu burchak hamma nuqtalar uchun bir xil qiymatga ega. U faqat ω va ε larga bog‘liq, ya’ni

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{W_{\tau}}{W_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (8.1.3)$$

1-teorema. *Qattiq jismning o‘z tekisligidagi har qanday chekli ko‘chishini bir ilgari lanma ko‘chish va ixtiyoriy markaz (qutb) atrofida bir marta burish bilan hosil qilish mumkin.*

Isbot. Tekis shaklning A_1B_2 va A_2B_2 kesmalar bilan aniqlangan ixtiyoriy ikkita Π_1 va Π_2 holati berilgan bo‘lsin (AB kesma tekis shaklga mahkamlangan) (169-shakl).

Ilgari lanma harakat bilan tekis shakl Π_1 holatdan Π_3 holatga o‘tsin, bu holda AB kesma A_1B_1 holatdan A_3B_2 holatga o‘tadi va bu ko‘chish $\overline{B_1B_2}$ vektor bilan aniqlanadi (169-shakl).



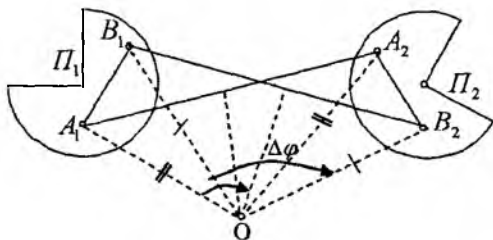
169-shakl.

Ilgari lanma harakat ta’rifiga asosan $A_3B_2IIA_1B_1$. Endi tekis shakl B_2 markaz atrofida $\Delta\varphi = \angle A_3B_2A_2$ burchakka buriladi, natijada A_3B_2 kesma A_2B_2 holatga o‘tadi va Π shakl Π_3 holatdan Π_2 holatga o‘tadi. Biz ixtiyoriy markaz sifatida B_2 nuqtani tanladik. Bu holda shaklning ilgari lanma ko‘chishi $\overline{B_1B_2}$ vektor bilan, aylanma ko‘chishi esa $\Delta\varphi = \angle A_3B_2A_2$ burchak bilan aniqlanadi. Agar qutb sifatida A nuqta olinganda edi shaklning ilgari lanma ko‘chishi $\overline{A_1A_2}$ vektor bilan,

aylanma ko'chishi $\Delta\varphi' = \angle B_3A_2B_2$ burchak bilan aniqlanar edi. Osonlik bilan ko'rish mumkinki, $\overline{B_1B_2} \neq \overline{A_1A_2}$, ya'ni ilgariylanma ko'chish qutbni o'zgartirishi bilan o'zgaradi, lekin $\Delta\varphi = \Delta\varphi'$ chunki bu burchaklar parallel kesmalardan tashkil topgan. Demak, figuraning aylanma ko'chishi qutbni tanlanishiga bog'liq emas. Shunday qilib, ilgariylanma ko'chishi qutbni tanlanishi bilan o'zgarar ekan, uni tanlash yo'li bilan ilgariylanma ko'chishni yo'qotish ham mumkin.

2-teorema. *Tekis shaklning o'z tekisligidagi ilgariylanma bo'lmagan har qanday chekli ko'chishini chekli aylanish markazi deb ataluvchi markaz atrofida bir marta burish bilan hosil qilish mumkin.*

Isbot. Tekis shaklning ixtiyoriy ikkita A_1B_1 va A_2B_2 kesmalar bilan aniqlangan Π_1 va Π_2 holatlari berilgan bo'lsin (170-shakl).



170-shakl.

Agar O chekli aylanish markazi mavjud bo'lsa, bu shunday nuqta bo'ladiki, bu nuqta A_1 va A_2 nuqtalardan bir xil uzoqlashgan bo'ladi, xudi shunday B_1 va B_2 nuqtalardan ham bir xil uzoqlashgan bo'ladi (170- shakl), ya'ni $OA_1 = OA_2$; $OB_1 = OB_2$.

Demak, O aylanish markazi A_1A_2 va B_1B_2 kesmalar o'rtalaridan chiqarilgan perpendikularning kesishish nuqtasi bo'lar ekan. O nuqta aylanish markazi ekanini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, $A_1O = A_2O$, $B_1O = B_2O$, $A_1B_1 = A_2B_2$ bo'lgani uchun $\Delta A_1OA_2 = \Delta B_1OB_2$. Demak, A_1B_1 kesmasi O markaz atrofida

$\Delta\varphi = \angle A_1OA_2 = \angle B_1OB_2$ burchakka burish bilan tekis A_1B_2 holatga va demak shaklni Π_1 holatdan Π_2 holatga o'tkazishi mumkin.

Shuni aytish kerakki, $\Delta\varphi$ burchak A_1B_1 va A_2B_2 kesmalar orasidagi burchakka teng va bu burchak 1-teoremaga asosan qutbni tanlanishiga bog'liq emas.

Isbotlangan ikkita teoremadan tekis shaklning o'z tekisligidagi harakati haqida quyidagi xulosaga kelish mumkin:

1) 1-teoremaga asosan tekis shaklning o'z tekisligidagi har qanday harakatini qutb deb ataluvchi nuqta bilan birgalikdagi chekli ilgari lanma ko'chishlari va qutb atrofidagi chekli burishlarining uzluksiz ketma-ketligidan iborat deb qarash mumkin.

2) 2-teoremaga asosan tekis shaklning har qanday ilgari lanma bo'lmagan elementar ko'chishini oniy aylanish markazi deb ataluvchi markaz atrofida bir marta elementar burchakka burish bilan hosil qilish mumkin. Bundan quyidagicha xulosa qilish mumkin: tekis shaklning o'z tekisligidagi ixtiyoriy ilgari lanma bo'lmagan harakatini oniy aylanish markazlari atrofidagi elementar burishlar ketma-ketligidan iborat deb qarash mumkin.

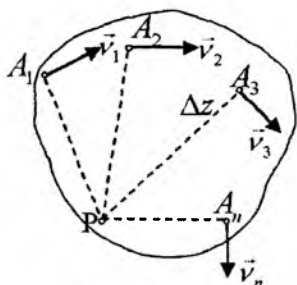
Tekis shaklning harakati davomida oniy aylanish markazining holati qo'zg'almas tekislikda ham, shaklga mahkamlan tekislikda ham uzluksiz o'zgarib boradi.

Oniy aylanish markazi atrofidagi aylanma harakat burchak tezligi ω ga oniy burchak tezlik, burchak tezlanishi ε ga oniy burchak tezlanish deyiladi.

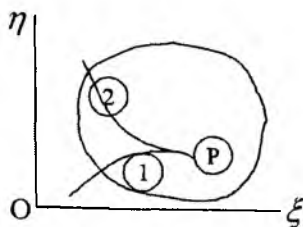
Tezlik vektori aylanish radiuslariga perpendikular bo'ladi (aylanish radiusi nuqtadan aylanish markazigacha bo'lgan masofa) (171-shakl). Tekis shaklning oniy aylanish markazi P nuqtaning qaralayotgan ondagi tezligi nolga teng bo'ladi.

Tekis shaklning oniy aylanish markazini topish uchun uning ikkita nuqtasi tezligining yo'nalishini bilish yetarli. Bu nuqtalar tezliklaridan chiqarilgan perpendikularlarning keshish nuqtasi oniy aylanish markazi bo'ladi.

Oniy aylanish markazining qo'zg'almas tekislikda qoldirgan iziga qo'zg'almas sentroida, shaklga mahkamlangan tekislikda



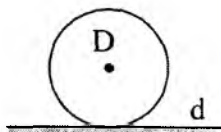
171-shakl.



172-shakl.

qoldirgan iziga qo'zg'aluvchi sentroida deyilad (172-shakl). ① bilan qo'zg'almas sentroida, ② bilan qo'zg'aluvchi sentroidani belgilanadi, oniy aylanish markazi P bilan belgilanadi.

Qaralayotgan onda oniy aylanish markazining qo'zg'almas tekislikdagi o'rni ① bilan qo'zg'aluvchi tekislikdagi o'rni ② oniy aylanish markazi P bilan ustma-ust tushadi (172-shakl). Cheksiz kichik Δt vaqtdan keyin oniy aylanish markazi boshqa nuqtaga o'tadi, ① va ②

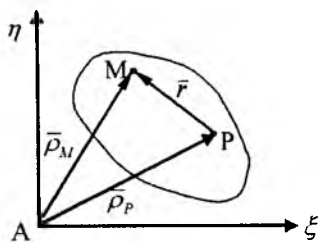


173-shakl.

nuqtalar ajraladi. Qo'zg'almas sentroida qo'zg'almas $O\xi\eta$ tekisligiga nisbatan qo'zg'almas egri chiziq bo'ladi. Qo'zg'aluvchi sentroida shaklga mahkamlangan tekislikka nisbatan qo'zg'almas, tekislikka nisbatan qo'zg'aluvchi tekislik bilan birgalikda qo'zg'aluvchi yegri chiziq bo'ladi. Qo'zg'aluvchi va qo'zg'almas sentroidalarning urunish nuqtasi qaralayotgan onda oniy aylanish markazi bo'ladi.

