Н.В.Ефимов, Э.Р.Розендорн

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Предметом книги является объединенный курс линейной алгебры и многомерной аналитической геометрии. Главное место в ней занимают основы теории конечномерных линейных пространств и линейных преобразований. В книге изложена тензорная алгебра и на соответствующих примерах показаны ее приложения. На примере групп преобразований читатель познакомится с элементами теории групп. В последней главе дается введение в проективную геометрию. Книга рассчитана на студентов механико-математических факультетов университетов. Она может быть полезна студентам втузов, инженерам и научным работникам разных специальностей, изучающим или использующим методы линейной алгебры и многомерной геометрии.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга задумана как учебник по объединенному курсу линейной алгебры и аналитической геометрии. Замысел книги возник в связи с лекциями Н. В. Ефимова, которые читались для студентов механико-математического факультета МГУ в 1964—1966 годах. Однако материал этих лекций подвергнут авторами полной переработке и значительно расширен.

Указанный лекционный курс проводился каждый раз во втором семестре (как и теперь проводится в МГУ) при четырех часах лекций и четырех часах практических занятий в неделю. В настоящей книге ему приблизительно соответствуют главы I—VI, §§ 1—7 главы VII и главы VIII, IX, XI. При этом §§ 8—13 главы VII, глава X и глава XII могут рассматриваться в виде трех независимых дополнений к отмеченным выше основным разделам. В МГУ этот материал не входит в объединенный курс второго семестра и сообщается с большей или меньшей степенью общности в других курсах. Например, тематика параграфов 8—13 гл. VII (приведение матриц к жордановой форме) входит в курс алгебры на третьем семестре.

С точки зрения авторов основная часть книги и дополнения различаются весьма условно. Книга имеет свою структуру, достаточно определенную внутренними связями между всеми ее разделами, независимо от распределения их по кафедрам и лекционным курсам (объединенным или раздельным, обязательным или факультативным). Что же касается выбора вошедших в книгу разделов, то авторы старались делать его с учетом потребностей других математических дисциплин, а также механики и физики. Мы надеемся, что весь материал книги окажется полезным. Материал этот к тому же вполне доступен. Во всяком случае, вся предварительная подготовка, которую мы предполагаем, может быть дана в первом семестре в курсах аналитической геомерии и алгебры, как бы просто они ни читались. Нужно лишь твердое знание элементарного материала по этим дисциплинам. В частности, для гл. XII желательно предварительное знакомство с проективными преобразованиями и проективными свойствами фигур на плоскости. Заметим еще, что в гл. X читатель ради упрощения дела может пропустить пункты 13 — 23 § 3, весь § 5 и п. 10 § 7. После этих сокращений материал гл. X может служить минимальной алгебраической основой для теории многомерного интегрирования.

В заключение отметим, что уже первые пять глав настоящей книги содержат материал, находящий широкие приложения в математике, механике, физике. Эти главы, дополненные отдельными вопросами из последующих глав, могут быть использованы при изучении математики в высших технических учебных заведениях с повышенной математической программой.

30 августа 1969 года

Н. В. Ефимов

Э. Р. Розендорн

ВВЕДЕНИЕ

В математике и в ее приложениях часто приходится рассматривать некоторые множества объектов, для которых установлены так называемые линейные операции: сложение и умножение на число. Например, в механике рассматривают всевозможные силы, приложенные к данному твердому телу. Две силы, приложенные к одной точке, можно сложить, т. е. заменить одной силой, приложенной к той же точке. Силу можно умножить на число α, т. е. увеличить в α раз, сохранив линию действия. В механике рассматривают также сложение скоростей и умножение скорости на число; рассматривают сложение ускорений и умножение ускорения на число. Силы, скорости и ускорения различны по своей физической природе. Однако линейные операции, которые производятся над ними, единообразны с геометрической точки зрения. Поэтому в механике принят общий способ изображения этих объектов в виде направленных отрезков. Тем самым все они обслуживаются общими правилами сложения и умножения на число геометрических векторов.

Но это обобщение идет гораздо дальше. Рассмотрим, например, множество всех функций, непрерывных на числовой оси, или множество всех периодических функций с данным периодом, или множество всех алгебраических многочленов. В каждом из этих множеств мы можем естественным образом рассматривать линейные операции (понимая сумму функций и произведение функции на число, как принято в анализе). Объекты, о которых мы сейчас говорим, не похожи на силы, скорости и ускорения или на геометрические векторы. Линейные операции над ними также не похожи на линейные операции над векторными величинами механики или над геометрическими векторами.

Однако здесь есть и нечто общее, позволяющее изучать линейные операции абстрактно, отвлекаясь от конкретной природы объектов.

Прежде всего, в любом нашем примере дело обстоит так, что линейные операции над элементами данного множества (то есть над объектами, из которых оно состоит) дают в результате элементы того же множества. Именно, складывая геометрические векторы или умножая их на число, мы получаем геометрические векторы; складывая непрерывные функции или умножая их на число, мы получаем непрерывные функции. То же самое можно повторить про периодические функции с данным периодом или про алгебраические многочлены.

Кроме того, линейные операции, различные для разных множеств, имеют ряд общих свойств (рассмотренных ниже, в первой главе). Наличие общих свойств позволяет изучать линейные операции вообще.

Изучая множества с данными в них линейными операциями, их объединяют понятием линейного пространства. Теория линейных пространств находит чрезвычайно широкие применения в современной математике и соседних с ней науках.

Определение линейного пространства будет сформулировано в ближайшем параграфе. Оно не будет содержать какихлибо описаний элементов рассматриваемых множеств или производимых линейных операций. Будут потребованы только некоторые свойства линейных операций, общие для всех частных случаев. Эти требования выражаются аксиомами линейного пространства. Следует заметить, что требования, которые выражены в аксиомах, весьма немногочисленны, и остается возможность добавлять к ним новые предположения. Поэтому в общем понятии линейного пространства возникает некоторая классификация, так что все-таки приходится иметь дело не с единым линейным пространством, а с различными классами линейных пространств, и теория, основанная на аксиомах линейного пространства, разветвляется.

Прежде всего, все линейные пространства разделяются на конечномерные и бесконечномерные. Конечномерные пространства (одномерные, двумерные, трехмерные и т. д.) изучаются в линейной алгебре, которая является предметом этой книги. Бесконечномерные пространства рассматриваются в различных разделах функционального анализа; у нас они будут встречаться лишь эпизодически, для иллюстрации некоторых общих выводов.

К числу конечномерных пространств принадлежит трехмерное пространство геометрических (свободных) векторов.

Это пространство содержит в себе бесконечно много двумерных и одномерных пространств, называемых подпространствами (каждое двумерное подпространство состоит из векторов, лежащих в одной плоскости, каждое одномерное подпространство состоит из векторов, лежащих на одной прямой). Таким образом, для одномерных, двумерных и трехмерных линейных пространств мы имеем геометрические модели, с которыми естественно связаны наши наглядные представления о векторах. При переходе к многомерным пространствам наглядность частично теряется, но теория этих пространств сохраняет геометрический характер. Дело в том, что ее основные понятия строятся путем заимствования у трехмерного случая и надлежащего обобщения на многомерный. Не последнюю роль здесь играет сохранение геометрической терминологии; например, говоря о разнообразных множествах, мы называем их пространствами. Заметим кстати, что элементы всяких линейных пространств принято называть векторами. Вместе с тем линейные пространства называют также векторными пространствами. Геометричность терминологии и основных понятий линейной алгебры помогает ее контактам с геометрией. Мы имеем в виду здесь аналитическую геометрию, причем многомерную, т. е. многомерный аналог обычной (трехмерной) аналитической геометрии. Более того, линейная алгебра и аналитическая геометрия настолько тесно связаны, что между ними трудно провести четкую грань. Мы и не будем к этому стремиться. Выше мы назвали в качестве предмета нашей книги линейную алгебру. С таким же основанием можно сказать, что ее предметом является многомерная аналитическая геометрия.

ГЛАВА I. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Аксиомы линейного пространства

1. Пусть имеется множество L, состоящее из каких угодно элементов. Для обозначения элементов этого множества мы будем употреблять малые буквы латинского алфавита a, $b, \ldots, x, y, \ldots$ Только в одном случае мы употребим дальше аналогичным образом греческую букву θ. Вместе с элементами множества L будут рассматриваться числа или любые действительные, или любые комплексные. Для обозначения чисел мы воспользуемся малыми греческими буквами α, β, ... (исключая θ).

2. Мы предполагаем, что в множестве L определено понятие равенства элементов. Это значит, что все элементы множества L некоторым образом распределены по классам (подмножествам L) так, что разные классы не имеют общих элементов. При этом два элемента a, b считаются равными ($a = b$), если они принадлежат одному классу. Не исключается, что каждый класс состоит только из одного элемента; в таком случае равенство $a = b$ означает, что через a и b обозначен один и тот же элемент множества L.

В дальнейшем мы будем иногда говорить, что совершается *допустимая замена* некоторого элемента множества L, если вместо этого элемента берется любой другой элемент одного с ним класса, иначе говоря, любой другой равный ему элемент.

3. В ряде случаев вместо заранее данного разбиения множества L на классы равных элементов будут непосредственно указываться условия допустимых замен (т. е. условия, при которых элементы считаются равными). Тогда для произвольного элемента a из L будет определен класс $\mathscr{A}$, состоящий из всех элементов L, равных элементу a. Однако, чтобы получить требуемое распределение множества L по таким классам, нужно обеспечить следующие три обстоятельства:

1) Сам элемент a должен войти в класс $\mathscr{A}$, то есть условия равенства должны быть такими, чтобы элемент a считался равным самому себе: $a=a$ (иначе говоря, замена элемента самим собой должна быть допустимой).

2) Если $a=b$, то должно быть $b=a$.

3) Если $a=b$ и $b=c$, то должно быть $a=c$.

При соблюдении этих трех обстоятельств (и только в этом случае) любые два элемента, входящие в класс $\mathscr{A}$, равны между собой; кроме того, класс $\mathscr{A}$ включает все элементы множества L, равные какому-нибудь элементу этого класса.

Иллюстрация сказанного дается на примерах § 2.

4. Будем говорить, что в множестве L определены действия сложения и умножения на число, если:

1) каждым двум элементам a, b из множества L сопоставлен некоторый элемент того же множества L, называемый их суммой; сумма элементов a, b обозначается через $a+b$;

2) каждому числу α и каждому элементу a из множества L сопоставлен некоторый элемент того же множества L, называемый произведением α на a или a на α; произведение α на a обозначается через αa или $a\alpha$.

Предполагается, что действия сложения и умножения на число инвариантны относительно допустимых замен элементов множества L: если $a=a'$, $b=b'$, то $a+b=a'+b'$ и $\alpha a=\alpha a'$.

Предполагается также, что соблюдены требования следующих восьми аксиом:

1) Для любых a, b из L

$$a+b=b+a.$$

Это свойство сложения называется перестановочным или коммутативным.

2) Для любых a, b, c из L

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Это свойство называется сочетательным или ассоциативным. Оно позволяет писать сумму без скобок, считая $a+b+c= =(a+b)+c=a+(b+c)$. Вследствие первой аксиомы безразличен также и порядок записи слагаемых.

3) В множестве L существует элемент θ такой, что

$$a+\theta=a$$

для любого a из L. Элемент θ называется нулевым.

4) Для любого элемента x из L существует элемент y из L такой, что

$$x+y=\theta.$$

Элемент y называется противоположным для x и обозначается через $-x$.

5) $1\cdot a=a$.

6) $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$.

7) $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$.

8) $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$.

В последних четырех аксиомах a и b означают произвольные элементы из L; α и β — произвольные числа.

Отметим, что свойство, выраженное седьмой аксиомой, называется распределительным или дистрибутивным для сомножителя из L (эта аксиома разрешает распределять сомножитель из L по составляющим числового сомножителя). Восьмая аксиома выражает распределительное свойство для числового сомножителя.

5. Основное определение. Множество L, рассматриваемое вместе с заданными в нем действиями сложения и умножения на число, называется *линейным пространством.*

Подчеркнем, что в этом определении подразумевается, что сложение и умножение удовлетворяют всем свойствам, перечисленным в п. 4.

Восемь аксиом, сформулированных в п. 4, называют аксиомами линейного пространства.

Как мы уже говорили во введении, элементы линейного пространства принято называть также векторами, а само линейное пространство можно называть векторным пространством. Впрочем, очень часто множество L мы будем называть пространством, не употребляя никаких прилагательных, но считая, что речь идет о векторном пространстве.

6. Если для векторов пространства L определено умножение только на действительные числа, то L называется действительным векторным пространством. Если определено умножение векторов из L также и на комплексные числа, то пространство L называется комплексным.

Всюду в дальнейшем, употребляя термин «произвольное число», мы будем иметь в виду любое действительное число, если речь идет о действительном пространстве, и любое комплексное число, если речь идет о комплексном пространстве.

Значительная часть фактов, изложенных в ближайших главах, относится и к действительным, и к комплексным пространствам. В тех случаях, когда какое-либо свойство справедливо только для действительного или только для комплексного пространства, это будет особо оговариваться.

7. Иногда вместо умножения на числа рассматривается умножение элементов из L на элементы произвольного алгебраического поля U (с соблюдением тех же восьми аксиом линейного пространства). В этом случае множество с заданными линейными операциями называется линейным (или векторным) пространством над полем U.

§ 2. Примеры линейных пространств

Предварительное замечание. Если относительно какого-либо конкретного множества с заданными в нем линейными операциями утверждается, что оно есть линейное пространство, то для доказательства этого утверждения нужно проверить, что заданные операции в самом деле являются линейными, то есть удовлетворяют требованиям восьми известных нам аксиом.

1. Пространство геометрических векторов. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве множество всех геометрических векторов. Заметим, что два элемента этого множества, т. е. два вектора, считаются равными в том случае (и только в том случае), когда они коллинеарны, имеют равные длины и направлены в одну сторону. Таким образом, речь идет о свободных векторах, точка приложения которых может выбираться произвольно.

Допустимые замены вектора заключаются в его параллельных перенесениях к новым точкам приложения. Соблюдение трех условий п. 3 § 1 при этом очевидно. Линейные операции над геометрическими векторами производятся хорошо известным образом: сложение — по правилу параллелограмма, умножение на действительное число α есть растяжение вектора в α раз. Обе операции инвариантны относительно допустимых замен. В самом деле, если $a = a'$, $b = b'$, то параллелограмм, построенный на векторах a', b', получается параллельным перенесением параллелограмма, который построен на a, b; тем самым, вектор $a' + b'$ получается параллельным перенесением вектора $a+b$, то есть $a+b=a'+b'$. Столь же просто усматривается равенство $\alpha a=\alpha a'$.

Геометрические векторы с указанным определением линейных операций образуют действительное линейное пространство. Нулевым элементом здесь является вектор нулевой длины. Если x — любой вектор, то в качестве противоположного ему вектора $y=-x$ следует понимать вектор той же длины и противоположного направления. Требования аксиом 1) — 8) п. 4 § 1 при этом соблюдены, в чем легко убедиться при помощи простых геометрических рассуждений. Разумеется, в этом нет чего-либо случайного. Дело в том, что геометрические векторы послужили исходной моделью для общего понятия линейного пространства, т. е. в аксиомах 1) — 8) высказаны некоторые свойства линейных операций над геометрическими векторами, хорошо известные в элементарной векторной алгебре.

Можно было бы спросить, почему в аксиомах 1) — 8) не потребованы другие, столь же простые и важные свойства геометрических векторов, которыми постоянно пользуются в векторных выкладках? Например, что умножение любого вектора на число нуль дает нулевой вектор или что при умножении любого вектора x на число -1 получается противоположный вектор $-x$. Оказывается, в этом нет надобности, поскольку такие свойства можно уже доказать, т. е. вывести из аксиом, что и будет сделано в § 3.

2. Нулевое пространство. Пусть L — множество, состоящее только из одного элемента. Что представляет собой этот элемент, нам безразлично. Обозначим его буквой θ. Определим в множестве L линейные операции, полагая, что θ в сумме с самим собой дает θ и что при умножении θ на любое действительное число мы получаем также θ. Легко убедиться, что в этом случае требования аксиом 1) — 8) соблюдены. Таким образом, данное множество L является действительным линейным пространством, состоящим из единственного, очевидно, нулевого элемента. Ясно, что с тем же успехом множество L можно определить как комплексное пространство.

Замечание. Все другие (действительные или комплексные) линейные пространства обязательно имеют бесконечное количество элементов. Именно, в п. 2 § 3 показано, что если линейное пространство содержит хотя бы один элемент a, отличный от нулевого, то для различных чисел α и β элементы αa и βa также различны.

3. Координатное пространство. Пусть теперь L означает множество, элементами которого служат всевозможные упорядоченные наборы действительных чисел, по n чисел в каждом (n — зафиксированное натуральное число). Называя какой-нибудь набор из n чисел упорядоченным, мы считаем, что составляющие его числа занумерованы. (При этом они не обязаны быть различными.) Имея в виду, что элемент x из L есть набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, будем писать $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Считая x произвольным, рассмотрим еще один, также произвольный элемент $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Элементы x и y будем полагать равными в том и только в том случае, когда $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$. Определим линейные операции в L соотношениями

$$x + y = \{x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots,\ x_n + y_n\}, \tag{1}$$

$$\alpha x = \{\alpha x_1,\ \alpha x_2, \ldots,\ \alpha x_n\}. \tag{2}$$

Тогда требования первых двух аксиом линейного пространства соблюдены, поскольку сложение действительных чисел обладает перестановочным и сочетательным свойствами. Для проверки аксиом 3), 4) достаточно указать в множестве L нулевой элемент; именно:

$$\theta = \{0,\ 0, \ldots,\ 0\}. \tag{3}$$

Вместе с тем ясно, что в L для любого x существует противоположный элемент $-x$; именно:

$$-x = \{-x_1, -x_2, \ldots, -x_n\}. \tag{4}$$

Аксиома 5) сразу усматривается из соотношения (2). Наконец, аксиомы 6), 7), 8) соблюдаются вследствие соотношений (1), (2), а также вследствие сочетательного и распределительного свойств для умножения действительных чисел.

Таким образом, множество L с заданными линейными операциями является действительным линейным пространством. Мы будем называть его действительным координатным пространством K_n.

Замечание. Рассматриваемое сейчас множество L не позволяет считать множитель α в соотношении (2) комплексным числом, так как при комплексном α в правой части (2) получится набор комплексных чисел, не являющийся элементом множества L.

4. Обозначим на этот раз через L множество всех упорядоченных наборов из комплексных чисел, по n чисел в каждом.

Линейные операции определим формулами (1) и (2), считая теперь, что α, x_j, y_j ($j=1,\ldots,n$) — комплексные числа. Как и в предыдущем пункте, все аксиомы 1) — 8) соблюдены, причем нулевой и противоположный элементы выражаются формулами (3) и (4). Таким образом, L есть линейное пространство, комплексное, поскольку комплексны числа α. Мы будем называть его комплексным координатным пространством K_n.

Замечание. Ничто не мешает нам, однако, в соотношениях (1), (2) употреблять в качестве α только действительные числа (при комплексных x_j, y_j). В таком случае множество L оказывается действительным линейным пространством. Отсюда ясно, что одни и те же предметы (например, упорядоченные наборы комплексных чисел) могут служить в качестве векторов различных линейных пространств. Поэтому в общем определении § 1 линейным пространством называется не просто множество L, а множество *вместе* с заданными в нем линейными операциями, причем необходимо указывать, из какого поля берутся множители α.