Tekis shaklning harakati vaqtida qo'zg'aluvchi sentroida qo'zg'almas sentroida ustida sirpanmasdan yumalaydi va ularning urunish nuqtasi qaralayotgan onda oniy aylanish markazi bo'ladi. Masalan, D disk d to'g'ri chiziq bo'ylab sirpanmasdan yumalayotgan bo'lsa, d to'g'ri chiziq qo'zg'almas sentroida, D disk aylanasi qo'zg'aluvchi sentroida bo'ladi, ularning urunish nuqtasi oniy aylanish markazi bo'ladi.

8.2. Tekis shakl nuqtalarining tezliklari



174-shakl.

Tekis shaklning harakatini $A\xi\eta$ qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan qaraymiz. Shaklning qutb nuqtasi P va ixtiyoriy nuqtasi M ning $A\xi\eta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan holati $\bar{\rho}_P$ va $\bar{\rho}_M$ radius-vektorlar bilan aniqlansin (174-shakl). U holda

$\bar{\rho}_P$, $\bar{\rho}_M$ va \bar{r} vektorlar orasida quyidagi munosabat o'rinli:

$$\bar{\rho}_M = \bar{\rho}_P + \bar{r}. \quad (8.2.1)$$

Bu tenglikning ika'a tomoni vaqt bo'yicha differensiallanadi:

$$\frac{d\bar{\rho}_M}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_P}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} \quad (8.2.2)$$

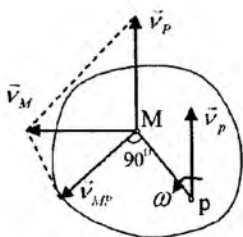
$PM = r = const$ bo'lganligi uchun \bar{r} vektor shaklining harakati vaqtida faqat yo'nalishi bo'yicha o'zgaradi. Eylar formulasiga

asosan $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, bundan tashqari $\frac{d\bar{\rho}_M}{dt} = \bar{v}_M$, $\frac{d\bar{\rho}_P}{dt} = \bar{v}_P$.

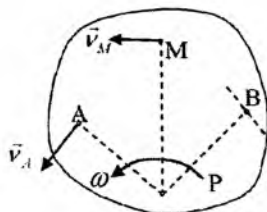
Natijada (8.2.2) tenglikdan quyidagi formulaga kelamiz:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_P + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad \text{yoki} \quad \bar{v}_M = \bar{v}_P + \bar{v}_{MP}. \quad (8.2.3)$$

Tezliklarni qo'shish teoremasiga asosan tekis shakl ixtiyoriy M nuqtasining tezligi qutb nuqtasining \bar{v}_P tezligi, ya'ni ilgari lanma harakat tezligi bilan qutb atrofidagi aylanma harakat $\bar{v}_{MP} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ tezliklarining yig'indisiga teng. \bar{v}_{MP} vektor MP kesmaga perpendikular bo'lib, shaklning aylanish tomoniga qarab yo'nalgan bo'ladi (175-shakl) va moduli $v_{MP} = \omega \cdot PM$ ga teng.



175-shakl.



176-shakl.

Demak, tekis shakl birorta P nuqtasining tezligi va bu nuqta atrofida aylanma harakat burchak tezligi ω berilgan bo'lsa, uning ixtiyoriy nuqtasining tezligini topish mumkin (175-shakl).

Tezliklarni topishning boshqa usuli quyidagi teoremdan kelib chiqadi.

1-teorema. Agar tekis shakl bitta nuqtasining tezligi va boshqa bitta nuqtasi tezligining yo'nalishi berilgan bo'lsa, oniy aylanish markazidan foydalanib, tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezligini topish mumkin.

Isbot. Tekis shakl bitta A nuqtasining tezligi va boshqa bitta B nuqtasi tezligining yo'nalishi berilgan bo'lsin (176-shakl). A va B nuqtalardan ularning tezliklariga perpendikular to'g'ri chiziqlar chiziladi. Bu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi P shaklning oniy aylanish markazi bo'ladi. P nuqtaga nisbatan A nuqtaning tezligi quyidagicha bo'ladi (176-shakl):

$$v_A = \omega \cdot PA.$$

Bundan, oniy burchak tezlik ω topiladi:

$$\omega = \frac{v_A}{PA}. \quad (8.2.4)$$

Endi ixtiyoriy M nuqtaning tezligini topamiz:

$$v_M = \omega \cdot PM = v_A \cdot \frac{PM}{PA}. \quad (8.2.5)$$

\vec{v}_M tezlikning yo'nalishi \overline{PM} vektorga perpendikular bo'ladi.

(8.2.5) tenglikdan ko‘rinib turibdiki, tekis shakl nuqtalarining ixtiyoriy paytdagi tezligi oniy aylanish markazidan nuqtachacha bo‘lgan masofaga proporsional bo‘lar ekan.

Agar tekis shakl berilgan nuqtalarning tezliklari \vec{v}_A va \vec{v}_B lar parallel bo‘lsa, yuqoridagi teorema ma‘nosini yo‘qotadi. Bunday holda quyidagi ikkita holdan bittasi o‘rinli bo‘ladi.

1) $\vec{v}_A \perp \vec{v}_B$ bo‘lib, A va B nuqtalar bitta umumiy perpendikularda yotmasin (177-shakl). Shakldan ko‘rinib turibdiki, bu holda oniy aylanish markazi cheksizlikda bo‘ladi va (8.22.4) tenglikdan $\omega = 0$. Demak, shakl bu holda oniy ilgarilanma harakatda bo‘lar ekan.

2) $\vec{v}_A \perp \vec{v}_B$ bo‘lib, A va B nuqtalar bitta umumiy AB perpendikularda yotsin (178-shakl). Bu holda oniy aylanish markazini topish uchun \vec{v}_A va \vec{v}_B tezliklarning modullarini ham bilish kerak bo‘ladi. \vec{v}_A va \vec{v}_B vektorlarning uchlari orqali to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi. Bu to‘g‘ri chiziq bilan AB to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasi oniy aylanish markazi bo‘ladi (178-shakl). (8.2.5) formuladan:

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}.$$

Demak, bu holda tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezligini topish uchun ikkala A va B nuqtalar tezliklarining ham yo‘nalishi, ham moduli berilgan bo‘lishi kerak.

Agar $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ bo‘lsa, bu holda yana tekis shakl oniy ilgarilanma harakatda bo‘ladi.

2-teorema. *Tekis shakl o‘zgarmas kesmasi uchlarining tezliklarini kesma yo‘nalishidagi proyeksiyalari o‘zaro teng.*

Isbot. AB kesma uchlarining tezliklari \vec{v}_A va \vec{v}_B bo‘lsin (179-shakl). A va B nuqtalardan ularning tezliklariga perpendikular chiziqlar chiziladi, ularning kesishish nuqtasi P oniy aylanish markazi bo‘ladi. Agar AB kesmaning oniy aylanish burchak tezligi ω bo‘lsa, A va B nuqtalarning tezliklari $v_A = \omega \cdot PA$, $v_B = \omega \cdot PB$ bo‘ladi.

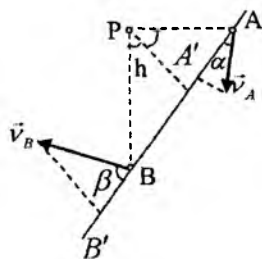
Ularning AB kesmadagi proyeksiyalari quyidagicha bo'ladi:

$$AA' = (\vec{v}_A)_{AB} = v_A \cos \alpha = \omega \cdot PA \cdot \cos \alpha = \omega h,$$

$$BB' = (\vec{v}_B)_{AB} = v_B \cos \beta = \omega \cdot PB \cdot \cos \beta = \omega h,$$

bunda h 179- shakldan ko'rinib turibdiki P nuqtadan AB kesmagacha bo'lgan masofa. Demak,

$$(\vec{v}_A)_{AB} = (\vec{v}_B)_{AB}.$$



177-shakl.