5. Пространство матриц. Как принято, будем называть прямоугольной матрицей, точнее, $m \times n$-матрицей таблицу чисел, расположенных в m строчках по n чисел в каждой. Если числа, составляющие матрицу, обозначены через a_{ik} ($i=1, 2,\ldots, m$; $k=1, 2,\ldots, n$), а сама матрица — через a, то будем писать

$$a = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Самой этой записью данные числа располагаются также и по столбцам (число a_{ik} находится в строке с номером i и в столбце с номером k). Наряду с подробной записью матрицы в виде таблицы мы часто будем употреблять сокращенную запись:

$$a = \| a_{ik} \|.$$

Условимся матрицу называть действительной или комплексной в случаях, когда она составлена соответственно из действительных или из комплексных чисел.

Пусть L — множество всех $m \times n$-матриц, например действительных. Две матрицы будем считать равными элементами множества L в том и только в том случае, когда в них соответствующие места заняты одинаковыми числами (т. е. на пересечении i-й строки и k-го столбца и в одной и в другой матрице стоит одно и то же число). Установим в множестве L линейные операции. Именно, если $a = \| a_{ik} \|$, $b = \| b_{ik} \|$ — произвольные матрицы из L, α — произвольное действительное число, то мы положим

$$a + b = \| a_{ik} + b_{ik} \|, \qquad \alpha a = \| \alpha a_{ik} \|. \tag{5}$$

Иначе говоря, при сложении $m \times n$-матриц a и b мы попарно складываем одинаково расположенные в них числа a_{ik} и b_{ik}; при умножении матрицы a на число α мы умножаем на α все числа, составляющие матрицу a. Совершенно так же, как в п. 3, можно установить, что линейные операции (5) удовлетворяют требованиям аксиом 1) — 8); при этом роль нулевого элемента в L играет матрица θ, состоящая из одних нулей (нулевая матрица), а противоположным элементом для $a = \| a_{ik} \|$ служит матрица $\| -a_{ik} \|$. Тем самым L с линейными операциями (5) является действительным линейным пространством. Аналогично множество всех комплексных $m \times n$-матриц с линейными операциями (5), где α — комплексное, является комплексным линейным пространством. Разумеется, рассматривая комплексные $m \times n$-матрицы, мы можем считать α действительным; тогда мы получим действительное линейное пространство тех же комплексных матриц.

З а м е ч а н и е. В частном случае $m = 1$ (при данном n) мы получаем матрицы, каждая из которых имеет только одну строку (состоящую из n чисел). Линейное пространство таких матриц есть не что иное, как координатное пространство K_n (см. п. 3). При $n = 1$ и данном m получаются матрицы, имеющие только один столбец; ясно, что они также образуют координатное пространство, именно K_m. Более того, пространство любых $m \times n$-матриц можно рассматривать как координатное пространство K_{mn}, поскольку ничто не мешает установить для всех элементов матриц общую нумерацию по какому-нибудь единому стандарту и выписать их в одну строку или в один столбец.

6. Пространство непрерывных функций. Возьмем на числовой оси произвольный сегмент $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ и обозначим через L множество всех функций, непрерывных на этом сегменте и принимающих действительные значения. Имея в виду, что элемент x из L есть некоторая непрерывная функция $x(\tau)$, $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, будем писать $x = \{x(\tau)\}$. Считая x произвольным, рассмотрим еще один также произвольный элемент $y = \{y(\tau)\}$. Элементы x и y будем считать равными в том и только в том случае, когда $x(\tau) \equiv y(\tau)$, т. е. когда $x(\tau)$ и $y(\tau)$ совпадают в любой точке τ сегмента $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$. Определим линейные операции в L, полагая

$$x + y = \{x(\tau) + y(\tau)\}, \quad \alpha x = \{\alpha x(\tau)\}, \tag{6}$$

где α — действительное число. Иначе говоря, мы складываем функции и умножаем их на числа обычным образом, как принято в анализе. Существенно заметить, что при сложении непрерывных функций и при умножении непрерывной функции на постоянную получаются снова непрерывные функции. Легко убедиться, что линейные операции (6) удовлетворяют требованиям аксиом 1)—8). При этом нулевой элемент θ есть функция, равная нулю во всех точках τ сегмента $[\tau_1, \tau_2]$; для элемента $x = \{x(\tau)\}$ противоположным служит $\{-x(\tau)\}$. Таким образом, множество всех действительных непрерывных на $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ функций с линейными операциями (6) есть действительное линейное пространство.

Если в качестве L мы возьмем множество всех непрерывных на $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ функций с комплексными значениями, т. е. функций вида $x(\tau) = u(\tau) + iv(\tau)$, то в этом множестве можно задать линейные операции (6) при комплексном α. Все аксиомы 1)—8) здесь также удовлетворены, и мы получаем комплексное линейное пространство непрерывных функций с комплексными значениями. Аналогично примерам, которые рассматривались в пп. 4 и 5, мы можем и в данном случае множество непрерывных функций

$$x(\tau) = u(\tau) + iv(\tau)$$

сделать действительным линейным пространством, если в равенствах (6) будем в качестве α допускать только действительные числа.

7. Пространство интегрируемых функций[1]). Рассмотрим всевозможные действительные функции, интегрируемые на сегменте $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$. Множество этих функций обозначим через L.

Известно, что если мы изменим интегрируемую функцию в одной точке как угодно (сохранив остальные ее значения), то она останется интегрируемой, а интеграл от нее будет равен тому же числу, что и до изменения. То же самое можно сказать, если функция изменяется в нескольких точках и даже в бесконечном множестве точек при условии, что это множество имеет меру нуль. Такого рода изменения функции с точки зрения теории интегрирования несущественны. Поэтому в вопросах теории интегрирования целесообразно не различать две функции, если они совпадают на сегменте $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ почти везде, т. е. во всех точках сегмента $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, кроме, может быть, некоторого множества меры нуль.

В связи с этим условимся два элемента $x = \{x(\tau)\}$, $y = \{y(\tau)\}$ множества L считать равными, если $x(\tau) = y(\tau)$ почти везде на сегменте $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$. Соответственно допустимая замена произвольного элемента $x = \{x(\tau)\} \in L$ заключается в любом изменении значений функции $x(\tau)$ на любом множестве меры нуль.

Легко убедиться, что такое определение равенства элементов L удовлетворяет трем требованиям п. 3 § 1. Для первых двух это очевидно. Пусть теперь $y = x$, то есть $y(\tau) = x(\tau)$ всюду, кроме некоторого множества $\mathscr{M}_1$ меры нуль; пусть $z = x$, то есть $z(\tau) = x(\tau)$ всюду, кроме некоторого множества $\mathscr{M}_2$ меры нуль. Тогда $y(\tau) = z(\tau)$ всюду, кроме, быть может, объединения множеств $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$. Но объединение двух множеств меры нуль есть множество меры нуль. Следовательно, $y(\tau) = z(\tau)$ почти всюду, а значит, $y = z$. Таким образом, и третье требование удовлетворено: если $y = x$, $z = x$, то $y = z$.

Если в множестве L определить линейные операции согласно формулам (6) п. 6, то будут обеспечены и инвариантность линейных операций относительно допустимых замен, и соблюдение всех аксиом 1)—8). Не останавливаясь на доказательстве этих обстоятельств, заметим только, что в данном

---

[1]) Читатель, не знакомый с теорией интегрирования, этот пункт может пропустить.

случае нулевым элементом является $\theta=\{\theta(\tau)\}$, где $\theta(\tau)$ — любая функция, равная нулю почти везде на сегменте $[\tau_1, \tau_2]$.

Множество L с заданными линейными операциями называется пространством функций, интегрируемых на сегменте $[\tau_1, \tau_2]$.

8. Контрпример. Обозначим через L множество всех упорядоченных наборов действительных чисел по $n\,(n>1)$ чисел в каждом, т. е. множество того же вида, что и в п. 3. Определим сумму двух элементов из L так же, как в п. 3:

$$x+y=\{x_1+y_1,\ x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n\}. \tag{7}$$

Умножение x на α пусть дается правилом

$$\alpha x=\{\alpha x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n\} \tag{8}$$

(справа на α умножается только x_1). Вследствие соотношения (7) аксиомы 1)—4) удовлетворены, причем

$$\theta=\{0,\ 0, \ldots,\ 0\}, \qquad -x=\{-x_1, -x_2, \ldots, -x_n\}.$$

Легко проверить также, что соблюдаются требования аксиом 5), 6), 8). Вместе с тем аксиома 7) нарушена:

$$(\alpha+\beta)\,x=\{(\alpha+\beta)\,x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n\},$$
$$\alpha x+\beta x=\{(\alpha+\beta)\,x_1,\ 2x_2, \ldots,\ 2x_n\}.$$

Таким образом, множество L с операциями (7), (8) не является линейным пространством.

§ 3. Простейшие следствия из аксиом линейного пространства

1. Перейдем к изложению общей теории, т. е. к выводам из аксиом 1)—8) независимо от частных особенностей конкретных линейных пространств. Имеют место следующие предложения:

1) *В каждом линейном пространстве нулевой вектор только один.*

Доказательство. Пусть элементы θ_1 и θ_2 нулевые. Вследствие аксиом 1) и 3) они совпадают:

$$\theta_2=\theta_2+\theta_1=\theta_1+\theta_2=\theta_1.$$

Замечание. Разумеется, когда мы говорим, что нулевой вектор только один, то мы не различаем равные векторы. В том же смысле следует понимать утверждение единственности и в других теоремах (например, в следующем предложении).

2) *Для любого вектора x существует только один противоположный вектор.*

Доказательство. Предположим, что $x+y_1=\theta$ и что $x+y_2=\theta$. Аксиомы 1)—4) позволяют записать следующую цепочку равенств:

$$y_2=y_2+\theta=y_2+(x+y_1)=(y_2+x)+y_1= \\ =(x+y_2)+y_1=\theta+y_1=y_1,$$

то есть $y_2=y_1$.

3) *Произведение любого вектора x на число 0 равно нулевому вектору θ.*

Доказательство. Для данного вектора x возьмем противоположный вектор y. Используя аксиомы 2)—5) и 7), получаем

$$0\cdot x=0\cdot x+\theta=0\cdot x+(x+y)=(0+1)x+y=x+y=\theta.$$

4) *Произведение любого вектора x на число -1 равно вектору, противоположному для x, т. е. $(-1)x=-x$.*

Доказательство. Нужно установить, что $x+(-1)x=\theta$. Из предыдущего свойства и аксиом 5) и 7) имеем

$$x+(-1)x=(1-1)x=0\cdot x=\theta.$$

5) *Произведение нулевого вектора θ на любое число α равно нулевому вектору.*

Доказательство. Возьмем произвольный вектор x. Используя аксиому 6) и свойство 3), находим

$$\alpha\theta=\alpha(0\cdot x)=(\alpha\cdot 0)x=0\cdot x=\theta.$$

2. Замечания. 1) Из свойства 5) следует, что произведение ненулевого вектора на число, не равное нулю, всегда есть ненулевой вектор. В самом деле, если бы при $\lambda\neq 0$, $a\neq\theta$ было $\lambda a=\theta$, то вследствие свойства 5) и аксиом 5)—6) мы получили бы

$$a=1\cdot a=\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda\right)a=\frac{1}{\lambda}(\lambda a)=\frac{1}{\lambda}\theta=\theta,$$

что противоречит условию $a\neq\theta$.

2) Если $\alpha \neq \beta$ и $a \neq \theta$, то $\alpha a \neq \beta a$. В самом деле, если бы оказалось $\alpha a = \beta a$, то $\alpha a + (-\beta) a = \theta$ или $(\alpha - \beta) a = \theta$, что противоречит предыдущему, так как $\alpha - \beta \neq 0$ и $a \neq \theta$.

3. В линейном пространстве определено действие вычитания. Именно, вектор x называется *разностью* вектора b и вектора a, если $x + a = b$, что записывается $x = b - a$.

Докажем, что *для любых элементов a и b разность существует и единственна.*

Существование. Докажем, что вектор $x = b + (-1) a$ является разностью $b - a$. Вследствие аксиом 2), 3), 5), 7) и свойства 3) имеем:

$$x + a = b + (-1) a + a = b + (-1 + 1) a = b + 0 \cdot a = b.$$

Единственность. Покажем, что если x является разностью $b - a$, то его всегда можно представить в виде $x = b + (-1) a$. В самом деле, из равенства $x + a = b$ с помощью аксиом 2), 3), 5), 7) и свойства 3) получаем

$$x = x + \theta = x + (1 - 1) a = x + a + (-1) a = b + (-1) a.$$

4. В дальнейшем мы будем пользоваться аксиомами линейного пространства и свойствами, установленными в этом параграфе, без подробных пояснений. Вследствие аксиом и полученных здесь результатов выкладки, в которых участвуют элементы линейного пространства, проводятся аналогично преобразованиям в элементарной алгебре, с той лишь разницей, что нет умножения и деления векторов и нужно различать число нуль и нулевой вектор.

В частности, можно переносить вектор из одной части векторного равенства в другую, умножая переносимый вектор на минус единицу (или, что то же самое, заменяя его противоположным вектором).

§ 4. Линейная комбинация. Линейная зависимость

1. Пусть дано конечное число элементов линейного пространства: $a, b, c, \ldots, q$. Пусть далее $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa$ — произвольные числа.

Определение 1. Всякий элемент x пространства L, представимый в виде

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots + \varkappa q,$$

называется *линейной комбинацией* элементов $a, b, c, \ldots, q$. Говорят также, что x линейно выражается через $a, b, c, \ldots, q$.

Определение 2. Линейная комбинация называется *тривиальной*, если $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \varkappa = 0$, и называется *нетривиальной*, если среди чисел $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ хотя бы одно отлично от нуля.

Определение 3. Система векторов $a, b, c, \ldots, q$ называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация векторов $a, b, c, \ldots, q$, равная нулевому вектору; иначе говоря, если справедливо равенство

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots + \varkappa q = \theta,$$

где среди чисел $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa$ хотя бы одно отлично от нуля.

Определение 4. Система векторов $a, b, c, \ldots, q$ называется *линейно независимой*, если равенство

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots + \varkappa q = \theta$$

возможно только в том случае, когда

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \varkappa = 0.$$

2. Рассмотрим свойства введенных понятий.

1) Непосредственно из определений видно, что всякая конечная система векторов является либо линейно зависимой, либо линейно независимой. Покажем, что *система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.*

В самом деле, равенство $\alpha\theta = \theta$ при любом α, в частности при $\alpha \neq 0$, установлено в п. 1 § 3. Пусть теперь $x \neq \theta$ и $\alpha x = \theta$. Тогда $\alpha = 0$ согласно п. 2 § 3.

2) *Если часть системы линейно зависима, то и вся система линейно зависима.*

Пусть известно, что в системе $a, b, c, \ldots, q$ часть, состоящая, например, из векторов $c, \ldots, q$, линейно зависима. Значит, существуют числа $\gamma, \ldots, \varkappa$, не все равные нулю и такие, что $\gamma c + \ldots + \varkappa q = \theta$. Но тогда линейная комбинация $0 \cdot a + 0 \cdot b + \gamma c + \ldots + \varkappa q = \theta$ нетривиальна, поскольку отличные от нуля числа имеются среди $\gamma, \ldots, \varkappa$.

3) *Если вся система линейно независима, то и любая ее часть линейно независима.*

Это вытекает непосредственно из предыдущего свойства. В частности, нулевой вектор не может входить в линейно независимую систему.

4) *Если система линейно зависима, то в ней найдется хотя бы один вектор, который линейно выражается через остальные векторы этой системы.*

В самом деле, если $\alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots + \varkappa q = \theta$, а среди коэффициентов $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ есть отличные от нуля, то любой из векторов, имеющих ненулевые коэффициенты, можно линейно выразить через остальные векторы системы. Так например, если $\alpha \neq 0$, то

$$a = -\frac{\beta}{\alpha} b - \frac{\gamma}{\alpha} c - \ldots - \frac{\varkappa}{\alpha} q.$$

Свойство 4) не только необходимо, но и достаточно для линейной зависимости системы векторов. Именно, справедливо следующее утверждение.

5) *Если некоторый элемент системы является линейной комбинацией остальных элементов этой системы, то система линейно зависима.*

Действительно, если

$$a = \beta' b + \gamma' c + \ldots + \varkappa' q,$$

то

$$1 \cdot a + (-\beta') b + (-\gamma') c + \ldots + (-\varkappa') q = \theta,$$

и линейная комбинация в левой части последнего равенства нетривиальна.

6) *Пусть* $a_1, \ldots, a_k$ — *какие-нибудь векторы. Пусть каждый из векторов* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *линейно выражается через* $a_1, \ldots, a_k$:

$$\begin{gathered} c_1 = \alpha_{11} a_1 + \ldots + \alpha_{1k} a_k, \\ c_2 = \alpha_{21} a_1 + \ldots + \alpha_{2k} a_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n = \alpha_{n1} a_1 + \ldots + \alpha_{nk} a_k. \end{gathered}$$

Пусть далее вектор b *линейно выражается через* $a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_n$:

$$b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_n c_n.$$

Тогда вектор b *линейно выражается через векторы* $a_1, \ldots, a_k$.

Доказательство.

$$b = (\lambda_1 + \mu_1 \alpha_{11} + \ldots + \mu_n \alpha_{n1}) a_1 + \ldots \\ \ldots + (\lambda_k + \mu_1 \alpha_{1k} + \ldots + \mu_n \alpha_{nk}) a_k.$$

§ 5. Лемма о базисном миноре

1. Пусть дана прямоугольная матрица $A = \|a_{ij}\|$. Будем рассматривать строчки этой матрицы как векторы координатного пространства K_n, а столбцы — как векторы координатного пространства K_m (см. § 2, пп. 3—5). Тогда мы сможем говорить о линейной зависимости и независимости строк данной матрицы или о линейной зависимости и независимости ее столбцов.

2. Пусть отмечено k разных строк и k разных столбцов матрицы $A (k \leqslant n,\ k \leqslant m)$. Элементы[1]) матрицы A, стоящие на пересечении отмеченных строк и столбцов, сами образуют некоторую, очевидно квадратную, матрицу B. Определитель матрицы B называется минором порядка k данной матрицы A.

Отметим, если это возможно, еще одну строку и еще один столбец матрицы A, не повторяя тех, которые уже были отмечены раньше. Теперь все отмеченные строки и столбцы своим пересечением определяют некоторую квадратную матрицу C.

Определитель матрицы C есть минор порядка $k+1$ матрицы A. Мы будем называть его окаймляющим для первоначального взятого минора (т. е. для определителя матрицы B).

Замечания. 1) Если $k=n$ или $k=m$, то для миноров порядка k окаймляющих миноров нет.

2) Если $k=1$, то матрица B состоит из одного элемента матрицы A. Миноры первого порядка представляют собой численные значения элементов матрицы.

3. Определение 1. Минор матрицы называется *базисным*, если он не равен нулю, а окаймляющие его миноры либо все равны нулю, либо отсутствуют вовсе.

Определение 2. Столбцы матрицы, пересекающие базисный минор, называются *базисными столбцами*. Аналогичная терминология употребляется для строк.

Замечание. Матрица может иметь несколько базисных миноров и соответственно несколько систем базисных

---

[1]) Элементами матрицы называют составляющие ее числа: a_{11}, a_{12}, ... Однако точнее следует сказать, что элементами матрицы являются символы a_{11}, a_{12}, ... При этом два элемента a_{ik} и a_{jl} считают различными, если $i \neq j$ или $k \neq l$ (не исключая возможности, что a_{ik} и a_{jl} обозначают одно и то же число). Заметим еще, что в ряде случаев рассматриваются матрицы, где под a_{ik} подразумеваются не числа, а какие-нибудь другие объекты, например функции.

столбцов. Всякая матрица, кроме нулевой, имеет по крайней мере один базисный минор и, тем самым, по крайней мере одну систему базисных столбцов.