8.3. Tekis shakl nuqtalarining tezlanishlari

Tekis shakl ixtiyoriy M nuqtasining tezligi (8.2.3) formulaga asosan quyidagicha topiladi:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

bunda $\vec{r} = \overline{PM}$ — M nuqtaning P nuqtaga nisbatan radius-vektori (174-shakl). Bu tenglikning ikkala tomoni vaqt bo'yicha differensiallanadi:

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_P}{dt} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right) + (\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}). \quad (8.3.1)$$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ miqdor shaklning burchak tezlanish vektori bo'lib,

bu vektor shakl tekisligiga perpendikular yo'nalgan bo'ladi.

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ Eylor formulasi, $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ va $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = 0$ larni e'tiborga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{r}.$$

Natijada (8.3.1) tenglik quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_P + (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) - \omega^2 \vec{r}. \quad (8.3.2)$$

$$\vec{W}_{MP}^{(\tau)} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad \text{va} \quad \vec{W}_{MP}^{(n)} = -\omega^2 \vec{r} \quad (8.3.3)$$

miqdorlar shaklning P nuqta atrofidagi aylanma harakatining urinma va markazga intilma (normal) tezlanishlarini ifodalaydi. Shunday qilib, (8.3.2) tenglik quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_P + \vec{W}_{MP}^{(\tau)} + \vec{W}_{MP}^{(n)} \quad (8.3.4)$$

yoki

$$\vec{W}_M = \vec{W}_P + \vec{W}_{MP}, \quad (8.3.5)$$

bunda $\vec{W}_{MP} = \vec{W}_{MP}^{(\tau)} + \vec{W}_{MP}^{(n)}$.

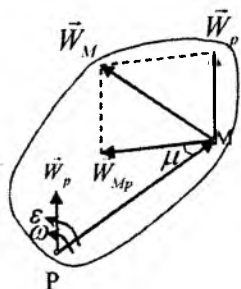
Shunday qilib, tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezlanishi qutb nuqtasining tezlanishi bilan qutb nuqtasi atrofidagi aylanma harakatlari tezlanishlarining geometrik yig‘indisiga teng. $\vec{\varepsilon} \perp \vec{r}$ va $\vec{r} = \overline{PM}$ bo‘lganligi uchun

$$\vec{W}_{MP}^{(\tau)} = MP \cdot \varepsilon, \quad \vec{W}_{MP}^{(n)} = PM \cdot \omega^2, \quad W_{MA} = PM \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (8.3.6)$$

bo‘ladi. \vec{W}_{MP} vektor bilan PM radius orasidagi μ burchak quyidagicha topiladi:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{W_{MP}^{(\tau)}}{W_{MP}^{(n)}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (8.3.7)$$

8.4. Tezlanishlar oniy markazi



180-shakl.

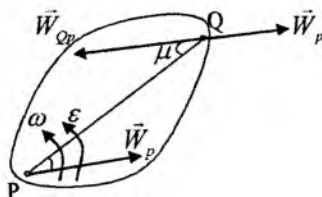
Tekis shaklning o‘z tekisligidagi harakatining har bir paytida shaklning yoki shakl tekisligining shunday nuqtasi topiladi, qaralayotgan onda bu nuqtaning tezlanishi nolga teng bo‘lsa, bu nuqtaga tezlanishlar oniy markazi deyiladi.

Tekis shakl P nuqtasining \vec{W}_P tezlanishi, shuningdek P nuqta atrofidagi aylanma harakat burchak tezligi ω va burchak tezlanishi ε berilgan bo‘lsin (180-shakl).

(8.3.7) formuladan foydalanib, μ burchakning qiymati hisoblanadi:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

P nuqtadan shaklning aylanish tomoniga qarab yo'nalgan va \vec{W}_P vektor bilan μ burchak tashkil qiluvchi yarim to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Agar aylanish sekinlashuvchan bo'lsa, yarim to'g'ri chiziq qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi. P nuqtadan boshlab bu yarim to'g'ri chiziqda



181-shakl.

$$PQ = \frac{W_P}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

kesma ajratiladi. Q nuqta tezlanishlar oniy markazi bo'ladi. (8.3.5) va (8.3.6) formulalarga asosan

$$\vec{W}_Q = \vec{W}_P + \vec{W}_{QP},$$

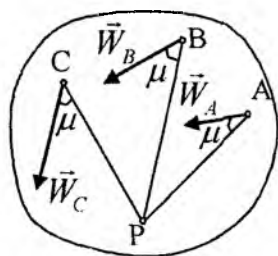
bunda $W_{PQ} = PQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = W_P$. Bundan tashqari, \vec{W}_{QP} vektor PQ radius bilan μ burchak tashkil qiladi, demak bu vektor \vec{W}_P vektor bilan perellel va qarama-qarshi yo'nalgan, ya'ni $\vec{W}_{QP} = -\vec{W}_P$. Shuning uchun $\vec{W}_Q = \vec{W}_P + \vec{W}_{QP} = 0$.

Agar qaralayotgan onda Q nuqtani qutb deb olsak, $\vec{W}_Q = 0$ bo'lib, (8.3.5) va (8.3.6) formulalardan

$$\vec{W}_M = \vec{W}_{MQ} \quad \text{va} \quad W_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (8.4.1)$$

Shunday qilib, tekis shakl nuqtalarining tezlanishlari nuqtadan tezlanishlar oniy markazgacha bo'lgan masofaga proporsional bo'ladi, ya'ni

$$\frac{W_M}{MQ} = \frac{W_P}{PQ} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$



182-shakl.

Tekis shakl nuqtalarining tezlanishlari nuqtalar bilan oniy markazni tutash-tiruvchi kesmalar bilan bir xil burchak tashkil qiladi (182-shakl).

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, oniy aylanish markazi P bilan tezlanishlar oniy markazi Q lar boshqa-boshqa nuqtalar bo'ladi. Oniy aylanish markazi uchun $v_P = 0$; $v_Q \neq 0$.

8.5. Tekis shaklning o'z tekisligidagi harakat tenglamasi

Tekis $B\xi\eta$ shakl qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlansin (183-shakl). Shaklning A nuqtasini qutb deb olib, shaklga mahkamlangan Axy koordinatalar sistemasi olinadi. Agar qutb nuqtaning ξ_A , η_A koordinatalari hamda Ax va $A\xi$ o'qlar orasidagi φ burchak ma'lum bo'lsa, tekis shaklning ixtiyoriy paytdagi holati aniqlangan bo'ladi. Tekis shaklning harakati berilgan bo'ladi, agar

$$\xi_A = f_1(t), \quad \eta_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t) \quad (8.5.1)$$

bog'lanish tenglamalari berilgan bo'lsa va bu tenglamalarga tekis parallel harakat tenglamalari deyiladi.

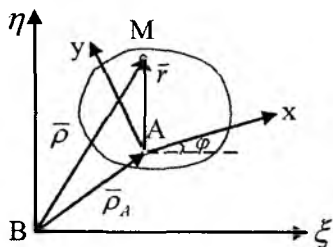
Qutb nuqtasining $B\xi\eta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan radius-vektorini $\vec{\rho}_A$, shakl ixtiyoriy M nuqtasining radius-vektorini $\vec{\rho}$, shu nuqtaning Axy koordinatalar sistemasiga nisbatan radius-vektori \vec{r} bilan belgilanadi. Bu vektorlarning vaqt o'tishi bilan ham moduli ham yo'nalishi o'zgaradi, ya'ni

$$\vec{\rho}_A = \vec{\rho}_A(t), \quad \vec{\rho} = \vec{\rho}(t), \quad \vec{r} = \vec{r}(t). \quad (8.5.2)$$

183- shaklda asosan:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_A + \bar{r} . \quad (8.5.3)$$

M nuqtaning $B\xi\eta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalarni ξ, η bilan, Axy koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalari x, y bilan belgilanadi. (8.5.3) tenglamaning ikkala tomonini $A\xi$ va $B\eta$ o'qlariga proyeksiyalab, quyidagi tenglamalar hosil qilinadi:



183-shakl.

$$\begin{cases} \xi = \xi_A + x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ \eta = \eta_A + x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{cases} \quad (8.5.4)$$

(8.5.4) tenglamalar shaklining $A\xi\eta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakat tenglamalarini ifodalaydi. Bu tenglamalar M nuqta trayektoriyasining parametrik tenglamalarini ifodalaydi, parametr t bu tenglamalarga ξ_A, η_A va φ lar orqali kiradi. Bu tenglamalarda parametr t ni yo'qotib, $\Phi(\xi, \eta) = 0$ trayektoriya tenglamasini hosil qilamiz.

(8.5.4) tenglamalarning ikkala tomonini vaqt bo'yicha differensiallab, tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezlik va tevlanishlarini topish mumkin:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + (\bar{\omega} \times \bar{r}), \quad (8.5.5)$$

yoki (8.5.3) formuladan:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times (\bar{\rho} - \bar{\rho}_A) = \frac{d\bar{\rho}_A}{dt} + \bar{\omega} \times (\bar{\rho} - \bar{\rho}_A). \quad (8.5.6)$$

$B\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasining birlik vektorlari $\bar{\xi}^0, \bar{\eta}^0$ lar bilan belgilanadi. U holda (8.5.6)ni quyidashicha yozish mumkin:

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{\rho}_A}{dt} + \begin{vmatrix} \vec{\xi}^0 & \vec{\eta}^0 & \vec{\zeta}^0 \\ 0 & 0 & \omega \\ \xi - \xi_P & \eta - \eta_P & 0 \end{vmatrix},$$

bunda $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ - burchak tezlikning algebraik ifodasi. \vec{v}_M tezlikning ξ va η o'qlardagi proyeksiyalari quyidagicha bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} v_\xi &= \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi_A}{dt} - \omega(\eta - \eta_P), \\ v_\eta &= \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta_A}{dt} + \omega(\xi - \xi_P) \end{aligned} \right\} \quad (8.5.7)$$

Axy koordinatalar sistemasining birlik vektorlari \vec{x}^0 , \vec{y}^0 bilan belgilnadi va (8.5.5) ni quyidagicha yoziladi:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \begin{vmatrix} \vec{x}^0 & \vec{y}^0 & \vec{z}^0 \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix}. \quad (8.5.8)$$

Natijada \vec{v}_M tezlikni x , y o'qlaridagi proyeksiyalari uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{Ax} - \omega y, \\ v_y &= v_{Ay} + \omega x. \end{aligned} \right\} \quad (8.5.9)$$

v_{Ax} , v_{Ay} miqdorlar quyidagi formulalardan topiladi:

$$\vec{v}_A = \frac{d\xi_A}{dt} \vec{\xi}^0 + \frac{d\eta_A}{dt} \vec{\eta}^0,$$

bundan

$$\left. \begin{aligned} v_{Ax} &= \frac{d\xi_A}{dt} \cos \varphi + \frac{d\eta_A}{dt} \sin \varphi, \\ v_{Ay} &= \frac{d\xi_A}{dt} \sin \varphi + \frac{d\eta_A}{dt} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (8.5.10)$$

Shakl oniy aylanish markazining koordinatalari $v_M = 0$ deb yoki (8.5.7) va (8.5.10) tenglamalarning chap tomonlarini nolga tenglashtirib topiladi, ya'ni

$$\frac{d\xi_A}{dt} - \omega(\eta_P - \eta_A) = 0, \quad \frac{d\xi_P}{dt} + \omega(\xi_P - \xi_A) = 0,$$

bunda ξ_P , $\eta_P - P$ oniy aylanish markazining koordinatalari. Bulardan:

$$\xi_P = \xi_A - \frac{1}{\omega} \frac{d\eta_A}{dt}, \quad \eta_P = \eta_A + \frac{1}{\omega} \frac{d\xi_A}{dt}. \quad (8.5.11)$$

Qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan:

$$v_{Ax} - \omega y_P = 0, \quad v_{Ay} + \omega x_P = 0,$$

bunda x_P va y_P lar P oniy aylanish markazining Axy koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalari. Bulardan:

$$x_P = -\frac{v_{Ay}}{\omega}, \quad y_P = \frac{v_{Ax}}{\omega}. \quad (8.5.12)$$

(8.5.11) va (8.5.12) tenglamalar o'z navbatida qo'zg'almas va qo'zg'aluvchi sentroidalarning parametrik tenglamalaridir. Ulardan parametr t ni yo'qotib, ularni koordinatalardagi

$$\varphi(\xi_P, \eta_P) = 0, \quad f(x_P, y_P) = 0 \quad (8.5.13)$$

tenglamalari topiladi.

M nuqtaning tezlanishini (8.3.2) formuladan foydalanib yoki (8.5.6) tenglikning ikkala tomoni vaqt bo'yicha differensiallab topiladi, ya'ni:

$$\bar{W}_M = \frac{d\bar{v}_M}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{W}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} - \omega^2 \bar{r}, \quad (8.5.14)$$

bunda $\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$ - shaklning burchak tezlanishi.

(8.5.14) tenglikni

$$\bar{W}_M = \frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{\rho}_A}{dt^2} - \bar{\varepsilon} \times (\bar{\rho} - \bar{\rho}_A) - \omega^2(\bar{\rho} - \bar{\rho}_A).$$

ko'rinishda yozib, \vec{W}_M ning ξ va η o'qlardagi proyeksiyalari topiladi:

$$\left. \begin{aligned} W_{\xi} &= \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi_A}{dt^2} + \varepsilon (\eta - \eta_A) - \omega^2(\xi - \xi_A), \\ W_{\eta} &= \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2\eta_A}{dt^2} - \varepsilon (\xi - \xi_A) - \omega^2(\eta - \eta_A). \end{aligned} \right\} \quad (8.5.15)$$

x va y o'qlardagi proyeksiyalari quyidagicha bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} W_x &= W_{Ax} - \varepsilon y - \omega^2 x, \\ W_y &= W_{Ay} + \varepsilon x - \omega^2 y \end{aligned} \right\} \quad (8.5.16)$$

W_{Ax} , W_{Ay} proyeksiyalar

$$\left. \begin{aligned} W_{Ax} &= \frac{d^2\xi_A}{dt^2} \cos \varphi + \frac{d^2\eta_A}{dt^2} \sin \varphi, \\ W_{Ay} &= -\frac{d^2\xi_A}{dt^2} \sin \varphi + \frac{d^2\eta_A}{dt^2} \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

formulalardan topiladi.

Tezlanishlar oniy markaz Q ning koordinatalarini $\vec{W}_M = 0$ deb, yoki (8.5.15) tengliklar chap tomonlarini nolga tenglashtirib topamiz, ya'ni

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi_A}{dt^2} - \varepsilon(\eta_Q - \eta_A) - \omega^2(\xi_Q - \xi_A) &= 0, \\ \frac{d^2\eta_A}{dt^2} + \varepsilon(\xi_Q - \xi_A) - \omega^2(\eta_Q - \eta_A) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.5.17)$$

Qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasi o'qlardagi proyeksiyalari:

$$\left. \begin{aligned} W - \varepsilon y_Q - \omega^2 x_Q &= 0, \\ W - \varepsilon x_Q - \omega^2 y_Q &= 0, \end{aligned} \right\}$$

bundan

$$\left. \begin{aligned} x_Q &= \frac{-W_{Ay}\varepsilon + W_{Ax}\omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4}, \\ y_Q &= \frac{-W_{Ax}\varepsilon + W_{Ay}\omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \end{aligned} \right\} \quad (8.5.18)$$

8.6. Qattiq jismning tekis parellel harakatiga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar.

Masalalar

Qattiq jismning tekis parellel harakatiga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi:

1. Ikkita koordinatalar sistemasi tanlanadi: qc'zg'almas hamda tekis shaklga mahkamlangan koordinatalar sistemasi.

2. Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan tekis shaklning harakat tenglamalari tuziladi.

3. Tuzilgan tenglamalardan foydalanib, tekis shakl nuqtalarining tezlik va tezlanishlari topiladi.

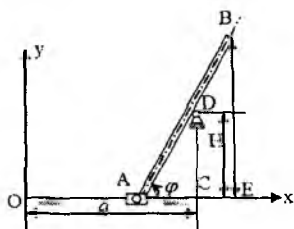
4. Tekis shakl oniy aylanish markazi yuqorida bayon qilingan usullardan foydalanib topiladi va oniy markazdan foydalanib, nuqtalarning tezliklari topiladi.

5. Tekis shakl bitta nuqtasining tezlanishi va bu nuqta atrofidagi aylanma harakat burchak tezligi va burchak tezlanishi berilgan bo'lsa, tezlanishlar oniy markazi topiladi.

6. Tezlanishlar oniy markazigdan foydalanib, tekis shakl nuqtalarining tezlanishlari topiladi.

8.6.1. Harakat tenglamalariga oid masalalar

1-masala. (И.В. Мещерский). *AB* sterjenning *A* uchi o'zgarmas tezlik bilan to'g'ri chizikli yo'naluvchida sirpanadi va bunda sterjen harakat vaqtida *D* shkifga tayanadi. Sterjen va uning *B* uchi harakat tenglamalari yozilsin. Sterjen uzunligi ℓ ga teng; shkif to'g'ri chizikli yo'naltiruvchidan *H* balandlikda o'rnatilgan. Harakatning boshlanishida sterjenning *A* uchi



184-shakl.

qo'zg'almas koordinatalar sistemasi boshi O nuqta bilan ustma-ust tushadi; $OC = a$. A nuqta qutb deb olinsin (184-shakl).