4. Лемма о базисном миноре. *Столбцы матрицы, пересекающие базисный минор, линейно независимы; всякий столбец через них линейно выражается.*

Эта же лемма, согласно определению 2, может быть высказана так:

Базисные столбцы линейно независимы; любой столбец матрицы линейно выражается через базисные.

Доказательство первого утверждения леммы — от противного. Предположим, что базисные столбцы линейно зависимы. Тогда линейно зависимы столбцы базисного минора. Но в таком случае базисный минор равен нулю, что противоречит его определению.

Доказательство второго утверждения. Будем считать для определенности, что рассматриваемый базисный минор имеет порядок r и занимает левый верхний угол матрицы:

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccccc} a_{11} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rk} & \ldots & a_{rn} \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mr} & \ldots & a_{mk} & \ldots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Обозначим этот базисный минор через D.

Возьмем произвольные индексы $i, k\ (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ и составим определитель порядка $r+1$

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix}.$$

Докажем, что $\Delta_{ik}=0$. Рассмотрим три возможных случая:

1) $i \leqslant r$. В этом случае $\Delta_{ik}=0$, так как в нем последняя строка совпадает с одной из предыдущих строк.

2) $k \leqslant r$. В этом случае $\Delta_{ik}=0$ потому, что в нем последний столбец совпадает с одним из предыдущих.

3) $i>r$, $k>r$. В этом случае определитель Δ_{ik} является окаймляющим для минора D и равен нулю потому, что D — базисный минор.

Зафиксируем k и будем считать, что i пробегает всевозможные значения от 1 до m.

Разложим Δ_{ik} по элементам последней строки. Алгебраические дополнения элементов последней строки обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}$. При изменении i эти величины остаются неизменными, так как алгебраическое дополнение какого-либо элемента зависит только от его места в определителе, но не зависит от численного значения самого элемента. В результате разложения получим

$$\Delta_{ik}=A_1a_{i1}+\ \ldots\ +A_ra_{ir}+A_{r+1}a_{ik}=0, \tag{1}$$

причем

$$A_{r+1}=D\neq 0. \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) дают

$$a_{ik}=\left(-\frac{A_1}{D}\right)a_{i1}+\ \ldots\ +\left(-\frac{A_r}{D}\right)a_{ir}.$$

Напомним, что k зафиксировано, i пробегает все значения от 1 до m; поэтому

$$\left\|\begin{matrix}a_{1k}\\ \vdots\\ a_{mk}\end{matrix}\right\|=\left(-\frac{A_1}{D}\right)\left\|\begin{matrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{matrix}\right\|+\ldots+\left(-\frac{A_r}{D}\right)\left\|\begin{matrix}a_{1r}\\ \vdots\\ a_{mr}\end{matrix}\right\|. \tag{3}$$

Формула (3) представляет k-й столбец матрицы (который может быть взят произвольно) в виде линейной комбинации базисных столбцов. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Разумеется, аналогичная лемма имеет место и для базисных строк.

5. Как следствие леммы о базисном миноре получается следующая.

Т е о р е м а. *Определитель квадратной матрицы равен нулю в том и только в том случае, когда между столбцами этой матрицы имеется линейная зависимость. Аналогичное утверждение справедливо и для строк.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если столбцы $n\times n$-матрицы зависимы, то ее определитель равен нулю, что известно как одно из основных свойств определителей. Покажем, что если столбцы независимы, то определитель не равен нулю. В самом деле, если столбцы независимы, а определитель равен 0, то должен найтись базисный минор M порядка $< n$. Но тогда имеется столбец, который не входит в систему базисных столбцов, соответствующую минору M, и который линейно выражается через эту систему, т. е. между столбцами имеется зависимость, что противоречит предположению.

§ 6. Основная лемма о двух системах векторов

1. Пусть даны две системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $b_1, b_2, \ldots, b_m$ из одного и того же линейного пространства.

Лемма 1 (основная). *Если система $b_1, b_2, \ldots, b_m$ линейно независима, а каждый из векторов b_i линейно выражается через систему $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то $m \leqslant k$.*

Доказательство проведем от противного. Предположим, что $m > k$. Выпишем формулы, выражающие векторы b_i через векторы a_j:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = \alpha_{11}a_1 + \ldots + \alpha_{1k}a_k, \\ b_2 = \alpha_{21}a_1 + \ldots + \alpha_{2k}a_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m-1} = \alpha_{m-1}a_1 + \ldots + \alpha_{m-1\,k}a_k, \\ b_m = \alpha_{m1}a_1 + \ldots + \alpha_{mk}a_k \end{array}\right\} \quad (1)$$

и рассмотрим матрицу $\|\alpha_{ij}\|$. Если матрица $\|\alpha_{ij}\|$ нулевая, то $b_1 = \ldots = b_m = \theta$ и система $b_1, \ldots, b_m$ линейно зависима, что противоречит условию леммы. Пусть матрица $\|\alpha_{ij}\|$ не нулевая. Тогда она имеет базисный минор, причем порядок базисного минора не превышает числа столбцов k. Число строк в матрице $\|\alpha_{ij}\|$, равное m, больше k и, следовательно, больше числа базисных строк этой матрицы.

Таким образом, матрица $\|\alpha_{ij}\|$ имеет некоторую систему базисных строк и еще по крайней мере одну строку, не входящую в эту систему. Согласно лемме о базисном миноре указанная строка линейно выражается через базисные. Но это означает, что между строками матрицы имеется линейная зависимость (см. § 4, п. 2, предложения 5 и 2). Напишем ее в виде

$$\lambda_1 \{\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1k}\} + \ldots + \lambda_m \{\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mk}\} = \{0, \ldots, 0\}, \quad (2)$$

где среди чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ есть отличные от нуля.

Умножим равенства (1) соответственно на $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и сложим их почленно. Учитывая линейную зависимость (2), найдем

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m = a_1(\lambda_1\alpha_{11} + \ldots + \lambda_m\alpha_{m1}) + \ldots$$
$$\ldots + a_k(\lambda_1\alpha_{1k} + \ldots + \lambda_m\alpha_{mk}) = 0 \cdot a_1 + \ldots + 0 \cdot a_k = \theta.$$

Система $b_1, \ldots, b_m$ оказалась линейно зависимой, что невозможно по условию леммы. Полученное противоречие показывает, что лемма 1 доказана.

2. Говорят, что векторы $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ образуют линейно независимую подсистему в системе $a_1, \ldots, a_k (k \geqslant r)$, если векторы $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ линейно независимы и входят в систему $a_1, \ldots, a_k$.

Очевидно, что система $a_1, \ldots, a_k$ содержит (по крайней мере одну) линейно независимую подсистему в том и только в том случае, когда среди векторов $a_1, \ldots, a_k$ имеется хотя бы один ненулевой.

3. Лемма 2. *Пусть система векторов $a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}$ линейно зависима, а ее подсистема $a_1, \ldots, a_r$ линейно независима. Тогда вектор a_{r+1} линейно выражается через векторы $a_1, \ldots, a_r$.*

Доказательство. Имеем зависимость

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r + \lambda_{r+1} a_{r+1} = \theta, \tag{3}$$

где среди чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}$ есть отличные от нуля. Ясно, что λ_{r+1} не может быть равным нулю, так как в этом случае оказалась бы зависимой подсистема $a_1, \ldots, a_r$. Таким образом, $\lambda_{r+1} \neq 0$, и мы из формулы (3) находим

$$a_{r+1} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right) a_1 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}}\right) a_r,$$

что и требовалось доказать.

4. Определение. Пусть система $a_1, \ldots, a_k$ содержит линейно независимую подсистему, состоящую из r векторов. Число r называется *рангом* системы $a_1, \ldots, a_k$, если всякая ее подсистема из большего числа векторов линейно зависима, либо если таких подсистем нет совсем (в случае $r = k$).

Коротко: *рангом системы называется максимальное число ее линейно независимых векторов.*

Если все векторы системы $a_1, \ldots, a_k$ нулевые, то будем говорить, что ее ранг равен нулю.

5. Лемма 3 (обобщенная основная). *Пусть каждый из векторов $b_1, \ldots, b_m$ линейно выражается через векторы $a_1, \ldots, a_k$. Тогда ранг системы $b_1, \ldots, b_m$ не больше ранга системы $a_1, \ldots, a_k$.*

Доказательство. Обозначим через r ранг системы $a_1, \ldots, a_k$. Если $r=0$, то справедливость утверждения леммы 3 очевидна. Если $r=k$, то справедливость утверждения леммы 3 следует из леммы 1. В самом деле, ранг системы $b_1, \ldots, b_m$ по лемме 1 не больше $k=r$.

Пусть $0<r<k$. Тогда в системе $a_1, \ldots, a_k$ найдется r линейно независимых векторов. Пусть это будут векторы $a_1, \ldots, a_r$. Добавляя к ним еще один вектор из системы $a_1, \ldots, a_k$, всякий раз будем получать линейно зависимые системы, а именно

$$\begin{array}{l} a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}; \\ a_1, \ldots, a_r, a_{r+2}; \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_1, \ldots, a_r, a_k. \end{array}$$

По лемме 2 каждый из векторов $a_{r+1}, \ldots, a_k$ линейно выражается через векторы $a_1, \ldots, a_r$. С другой стороны, по условию леммы каждый вектор $b_1, \ldots, b_m$ линейно выражается через все векторы $a_1, \ldots, a_k$. Отсюда и из предыдущего заключения следует, что каждый вектор $b_1, \ldots, b_m$ линейно выражается через $a_1, \ldots, a_r$ (см. § 4, п. 2, предложение 6). Но тогда по лемме 1 число векторов в любой линейно независимой подсистеме системы $b_1, \ldots, b_m$ не больше r. Лемма 3 доказана.

§ 7. Ранг матрицы

1. Определение. Рангом матрицы называется максимальное число ее линейно независимых столбцов.

Иначе говоря, ранг матрицы есть ранг системы ее столбцов, рассматриваемых как векторы координатного пространства.

Ранг матрицы A будем обозначать символом $\operatorname{Rang} A$.

Если матрица A нулевая, то $\operatorname{Rang} A=0$, так как у нулевой матрицы нет линейно независимых столбцов. Отметим, что ранг ненулевой матрицы всегда положителен.

2. Теорема о ранге матрицы. *Ранг произвольной матрицы равен максимальному порядку ее миноров, отличных от нуля.*

Доказательство. Если $\operatorname{Rang} A = 0$, то A — нулевая матрица, и у нее нет отличных от нуля миноров. Естественно считать в этом случае, что максимальный порядок отличных от нуля миноров равен нулю.

Пусть далее матрица A — не нулевая. Если некоторый ее минор M порядка r не равен нулю, а все миноры более высокого порядка равны нулю или отсутствуют вовсе, то M является базисным минором. По лемме о базисном миноре столбцы матрицы A, пересекающие минор M, линейно независимы. Поэтому $\operatorname{Rang} A \geqslant r$. По той же лемме любой столбец матрицы A линейно выражается через базисные столбцы. Отсюда, применяя лемму 3 § 6, находим, что $\operatorname{Rang} A \leqslant r$. Таким образом, $\operatorname{Rang} A = r$, что и требовалось доказать.

3. Из рассуждений, проведенных в предыдущем пункте, вытекает ряд важных следствий:

1) *Ранг ненулевой матрицы равен порядку любого ее базисного минора.*

В самом деле, если M — произвольный базисный минор, r — его порядок, то, повторяя предыдущие рассуждения, находим, что $\operatorname{Rang} A = r$.

2) *Все базисные миноры ненулевой матрицы имеют одинаковый порядок, равный ее рангу.*

3) *Если в матрице A минор M базисный, то все миноры более высокого порядка равны нулю (а не только миноры, окаймляющие M).*

4) *Максимальное число линейно независимых строк произвольной матрицы A равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов (то есть, равно рангу A).*

Доказательство. Если матрица A нулевая, то число линейно независимых строк, как и число линейно независимых столбцов, равно нулю. Пусть A — ненулевая матрица. Транспонируем матрицу A. Тогда ее строки перейдут в столбцы транспонированной матрицы A^*, линейно независимые строки перейдут в линейно независимые столбцы A^*, а максимальный порядок отличных от нуля миноров сохранится, поскольку при транспонировании каждый из миноров сохраняет свое числовое значение. Таким образом,

$$\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} A^*$$

и равен максимальному числу линейно независимых строк матрицы A.

5) *Если* A — *произвольная* $m \times n$-*матрица, то* $\operatorname{Rang} A$ *не превышает меньшего из двух чисел* m *и* n.

4. Из предыдущего ясно, что ранг матрицы не изменяется при перестановке ее столбцов или строк.

Кроме того, ранг матрицы не изменится, если к одному из ее столбцов прибавить линейную комбинацию других столбцов, поскольку такая операция не изменяет числовых значений ее миноров.

Аналогично ранг сохраняется, если к одной из строк прибавить линейную комбинацию других строк.

Перечисленные в этом пункте свойства обычно используются для вычисления ранга матрицы. Именно, данную матрицу преобразуют так, чтобы ранг не изменился, но чтобы в результате получилась матрица, у которой сразу виден базисный минор.

§ 8. Конечномерные и бесконечномерные пространства. Базис

1. Определение 1. Линейное пространство называется *n-мерным*, если в нем имеется линейно независимая система, состоящая из n векторов, а всякая система, состоящая из большего числа векторов, является линейно зависимой.

Число n называется *размерностью* линейного пространства. Таким образом, *размерность пространства — это наибольшее число его линейно независимых векторов.*

Например, пространство геометрических векторов (см. § 2, п. 1) трехмерно, так как в нем имеется три независимых вектора, а любые четыре связаны линейной зависимостью. Геометрические векторы, расположенные в одной плоскости, образуют двумерное пространство; в нем любые два неколлинеарных вектора линейно независимы, а всякие три вектора линейно зависимы. Векторы, лежащие на одной прямой, образуют одномерное пространство. Линейное пространство, содержащее единственный элемент — нулевой вектор θ, — является нульмерным.

2. Все n-мерные пространства ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$) образуют класс конечномерных пространств. Но этим не исчерпывается множество всех линейных пространств вообще.

Определение 2. Линейное пространство называется *бесконечномерным*, если для любого целого числа $N > 0$ в нем найдется линейно независимая система, состоящая из N векторов.

Пример. Линейное пространство непрерывных на данном сегменте функций (см. § 2, п. 6) является бесконечномерным. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть степенные функции $1, \tau, \tau^2, \ldots, \tau^N$.

Нетрудно установить их линейную независимость. В самом деле, любая их линейная комбинация представляет собой многочлен степени не выше N

$$\alpha_0 + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2 + \ldots + \alpha_N\tau^N = p(\tau).$$

Но у всякого многочлена с ненулевыми коэффициентами есть лишь конечное число корней, поэтому $p(\tau) \equiv 0$, т. е. $\{p(\tau)\} = \theta$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_N = 0.$$

Тем самым показано, что рассматриваемые элементы независимы, а само пространство бесконечномерно, поскольку число N может быть сколь угодно большим.

3. Введем весьма важное для дальнейшего

Определение 3. Система векторов $e_1, \ldots, e_n$ в пространстве L называется базисом, если:

1) векторы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы;

2) любой вектор x из пространства L линейно выражается $e_1, \ldots, e_n$, то есть

$$x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n. \tag{1}$$

Равенство вида (1) называется разложением вектора x по базису $e_1, \ldots, e_n$; числовые коэффициенты $x_1, \ldots, x_n$ называются координатами вектора x в этом базисе.

4. Теорема. *Линейное пространство n-мерно тогда и только тогда, когда в нем есть базис, состоящий из n векторов.*

Доказательство. 1) Пусть пространство L является n-мерным. Это значит, что в нем есть линейно независимая система $e_1, \ldots, e_n$, состоящая из n векторов, а добавив к ней произвольный вектор x из L, мы получим линейно зависимую систему $e_1, \ldots, e_n, x$. По лемме 2 из § 6 вектор x линейно выражается через векторы $e_1, \ldots, e_n$. Поэтому система $e_1, \ldots, e_n$ образует базис в L.

2) Пусть L имеет базис $e_1, \ldots, e_n$. Рассмотрим в пространстве L произвольную линейно независимую систему векторов $b_1, \ldots, b_m$. По определению базиса каждый из векторов b_j линейно выражается через $e_1, \ldots, e_n$. Поэтому $m \leqslant n$ в силу леммы 1 из § 6.

Значит, любая система векторов из L, содержащая более чем n векторов, линейно зависима. Вместе с тем, базис $e_1, \ldots, e_n$ образует линейно независимую систему, содержащую n векторов. Таким образом, размерность L равна n.

Замечание. Как видно из проведенного доказательства, в n-мерном пространстве любая независимая система из n векторов является базисом.

5. В качестве приложения доказанной в п. 4 теоремы установим, что координатное пространство K_n является n-мерным.

С этой целью рассмотрим в K_n векторы

$$\begin{aligned} e_1 &= \{1,\ 0,\ \ldots,\ 0\}, \\ e_2 &= \{0,\ 1,\ \ldots,\ 0\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= \{0,\ 0,\ \ldots,\ 1\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Согласно определению линейных операций в K_n (см. § 2, п. 3) любой вектор из K_n линейно выражается через векторы $e_1, \ldots, e_n$. Именно:

$$x = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\} = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n. \tag{3}$$

Отсюда ясно, что линейная комбинация векторов $e_1, \ldots, e_n$ равна $\theta = \{0,\ 0,\ \ldots,\ 0\}$ только в случае, когда все ее коэффициенты равны нулю. Значит, векторы $e_1, \ldots, e_n$ независимы и составляют базис K_n, так что пространство K_n является n-мерным.

§ 9. Линейные операции в координатах

1. Пусть пространство L является n-мерным, а векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют в нем базис.

Теорема 1. *Разложение вектора по данному базису единственно.*

Доказательство. Пусть вектор x из L имеет два разложения:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

и

$$x = \tilde{x}_1 e_1 + \ldots + \tilde{x}_n e_n.$$

Тогда

$$(\tilde{x}_1 - x_1) e_1 + \ldots + (\tilde{x}_n - x_n) e_n = \theta,$$

а так как векторы базиса линейно независимы, то

$$\tilde{x}_1 - x_1 = \ldots = \tilde{x}_n - x_n = 0,$$

откуда

$$\tilde{x}_1 = x_1, \ldots, \quad \tilde{x}_n = x_n.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Все координаты нулевого вектора θ равны нулю при любом выборе базиса:*

$$\theta = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n. \tag{1}$$

Теорема 2. *При умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число. При сложении двух векторов складываются их соответствующие координаты.*

Доказательство. Пусть даны векторы x, y. Разложим их по базису:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$
$$y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n.$$

Пусть α — произвольное число. Вследствие аксиом линейного пространства имеем:

$$\alpha x = \alpha (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = (\alpha x_1)\, e_1 + \ldots + (\alpha x_n)\, e_n.$$

Таким образом, вектор αx имеет координаты $\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n$. Далее, $x + y = (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) + (y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n) = (x_1 + y_1)\, e_1 + \ldots + (x_n + y_n)\, e_n$, то есть вектор $x + y$ имеет координаты $x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n$.

2. Пусть $a, b, \ldots, q$ — произвольная из L. Разложим каждый из них по базису:

$$\begin{aligned} a &= a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n, \\ b &= b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q &= q_1 e_1 + \ldots + q_n e_n \end{aligned} \tag{2}$$

и наряду с векторами (2) рассмотрим матрицу M, образованную их координатами:

$$M = \begin{Vmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ b_1 & \ldots & b_n \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ q_1 & \ldots & q_n \end{Vmatrix}.$$

Тогда справедлива

Теорема 3. *Ранг системы векторов* (2) *равен рангу матрицы* M.