Yechish. Berilganlar shaklda ko'rsatilgan. Sterjenning A qutb atrofida aylanish burchagini φ bilan belgilanadi. A nuqta x o'qi bo'ylab to'g'ri chiziqli harakat qilgani uchun hamma vaqt $y_a = 0$. Endi x_A koordinatasi topiladi. Shakldan va A nuqta v tezlik bilan tekis harakat qilgani uchun

$$x_A = OA = v \cdot t$$

bo'ladi.

Shakldan:
$$\frac{H}{AC} = \operatorname{tg} \varphi; \quad AC = a - v t;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{a - v t} \quad \text{bundan} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{H}{a - v t}.$$

B nuqtaning koordinatalarini topiladi:

$$x_B = OA + AE, \quad OA = v t; \quad AE = \ell \cos \varphi,$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{a - v t}{\sqrt{(a - v t)^2 + H^2}},$$

natijada

$$x_B = v t + \frac{a - v t}{\sqrt{H^2 + (a - v t)^2}} \ell,$$

$$y_B = BE = \ell \sin \varphi = \ell \frac{H}{\sqrt{H^2 + (a - v t)^2}}.$$

2-masala (И.В. Мещерский 15.7). To'g'ri chiziqli yo'naltiruvchi bo'ylab sirpanuvchi A va B nuqtalar ℓ uzunlikdagi AB sterjen bilan biriktirilgan. A mufta v_A o'zgarmas tezlik bilan harakatlanadi. A muftani O nuqtadan harakatlana boshlaydi deb hisoblab, AB sterjenning harakat tenglamalari yozilsin. Qutb uchun A nuqta olinsin. BOA burchak $\pi - \alpha$ ga teng (185-shakl).

Yechish. A nuqtaning x_A , y_A koordinatalari topiladi. Koordinatalar sistemasi shaklda ko'rsatilganday qilib tanlanadi.

Shakldan:

$$x_A = OA \cos \alpha; \quad y_A = OA \sin \alpha$$

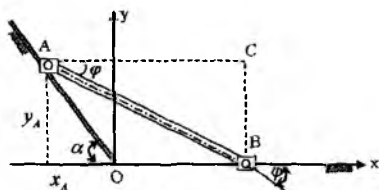
A nuqta v_A o'zgarmas tezlik bilan tekis harakat qilgani uchun $OA = v_A t$ va demak,

$$x_A = v_A t \cos \alpha; \quad y_A = v_A t \sin \alpha.$$

Endi φ burchak topiladi:

$$\frac{BC}{AB} = \sin \varphi; \quad BC = y_A = v_A t \sin \alpha,$$

natijada $\sin \varphi = \frac{v_A t \sin \alpha}{\ell}$, bundan $\varphi = \arcsin \frac{v_A t \sin \alpha}{\ell}$.



185-shakl.

3-masala (И.В. Мещерский 15.2).

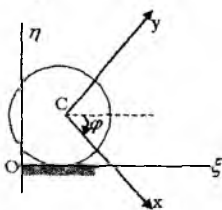
Radiusi R bo'lgan g'ildirak gorizontol to'g'ri chiziq bo'ylab sirpanmasdan g'ildiraydi. G'ildirak markazi C ning tezligi o'zgarmas va v ga teng. G'ildirak bilan bog'langan y o'q boshlang'ich paytda vertikal bo'ylab, qo'zg'almas η o'q shu paytda g'ildirakning C markazi orqali o'tadi. G'ildirakning harakat tenglamalari aniqlansin. C nuqta qutb deb olinsin (186-shakl).

Yechish. Koordinatalar sistemasini shaklda ko'rsatilganday qilib tanlaymiz. G'ildirakning C markazi ξ o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'ylab v o'zgarmas tezlik bilan tekis harakat qilgani uchun uning η koordinatasi o'zgarmas va R ga teng, ya'ni $\eta_C = R$.

ξ koordinatasi esa quyidagiga teng:

$$\xi_C = vt.$$

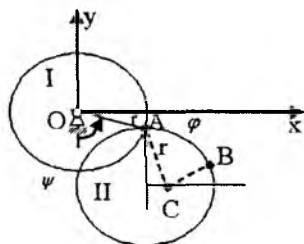
Endi φ burchakni topamiz. G'ildirak φ burchakka burilganda uning chetidagi nuqtalar $R\varphi$ ga teng yoy chizadi va g'ildirak markazining vt ko'chishiga teng bo'ladi, ya'ni



186-shakl.

$$R\dot{\varphi} = vt, \text{ bundan } \varphi = \frac{v}{R}t.$$

8.6.2. Tekis shakl nuqtalarining tezliklarini topishga doir masalalar



187-shakl.

4-masala (И.В. Мещерский 16.5.). Har birining radiusi r bo'lgan ikkita bir xil disk A silindrik sharnir vositasida birlashtirilgan. I disk O qo'zg'almas gorizantal o'q atrofida $\varphi = \varphi(t)$ qonunga binoan aylanadi. II disk A gorizantal o'q atrofida $\psi = \psi(t)$ qonunga asosan aylanadi. O va A o'qlar rasm tekisligiga perpendikular. φ va ψ bur-

chaklar vertikalidan soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalishda hisoblanadi. II disk C markazining tezligi topilsin (187-shakl).

Yechish. Shakldan foydalanib, C nuqtaning koordinatalari topiladi:

$$\begin{aligned} x_c &= r \sin \varphi + r \sin \psi, \\ y_c &= -r \cos \varphi - r \cos \psi. \end{aligned} \quad (a)$$

(a) tenglamalar C nuqtaning Oxy koordinatalar sistemasiga nisbatan harakat tenglamalarini ifodalaydi.

(a) tenglamalardan vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosilalarni olib, C nuqta tezligining proyeksiyalari topiladi, ya'ni

$$\begin{aligned} v_{cx} &= \dot{x}_c = r(\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\psi} \cos \psi), \\ v_{cy} &= \dot{y}_c = r(\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \psi). \end{aligned}$$

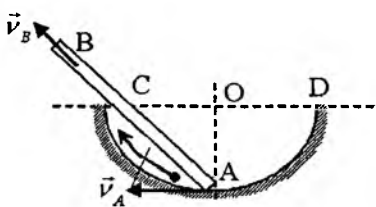
C nuqta tezligining modulini topamiz:

$$v_c = \sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos(\varphi - \psi)}.$$

5-masala (И.В. Мещерский 16.10.). AB to'g'ri chiziq rasm tekisligida shunday harakatlanadiki, uning A uchi hamma vaqt CAD yarim aylanada turadi, to'g'ri chiziqning o'zi esa hamisha CD diametring qo'zg'almas C nuqtasidan o'tadi. OA

radius CD ga tik bo'lgan paytda to'g'ri chiziqning C nuqtaga mos kelgan nuqtasining v_c tezligi aniqlansin; A nuqtaning shu paytdagi tezligi 4 m/s ga teng.

Yechish. A nuqtaning tezligi aylana radiusiga perpendikular bo'lib, harakat yo'nalishi tomonga yo'nalgan bo'ladi. B nuqtaning tezligi esa AB sterjen bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Proyeksiyalar haqidagi teoremaga asosan, A va B nuqtalarning AB to'g'ri chiziqdagi proyeksiyalari teng bo'lishi kerak, ya'ni



188-shakl.

$$np_{AB}\vec{v}_A = np_{AB}\vec{v}_B$$

$$np_{AB}\vec{v}_A = v_A \cos 45^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{m}{c} = 2\sqrt{2} \frac{m}{c} \approx 2,83 \frac{m}{c}$$

$$np_{AB}\vec{v}_A = v_B$$

Demak,

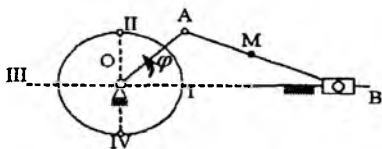
$$v_B = 2,83 \frac{m}{c}$$

6-masala (И.В. Мещерский 16.15). Krivoship mexanizmidagi krivoship uzunligi $OA=40 \text{ sm}$, shatun uzunligi $AB=2\text{m}$; krivoship $6\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ burchak tezlik bilan bir tekis aylanadi. AOB

burchak turlicha: $0; \frac{\pi}{2}; \pi, 3\pi/2$ ga teng bo'lgan hollar uchun shatunning burchak tezligi ω va shatun o'rtasidagi M nuqta tezligining qancha bo'lishi topilsin (189-shakl).