Доказательство. Предположим, что между векторами (2) имеется линейная зависимость

$$\alpha a + \beta b + \ldots + \varkappa q = \theta. \tag{3}$$

Тогда из формул (1), (3), теоремы 2 и теоремы 1 имеем

$$\alpha\{a_1, \ldots, a_n\} + \beta\{b_1, \ldots, b_n\} + \ldots + \varkappa\{q_1, \ldots, q_n\} = \{0, \ldots, 0\}. \tag{4}$$

Иначе говоря, между строками матрицы M имеется линейная зависимость с теми же коэффициентами $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$. Обратно, из (4) следует (3). Аналогичные рассуждения можно провести, взяв не всю систему (2), а какую-нибудь ее подсистему и соответствующую подсистему строк матрицы M (т. е. те ее строки, в которых выписаны координаты векторов выбранной подсистемы). Поэтому подсистема векторов из системы (2) линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима соответствующая подсистема строк матрицы M. Значит, максимальное число линейно независимых векторов системы (2) совпадает с максимальным числом линейно независимых строк матрицы M. Теорема 3 доказана.

3. Если число векторов в системе (2) равно n, то матрица M становится квадратной. В этом случае получаем следствие предыдущей теоремы:

В n-мерном пространстве система из n векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы координат этих векторов равен нулю:

$$\Delta = \operatorname{Det} M = 0$$

(т. е. когда ранг матрицы M меньше n).

Легко понять, что это утверждение по существу не отличается от теоремы в п. 5 § 5. Оно нередко используется при практической проверке линейной зависимости или независимости конкретных систем векторов.

§ 10. Изоморфизм линейных пространств

1. Пусть даны два линейных пространства L и L' и между ними установлено взаимно однозначное соответствие, то есть:

1) каждому вектору a из L соответствует некоторый вектор a' из L';

2) разные векторы из L имеют разные образы в L';

3) образы элементов из L заполняют все L'.

Определение. Пространства L и L' называются *линейно изоморфными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие с соблюдением условий

$$(a + b)' = a' + b', \tag{1}$$

$$(\alpha a)' = \alpha a'. \tag{2}$$

Взаимно однозначное соответствие, удовлетворяющее условиям (1) и (2), называется *линейным изоморфизмом* пространств L и L'.

Иначе говоря, при линейном изоморфизме образ суммы равен сумме образов, а образ произведения вектора на число равен произведению его образа на это же число. Алгебраические и геометрические свойства линейно изоморфных пространств совершенно тождественны.

Замечание. Линейный изоморфизм возможен лишь при условии, что и в L, и в L' числовые множители берутся из одного и того же алгебраического поля (например, оба пространства L и L' действительны или оба комплексны). Так, если L — комплексное, а L' — действительное, то условие (2) невыполнимо потому, что в L' не определено умножение на комплексные множители, допустимое в L.

Теорема 1. *Для каждого n все действительные n-мерные пространства линейно изоморфны между собой.*

Теорема 1а. *Для каждого n все комплексные n-мерные пространства линейно изоморфны между собой.*

Доказательства теоремы 1 и теоремы 1а формально совпадают, разница состоит лишь в том, что числовые множители берутся из разных полей. Пусть L и L' оба n-мерны, причем оба действительны или оба комплексны. Выберем произвольный базис в каждом из них: $e_1, \ldots, e_n \in L$; $e_1', \ldots, e_n' \in L'$ [1]).

Пусть x — какой-либо элемент из L. Разложим его по базису:

$$x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n.$$

Поставим в соответствие элементу x такой элемент $x' \in L'$, что

$$x' = x_1e_1' + \ldots + x_ne_n'.$$

Вследствие теоремы о единственности разложения вектора по базису такое соответствие взаимно однозначно. Проверим выполнение условий изоморфизма:

1) $(x+y)' = (x_1+y_1)e_1' + \ldots + (x_n+y_n)e_n' =$
$= (x_1e_1' + \ldots + x_ne_n') + (y_1e_1' + \ldots + y_ne_n') = x' + y'$;

2) $(\alpha x)' = (\alpha x_1)e_1' + \ldots + (\alpha x_n)e_n' = \alpha(x_1e_1' + \ldots + x_ne_n') =$
$= \alpha x'$.

Мы видим, что установленное соответствие между L и L' удовлетворяет условиям (1), (2). Теорема доказана.

Замечание. Фактически доказано, что изоморфны любые два линейных пространства одинаковой размерности над одним и тем же алгебраическим полем.

2. Вследствие доказанной теоремы все действительные n-мерные линейные пространства изоморфны действительному координатному пространству K_n; все комплексные n-мерные пространства изоморфны комплексному K_n. Таким образом, в теории n-мерных линейных пространств, не теряя общности, можно ограничиться изучением пространств K_n.

---

[1]) Символ $\in$ обозначает включение данного элемента в данное множество. Запись $e_i \in L$ читается так: «e_i принадлежит L».

3. Теорема 2. *Линейное пространство, изоморфное n-мерному, само является n-мерным.*

Доказательство. Пусть дано n-мерное линейное пространство L, и пусть L' — пространство, изоморфное L. Докажем сначала, что при линейном изоморфизме образом нулевого элемента $\theta \in L$ является нулевой элемент пространства L'. Для этого возьмем произвольный элемент $a' \in L'$ и его прообраз $a \in L$. Так как

$$a = a + \theta,$$

то

$$a' = (a + \theta)'. \tag{3}$$

Но по определению изоморфизма

$$(a + \theta)' = a' + \theta'. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует: $a' + \theta' = a'$. Поэтому образ θ' элемента θ является нулевым элементом пространства L'.

Покажем далее, что если в L взять независимую систему векторов, то их образы будут независимыми векторами в L'.

Пусть $a, b, \ldots, q$ — независимая система в L. Рассмотрим соотношение

$$\alpha a' + \beta b' + \ldots + \varkappa q' = \theta'. \tag{5}$$

По определению изоморфизма равенство (5) можно переписать так:

$$(\alpha a + \beta b + \ldots + \varkappa q)' = \theta'.$$

А так как прообразом нулевого элемента является нулевой вектор из L, то

$$\alpha a + \beta b + \ldots + \varkappa q = \theta. \tag{6}$$

В силу линейной независимости векторов $a, b, \ldots, q$ в L из (6) следует, что

$$\alpha = \beta = \ldots = \varkappa = 0. \tag{7}$$

Таким образом, из (5) вытекает (7); значит, векторы $a', b', \ldots$ $\ldots, q'$ независимы в L'. Так как пространство L является n-мерным, то в нем есть n линейно независимых векторов. Их образы в L' также независимы. Значит, размерность L' не меньше чем n. В этом рассуждении можно поменять ролями L и L', и тогда получится, что размерность L не меньше, чем размерность L'. Поэтому размерность L' равна n, и теорема доказана.

Следствие 1. *Конечномерные пространства разных размерностей не изоморфны.*

Следствие 2. *Бесконечномерное пространство не изоморфно никакому конечномерному.*

§ 11. Соответствие между комплексными и действительными пространствами

1. Конечномерные комплексные и действительные линейные пространства находятся в некотором соотношении, смысл которого будет сейчас выяснен. Начнем с рассмотрения примера.

Геометрические векторы, расположенные на одной прямой, образуют одномерное действительное линейное пространство. Это связано с тем фактом, что посредством умножения на действительное число произвольный ненулевой вектор можно преобразовать в любой другой коллинеарный ему вектор.

Геометрические векторы, расположенные на плоскости, образуют двумерное действительное пространство. Здесь уже нельзя фиксированный вектор преобразовать путем умножения в любой другой. Запас действительных множителей слишком мал по сравнению с разнообразием векторов, входящих в это пространство, и потому два вектора могут оказаться линейно независимыми.

Запас комплексных множителей вдвое богаче. Поэтому умножение векторов на комплексные числа можно определить так, что совокупность геометрических векторов на плоскости превратится в одномерное комплексное пространство. Для этого нужно иметь возможность путем умножения преобразовать всякий ненулевой вектор данной плоскости в любой другой вектор той же плоскости.

Эта задача решается, если определить произведение геометрического вектора на комплексное число следующим образом.

Пусть a — произвольный вектор на плоскости. Будем считать, что он отложен из начала координат. Пусть далее $\alpha = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — комплексный множитель. Повернем вектор a вокруг начала координат на угол φ, а затем умножим на действительное число ρ. Полученный вектор обозначим через b и положим $\alpha a = b$. Складывать векторы по-прежнему будем по правилу параллелограмма.

При таком определении сложения и умножения все аксиомы линейного пространства соблюдаются. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что сами комплексные числа изображаются векторами на плоскости и что у нас сложение векторов и умножение комплексного числа α на вектор a определены точно так же, как обычно определяют сложение комплексных чисел и умножение комплексного числа α на комплексное число a. Поэтому в нашем случае аксиомы 1) — 8) соблюдены, поскольку они соблюдены для комплексных чисел. Теперь какой-нибудь один ненулевой вектор образует линейно независимую систему, а любые два вектора линейно зависимы (поскольку умножение включает поворот), так что полученное комплексное пространство является одномерным.

2. Мы видим, что одномерное комплексное пространство и двумерное действительное пространство можно построить из одних и тех же предметов, именно из векторов на плоскости, причем сложение векторов будет определено одинаково в обоих случаях.

Умножение определяется по-разному, что неизбежно, так как различны запасы множителей. Подчеркнем, однако, что умножение на действительные числа производится в этих пространствах одним и тем же способом.

3. Легко убедиться, что рассмотренный пример является частным случаем более общего явления: каждому комплексному линейному пространству соответствует действительное пространство вдвое большей размерности, причем соответствие хотя и не является изоморфизмом, но очень похоже на изоморфизм. Именно, справедлива

Теорема. *Комплексное линейное пространство C_n размерности n можно взаимно однозначно отобразить на действительное линейное пространство L_{2n} размерности $2n$ так, что соблюдается условие*

$$(a+b)' = a' + b', \tag{1}$$

а для действительных множителей λ соблюдается условие

$$(\lambda a)' = \lambda a'. \tag{2}$$

Замечание. Как и в § 10, здесь штрихом помечается образ в L_{2n} элемента из C_n.

Доказательство теоремы. Согласно § 10 все комплексные n-мерные пространства изоморфны. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением любого из них. Возьмем в качестве C_n комплексное координатное пространство. Пусть

$$a = \{x_1 + ix_2,\ x_3 + ix_4,\ \ldots,\ x_{2n-1} + ix_{2n}\}$$

— любой элемент из C_n. Сопоставим с ним элемент

$$a' = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_{2n-1},\ x_{2n}\}$$

из действительного координатного пространства, которому мы придаем роль L_{2n}. Так как разложение комплексного числа на действительную и мнимую части производится единственным образом, то установленное между C_n и L_{2n} соответствие взаимно однозначно. Справедливость (1) и (2) при действительном λ усматривается с очевидностью.

Замечание. При $n = 1$ имеем

$$a = \{x + iy\}, \qquad a' = \{x,\ y\},$$

что возвращает нас к исходному примеру.

4. В дальнейшем, говоря о геометрических векторах, мы будем считать их элементами действительного пространства.

§ 12. Линейное подпространство

1. Пусть L — линейное пространство, $\tilde{L}$ — некоторое множество элементов из L.

Определение. Множество $\tilde{L}$ в пространстве L называется *линейным подпространством*, если соблюдены следующие условия:

1) для любых x, y из $\tilde{L}$ их сумма $x + y$ также входит в $\tilde{L}$;

2) для любого $x \in \tilde{L}$ и любого числа α произведение $\alpha x \in \tilde{L}$.

Замечание. Ради краткости мы будем во многих случаях линейное подпространство называть просто подпространством.

2. Пусть $\tilde{L}$ — линейное подпространство в L. Операции сложения векторов и умножения их на числа, заданные в L, будем рассматривать применительно лишь к тем элементам, которые входят в $\tilde{L}$. Тогда справедлива

Теорема 1. *В линейном пространстве* L *каждое линейное подпространство* $\tilde{L}$ *само является линейным пространством.*

Доказательство. По определению подпространства действия сложения и умножения на число не выводят за пределы $\tilde{L}$. Аксиомы линейного пространства 1)—2) и 5)—8) заведомо выполнены в $\tilde{L}$, так как они выполнены вообще для всех элементов L. Поэтому для доказательства надо проверить только аксиомы 3) и 4), то есть установить, что вместе с каждым элементом x из $\tilde{L}$ в подпространство L входит противоположный элемент $-x$ и что $\theta \in \tilde{L}$.

По второму условию определения подпространства имеем

$$-x = (-1) \cdot x \in \tilde{L}.$$

Применяя первое условие, получаем

$$\theta = x + (-x) \in \tilde{L}.$$

Теорема доказана.

3. *Пересечением* некоторой совокупности множеств называется совокупность тех элементов, которые одновременно принадлежат всем рассматриваемым множествам. Пересечение двух множеств $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ обозначается символом $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$. Эту запись мы неоднократно используем ниже.

Теорема 2. *Пересечение любой совокупности подпространств данного линейного пространства* L *тоже является линейным подпространством.*

Доказательство для простоты изложения проведем в случае двух подпространств L_1 и L_2. Пусть $L_3 = L_1 \cap L_2$, а векторы x, y принадлежат L_3. Рассматривая x, y как элементы L_1, по определению подпространства находим, что $x + y \in L_1$, $\alpha x \in L_1$ (α — произвольное число). Точно так же $x + y \in L_2$, $\alpha x \in L_2$. Но это значит, что $x + y \in L_3$, $\alpha x \in L_3$, поэтому L_3 удовлетворяет определению подпространства. Теорема 2 доказана.

4. Примеры подпространств. 1) Множество $\tilde{L}$, состоящее только из одного нулевого элемента θ данного пространства, образует его подпространство. Действительно,

$$\theta+\theta=\theta\in\tilde{L},\qquad \alpha\theta=\theta\in\tilde{L}.$$

2) В n^2-мерном пространстве квадратных $n\times n$-матриц множество симметрических матриц $\|a_{ik}\|$, то есть таких, что $a_{ik}=a_{ki}$, образует подпространство.

Множество кососимметрических матриц, характеризующихся тем, что $a_{ik}=-a_{ki}$, также образует подпространство в пространстве $n\times n$-матриц.

3) В пространстве всевозможных функций, заданных на отрезке $\tau_1\leqslant\tau\leqslant\tau_2$, каждое из следующих множеств образует линейное подпространство:

а) функции, непрерывные в некоторой внутренней точке τ_0 интервала $\tau_1<\tau<\tau_2$;

б) функции, непрерывные в интервале $\tau_1<\tau<\tau_2$;

в) функции, непрерывные на всем отрезке $[\tau_1,\ \tau_2]$;

г) функции, непрерывные на отрезке $[\tau_1,\ \tau_2]$ вместе с их производными до порядка N включительно, где N — произвольное целое положительное число;

д) функции, имеющие на отрезке $[\tau_1,\ \tau_2]$ производные всех порядков;

е) всевозможные многочлены, рассматриваемые на отрезке $[\tau_1,\ \tau_2]$;

ж) многочлены, степени которых не превосходят фиксированного целого числа $N>0$.

В примере 3) каждое из перечисленных выше подпространств содержится в предыдущем, и все они, за исключением последнего, бесконечномерны (последнее имеет размерность $N+1$).

з) Зафиксируем на отрезке $[\tau_1,\ \tau_2]$ произвольное множество точек $\mathscr{A}$. Функции, равные нулю в точках множества $\mathscr{A}$, также образуют подпространство. В качестве упражнения предлагаем читателю выяснить, как зависит размерность этого подпространства от выбора множества $\mathscr{A}$.

4) Пусть L — трехмерное пространство геометрических векторов в обычном евклидовом пространстве. Будем считать, что векторы отложены из начала координат. Рассмотрим все векторы, расположенные в какой-нибудь плоскости, проходящей через начало координат. Такие векторы образуют подпространство.

Доказательство того, что перечисленные выше подпространства действительно удовлетворяют определению п. 1, предоставляем читателю.

5. Укажем примеры подмножеств линейного пространства, которые не являются подпространствами.

а) В трехмерном пространстве геометрических векторов рассмотрим совокупность векторов, концы которых лежат в фиксированной плоскости, не проходящей через начало координат. Они не образуют подпространства, так как и сумма двух векторов, и произведение вектора на любое число ($\neq 1$) уже не входят в это подмножество.

б) В этом же пространстве рассмотрим векторы, концы которых лежат на поверхности конуса с вершиной в начале координат. Произведение любого вектора из рассматриваемого множества на любое число снова принадлежит этому множеству. Тем не менее указанное множество не является подпространством, так как операция сложения, вообще говоря, выводит за его пределы.

§ 13. Линейная оболочка

1. Пусть в линейном пространстве L дана система векторов $a_1, \ldots, a_k$.

Определение. Множество всевозможных линейных комбинаций вида

$$x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k$$

называется *линейной оболочкой* данной системы и обозначается символом $L(a_1, \ldots, a_k)$.

Иногда говорят, что $L(a_1, \ldots, a_k)$ — линейная оболочка, натянутая на векторы $a_1, \ldots, a_k$.

Теорема 1. *Линейная оболочка любой системы векторов является линейным подпространством в пространстве L.*

Доказательство. Возьмем из линейной оболочки $L(a_1, \ldots, a_k)$ произвольные векторы x и y:

$$x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k \in L(a_1, \ldots, a_k),$$

$$y = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_k a_k \in L(a_1, \ldots, a_k).$$

Тогда

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1) a_1 + \ldots + (\alpha_k + \beta_k) a_k \in L(a_1, \ldots, a_k).$$

Кроме того, для любого числа λ имеем

$$\lambda x = (\lambda\alpha_1) a_1 + \ldots + (\lambda\alpha_k) a_k \in L(a_1, \ldots, a_k).$$

2. З а м е ч а н и е. Линейная оболочка $L(a_1, \ldots, a_k)$ может совпасть со всем пространством L (например, если $a_1, \ldots, a_k$ — базис в L).

3. Т е о р е м а 2. *Если каждый вектор системы $c_1, \ldots, c_m$ линейно выражается через векторы системы $a_1, \ldots, a_k$, то*

$$L(c_1, \ldots, c_m) \subset L(a_1, \ldots, a_k)\ ^{1)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in L(c_1, \ldots, c_m)$, т. е. выражается через $c_1, \ldots, c_m$. Тогда, согласно свойству 6) п. 2 § 4, вектор x выражается через $a_1, \ldots, a_k$. Следовательно, $x \in L(a_1, \ldots, a_k)$. Таким образом,

$$L(c_1, \ldots, c_m) \subset L(a_1, \ldots, a_k).$$

С л е д с т в и е. *Линейная оболочка любой подсистемы данной системы векторов включается в линейную оболочку всей данной системы.*

Т е о р е м а 3. *Если система $a_1, \ldots, a_k$ имеет ранг $r > 0$, то всякая ее линейно независимая подсистема, состоящая из r векторов, является базисом в линейной оболочке $L(a_1, \ldots, a_k)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система $a_1, \ldots, a_k$ ранга r $(r > 0)$ имеет линейно независимую подсистему, состоящую из r векторов.

Предположим для определенности, что линейно независимы первые r векторов данной системы. Тогда, так как ранг системы $a_1, \ldots, a_k$ равен r, то каждый из векторов $a_1, \ldots, a_k$ линейно выражается через векторы $a_1, \ldots, a_r$. Отсюда и по теореме 2

$$L(a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_k) \subset L(a_1, \ldots, a_r).$$

С другой стороны, по следствию из теоремы 2

$$L(a_1, \ldots, a_r) \subset L(a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_k).$$

Следовательно, $L(a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_k)$ совпадает с $L(a_1, \ldots, a_r)$. Значит, каждый элемент x из $L(a_1, \ldots, a_k)$

---

[1]) Символ $\subset$ обозначает включение первого из указанных множеств во второе. Запись вида $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ читается «$\mathscr{A}$ содержится в $\mathscr{B}$» (при этом не исключено, что $\mathscr{A}$ совпадает с $\mathscr{B}$).

разлагается по $a_1, \ldots, a_r$. Поэтому и вследствие независимости векторов $a_1, \ldots, a_r$ они составляют базис в $L(a_1, \ldots, a_k)$.

Теорема 4. *Если ранг системы $a_1, \ldots, a_k$ равен r, то $L(a_1, \ldots, a_k)$ является r-мерным подпространством.*

Доказательство. Предположим, что $r > 0$. Тогда по предыдущей теореме в $L(a_1, \ldots, a_k)$ имеется базис из r элементов. Отсюда и по теореме из п. 4 § 8 $L(a_1, \ldots, a_k)$ имеет размерность, равную r. Предположим, что $r = 0$. В этом случае $a_1 = \ldots = a_k = \theta$. Но тогда $L(a_1, \ldots, a_k)$ включает только θ и, следовательно, имеет размерность 0.

4. Рассмотрим примеры. 1) Пусть a, b, c $(a \neq \theta)$ — геометрические векторы, лежащие на одной прямой. В этом случае $L(a, b, c) = L(a)$ (рис. 1).

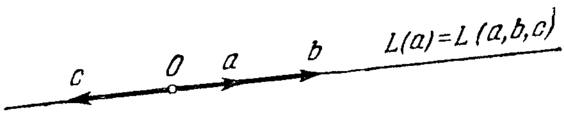


Рис. 1.

Здесь $L(a)$ — одномерное подпространство, которое состоит из всех векторов, лежащих на данной прямой; вектор a в этом подпространстве составляет базис.

2) Пусть a, b, c — геометрические векторы, причем a и b не коллинеарны, $c = a + b$. В этом случае $L(a, b, c) = L(a, b)$ (рис. 2), так что произвольный вектор $x \in L(a, b, c)$ представляется в виде $x = \alpha a + \beta b$.

Здесь $L(a, b)$ — двумерное подпространство, которое состоит из всех векторов, компланарных с векторами a, b. Векторы a, b составляют базис в $L(a, b)$.

3. Пусть функции $1, \tau, \tau^2, \ldots, \tau^N$ рассматриваются как элементы линейного пространства L непрерывных функций, заданных на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$. Тогда $L(1, \tau, \tau^2, \ldots, \tau^N)$ есть подпространство L, состоящее из всех многочленов степени не выше N.

5. В заключение отметим одно очевидное, но важное предложение: *в конечномерном пространстве всякое подпространство является линейной оболочкой некоторой системы элементов.*

Для доказательства достаточно заметить, что в n-мерном пространстве L всякое подпространство $\tilde{L}$ конечномерно (причем имеет размерность $\leqslant n$; это ясно, так как максимальное число линейно независимых элементов в $\tilde{L}$ не может быть больше, чем в L). Но в таком случае либо $\tilde{L}$ нульмерно, и тогда $\tilde{L}=L(\theta)$, либо $\tilde{L}$ имеет базис $q_1, \ldots, q_r$, и тогда $\tilde{L}=L(q_1, \ldots, q_r)$.

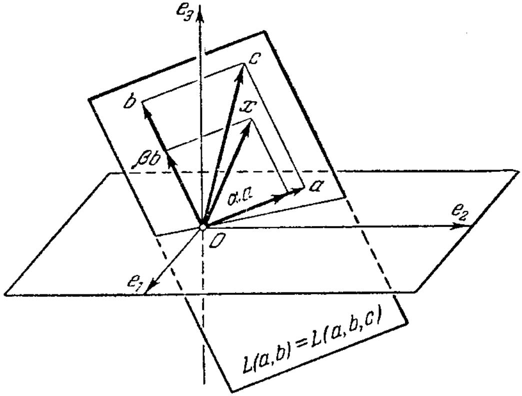


Рис. 2.

В последнем случае подпространство $\tilde{L}$ состоит из тех и только тех векторов, которые имеют вид

$$x=t_1q_1+\ldots+t_rq_r, \tag{1}$$

где $t_1, \ldots, t_r$ — произвольные числа.

Пусть в пространстве L имеется базис $e_1, \ldots, e_n$, причем

$$x=x_1e_1+\ldots+x_ne_n, \qquad q_i=q_{1i}e_1+q_{2i}e_2+\ldots+q_{ni}e_n$$

(здесь $i=1, \ldots, r$; $x_1, \ldots, x_n$ — координаты вектора x; q_{1i}, $q_{2i}, \ldots, q_{ni}$ — координаты вектора q_i).

Тогда формулу (1) можно заменить соотношениями в координатах

$$\left.\begin{array}{l} x_1=q_{11}t_1+q_{12}t_2+\ldots+q_{1r}t_r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=q_{n1}t_1+q_{n2}t_2+\ldots+q_{nr}t_r. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Соотношения вида (2) называются *параметрическими уравнениями* подпространства $L(q_1, \ldots, q_r)$.

§ 14. Сумма подпространств. Прямая сумма

1. Пусть в линейном пространстве L даны два линейных подпространства L_1 и L_2. Обозначим через $\tilde{L}$ множество всех векторов x, представимых в виде

$$x = x_1 + x_2,$$

где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ (рис. 3). Легко убедиться, что $\tilde{L}$ есть

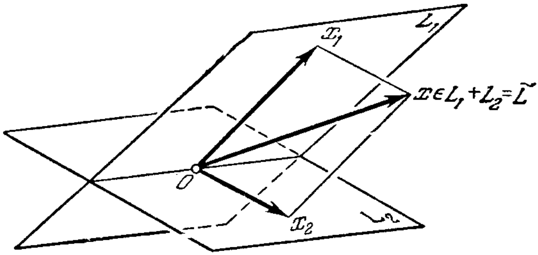


Рис. 3.

линейное подпространство в L. В самом деле, возьмем вместе с $x \in \tilde{L}$ еще вектор $x' \in \tilde{L}$, т. е.

$$x' = x_1' + x_2',$$

где $x_1' \in L_1$, $x_2' \in L_2$; тогда вектор

$$x + x' = (x_1 + x_1') + (x_2 + x_2')$$

принадлежит $\tilde{L}$, так как $x_1 + x_1' \in L_1$, $x_2 + x_2' \in L_2$. Кроме того, $\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2 \in \tilde{L}$, так как $\alpha x_1 \in L_1$, $\alpha x_2 \in L_2$.

Подпространство $\tilde{L}$ называется *суммой подпространств* L_1 и L_2 и обозначается так: $\tilde{L} = L_1 + L_2$. На рис. 3 показан частный случай, когда $\tilde{L} = L$ трехмерно, L_1 и L_2 двумерны.

2. Понятие суммы подпространств непосредственно переносится на любое число слагаемых. Именно, пусть в пространстве L даны подпространства $L_1, \ldots, L_k$; тогда их сумма

$$\tilde{L} = L_1 + L_2 + \ldots + L_k$$

есть линейное подпространство, состоящее из всех векторов вида

$$x = x_1 + \ldots + x_k, \qquad \text{где } x_1 \in L_1, \ldots, x_k \in L_k. \qquad (1)$$

3. Определение. Если для каждого $x \in \tilde{L}$ разложение (3) единственно, то $\tilde{L}$ называется *прямой суммой* подпространств $L_1, \ldots, L_k$.

Для обозначения прямой суммы мы будем пользоваться знаком $\oplus$, например:

$$\tilde{L} = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k.$$

Мы будем употреблять знак $\oplus$ в тех случаях, когда нужно подчеркнуть, что речь идет именно о прямой сумме.

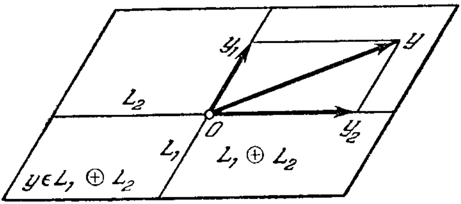


Рис. 4.

В качестве примера на рис. 4 показана прямая сумма одномерных подпространств L_1 и L_2. Отметим, что сумма $L_1 + L_2$ на рис. 3 не является прямой суммой.

В двух следующих пунктах даются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы сумма подпространств была прямой суммой.

4. Теорема 1. *Сумма $\tilde{L} = L_1 + \ldots + L_k$ является прямой суммой подпространств $L_1, \ldots, L_k$ тогда и только тогда, когда ни одно из подпространств $L_1, \ldots, L_k$ не имеет общих элементов, кроме θ, с суммой остальных.*

Доказательство. 1) Пусть дано, что пересечение каждого из рассматриваемых подпространств с суммой остальных состоит только из нулевого вектора θ. Докажем, что $\tilde{L} = L_1 \oplus \ldots \oplus L_k$. Предположим, что для вектора $x \in \tilde{L}$ существуют два разложения:

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \qquad x = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_k, \tag{2}$$

где $x_j \in L_j$, $\bar{x}_j \in L_j$. Нужно проверить, что

$$\bar{x}_j = x_j \tag{3}$$

для каждого из номеров j. Из (2) имеем

$$\theta = (\bar{x}_1 - x_1) + (\bar{x}_2 - x_2) + \ldots + (\bar{x}_k - x_k). \tag{4}$$

Положим $y_1 = -(\bar{x}_1 - x_1)$. Тогда $y_1 = x_1 - \bar{x}_1 \in L_1$, $y_1 = (\bar{x}_2 - x_2) + \ldots + (\bar{x}_k - x_k) \in L_2 + \ldots + L_k$, и потому $y_1 = \theta$, то есть $\bar{x}_1 = x_1$.

Далее, вводя $y_2 = -(\bar{x}_2 - x_2)$, пользуясь равенством (4) и тем, что $L_2 \cap (L_1 + L_3 + \ldots + L_k) = \theta$, получаем $\bar{x}_2 = x_2$.

Аналогично доказываются остальные равенства (3).

2) Пусть дано, что для любого $x \in \tilde{L}$ разложение (1) единственно. Покажем, что, например, L_1 не имеет с $L_2 + \ldots + L_k$ общих элементов, кроме θ. Предположим противное, т. е. что есть $z \neq \theta$ такой, что $z \in L_1$, $z \in L_2 + \ldots + L_k$. Но в таком случае $z = z_2 + \ldots + z_k$, где $z_2 \in L_2, \ldots, z_k \in L_k$. Поэтому можно написать

$$\theta = z + (-1) z_2 + \ldots + (-1) z_k,$$

где $z \in L_1$, $z_2 \in L_2$, ..., $z_k \in L_k$. С другой стороны,

$$\theta = \theta + \theta + \ldots + \theta.$$

Таким образом, для $\theta \in \tilde{L}$ получились два разных разложения вида (1), что противоречит условию.

5. Теорема 2. *$\tilde{L} = L_1 + \ldots + L_k$ является прямой суммой подпространств $L_1, \ldots, L_k$ в том и только в том случае, если всякая система ненулевых векторов $a_1, \ldots, a_k$, взятых по одному из каждого L_j (т. е. $a_j \in L_j$, $j = 1, \ldots, k$), линейно независима.*

Доказательство. 1) Пусть $\tilde{L}$ является прямой суммой подпространств $L_1, \ldots, L_k$. Возьмем произвольные ненулевые векторы $a_1, \ldots, a_k$ по одному из каждого L_j ($a_j \in L_j$). Докажем, что они линейно независимы. Предположим, что система $a_1, \ldots, a_k$ зависима. Тогда один из этих векторов линейно выражается через остальные. Будем считать для определенности, что a_1 линейно выражается через $a_2, \ldots, a_k$. Но в таком случае этот вектор принадлежит и L_1, и сумме $L_2 + \ldots + L_k$, что противоречит теореме 1.

2) Пусть любая система ненулевых векторов $a_1, \ldots, a_k$, взятых соответственно из $L_1, \ldots, L_k$, линейно независима. Докажем, что $\tilde{L} = L_1 + \ldots + L_k$ есть прямая сумма. Предположим противное. Тогда по теореме 1 одно из подпространств $L_1, \ldots, L_k$ имеет общий ненулевой вектор с суммой остальных. Пусть, например, ненулевой вектор a_1 принадлежит L_1 и $L_2 + \ldots + L_k$. Тогда $a_1 = a_2' + \ldots + a_k'$ ($a_2' \in L_2, \ldots$

$\ldots, a'_k \in L_k$). Вместо последнего соотношения можно написать $a_1 = \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_k a_k$, считая $\varepsilon_i = 0$ в случае $a'_i = \theta$ и беря в этом случае в качестве a_i любой вектор из L_i, лишь бы он не был равен θ; если же $a'_i \neq \theta$, то будем считать $\varepsilon_i = 1$ и $a_i = a'_i$.

Тем самым указаны ненулевые векторы $a_1, \ldots, a_k$, $a_i \in L_i$, которые связаны линейной зависимостью. Мы получаем противоречие с условием теоремы.

6. Если само пространство L разложено в прямую сумму своих подпространств $L_1, \ldots, L_k$, то каждый вектор x разлагается, и притом единственным образом, на компоненты $x_1, \ldots, x_k$, лежащие соответственно в $L_1, \ldots, L_k$.

В частности, если $e_1, \ldots, e_n$ — базис в L, то L разлагается в прямую сумму одномерных подпространств: $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$, где L_i — линейная оболочка базисного вектора e_i (т. е. L_i состоит из векторов, которые получаются умножением e_i на всевозможные числа).

7. Теорема 3. *Пусть в линейном пространстве L имеются подпространства L_k и L_l, размерности которых соответственно равны k и l. Если их пересечение имеет размерность m, то размерность их суммы $L_k + L_l$ равна $r = k + l - m$*[1]).

Для доказательства теоремы 3 потребуется

Лемма. *В n-мерном пространстве всякую независимую систему векторов в числе, меньшем чем n, можно дополнить до базиса.*

Доказательство леммы. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — независимая система векторов, $k < n$. Найдется по крайней мере один вектор e_{k+1} такой, что $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}$ — тоже независимая система. Если бы такого вектора e_{k+1} не было, то любой вектор из L можно было бы выразить через $e_1, \ldots, e_k$, что противоречит условию $k < n$.

Если $k + 1 < n$, то рассуждение можно повторить и добавить к системе еще один вектор, не нарушая линейной независимости. Так можно продолжать до тех пор, пока число векторов в системе достигнет n; тогда она превратится в базис. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Положим $L_m = L_k \cap L_l$ и выберем в подпространстве L_m базис $e_1, \ldots, e_m$.

---

[1]) В частности, при $m = 0$ сумма $L_k + L_l$ будет прямой.

Используя лемму, дополним его до базисов в подпространствах L_k и L_l:

$$e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_k \text{ — базис в } L_k;$$
$$e_1, \ldots, e_m, e'_{m+1}, \ldots, e'_l \text{ — базис в } L_l.$$

Сопоставляя определение суммы подпространств с определением линейной оболочки (см. § 13), найдем, что

$$L_k + L_l = L(e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_k, e'_{m+1}, \ldots, e'_l). \quad (5)$$

Докажем, что векторы

$$e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_k, e'_{m+1}, \ldots, e'_l \quad (6)$$

линейно независимы. Предположим противное. Пусть существует нетривиальная зависимость

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m + \alpha_{m+1} e_{m+1} + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e'_{m+1} + \ldots + \alpha_r e'_l = \theta. \quad (7)$$

Среди чисел $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_r$ есть отличные от нуля, иначе были бы линейно зависимы векторы $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_k$, образующие базис в L_k. Положим

$$\alpha_{k+1} e'_{m+1} + \ldots + \alpha_r e'_l = x \neq \theta. \quad (8)$$

Из (8) следует, что $x \in L_l$, а из (7) следует, что $x \in L_k$, поэтому $x \in L_l \cap L_k$. Следовательно, x линейно выражается через векторы $e_1, \ldots, e_m$. Таким образом, имеется соотношение вида

$$\alpha_{k+1} e'_{m+1} + \ldots + \alpha_r e'_l = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_m e_m. \quad (9)$$

Равенство (9) означает нетривиальную линейную зависимость между векторами $e_1, \ldots, e_m, e'_{m+1}, \ldots, e'_l$, что невозможно, поскольку указанные векторы образуют базис в L_l. Тем самым мы получили противоречие, и независимость векторов (6) доказана. Теперь соотношение (5) означает, что векторы (6) образуют базис в $L_k + L_l$. Следовательно, размерность $L_k + L_l$ равна числу векторов в системе (6), то есть числу $r = k + l - m$. Теорема 3 доказана.

8. Теорема 4. *Размерность прямой суммы подпространств равна сумме размерностей слагаемых. Объединение любых базисов, выбранных по одному в каждом слагаемом, образует базис в прямой сумме.*

Доказательство. Если слагаемых два, то первое утверждение теоремы 4 вытекает из теоремы 3 с учетом теоремы 1, вследствие которой $m=0$.

Второе утверждение теоремы 4 в случае двух слагаемых следует из доказательства теоремы 3, точнее, из того факта, что система векторов (6) независима (в записи системы (6) теперь нужно положить $m=0$ и вычеркнуть векторы $e_1, \ldots, e_m$).

Заметим далее, что если $L_1+L_2+L_3+\ldots+L_p$ есть прямая сумма, то L_1+L_2, $L_1+L_2+L_3=(L_1+L_2)+L_3$ и т. д. также являются прямыми суммами. Поэтому в общем случае оба утверждения теоремы 4 доказываются по индукции.

9. Отметим, наконец, следующее *сочетательное свойство* для прямых сумм: если

$$L=L_1 \oplus \tilde{L}, \tag{I}$$

$$\tilde{L}=L_2 \oplus \ldots \oplus L_k, \tag{II}$$

то

$$L=L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k. \tag{III}$$

Доказательство. Пусть x — любой элемент L. Имеем: $x=x_1+\tilde{x}$, где $x_1 \in L_1$, $\tilde{x} \in \tilde{L}$. Так как $\tilde{x} \in \tilde{L}$, то $\tilde{x}=x_2+\ldots+x_k$, где $x_2 \in L_2, \ldots, x_k \in L_k$. Таким образом, для любого $x \in L$ имеем

$$x=x_1+x_2+\ldots+x_k, \tag{$*$}$$

где $x_i \in L_i$. Обратно, из $(*)$ следует $x \in L$. Докажем единственность $(*)$. Пусть

$$x=x_1'+x_2'+\ldots+x_k', \qquad x_i' \in L_i.$$

Отсюда $x=x_1'+\tilde{x}'$; здесь $\tilde{x}'=x_2'+\ldots+x_k'$. Следовательно, $\tilde{x}' \in \tilde{L}$. Поэтому и согласно определению (I) получаем $x_1'=x_1$, $\tilde{x}'=\tilde{x}$. Из последнего равенства и по определению (II) находим $x_i'=x_i$ для $i=2, \ldots, k$. Тем самым (III) доказано.

Установленным свойством приходится пользоваться в случаях, когда разложение пространства (или подпространства) L в прямую сумму производится последовательно: $L=L_1 \oplus L'$, $L'=L_2 \oplus L''$ и т. д. (см., например, гл. VII, § 10).

ГЛАВА II. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

§ 1. Сокращенная запись суммирования

1. В дальнейшем часто встречаются суммы, в которых слагаемые обозначены одной буквой с индексами, например $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_N$. В таких случаях удобно применять сокращенное обозначение суммирования:

$$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_N = \sum_{i=m}^{N} a_i = \sum_{m \leqslant i \leqslant N} a_i$$

(читается: «сумма a_i от $i = m$ до N»).