Yechish. I holat uchun a) shaklda tasvirlangan sxema mos keladi.

Bu holda shaklning oniy aylanish markazi B nuqta bo'ladi. A nuqtasining tezligi topiladi:

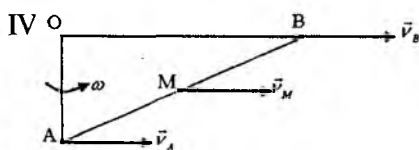
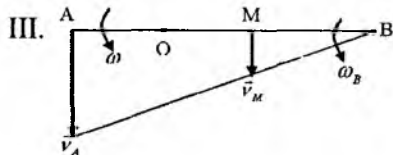
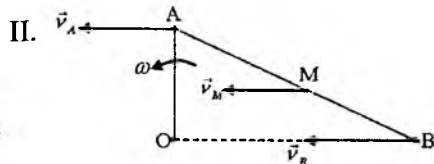
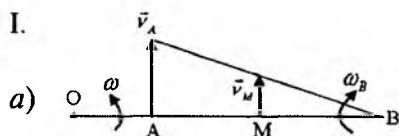


189-shakl.

$$v_A = OA \cdot \omega,$$

oniy aylanish markaziga nisbatan $v_A = AB \cdot \omega_B$.

I.



Bu ikki tenglikdan:

$$\omega_B = \frac{OA}{AB} \omega = \frac{1}{5} \omega = -\frac{6}{5} \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

B oniy aylanish markaziga nisbatan M nuqtaning tezligi topiladi:

$$v_M = BM \cdot \omega_B = 100 \text{sm} \cdot \frac{1}{5} 6\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 377 \frac{\text{sm}}{\text{s}}.$$

II hol uchun $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Bu holda \vec{v}_A tezlik bilan \vec{v}_B tezliklar parallel. Demak, AB shatun ilgari lanma harakat qilari ekan. Shuning uchun uning hamma nuqtalarining tezliklari bir xil bo'ladi, ya'ni

$$v_M = v_A = OA \cdot \omega = 40 \cdot 6\pi \frac{\text{sm}}{\text{s}} \approx 754 \frac{\text{sm}}{\text{s}}.$$

Shakl ilgari lanma harakatda bo'lagi uchun uning oniy aylanish burchak tezligi $\omega_p = 0$.

III. Bu holga $\varphi = \pi$. Bu holda shakl B nuqtasining tezligi nolga teng va oniy aylanish markazi B nuqtada bo'ladi. A nuqtaning tezligi topiladi: $v_A = OA \cdot \omega$, oniy aylanish markaziga nisbatan:

$$v_A = AB \omega_B.$$

Bulardan:

$$\omega_B = \frac{OA}{AB} \omega = \frac{6}{5} \pi \frac{\text{rad}}{s}.$$

M nuqtaning tezligi topiladi:

$$v_M = BM \cdot \omega_B = 100 \text{ sm} \cdot \frac{1}{5} \pi \frac{\text{rad}}{s} \approx 377 \frac{\text{sm}}{s}.$$

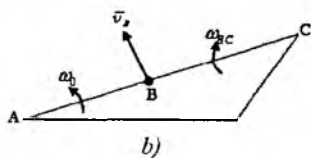
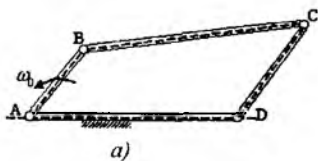
IV. $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Bu holda ham AB shatun ilgari lanma harakatda bo'lganligi uchun oniy burchak tezligi nolga teng:

$$v_M = v_A = OA \cdot \omega = 40 \text{ sm} \cdot 6\pi \frac{\text{sm}}{s} \approx 754 \frac{\text{sm}}{s}.$$

7-masala (И.В. Мещерский 16.21). Shatunli $ABCD$ to'rt

zvenolikdayetakchi AB krivoship $\omega = 6\pi \frac{\text{rad}}{s}$ o'zgarmas burchak

tezlik bilan aylanadi. AB krivoship bilan BC sterjen bir to'g'ri chiziqda yotgan paytda CD krivoship va BC sterjenning oniy burchak tezliklari topilsin; $BC = 3AB$ (190-shakl).



190-shaki.

Yechish. Qaralayotgan holda B nuqta tezligidan chiqarilgan perpendikular C nuqtadan o'tadi, demak, C nuqta shaklning oniy aylanish markazi bo'ladi. A doimiy aylanish markaziga nisbatan B nuqtaning tezligi topiladi:

$$\begin{aligned} v_B &= AB \cdot \omega_0 \\ v_B &= BC \cdot \omega_{BC} \end{aligned} \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{AB}{BC} \omega_0 = \frac{AB}{3AB} \omega_0$$

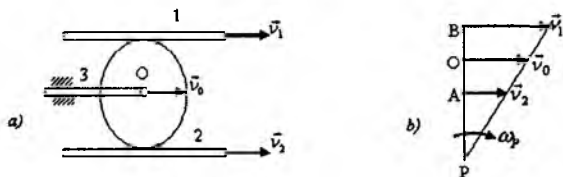
yoki

$$\omega_{BC} = \frac{1}{3} 6\pi \frac{\text{rad}}{s} = 2\pi \frac{\text{rad}}{s}.$$

Qaralayotgan onda C nuqtaga nisbatan DC sterjen tinch holatda bo'ladi, shuning uchun $\omega_{CD} = 0$.

8-masala. (И.В. Мещерский 16.32.). Rasmda harakatlarni qo'shadigan mexanizm tasvirlangan. O'zaro parallel ikkita 1- va 2-reyklar v_1 va v_2 o'zgarmas tezliklar bilan bir tomonga harakatlanadi. Reyklar orasida r radiusli, reyklar bo'ylab sirpanmay dumalaydigan disk qisilgan. Diskning C o'qiga mahkamlangan 3 reykaning tezligi 1 va 2 reyklar tezliklari yig'indisining yarimiga tengligi ko'rsatilsin. Shuningdek, diskning burchak tezligi topilsin (191-shakl).

Yechish. Masalani yechish uchun sxema 191-a shaklda rasmda tasvirlangan. Uchburchaklar o'xshashligidan:



192-shakl.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{PB}{PA}, \quad PB - PA = 2r, \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{PA + 2r}{PA}, \quad \frac{PB}{PA} = \frac{v_1}{v_2},$$

$$PB = \frac{v_1}{v_2} PA, \quad \frac{v_1}{v_2} PA - PA = 2r$$

$$\text{bundan } PA = \frac{2rv_2}{v_1 - v_2},$$

a) Shakldan:

$$v_1 = PB\omega_p \Rightarrow \omega_p = \frac{v_1}{PB}.$$

$$PB = PA + 2r = \frac{2rv_2}{v_1 - v_2} + 2r = \frac{2rv_2}{v_1 - v_2}.$$

Natijada

$$\omega_p = v_1 : \frac{2rv_1}{v_1 - v_2} = \frac{v_1 - v_2}{2r}.$$

8.6.3. Tekis shakl nuqtalarining tezlanishlarini topishga doir masalalar

9-masala. (И.В. Мещерский 18.4.). 4-masalaning shartlari bajarilganda II disk C va B nuqtalarining tezlanishlari topilsin.

Yechish. 4-masalada C nuqtaning harakat tenglamalari tuzilgan, o'sha tenglamalardan tezlanishning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini topamiz:

$$W_{Cx} = \ddot{x}_C = r(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \ddot{\psi} \cos \psi - \dot{\psi}^2 \sin \psi),$$

$$W_{Cy} = \ddot{y}_C = r(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\psi} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos \psi).$$

B nuqta tezlanishini topish uchun 4-masala shaklidan foydalanib, harakat tenglamalari tuziladi:

$$x_B = r \sin \varphi + r \sin \psi + r \cos \psi,$$

$$y_B = -r \cos \varphi - r \cos \psi + r \sin \psi.$$

Bu tenglamalardan tezlanishning proyeksiyalari topiladi, ya'ni

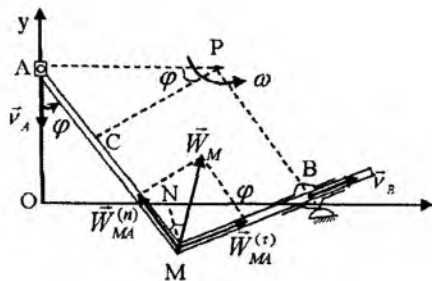
$$W_{Bx} = \ddot{x}_B = r \left[\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \sqrt{2} \ddot{\psi} \cos \left(\psi + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \dot{\psi}^2 \sin \left(\psi + \frac{\pi}{4} \right) \right],$$
$$W_{By} = \ddot{y}_B = r \left[\ddot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \sqrt{2} \ddot{\psi} \sin \left(\psi + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \dot{\psi}^2 \cos \left(\psi + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

To'la tezlanishi

$$W_B = \sqrt{W_{Bx}^2 + W_{By}^2} = \sqrt{\ddot{x}_B^2 + \ddot{y}_B^2}$$

formula bilan topiladi.