2. Свойства знака суммирования.

1) $\sum\limits_{i=1}^{N} a = Na$, поскольку здесь повторяется N одинаковых слагаемых, равных a при любом i.

2) Общий множитель можно выносить за знак суммы:

$$\sum_{i=m}^{N} ca_i = c \sum_{i=m}^{N} a_i.$$

3) $\sum\limits_{i=m}^{N} (a_i + b_i) = \sum\limits_{i=m}^{N} a_i + \sum\limits_{i=m}^{N} b_i.$

4) Величина суммы не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования:

$$\sum_{i=m}^{N} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{N-1} + a_N = \sum_{j=m}^{N} a_j = \sum_{k=m}^{N} a_k.$$

5) Если суммирование производится по двум различным индексам, каждый из которых меняется независимо от

другого, то порядок суммирования безразличен:

$$\sum_{\substack{m_1 \leqslant i \leqslant N_1 \\ m_2 \leqslant j \leqslant N_2}} a_{ij} = \sum_{i=m_1}^{N_1} \left(\sum_{j=m_2}^{N_2} a_{ij} \right) = \sum_{j=m_2}^{N_2} \left(\sum_{i=m_1}^{N_1} a_{ij} \right).$$

При суммировании по разным индексам скобки обычно опускают и вместо $\sum\limits_{i=m_1}^{N_1} \left(\sum\limits_{j=m_2}^{N_2} a_{ij} \right)$ пишут $\sum\limits_{i=m_1}^{N_1} \sum\limits_{j=m_2}^{N_2} a_{ij}$, подразумевая, что слагаемые a_{ij} сначала суммируются по j при фиксированном i (внутренняя сумма), затем полученные величины суммируются по i (внешняя сумма). Пятое свойство распространяется на случай суммирования по трем или большему числу разных индексов.

Отметим, что если пределы изменения одного индекса зависят от другого индекса суммирования, то при перемене порядка суммирования пределы изменения каждого из индексов, вообще говоря, становятся другими; в частности,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{ij}.$$

6) При суммировании по двум (или нескольким) индексам можно выносить из-под знака внутренней суммы множитель, не зависящий от индекса внутреннего суммирования:

$$\sum_{i=m_1}^{N_1} \sum_{j=m_2}^{N_2} a_{ij} b_i = \sum_{i=m_1}^{N_1} b_i \sum_{j=m_2}^{N_2} a_{ij}.$$

Перечисленные выше свойства знака $\sum$ непосредственно вытекают из правил арифметических действий и часто используются в дальнейшем.

3. Для сокращения записи условимся, что если пределы изменения индекса суммирования не указаны, то подразумевается суммирование от 1 до n, например:

$$\sum_i a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Кроме того, если суммирование от 1 до n ведется по нескольким индексам, не зависящим друг от друга, то мы будем писать один знак суммы и под ним все те индексы, по которым идет суммирование, то есть

$$\sum_{i,\, j,\, k} a_{ijkl} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ijkl}.$$

Дело в том, что ниже чаще всего встречается суммирование в пределах от 1 до n, где n — размерность рассматриваемых пространств.

Условимся, наконец, что если индексы суммирования под знаком суммы совсем не указаны, то это значит, что суммирование производится по всем тем индексам, каждый из которых под знаком суммы встречается *два раза*, причем по каждому из таких индексов ведется суммирование от 1 до n. Например,

$$\sum a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n;$$

$$\sum A_i a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_i a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Обратим внимание на внутреннюю сумму в правой части последнего равенства. Общий член этой суммы зависит от двух индексов, но суммирование ведется только по одному из них (по индексу j), так что результат суммы зависит от другого индекса (от номера i). Полагая $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ и пользуясь сокращенными обозначениями, можно написать

$$y_i = \sum a_{ij} x_j.$$

Индексы, по которым ведется суммирование, часто называют *немыми* или *заглушенными*. Согласно свойству 4) п. 2 обозначение заглушенных индексов можно изменять в процессе выкладок, например

$$y_i = \sum a_{ij} x_j = \sum a_{i\alpha} x_\alpha, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Индексы, по которым суммирование не производится, обычно называют *свободными*. Важно следить за тем, чтобы свободные индексы в правой и левой частях каждого равенства были обозначены одинаково. Так, например, равенства (1) можно заменить следующей эквивалентной записью:

$$y_k = \sum a_{kj} x_j = \sum a_{k\alpha} x_\alpha, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

но нельзя заменять обозначение свободного индекса только в одной какой-нибудь части равенства.

Ниже мы увидим (см. гл. V), что во многих случаях индексы удобно ставить сверху (x^j, a^{ik} и т. п.). При этом следят за тем, чтобы в процессе выкладок нижние свободные индексы оставались нижними, верхние свободные индексы оставались верхними.

В дальнейшем будут встречаться суммы, под знаком которых имеется несколько заглушенных индексов. При употреблении таких выражений независимые заглушенные индексы необходимо обозначать различными буквами.

Например,

$$\sum B^i_\alpha x^\alpha_{\beta\gamma} y^\gamma = z^i_\beta, \qquad \sum B^k_\lambda \Big(\sum A^j_k x^\lambda_{\mu\nu} y^\nu \Big) = \sum A^j_k z^k_\mu.$$

Индексы j и μ остались свободными (это значит, что предыдущая строчка заменяет n^2 равенств).

4. Замечание. В литературе широко употребляется еще более краткая запись, при которой опускают не только пределы суммирования и указание индексов, но и сам знак суммы. При такой системе записи считают, например, что

$$A^j_k z^k_\mu = \sum_{k=1}^{n} A^j_k z^k_\mu.$$

Однако такая запись требует от читателя значительного навыка, и мы опускать знак суммы не будем.

§ 2. Линейное преобразование переменных. Произведение линейных преобразований переменных и произведение матриц

1. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — упорядоченный набор независимых переменных. Пусть дана $m \times n$-матрица:

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Напишем соотношения

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= b_{m1}x_1 + \ldots + b_{mn}x_n, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где через $y_1, \ldots, y_m$ обозначены численные значения правых частей (1); ясно, что $y_1, \ldots, y_m$ изменяются в зависимости от $x_1, \ldots, x_n$.

Система соотношений (1) называется *линейным преобразованием переменных* $x_1, \ldots, x_n$ в переменные $y_1, \ldots, y_m$; числа b_{ik} называются коэффициентами линейного преобразования (1); составленная из них матрица B называется матрицей этого линейного преобразования. Будучи заданной, матрица определяет линейное преобразование (1).

Замечание. Упорядоченный набор переменных $x_1, \ldots, x_n$ можно было бы рассматривать как переменную точку координатного пространства. Точно так же можно геометрически истолковать $y_1, \ldots, y_m$. Однако представляется целесообразным линейное преобразование переменных определять как чисто арифметическое (или алгебраическое) понятие, не связывая с ним заранее каких-либо геометрических представлений.

2. Пусть дана $p \times m$-матрица

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{p1} & \ldots & a_{pm} \end{Vmatrix}.$$

Напишем соответствующее ей линейное преобразование переменных в виде

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1m}y_m, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ z_p = a_{p1}y_1 + \ldots + a_{pm}y_m. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Здесь независимые переменные обозначены через $y_1, \ldots, y_m$, хотя соотношения (2) поначалу рассматриваются вне связи с соотношениями (1).

Вместе с тем можно считать, что $y_1, \ldots, y_m$ в правых частях (2) суть те же величины, которые определяются равенствами (1) по переменным $x_1, \ldots, x_n$. В таком случае $z_1, \ldots, z_p$ становятся функциями от независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$, а $y_1, \ldots, y_m$ получают роль посредников.

Если промежуточные переменные $y_1, \ldots, y_m$ исключить из равенств (1) и (2), то $z_1, \ldots, z_p$ будут выражены через $x_1, \ldots, x_n$ явно. Чтобы провести эту операцию, нужно в правых частях (2) заменить y_j их выражениями (1). После этого в каждом уравнении (2) каждая из переменных $x_1, \ldots, x_n$ встретится m раз. Приводя подобные члены и обозначая получаемые коэффициенты через $c_{11}, c_{12}, \ldots$, напишем результат в виде

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_p = c_{p1}x_1 + \ldots + c_{pn}x_n. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Таким образом, мы снова имеем некоторое линейное преобразование переменных; его матрица

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{p1} & \ldots & c_{pn} \end{Vmatrix}.$$

Определение. Линейное преобразование переменных (3), полученное в результате исключения $y_1, \ldots, y_m$ из (2) и (1), называется *произведением* линейного преобразования переменных (2) на линейное преобразование переменных (1). При этом $p \times n$-матрица C называется произведением $p \times m$-матрицы A на $m \times n$-матрицу B. Символически:

$$C = AB.$$

3. Найдем формулу, которая выражает любой элемент матрицы C через элементы матриц A и B. Для этого нужно фактически (а не на словах) произвести исключение величин $y_1, \ldots, y_m$ из соотношений (1) и (2). В целях экономии выкладок запишем систему (1) сокращенно в виде

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k,$$

где $j = 1, 2, \ldots, m$ соответствуют номерам уравнений. Аналогично запишем систему (2):

$$z_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j,$$

$i = 1, \ldots, p$. Теперь имеем

$$z_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}\right)x_k. \qquad (4)$$

С другой стороны, равенствам (3) можно дать сокращенную запись:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k. \tag{5}$$

Из (4) и (5) находим

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}, \tag{6}$$

или

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{im}b_{mk}. \tag{7}$$

Выражение (7) называется произведением i-й строки матрицы A на k-й столбец матрицы B (по аналогии с известной из аналитической геометрии формулой, выражающей скалярное произведение векторов через их координаты).

Число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B, иначе произведение AB не определено. Число строк и столбцов произведения можно выразить по схеме

$$(p \times m) \cdot (m \times n) = (p \times n).$$

Два произведения AB и BA одновременно определены тогда и только тогда, когда A и B — квадратные матрицы одинакового порядка.

Замечание 1. Разумеется, произведение матриц можно было бы определить непосредственно с помощью формулы (7), не учитывая ее происхождения из линейных преобразований.

Замечание 2. Умножение матриц, вообще говоря, не коммутативно, в чем легко убедиться на примерах. Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \neq BA = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Наборы переменных x_i, y_j, z_k запишем в виде матриц-столбцов:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{Vmatrix}, \quad Z = \begin{Vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{Vmatrix}.$$

Тогда формулы преобразования переменных (1), (2) и (3) можно записать в виде матричных равенств

$$Y = BX, \qquad Z = AY, \qquad Z = CX,$$

где $C = AB$.

5. Укажем ряд тождеств, которые выражают свойства умножения матриц:

1) $A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность); в силу этого свойства произведение трех матриц ABC можно писать без скобок;

2) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$;

3) $A(B+C) = AB + AC; \quad (B+C)A = BA + CA$.

Здесь α — произвольное число, A, B, C — произвольные матрицы, у которых число столбцов и строк обеспечивает возможность выполнения указанных выше действий.

Доказательство тождеств 1), 2), 3) проводится без труда и останавливаться на нем мы не будем.

6. Нам придется употреблять еще операцию транспонирования матрицы. Эту операцию мы будем обозначать звездочкой, считая, что A^* — матрица, полученная из матрицы A заменой ее строк соответствующими (по номеру) столбцами. Имеют место очевидные тождества

4) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

5) $(\alpha A)^* = \alpha A^*$.

Кроме того,

6) $(AB)^* = B^*A^*$.

В справедливости последнего тождества легко убедиться, если принять во внимание, что произведение A на B строится по схеме: строка A на столбец B.

§ 3. Квадратные матрицы и невырожденные преобразования

1. В этом параграфе мы рассмотрим более подробно линейные преобразования, при которых сохраняется число переменных. Таким преобразованиям соответствуют квадратные матрицы.

2. Напомним, что определителем или детерминантом $n \times n$-матрицы $A = \| a_{ij} \|$ называется величина

$$\operatorname{Det} A = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}, \tag{1}$$

где

$$\delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} 0, & \text{если среди чисел } i_1, i_2, \ldots, i_n \\ & \text{есть одинаковые;} \\ +1, & \text{если перестановка } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \\ & \text{четная;} \\ -1, & \text{если перестановка } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \\ & \text{нечетная.} \end{cases}$$

Индексы $i_1, i_2, \ldots, i_n$ принимают значения $1, 2, \ldots, n$.

В формуле (1) вторые индексы элементов матрицы A взяты в натуральном порядке. Для иного их расположения, а также в случае их повторений имеем

$$\sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta_{i_1 \ldots i_n} a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_n j_n} = \delta_{j_1 \ldots j_n} \operatorname{Det} A. \tag{2}$$

Докажем теорему, важную для дальнейшего.

Теорема. *Определитель произведения матриц равен произведению их определителей, то есть*

$$\operatorname{Det} AB = \operatorname{Det} A \operatorname{Det} B.$$

Доказательство. Используя (1), (2) и формулу (6) предыдущего параграфа, получаем

$$\operatorname{Det} AB = \operatorname{Det} C = \sum \delta_{i_1 \ldots i_n} c_{i_1 1} \ldots c_{i_n n} =$$
$$= \sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta_{i_1 \ldots i_n} \Big(\sum_{j_1} a_{i_1 j_1} b_{j_1 1} \Big) \ldots \Big(\sum_{j_n} a_{i_n j_n} b_{j_n n} \Big) =$$
$$= \sum_{j_1, \ldots, j_n} \Big(\sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta_{i_1 \ldots i_n} a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_n j_n} \Big) b_{j_1 1} \ldots b_{j_n n} =$$
$$= \sum (\operatorname{Det} A) \delta_{j_1 \ldots j_n} b_{j_1 1} \ldots b_{j_n n} = \operatorname{Det} A \cdot \operatorname{Det} B,$$

что и требовалось.

3. Квадратная матрица называется *невырожденной* или *неособенной*, если ее определитель не равен нулю. Линейное преобразование переменных $x_1, \ldots, x_n$ в переменные $y_1, \ldots, y_n$ называется *невырожденным* или *неособенным*, если оно имеет невырожденную квадратную матрицу.

Согласно п. 2 произведение невырожденных матриц есть невырожденная матрица; произведение невырожденных линейных преобразований переменных есть невырожденное линейное преобразование переменных.

Невырожденная $n \times n$-матрица A имеет ранг $r = n$. Это ясно, так как определитель такой матрицы является ее базисным минором. Вырожденная матрица имеет ранг $r < n$. Это также ясно, так как определитель вырожденной матрицы равен нулю и, следовательно, ее базисные миноры имеют порядок, меньший n (либо их нет, но тогда $r = 0$). В понижении ранга матрицы (сравнительно со стандартным случаем $r = n$) и заключается ее вырождение.

4. Пусть дано невырожденное линейное преобразование переменных с матрицей $A = \| a_{ij} \|$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Введем обозначение

$$\Delta = \operatorname{Det} A.$$

По условию $\Delta \neq 0$. В таком случае система (3) с произвольно данными $y_1, \ldots, y_n$ и неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ имеет единственное решение. Найдем его. Для этого удобно применить формулы Крамера. Согласно этим формулам x_k выражается в виде дроби, знаменатель которой есть Δ, а числитель получается заменой k-го столбца Δ столбцом из величин $y_1, \ldots, y_n$. Развертывая определитель, стоящий в числителе такой дроби, получим

$$x_k = \frac{1}{\Delta}(A_{1k}y_1 + \ldots + A_{nk}y_n),$$

где через $A_{1k}, \ldots, A_{nk}$ обозначены алгебраические дополнения элементов k-го столбца определителя матрицы A. Таким образом,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{A_{11}}{\Delta} y_1 + \ldots + \dfrac{A_{n1}}{\Delta} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{A_{1n}}{\Delta} y_1 + \ldots + \dfrac{A_{nn}}{\Delta} y_n. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Равенства (4), выражающие $x_1, \ldots, x_n$ через $y_1, \ldots, y_n$ из формулы (3), представляют собой линейное преобразование переменных; оно называется *обратным* для линейного преобразования (3), где $y_1, \ldots, y_n$ выражаются через $x_1, \ldots, x_n$.

Матрица преобразования (4) называется *обратной* для (невырожденной) матрицы A преобразования (3); ее обозначают через A^{-1}. Таким образом, если

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad \Delta = \operatorname{Det} A \neq 0,$$

то

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} \dots \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \dots\dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} \dots \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{Vmatrix}.$$

Следует обратить внимание на то, что в матрице A^{-1} по строкам расположены алгебраические дополнения тех элементов матрицы A, которые в матрице A расположены в соответствующих (по номеру) столбцах.

5. Так как равенства (4) выражают решение системы (3) относительно неизвестных $x_1, \dots, x_n$, то подстановка выражений (4) в правые части (3) должна дать в результате

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = y_1, \\ y_2 = \quad y_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n = \qquad\quad y_n. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Такое преобразование называется *тождественным*; его матрица обозначается буквой E и называется *единичной*:

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Поскольку произведение преобразования (3) на обратное ему преобразование (4) есть тождественное преобразование (5), то, соответственно, произведение матрицы A на обратную ей матрицу A^{-1} есть единичная матрица E:

$$AA^{-1} = E. \tag{6}$$

6. Согласно п. 2 имеем из (6)

$$(\operatorname{Det} A)\cdot(\operatorname{Det} A^{-1})=1.$$

Отсюда $\operatorname{Det} A^{-1}\neq 0$, и матрица A^{-1} невырождена. В таком случае решение системы (4) относительно $y_1, \ldots, y_n$ единственно и, следовательно, совпадает с выражениями (3). Поэтому подстановка выражений (3) в правые части (4) должна дать тождественное преобразование

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_1, \\ x_2 = \qquad x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \qquad\qquad x_n. \end{array}\right\}$$

Одновременно получаем

$$A^{-1}A=E.$$

7. Итак, каждое невырожденное линейное преобразование переменных $x_1, \ldots, x_n$ в $y_1, \ldots, y_n$ имеет единственное обратное линейное преобразование переменных $y_1, \ldots, y_n$ в $x_1, \ldots, x_n$; оно также невырождено; обратное ему есть исходное преобразование. Каждая невырожденная матрица имеет единственную обратную; она также невырождена; обратная ей есть исходная матрица.

8. Понятия обратного преобразования и обратной матрицы можно определять несколько иным способом. Именно, пусть даны два линейных преобразования переменных, которые мы запишем сокращенно:

$$y_i=\sum a_{ij}x_j \tag{7}$$

с $n\times n$-матрицей $A=\|a_{ij}\|$ и

$$x_j=\sum b_{jk}z_k \tag{8}$$

с $n\times n$-матрицей $B=\|b_{jk}\|$. Тогда преобразование (8) можно назвать преобразованием, обратным преобразованию (7), если произведение преобразования (7) на преобразование (8) есть тождественное преобразование

$$y_i=z_i \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{9}$$

Соответственно матрицу B можно назвать обратной матрицей для A, если

$$AB = E. \tag{10}$$

Невырожденность преобразования (7) и матрицы A можно не оговаривать заранее. Она неизбежно следует из (10), так как вследствие (10) $(\operatorname{Det} A)\cdot(\operatorname{Det} B) = 1$, и поэтому $\operatorname{Det} A \neq 0$. Но при условии $\operatorname{Det} A \neq 0$ система (7) с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ и известными $y_1, \ldots, y_n$ имеет единственное решение. Следовательно, выражения (8) с учетом (9), т. е. с учетом, что $z_k = y_k$, должны совпасть с выражениями (4). Тем самым мы возвращаемся к нашему первоначальному определению обратного преобразования и обратной матрицы.

9. Если A и B невырождены, то имеет место тождество

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $B^{-1}A^{-1} = C$; тогда

$$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = \\ = (AE)A^{-1} = AA^{-1} = E.$$

Следовательно, $C = (AB)^{-1}$ согласно п. 8; см. (10).

10. В предыдущем пункте мы воспользовались тем, что для любой $n \times n$-матрицы A справедливо легко проверяемое тождество: $AE = A$ (а также $EA = A$), где E — уже известная нам единичная матрица. Можно сказать, что в умножении матриц E играет такую же роль, какую единица играет в умножении чисел.

Замечание. Легко доказать, что другой матрицы с таким же свойством нет. Более того, если для какой-нибудь одной невырожденной матрицы A соблюдается равенство $AE_1 = A$, то $E_1 = E$. В самом деле,

$$E_1 = EE_1 = (A^{-1}A)E_1 = A^{-1}(AE_1) = A^{-1}A = E.$$

11. Вместе с произведением матриц определены натуральные степени матрицы: $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$ и т. д. Тем самым определено понятие многочлена от матрицы:

$$P(A) = \alpha_0 A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n E, \tag{11}$$

где $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ — числа, а $P(A)$ есть $n \times n$-матрица.

Принято считать, что любая $n \times n$-матрица A в нулевой степени равна единичной $n \times n$-матрице E:

$$A^0 = E.$$

Поэтому слагаемое $\alpha_n E$ в выражении (11) играет роль свободного члена.

§ 4. Ранг произведения матриц

1. Пусть даны: $m \times n$-матрица $A = \|a_{ij}\|$, $n \times p$-матрица $B = \|b_{ij}\|$, $m \times p$-матрица $C = \|c_{ij}\|$, равная их произведению: $C = AB$. Имеет место

Теорема 1. *Ранг произведения матриц не больше ранга любого из сомножителей, то есть*

$$\operatorname{Rang} AB \leqslant \operatorname{Rang} A, \tag{1}$$

$$\operatorname{Rang} AB \leqslant \operatorname{Rang} B. \tag{2}$$

Доказательство. Установим неравенство (2). Сначала отметим два тривиальных случая:

1) Если $\operatorname{Rang} B = 0$, то матрица B нулевая. Тогда $C = AB$ — тоже нулевая матрица, $\operatorname{Rang} C = 0$ и (2) соблюдено.

2) Если $\operatorname{Rang} B = p$ (где p — число столбцов матрицы B), то (2) также соблюдено, поскольку $\operatorname{Rang} C$ не превосходит числа столбцов p в матрице C.

Положим $\operatorname{Rang} B = r$ и будем теперь считать, что $0 < r < p$.

При таком предположении матрица B имеет некоторую систему из r базисных столбцов и еще хотя бы один столбец, не принадлежащий этой системе. Пусть для определенности базисными являются первые r столбцов матрицы B. Рассмотрим любой столбец с номером k, $k > r$. По лемме о базисном миноре он линейно выражается через базисные столбцы:

$$\left\| \begin{matrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{matrix} \right\| = \alpha_1 \left\| \begin{matrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{matrix} \right\| + \ldots + \alpha_r \left\| \begin{matrix} b_{1r} \\ \vdots \\ b_{nr} \end{matrix} \right\|.$$

Это же выражение в краткой записи имеет вид

$$b_{jk} = \sum_{s=1}^{r} \alpha_s b_{js}; \tag{3}$$

здесь $j = 1, 2, \ldots, n$, а индекс k зафиксирован.

С другой стороны, по определению произведения матриц имеем

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}. \tag{4}$$

Из (3) и (4)

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{s=1}^{r}\alpha_s b_{js}\right)=\sum_{s=1}^{r}\left(\alpha_s\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,b_{js}\right)=\sum_{s=1}^{r}\alpha_s c_{is}, \tag{5}$$

где $1\leqslant l\leqslant m$, индекс k зафиксирован и имеет такое же числовое значение, как в формуле (3). Равенства (5) показывают, что в матрице C любой столбец с номером k, $k>r$, линейно выражается через ее первые r столбцов:

$$\left\|\begin{matrix}c_{1k}\\ \vdots\\ c_{mk}\end{matrix}\right\|=\alpha_1\left\|\begin{matrix}c_{11}\\ \vdots\\ c_{m1}\end{matrix}\right\|+\ldots+\alpha_r\left\|\begin{matrix}c_{1r}\\ \vdots\\ c_{mr}\end{matrix}\right\|.$$

Отсюда и в силу леммы 3 из § 6 гл. I ранг системы всех столбцов матрицы C не больше r, то есть $\mathrm{Rang}\ C\leqslant r$, и неравенство (2) доказано.

Теперь для доказательства неравенства (1) достаточно перейти к транспонированным матрицам. В самом деле, согласно свойству 6) из п. 6 § 2,

$$C^*=(AB)^*=B^*A^*. \tag{6}$$

Из (6) и вследствие установленного неравенства для второго сомножителя имеем

$$\mathrm{Rang}\,C=\mathrm{Rang}\,C^*\leqslant\mathrm{Rang}\,A^*=\mathrm{Rang}\,A.$$

Тем самым теорема доказана полностью.

2. Во избежание недоразумений полезно сделать следующее предупреждение по поводу доказательства неравенства (2). Как было показано, в матрице C любой столбец с номером k, $k>r$, линейно выражается через ее первые k столбцов. Мы не знаем, являются ли эти столбцы независимыми. Поэтому нельзя утверждать, что $\mathrm{Rang}\,C=r$. На простых числовых примерах можно убедиться, что такое утверждение не только не обосновано, но и неверно.

3. Пусть даны: произвольная $m \times n$-матрица A, невырожденная квадратная $n \times n$-матрица B и невырожденная квадратная $m \times m$-матрица B'.

Имеет место

Теорема 2. *Ранги произведений AB и $B'A$ равны рангу матрицы A, то есть*

$$\operatorname{Rang} AB = \operatorname{Rang} A, \quad \textit{если} \quad \operatorname{Det} B \neq 0 \tag{7}$$

и

$$\operatorname{Rang} B'A = \operatorname{Rang} A, \quad \textit{если} \quad \operatorname{Det} B' \neq 0. \tag{8}$$

Иначе можно сказать, что *ранг сохраняется при умножении данной матрицы на невырожденную матрицу* (слева или справа).

Доказательство теоремы 2. Пусть $C = A \cdot B$. Тогда $\operatorname{Rang} C \leqslant \operatorname{Rang} A$ по теореме 1. Но вследствие невырожденности B имеем: $A = ABB^{-1} = CB^{-1}$, так что $\operatorname{Rang} A \leqslant \operatorname{Rang} C$ по той же теореме 1. Тем самым (7) доказано. Равенство (8) доказывается аналогично.

§ 5. Преобразование координат при изменении базиса

1. Во многих случаях встречается необходимость данный базис заменить новым. Мы выведем сейчас формулы, по которым преобразуются координаты произвольного вектора при переходе к новому базису.

2. Пусть L_n — линейное n-мерное пространство, $e_1, \ldots, e_n$ — его базис. Пусть $e'_1, \ldots, e'_n$ — новый базис в L_n. Разложим каждый из векторов $e'_1, \ldots, e'_n$ по старому базису; мы получим

$$\left.\begin{aligned} e'_1 &= P_{11}e_1 + P_{12}e_2 + \ldots + P_{1n}e_n, \\ e'_2 &= P_{21}e_1 + P_{22}e_2 + \ldots + P_{2n}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n &= P_{n1}e_1 + P_{n2}e_2 + \ldots + P_{nn}e_n. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Коэффициенты этих разложений составляют квадратную $n \times n$-матрицу

$$P = \begin{Vmatrix} P_{11} & \ldots & P_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ P_{n1} & \ldots & P_{nn} \end{Vmatrix}.$$

3. Строка матрицы P с номером i образована координатами вектора e_i' в первоначальном базисе. Так как новые базисные векторы $e_1', \ldots, e_n'$ независимы, то матрица P невырождена, т. е.

$$\operatorname{Det} P \neq 0. \tag{1}$$

С другой стороны, если произвольно взять матрицу P при условии (1), то векторы $e_1', \ldots, e_n'$, определяемые равенствами (I), будут независимы и, следовательно, составят базис. Таким образом, переход к любому новому базису определяется заданием матрицы P при единственном условии ее невырожденности.

4. Пусть x — произвольный вектор из L_n. Разложим его по старому и по новому базису:

$$x = \sum_j x_j e_j, \qquad x = \sum_i x_i' e_i'.$$

Запишем формулы (I) сокращенно в виде

$$e_i' = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} e_j, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{I}$$

Отсюда и из второго разложения x имеем

$$x = \sum_i x_i' \left(\sum_j P_{ij} e_j \right) = \sum_j \left(\sum_i P_{ij} x_i' \right) e_j.$$

Сравнивая это разложение с первым, найдем

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} x_i', \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{II}$$

или в подробной записи

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= P_{11} x_1' + P_{21} x_2' + \ldots + P_{n1} x_n', \\ x_2 &= P_{12} x_1' + P_{22} x_2' + \ldots + P_{n2} x_n', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= P_{1n} x_1' + P_{2n} x_2' + \ldots + P_{nn} x_n'. \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Формулы (II) выражают старые координаты $x_1, \ldots, x_n$ вектора x через его новые координаты $x_1', \ldots, x_n'$ и представляют собой линейное преобразование переменных $x_1', \ldots, x_n'$ в переменные $x_1, \ldots, x_n$. Матрица этого преобразования есть P^*, т. е. получается транспонированием матрицы P. Поэтому, обозначая через X и X' матрицы-столбцы, состоящие из старых и новых координат вектора x, можем записать формулы (II) в виде матричного равенства

$$X = P^* X'. \tag{IIa}$$

Преобразование (II) невырождено, так как

$$\operatorname{Det} P^* = \operatorname{Det} P \neq 0.$$

Таким образом, любому изменению базиса соответствует невырожденное линейное преобразование координат каждого вектора.

5. Новые координаты вектора выражаются через его старые координаты с помощью линейного преобразования, обратного преобразованию (II).

Мы напишем его в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= Q_{11}x_1 + Q_{12}x_2 + \ldots + Q_{1n}x_n, \\ x_2' &= Q_{21}x_1 + Q_{22}x_2 + \ldots + Q_{2n}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' &= Q_{n1}x_1 + Q_{n2}x_2 + \ldots + Q_{nn}x_n \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

или сокращенно

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} Q_{ij}x_j, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{III}$$

Матрица преобразования (III), которую мы обозначим через Q, обратна матрице P^*:

$$Q = \begin{Vmatrix} Q_{11} & \ldots & Q_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ Q_{n1} & \ldots & Q_{nn} \end{Vmatrix} = (P^*)^{-1}. \tag{2}$$

Заметим, что каждый из элементов матрицы Q равен алгебраическому дополнению элемента матрицы P с теми же номерами строки и столбца, поделенному на $\operatorname{Det} P$. Аналогично (IIa) можно написать, что

$$X' = QX. \tag{IIIa}$$

6. Равенство (2), связывающее матрицы P и Q, можно переписать двумя другими эквивалентными способами; именно:

$$P^*Q = E, \qquad QP^* = E. \tag{3}$$

Для дальнейшего полезно равенства (3) в свою очередь переписать еще в другой форме, используя для обозначения элементов единичной матрицы E так называемый символ Кронекера δ_{ij}. По определению

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad i=j. \end{cases}$$

Отсюда два матричных равенства (3) заменяются соответственно двумя системами числовых равенств:

$$\sum_{l} P_{li}Q_{lj}=\delta_{ij}, \qquad \sum_{i} Q_{ki}P_{li}=\delta_{kl}. \tag{4}$$

В первом из них i-я строка матрицы P^* умножается на j-й столбец матрицы Q, а во втором k-я строка матрицы Q умножается на l-й столбец матрицы P^*.

7. Заметим в заключение, что всякое невырожденное линейное преобразование переменных $x_1, \ldots, x_n$ в переменные $x_1', \ldots, x_n'$ можно рассматривать как преобразование координат векторов в n-мерном линейном пространстве. В самом деле, если нам дано преобразование (III), то мы знаем матрицу Q ($\operatorname{Det} Q \neq 0$). По ней мы найдем $P^*=Q^{-1}$ и $P=(P^*)^*$. Зная матрицу P, получим соответствующий базис $e_1', \ldots, e_n'$ по формулам (I).

ГЛАВА III. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПЛОСКОСТИ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Аффинное пространство

1. В линейном пространстве элементами являются векторы как объекты линейных операций. Однако во многих задачах в центре внимания оказываются геометрические факты, связанные со взаимным расположением фигур (подмножеств) в рассматриваемом пространстве, в то время как линейные операции отступают на задний план.

Поэтому наряду с линейным пространством вводится понятие аффинного пространства, элементы которого называются точками. Точки аффинного пространства определенным образом связаны с векторами линейного пространства (подобно тому, как это делается в элементарной аналитической геометрии). Условия этих связей даны в следующем пункте вместе с определением аффинного пространства.

2. Пусть дано некоторое множество $\mathfrak{A}$, элементы которого будем называть точками и обозначать заглавными латинскими буквами A, B, ..., M, ... Пусть дано также некоторое линейное пространство L. Пусть с каждой *упорядоченной* парой точек из $\mathfrak{A}$ сопоставлен вектор из L. Если паре точек A, B соответствует вектор x, то напишем: $x = \overline{AB}$; здесь $\overline{AB}$ есть только новое обозначение вектора x.

Первая из двух точек называется началом вектора $\overline{AB}$, вторая — его концом.

Определение. Множество $\mathfrak{A}$, сопоставленное с линейным пространством L, называется *аффинным пространством*, если соблюдены следующие две аксиомы:

1) Для каждой точки A из $\mathfrak{A}$ и каждого вектора x из L найдется и притом единственная точка B из $\mathfrak{A}$ такая, что $\overline{AB} = x$.

2) Если $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$, то $\overline{AC} = x + y$ (рис. 5).

Аффинное пространство называется действительным или комплексным, конечномерным или бесконечномерным в зависимости от того, действительным или комплексным, конечномерным или бесконечномерным является соответствующее ему линейное пространство L. Размерностью аффинного пространства $\mathfrak{A}$ называют число, равное размерности линейного пространства L.

Замечание 1. Всякое линейное пространство L можно рассматривать как аффинное пространство $\mathfrak{A}$. Для этого достаточно векторы назвать точками и каждой паре векторов a, b, рассматриваемых как точки множества $\mathfrak{A}$, поставить в соответствие вектор $b-a \in L$.

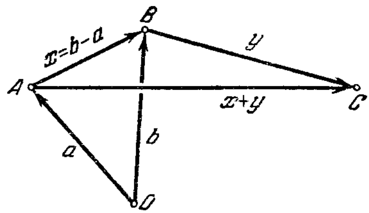


Рис. 5.

Замечание 2. Всякое аффинное пространство $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как линейное. Для этого достаточно зафиксировать какую-нибудь точку O пространства $\mathfrak{A}$. Тогда с произвольной точкой $M \in \mathfrak{A}$ сопоставляется ее радиус-вектор $\overline{OM}$. Множество радиус-векторов всех точек пространства $\mathfrak{A}$ и составляет пространство L.

Замечание 3. В дальнейшем в конкретных случаях мы каждый раз указываем, что является объектом нашего рассмотрения: аффинное или линейное пространство. Однако можно раз и навсегда условиться рассматривать аффинное пространство с отмеченной в нем точкой. Тогда в нашем распоряжении будут и точки, и векторы.

3. Отметим два простейших свойства аффинного пространства.

Теорема 1. *С каждой парой совпадающих точек из $\mathfrak{A}$ сопоставляется нулевой вектор из L.*

Доказательство. Будем считать, что A — произвольная точка и что с парой точек AA сопоставлен вектор z. Пусть x — произвольный вектор из L. Тогда по первой аксиоме аффинного пространства найдется точка B такая, что $\overline{AB}=x$. Применяя вторую аксиому, получим

$$x+z=z+x=\overline{AA}+\overline{AB}=\overline{AB}=x;$$

следовательно, $z=\theta$.

Теорема 2. *Если* $\overline{AB}=x$, *то* $\overline{BA}=-x$.

Доказательство. Пусть $\overline{BA}=y$. Тогда

$$x+y=\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{AA}=\theta,$$

откуда $y=-x$.

§ 2. Аффинные координаты

1. Будем считать, что данное аффинное пространство $\mathfrak{A}$ является n-мерным, и введем в нем так называемую аффинную систему координат.

Для этого в $\mathfrak{A}$ выберем произвольную точку O, которую назовем началом координат, а в соответствующем линейном пространстве L возьмем какой-нибудь базис $e_1, \ldots, e_n$. Пусть M — произвольная точка из $\mathfrak{A}$. Вместе с началом координат она определяет вектор $\overline{OM}\in L$, который называется радиус-вектором точки M. Разлагая радиус-вектор $\overline{OM}$ по базису $e_1, \ldots, e_n$, получим

$$\overline{OM}=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n.$$

Коэффициенты этого разложения $x_1, \ldots, x_n$ называются аффинными координатами точки M (относительно выбранной системы с началом O и базисом $e_1, \ldots, e_n$). Обратим внимание на то, что аффинная система координат задается двумя разнородными объектами — точкой O из аффинного пространства и базисом $e_1, \ldots, e_n$ из линейного пространства.

Координаты каждой точки M определены однозначно ввиду единственности разложения вектора $\overline{OM}$ по базису $e_1, \ldots, e_n$.

2. Пусть дана другая произвольная точка N с координатами $y_1, \ldots, y_n$. Покажем, как выражаются координаты вектора $\overline{MN}$ через аффинные координаты точек M и N. Используя аксиому 2 и теорему 2 из § 1, находим

$$\overline{MN}=\overline{MO}+\overline{ON}=\overline{ON}-\overline{OM}=$$
$$=(y_1-x_1)e_1+\ldots+(y_n-x_n)e_n,$$

так что вектор $\overline{MN}$ имеет координаты $y_1-x_1, \ldots, y_n-x_n$.

Иначе говоря, чтобы получить координаты вектора $\overline{MN}$, нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты начала.

3. Сохраняя выбранный базис, перенесем начало координат из точки O в точку O_1. Координаты O_1 в первоначальной системе обозначим через $a_1, \ldots, a_n$ и будем считать их известными. Найдем новые аффинные координаты $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ произвольной точки M. (Старые координаты точки M обозначаем через $x_1, \ldots, x_n$.) Имеем векторное равенство

$$\overline{OM} = \overline{OO_1} + \overline{O_1M},$$

или, что то же самое,

$$x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n + \tilde{x}_1e_1 + \ldots + \tilde{x}_ne_n.$$

Отсюда, вследствие единственности разложения вектора по базису, находим

$$x_i = \tilde{x}_i + a_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

4. Если начало координат остается на месте, но меняется базис, то аффинные координаты точек преобразуются так же, как координаты их радиус-векторов, то есть по формулам § 5 гл. II.

5. Предположим теперь, что от данной аффинной системы координат с началом O и базисом $e_1, \ldots, e_n$ мы переходим к новой системе с началом O' и базисом $e_1', \ldots, e_n'$. При этом считаем известными координаты O' в старой системе $(a_1, \ldots, a_n)$, а также разложения векторов нового базиса по старому базису:

$$e_i' = \sum P_{ij}e_j.$$

Используя результаты двух предыдущих пунктов и § 5 гл. II, получим формулы, выражающие старые координаты $x_1, \ldots, x_n$ произвольной точки M через ее новые координаты $x_1', \ldots, x_n'$,

$$x_i = \sum P_{ji}x_j' + a_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Наряду с формулами (1) имеют место обратные формулы

$$x_i' = \sum Q_{ij}(x_j - a_j) = \sum Q_{ij}x_j + a_i',$$

где $Q = (P^*)^{-1}$ (см. § 5 гл. II), $a_i' = -\sum Q_{ij}a_j$, $i = 1, \ldots, n$.