10-masala (И.В. Мещерский 18.20.). Mustahkam birlashtirilgan AME to'g'ri burchak shaklidagi mexanizm shunday harakatlanadiki, bunda A nuqta har doim Oy qo'zg'almas o'qda qoladi, boshqa ME tomoni esa, aylanuvchi B sharnir orqali o'tadi. Masofa $MA = OB = a$. A nuqtaning tezligi o'zgarmas. M nuqtaning tezlanishi φ burchakning funksiyasi sifatida aniqlansin (192-shakl).



192-shakl.

Yechish. Tekis mexanizmning A va B nuqtalarining tezliklaridan perpendikular chiqarib, P oniy aylanish markazi topiladi. Bu markazga nisbatan:

$$\dot{v}_A = AP\omega \quad \text{bundan} \quad \omega = \frac{v_A}{AP}. \quad (a)$$

Shakldan:

$$\cos \varphi = \frac{CP}{AP} = \frac{MB}{AP}, \quad \text{bundan} \quad AP = \frac{MB}{\cos \varphi}, \quad (b)$$

$$ON = \frac{a \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad NB = OB - ON = \frac{a}{1 + \sin \varphi},$$

$$\cos \varphi = \frac{MB}{NB} \Rightarrow MB = \frac{a \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad AP = \frac{a}{1 + \sin \varphi}.$$

Burchak tezlikdan vaqt bo'yicha bir marta hosila olib, burchak tezlanishi topiladi:

$$\omega = \frac{v_A(1 + \sin \varphi)}{a} \Rightarrow \varepsilon = \dot{\omega} = \left(\frac{v_A}{a}\right)^2 \cos \varphi(1 + \sin \varphi).$$

Shaklning A nuqtasi vertikal to'g'ri chiziq bo'ylab o'zgarmas tezlik bilan harakatlangani uchun uning tezlanishi nolga teng, shuning uchun tezlanishlar oniy markazi deb A nuqta olinadi.

Shu A nuqtaga nisbatan M nuqtaning $\vec{W}_{MA}^{(n)}$, $\vec{W}_{MA}^{(\tau)}$, \vec{W}_A tezlanishlari topiladi:

$$W_{MA}^{(n)} = AM\omega^2 = a \frac{v_A^2(1 + \sin \varphi)^2}{a^2} = \frac{v_A^2}{a} (1 + \sin \varphi)^2,$$

$$W_{MA}^{(n)} = AM \varepsilon = a \frac{v_A^2 \cos^2 \varphi (1 + \sin \varphi)^2}{a^2} = \frac{v_A^2}{a} \cos^2 \varphi (1 + \sin \varphi)^2.$$

To'la tezlanish topiladi:

$$W = \sqrt{(W_{MA}^{(n)})^2 + (W_{MA}^{(t)})^2} = \frac{v_A^2 \sqrt{2}}{a} (1 + \sin \varphi)^{3/2}.$$

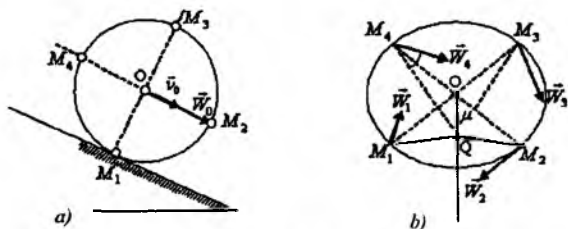
Endi tezlanishning yo'nalishi topiladi:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{\cos \varphi (1 + \sin \varphi)}{(1 + \sin \varphi)^2} = \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2})^2} = \frac{\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}.$$

yoki
$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

bundan
$$\mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

11-masala (И.В. Мещерский 18.23). G'ildirak vertikal tekislikda og'ma to'g'ri chiziqi yo'lda sirg'anmay g'ildiraydi. Ikkita o'zaro perpendikular diametrlardan biri relsga parallel bo'lgan paytda ular uchlarining tezlanishlari topilsin; shu paytda g'ildirak markazining tezligi $v_0 = 1 \text{ m/s}$, tezlanishi $W_0 = 3 \text{ m/s}^2$; g'ildirak radiusi (193-shakl).



193-shakl.

Yechish. Masala tezlanishlar oniy markazidan foydalanib yechiladi. G'ildirakning oniy aylanish markazi uning rels bilan urunish nuqtasi M_1 nuqtada bo'ladi. O nuqtani qutb deb olsak, g'ildirakning aylanish burchak tezgligi

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{1m/s}{0,5} = 2 \frac{1}{s}. \quad (a)$$

bo'ladi.

G'ildirak markazining tezlanishi qutb nuqtaga nisbatan urinma tezlanishni beradi, shuning uchun

$$\varepsilon = \frac{W_0}{R} = \frac{3m/s^2}{0,5} = 6 \frac{1}{s^2}. \quad (b)$$

Endi μ burchak topiladi:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

O nuqta tezlanishining musbat yo'nalishi bilan μ burchak tashkil qiluvchi yarim to'g'ri chiziq olinadi va bu yarim to'g'ri chiziqda O nuqtadan boshlab uzunligi

$$OQ = \frac{W_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

ga teng kesma ajratiladi. Q nuqta tezlanishlar oniy markazi bo'ladi:

$$OQ = \frac{3m/s^2}{\sqrt{36 + 16}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2\sqrt{13}} m. \quad (d)$$

$\triangle OQM_1$ dan QM_1 masofa topiladi:

$$QM_1 = \sqrt{R^2 + OQ^2 - 2 \cdot OQ \cdot R \cos(90^\circ - \mu)} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{52} - 2 \cdot \frac{3}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{2} \sin \mu},$$

$$\sin \mu = \frac{\operatorname{tg} \mu}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \mu}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{1 + \frac{9}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Natijada,

$$QM_1 = \sqrt{\frac{22}{55} - \frac{9}{26}} = \frac{1}{\sqrt{13}} m.$$

Q markazga nisbatan M_1 nuqtaning tezlanishi quyidagicha hisoblanadi:

$$W_1 = QM_1 \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Demak,

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{36 + 16} \frac{m}{s^2} = 2m / s^2.$$

\vec{W}_1 tezlanish M_1Q kesma bilan μ burchak tashkil qiladi.

Endi QM_2 masofani topamiz:

$$QM_2 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{52} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2\sqrt{13}} \cos \mu},$$

$$\cos \mu = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \mu}} = \frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$QM_2 = \sqrt{\frac{22}{52} - \frac{3}{13}} = \sqrt{\frac{10}{52}}$$

Natijada,

$$W_2 = QM_2 \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{52}} \cdot \sqrt{52} \approx 3,16m / s^2.$$

Xuddi shunday

$$QM_3 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{52} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2\sqrt{13}} \cos(90^\circ + \mu)} = \sqrt{\frac{22}{52} + \frac{3}{2\sqrt{13}} \sin \mu} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}} m,$$

$$W_3 = QM_3 \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{52} \frac{m}{s^2} \approx 6,32m / s^2$$

$$QM_4 = \sqrt{\frac{22}{52} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2\sqrt{13}} \cos(180^\circ - \mu)} =$$

$$= \sqrt{\frac{22}{52} + \frac{3}{2\sqrt{13}} \cos \mu} = \sqrt{\frac{22}{52} + \frac{3}{13}} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{52}} m,$$

$$W_4 = QM_4 \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{52}} \cdot \sqrt{52} \frac{m}{s^2} \approx 5,83m / s^2.$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *Н.Н. Бухгольц*. Основной курс теоретической механики. ч.1—2. М.: Наука, 1972.
2. *Н.Н.Никитин*. Курс теоретической механики. М.: — Высшая школа, 1980.
3. *Н.В. Бутенин, Я.Л. Луниц, Д.Р. Меркин*. Курс теоретической механики. т.1—2., М.: Наука — 1985.
4. *А.А. Яблонский*. Курс теоретической механики. М.: — Высшая школа, ч. 1,2., 1984.
5. *М.А. Павловский, Л.Ю. Акинфеева, О.Ф. Бойчук*. Теоретическая механика. — Киев.: Высшая школа, 1990.
6. *М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон*. Теоретическая механика в примерах и задачах. — М.: Наука, т.1—2, 1975.
7. *О.Э. Кене*. Сборник коротких задач по теоретической механике. М.:— Высшая школа, 1989.
8. *М.Т. О'розбойев*. Nazariy mexanika asosiy kursi. Toshkent: — 1961.
9. *Mirsaidov M.M., Baymuradova L.I., Giyasova N.T.* Nazariy mexanika. Toshkent «O'zbekiston nashriyoti» Toshkent: — 2008.
10. *T.R. Rashidov, Sh. Shoziyotov, K.B. Mo'minov*. Nazariy mexanika. T.: O'kituvchi, 1990.
11. *S.Q. Aziz-Qoriyev, Sh.X. Yangurazov*. Nazariy mexanikadan masalalar yechish. T.: O'qituvchi, 1-2 qism, 1974.
12. *I.V. Meshcherskiy*. Nazariy mexanikadan masalalar to'plami. T.: — 1989.
13. *А.М. Файн*. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Высшая школа, 1978.
14. *To'rayev H.T., Tilavov A.* Nazariy mexanika. Statika. Samarqand: Sam DU Nashri, 2008.
15. *To'rayev H.T., Tilavov A.*, Nazariy mexanika. Kinematika. Samarqand: Sam DU Nashri, 2010.
16. Абу Али ибн Сино и естественные науки. Ташкент.: «Фан», 1981. — С.127.
17. *B. Jo'rayev*. Ibn Sino ijodida fizika va texnika muammolari. Samarqand.: — «Zarafshon», 1996.

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
-------------	---

STATIKA

I BOB. STATIKANING ASOSIY AKSIOMALARI. TEKISLIKDA KESISHUVCHI KUCHLAR SISTEMASI

1.1. Statikaning asosiy tushunchalari va aksiomalari.....	8
1.2. Bog'lanish va bog'lanish reaksiyalari.....	13
1.3. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi.....	16
1.4. Tekislikda kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar.....	20
1.5. Markazga va o'qqa nisbatan kuch hamda kuchlar sistemasining momenti.....	28
1.6. Kuch va kuchlar sistemasining nuqtaga hamda o'qqa nisbatan momentini hisoblash tartibi.....	34

II BOB. PARALLEL KUCHLAR SISTEMASI

2.1. Parallel kuchlar sistemasi.....	41
2.2. Juftlar nazariyasi.....	45
2.3. Bir tekislikda yotgan parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari.....	49
2.4. Bir tekislikda yotgan parallel kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar.....	50
2.5. Tekislikda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari.....	58
2.6. Tekislikda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartiga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar.....	59
2.7. Parallel kuchlar markazi.....	69
2.8. Og'irlik markazi.....	73
2.9. Og'irlik markazining koordinatalarini topish usullari.....	77
2.10. Ba'zi oddiy jismlarning og'irlik markazlari.....	79
2.11. Gulden-Pap teoremlari.....	85
2.12. Jismlarning og'irlik markazini topishga doir masalalar.....	86

III BOB. TAQSIMLANGAN KUCHLAR SISTEMASI

3.1. Taqsimlangan kuchlar.....	95
--------------------------------	----

3.2. Taqsimlangan kuchlarga doir masalalar.....	98
3.3. Qattiq jismlar sistemasining muvozanati.....	104
3.4. Qattiq jismlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar.....	107

IV BOB. ISHQALANISH VA FERMLAR HISOBI

4.1. Sirpanishdagi ishqalanish qonunlari.....	116
4.2. Ishqalanish kuchi tufayli yuzaga keladigan jismlar muvozanatini tekshirishga doir masalalarni yechish uchun uslubiy tavsiyalar.....	118
4.3. Yumalashda hosil bo'ladigan ishqalanish kuchi.....	124
4.4. Yumalashda hosil bo'ladigan ishqalanish kuchini topishga doir masalalar.....	127
4.5. Fermalar hisobi. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni tugunlarni qirqish usuli bilan topish.....	130
4.6. Fermalar hisobiga doir masalalarning tugunlarni qirqish usuli bilan yechishga doir uslubiy tavsiyalar.....	131

V BOB. FAZODA KUCHLAR SISTEMASI

5.1. Fazoda ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari.....	140
5.2. Fazoda kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish usubi.....	141
5.3. Fazoda juftlar sistemasini qo'shish.....	146
5.4. Fazoda ixtiyoriy ravishda yo'nalgan kuchlar sistemasi.....	149
5.5. Bosh vektor va bosh momentni hisoblash formulalari.....	152
5.6. Kuchlar sistemasini keltirishning xususiy hollari.....	155
5.7. Kuchlar sistemasini keltirishga doir masalalar.....	159
5.8. Fazoda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari.....	167
5.9. Fazoda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish bo'yicha tavsiyalar.....	168
5.10. Fazoda parallel kuchlar sistemasining muvoznat shartlari.....	177
5.11. Fazoda parallel kuchlar sistemasining muvoznat shartlariga doir masalalar.....	179

VI BOB. NUQTA HARAKATINING TENGLAMASI VA KINEMATIK ELEMENTLARI

6.1. Asosiy tushunchalar.....	183
6.2. Nuqta harakatining berilish usullari.....	185
6.3. Nuqtaning trayektoriya bo'ylab harakat qonuniga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar. Masalalar.....	188
6.4. Moddiy nuqtaning tezligi.....	192
6.5. Nuqta tezligini topishga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar. Masalalar.....	201

6.6. Moddiy nuqtaning tezlanishi.....	209
6.7. Differensial geometriyadan ba'zi ma'lumotlar.....	211
6.8. Harakati tabiiy usulda berilgan nuqtaning tezlanishi.....	214
6.9. Nuqtaning tekis va tekis o'zgaruvchan harakati.....	217
6.10. Aylana bo'ylab harakatlanuvchi nuqtaning tezlanishi.....	218
6.11. Nuqta tezlanishining qutb koordinatalaridagi ifodasi.....	219
6.12. Nuqta tezlanishini topishga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar. Masalalar.....	222
6.13. Egri chiziqli koordinatalar.....	231
6.14. Tezlikning egri chiziqli koordinatalardagi ifodasi.....	234
6.15. Tezlanishning egri chiziqli koordinatalardagi ifodasi.....	237
6.16. Egri chiziqli koordinatalar sistemasida nuqta tezligi va tezlanishini topishga doir uslubiy tavsiyalar. Masalalar.....	242

VII BOB. QATTIQ JISMNING ILGARILANMA VA QO'ZG'ALMAS O'Q ATROFIDAGI AYLANMA HARAKATI

7.1. Asosiy tushunchalar va ta'riflar. Mexanik sistema va qattiq jismning erkinlik darajasitavsiyalar.....	248
7.2. Qattiq jismning ilgarilanma harakati.....	250
7.3. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati.....	258

VIII BOB. QATTIQ JISMNING TEKIS PARALLEL HARAKATI

8.1. Asosiy tushunchalar.....	270
8.2. Tekis shakl nuqtalarining tezliklari.....	276
8.3. Tekis shakl nuqtalarining tezlanishlari.....	279
8.4. Tezlanishlar oniv markazi.....	280
8.5. Tekis shaklning o'z tekisligidagi harakat tenglamasi.....	282
8.6. Qattiq jismning tekis parallel harakatiga doir masalalarni yechish bo'yicha uslubiy tavsiyalar. Masalalar.....	287

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.....	300
---------------------------------------	------------

УДК: 531.1(075)
КБК 22.21

H. T. TO‘RAYEV, A. TILAVOV

**NAZARIY MEXANIKA.
STATIKA VA KINEMATIKA**

Darslik

Toshkent — «Noshir» — 2012

Muharrir X. Po‘latxo‘jayev
Musahhah D. Mamadaliyeva
Badiiy muharrir Sh. Odilov
Texnik muharrir X. Xamidullayev

Nashriyot litsenziyasi AI № 200, 28.08.2011-y.
Bosishga ruxsat etildi 25.08.2012-y. Bichimi 60×84 ¹/₁₆.
«Times TAD» garniturasida. Ofset qog‘ozida. Ofset usulida chop etildi.
Hajmi 19,0 b.t. Adadi 500 nusxa. Buyurtma № 52.

«NOSHIR» nashriyoti, Toshkent sh., Langar ko‘ch., 78.

«NOSHIR» O‘zbekiston-Germaniya qo‘shma korxonasi bosmaxonasida chop etildi, Toshkent sh., Langar ko‘ch., 78.



ISBN 978-9943-353-87-9



9 789943 353879