Преобразования аффинных координат неоднократно используются в дальнейшем.

§ 3. Плоскости

1. Пусть в n-мерном аффинном пространстве $\mathfrak{A}_n$ зафиксирована произвольная точка A, и в соответствующем линейном пространстве L_n зафиксировано произвольное r-мерное подпространство L_r.

Определение. Множество всех точек M аффинного пространства, для которых $\overline{AM} \in L_r$, называется *r-мерной плоскостью*, проходящей через точку A в направлении подпространства L_r (см. рис. 6, где $r=2$).

Говорят также, что L_r есть *направляющее подпространство* этой плоскости. Очевидно, что каждая плоскость определяет однозначно свое направляющее подпространство.

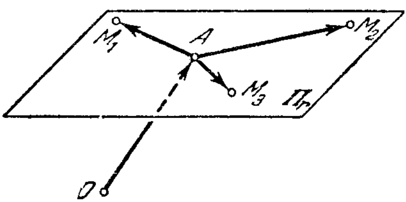


Рис. 6.

Точку M называют текущей точкой плоскости. На рис. 6 показаны три положения M_1, M_2, M_3 текущей точки M.

2. Частные случаи. 1) Если $r=0$, то плоскость состоит из одной точки A. Поэтому каждую точку аффинного пространства можно рассматривать как нульмерную плоскость.

2) Одномерная плоскость называется прямой линией (короче, прямой).

3) Плоскость размерности $n-1$ называется гиперплоскостью.

4) При $r=n$ плоскость совпадает со всем пространством $\mathfrak{A}_n$.

3. В определении плоскости выделена точка A. Докажем, что в действительности все точки плоскости равноправны.

Обозначим плоскость через Π_r и зафиксируем произвольную точку $B \in \Pi_r$. Надо доказать, что точка M принадлежит плоскости Π_r тогда и только тогда, когда $\overline{BM} \in L_r$ (т. е. что любая точка B может играть роль точки A).

Пусть $\overline{BM} \in L_r$ (рис. 7). По определению плоскости $\overline{AB} \in L_r$. Отсюда и по определению подпространства $\overline{AM} =$

$=\overline{AB}+\overline{BM}\in L_r$, поэтому $M\in\Pi_r$. Обратно, если $M\in\Pi_r$, то $\overline{AM}\in L_r$; следовательно, $\overline{BM}=\overline{AM}-\overline{AB}\in L_r$.

4. Теорема. *Всякая r-мерная плоскость в аффинном пространстве сама является r-мерным аффинным пространством.*

Доказательство. Пусть дано аффинное пространство $\mathfrak{A}$, которому соответствует линейное пространство L; пусть Π_r — плоскость, проходящая через точку A в направлении подпространства L_r. Возьмем в плоскости Π_r две произвольные точки M, N. По определению аффинного пространства им соответствует вектор $\overline{MN}\in L$. По определению плоскости векторы $\overline{AM}$ и $\overline{AN}$ принадлежат подпространству L_r. Следовательно,

$$\overline{MN}=\overline{AN}-\overline{AM}\in L_r.$$

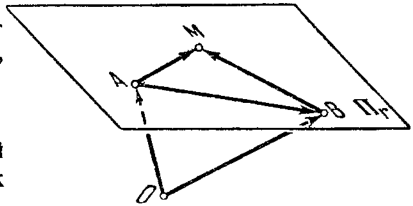


Рис. 7.

Таким образом, каждой упорядоченной паре точек M, N плоскости Π_r поставлен в соответствие вектор $\overline{MN}$ из r-мерного линейного пространства L_r. При этом соблюдение для Π_r первой из аксиом п. 2 § 1 вытекает из определения r-мерной плоскости, а вторая из аксиом п. 2 § 1 справедлива для Π_r потому, что она соблюдается для всего аффинного пространства $\mathfrak{A}$. Теорема доказана.

Замечание. Если плоскость проходит через начало аффинной системы координат в направлении подпространства L_r, то совокупность радиус-векторов ее точек образует линейное пространство, по определению совпадающее с подпространством L_r.

5. Пусть в аффинном пространстве $\mathfrak{A}$ даны точки $A_0, A_1, \ldots, A_r$ (в числе $r+1$). Говорят, что эти *точки находятся в общем положении*, если они не принадлежат одной $(r-1)$-мерной плоскости.

Читатель легко может проверить, что точки $A_0, A_1, \ldots, A_r$ находятся в общем положении тогда и только тогда, когда векторы $\overline{A_0A_1}, \ldots, \overline{A_0A_r}$ линейно независимы (рис. 8), причем безразлично, какую из точек брать в качестве A_0 (то есть в качестве начала векторов, идущих из нее в другие точки).

Из сказанного в этом пункте и из определения плоскости следует, что через систему точек $A_0, A_1, \ldots, A_r$, находящихся в общем положении, проходит r-мерная плоскость и притом только одна.

6. Предположим, что в пространстве $\mathfrak{A}_n$ зафиксирована какая-нибудь аффинная система координат с началом O и базисом $e_1, \ldots, e_n$. Рассмотрим плоскость Π_r, проходящую через точку A в направлении подпространства L_r.

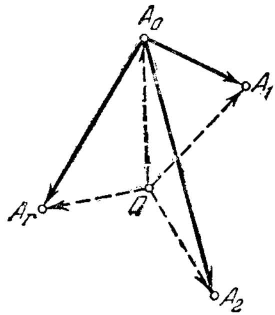


Рис. 8.

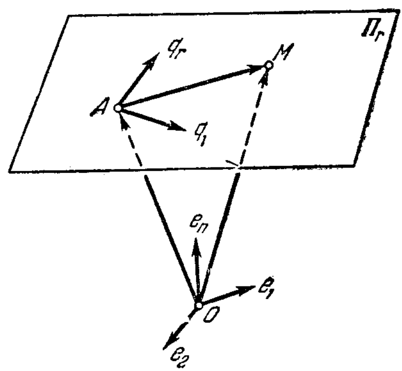


Рис. 9.

Будем считать, что точка A имеет координаты $p_1, \ldots, p_n$ и что L_r задается как линейная оболочка независимой системы векторов $q_1, \ldots, q_r$ (см. гл. I, § 13, п. 5). Тогда радиус-вектор $\overline{OM}$ текущей точки плоскости можно записать в виде

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \tau_1 q_1 + \ldots + \tau_r q_r, \tag{1}$$

где параметры $\tau_1, \ldots, \tau_r$ независимо друг от друга пробегают всевозможные числовые значения, а вектор $\overline{OA} = p_1 e_1 + \ldots + p_n e_n$ (рис. 9).

Разложим векторы $q_1, \ldots, q_r$ по базису $e_1, \ldots, e_n$:

$$q_j = q_{j1} e_1 + q_{j2} e_2 + \ldots + q_{jn} e_n.$$

Координаты текущей точки M обозначим, как обычно, через $(x_1, \ldots, x_n)$ и запишем векторное равенство (1) в координатах. В результате получим n числовых равенств

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = q_{11}\tau_1 + q_{21}\tau_2 + \ldots + q_{r1}\tau_r + p_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = q_{1n}\tau_1 + q_{2n}\tau_2 + \ldots + q_{rn}\tau_r + p_n. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Эти равенства называются *параметрическими уравнениями плоскости* Π_r (в данной системе координат). Обратим внимание на то, что все уравнения системы (2) являются линейными относительно координат текущей точки и параметров τ_j.

Верно и обратное: геометрическое место точек, определяемых уравнениями (2) при всевозможных значениях τ_j, есть плоскость, проходящая через точку A в направлении подпространства $L_r = L(q_1, \ldots, q_r)$. В самом деле, уравнения (2) равносильны векторному равенству (1), которое означает, что вектор $\overline{AM} \in L_r$.

Если для системы (2) написать соответствующую однородную систему, то есть $p_1, \ldots, p_n$ заменить нулями, то мы получим параметрические уравнения направляющего подпространства плоскости Π_r.

7. Пример. Пространство, изучаемое в стереометрии, является трехмерным аффинным пространством. В нем одномерные и двумерные плоскости совпадают соответственно с прямыми линиями и плоскостями, понимаемыми в элементарно-геометрическом смысле. Это нетрудно доказать различными способами, например, воспользовавшись результатами предыдущего пункта и параметрическими уравнениями прямой и плоскости, известными из элементарного курса аналитической геометрии.

8. Важное замечание. В отличие от пространства, изучаемого в элементарной геометрии, в аффинном пространстве не определены метрические понятия: расстояние между точками и длины линий, площади и объемы фигур, углы и перпендикулярность. При исследовании фигур в аффинном пространстве изучаются лишь те геометрические свойства, которые не зависят от метрических понятий. Тем не менее такое исследование является содержательным и позволяет решать многие задачи.

9. Прежде чем продолжить изучение плоскостей (а также других фигур в аффинном пространстве), мы изложим в следующих параграфах необходимый для этого алгебраический аппарат: системы уравнений первой степени.

§ 4. Системы уравнений первой степени

1. Рассмотрим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Буквы $a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m$ обозначают известные числа, $x_1, \ldots, x_n$ — неизвестные.

Числа a_{ij} называются коэффициентами системы (1) и образуют $m \times n$-матрицу

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

которая называется основной матрицей системы (1). Будем считать в дальнейшем, что матрица A не нулевая, то есть что среди коэффициентов системы (1) есть отличные от нуля.

Числа $b_1, \ldots, b_m$ называют свободными членами уравнений.

Матрица

$$B=\begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}$$

называется расширенной матрицей системы (1).

Всякий упорядоченный набор чисел $x_1, \ldots, x_n$, подстановка которых вместо неизвестных обращает все уравнения системы в арифметические тождества, называется решением системы. Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение.

2. Теорема Кронекера — Капелли. *Для того чтобы система* (1) *была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее расширенной матрицы был равен рангу основной матрицы:*

$$\mathrm{Rang}\, B=\mathrm{Rang}\, A. \tag{2}$$

Доказательство. 1. Необходимость. Очевидно, что

$$\mathrm{Rang}\, B \geqslant \mathrm{Rang}\, A. \tag{3}$$

Обозначим через $a_1, \ldots, a_n$ столбцы матрицы A, через b — столбец свободных членов и будем все эти столбцы рассматривать как векторы координатного пространства K_m. Пусть система (1) имеет решение $(x_1, \ldots, x_n)$. Это решение обращает уравнения в систему числовых тождеств, которые можно записать в виде одного векторного равенства

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = b. \tag{4}$$

Из формулы (4) следует, что векторы $a_1, \ldots, a_n$, b линейно выражаются через векторы $a_1, \ldots, a_n$. По лемме 3 из § 6 гл. I и в силу определения ранга матрицы имеем

$$\operatorname{Rang} B \leqslant \operatorname{Rang} A. \tag{5}$$

Из (3) и (5) следует равенство (2).

2. Достаточность. Пусть соблюдается равенство (2). Матрица A по условию ненулевая, поэтому у нее есть базисный минор порядка $r = \operatorname{Rang} A > 0$.

Допустим для определенности, что базисными являются первые r столбцов $a_1, \ldots, a_r$. Рассмотрим систему векторов $a_1, \ldots, a_r$, b. Эта система линейно зависима, ибо в противном случае $\operatorname{Rang} B = r + 1 > r$. Поэтому вектор b выражается через линейно независимые векторы $a_1, \ldots, a_r$ (см. гл. I, § 6, лемму 2):

$$b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r. \tag{6}$$

Положим

$$x_1 = \lambda_1, \ \ldots, \ x_r = \lambda_r, \ x_{r+1} = \ldots = x_n = 0. \tag{7}$$

Записав систему (1) в векторной форме (4) и подставив в нее величины (7), получим тождество (6). Таким образом, система (1) совместна: она имеет по крайней мере одно решение (7). Теорема доказана.

3. Отметим частный случай, когда число уравнений равно числу неизвестных, и матрица A (в этом случае квадратная) невырождена, то есть

$$D = \operatorname{Det} A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда система (1) имеет единственное решение, которое может быть найдено по правилу Крамера:

$$x_1 = \frac{D_1(b)}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2(b)}{D}, \ \ldots, \qquad x_n = \frac{D_n(b)}{D}. \tag{8}$$

Здесь через $D_j(b)$ обозначен определитель, который получается из D заменой его j-го столбца на столбец свободных членов, то есть

$$D_j(b)=\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Замечание 1. Если обозначить через x вектор $(x_1, \dots, x_n)$, записанный в виде столбца, то систему (1) можно представить в виде матричного уравнения

$$Ax=b, \tag{1a}$$

а формулы Крамера (8) — в виде матричного равенства

$$x=A^{-1}b. \tag{8a}$$

Переход от формулы (1a) к формуле (8a) получается умножением обеих частей равенства слева на матрицу A^{-1}.

Замечание 2. Для практического решения систем с большим числом уравнений и неизвестных формулы (8) неудобны ввиду трудности вычисления определителей D и $D_j(b)$. Поэтому для решения таких систем разработан ряд других методов, которые излагаются в руководствах по вычислительной математике.

4. Вернемся к рассмотрению системы (1) при произвольных m и n, предполагая, что соблюдены условия совместности (2). Наша цель — найти все решения системы. Число r, равное рангу матриц A и B, назовем *рангом системы* (1). Будем считать для определенности, что базисный минор матрицы A занимает в ней верхний левый угол (этого всегда можно добиться изменением нумерации неизвестных и перестановкой уравнений). Обозначим этот минор через D:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1r} \\ \dots\dots \\ a_{r1} \dots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Минор D является базисным и для матрицы B, поэтому строки матрицы B с номерами $r+1, \dots, m$ являются линейными комбинациями первых r ее строк (см. гл. I, § 7). Это значит, что уравнения с номерами $r+1, \dots, m$ представляют собой линейные комбинации первых r уравнений, так что система (1) эквивалентна системе

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Оставим в левых частях лишь те слагаемые, коэффициенты которых образуют базисный минор D, все остальные члены перенесем направо:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ будем называть свободными. Им можно придать любые числовые значения. Тогда неизвестные $x_1, \ldots, x_r$ однозначно определятся из системы (11) по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{D_j(b - x_{r+1}a_{r+1} - \ldots - x_n a_n)}{D}. \qquad (12)$$

Здесь, как и выше, через a_i обозначены столбцы основной матрицы A системы (10), через b — столбец свободных членов системы (10); символ D_j определяется формулой (9), в которой нужно n заменить на r и вместо вектора b подставить вектор $b - x_{r+1}a_{r+1} - \ldots - x_n a_n$.

Пользуясь свойствами определителей, разложим числитель формулы (12). Мы получим

$$x_j = \frac{D_j(b)}{D} - \frac{D_j(a_{r+1})}{D}x_{r+1} - \ldots - \frac{D_j(a_n)}{D}x_n$$

$$(j = 1, \ldots, r). \qquad (13)$$

Введем обозначения

$$p_j = \frac{D_j(b)}{D}, \qquad q_{kj} = \frac{D_j(-a_k)}{D}, \qquad (14)$$

$$i = 1, \ldots, r, \quad k = r+1, \ldots, n.$$

Тогда из (13)

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = p_1 + q_{r+1\,1}x_{r+1} + \ldots + q_{n1}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = p_r + q_{r+1\,r}x_{r+1} + \ldots + q_{nr}x_n. \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Добавим сюда еще $n-r$ очевидных равенств:

$$\left.\begin{array}{l} x_{r+1} = x_{r+1}, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \qquad x_n. \end{array}\right\} \tag{16}$$

Всю совокупность равенств (15) и (16) заменим одним векторным соотношением

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} q_{r+1\,1} \\ \vdots \\ q_{r+1\,r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\| x_{r+1} + \dots + \left\| \begin{matrix} q_{n1} \\ \vdots \\ q_{nr} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\| x_n. \tag{17}$$

Формула (17) дает общее решение системы (1), поскольку выражает все неизвестные $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ через свободные неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$, которым можно придавать любые численные значения. Покажем, что при этом все возможные решения системы (1) будут исчерпаны. В самом деле, если $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ — любое заданное решение системы (1), то $x_{r+1}, \dots, x_n$ имеют определенные численные значения; подставляя их в систему (1) и повторяя предыдущие выкладки, получаем равенство (17).

5. Обозначим столбец в левой части равенства (17) через x; столбцы в правой части этого равенства обозначим по порядку их расположения через $p, q_{r+1}, \dots, q_n$. Тогда равенство (17) примет вид

$$x = p + x_{r+1}q_{r+1} + \dots + x_nq_n. \tag{18}$$

Равенства (18) и (17) следует понимать как равенства между векторами координатного пространства K_n.

6. Следствие. *Если система* (1) *совместна и ее ранг r меньше числа неизвестных n, то эта система имеет бесконечное множество решений.*

Замечание. Выбор свободных неизвестных, вообще говоря, можно делать по-разному. Однако не всякие $n-r$ неизвестных можно принять за свободные. Нужно, чтобы в системе (1) коэффициенты при остальных r неизвестных составили базисный минор матрицы A.

§ 5. Однородные системы

1. Система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

называется однородной; в этом случае правые части всех уравнений равны нулю:

$$b_1 = \ldots = b_m = 0. \tag{2}$$

2. Однородная система всегда совместна. С одной стороны, это вытекает из теоремы Кронекера — Капелли: $\operatorname{Rang} B = \operatorname{Rang} A$, так как матрица B получается из A добавлением нулевого столбца.

С другой стороны, сразу видно, что система (1) имеет нулевое решение:

$$x_1 = \ldots = x_n = 0.$$

Нулевое решение однородной системы называется тривиальным. Остальные решения, т. е. не состоящие только из одних нулей, называются нетривиальными.

3. Как и раньше, будем рассматривать решения системы (1) в качестве векторов координатного пространства K_n.

Теорема 1. *Множество решений однородной системы образует в пространстве K_n подпространство размерности $n - r$, где r — ранг системы.*

Доказательство. Вследствие условия (2)

$$p_j = \frac{D_j(b)}{D} = 0.$$

Поэтому в рассматриваемом случае $p = \theta$ и формула (18) § 4 выражает любое решение x в виде линейной комбинации векторов $q_{r+1}, \ldots, q_n$. Обратно, всякая линейная комбинация векторов $q_{r+1}, \ldots, q_n$ дает решение однородной системы (1). Иначе говоря, множество X всех решений такой системы есть линейная оболочка векторов $q_{r+1}, \ldots, q_n$ в K_n. Следовательно, X является линейным подпространством в K_n.

Теперь убедимся, что векторы $q_{r+1}, \ldots, q_n$ линейно независимы. С этой целью рассмотрим матрицу Γ, составленную координатами векторов $q_{r+1}, \ldots, q_n$:

$$\Gamma = \left\| \begin{matrix} q_{r+1\,1} & \ldots & q_{n1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ q_{r+1\,r} & \ldots & q_{nr} \\ 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Нижний минор максимального порядка матрицы Γ является ее базисным минором (он равен единице, т. е. отличен от нуля, и не имеет окаймляющих). Следовательно, столбцы Γ линейно независимы. Тем самым линейно независимы векторы $q_{r+1}, \ldots, q_n$.

Отсюда следует, что векторы $q_{r+1}, \ldots, q_n$ составляют базис в X. Но число их равно $n-r$. Значит, размерность X равна $n-r$, и теорема доказана.

4. Пусть известна какая-нибудь линейно независимая система решений в числе $n-r$:

$$c_1 = \left\| \begin{matrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{matrix} \right\|, \ldots, \qquad c_{n-r} = \left\| \begin{matrix} c_{n-r\,1} \\ \vdots \\ c_{n-r\,n} \end{matrix} \right\|. \tag{3}$$

Тогда любое решение x системы (1) представляется в виде линейной комбинации данных решений (3):

$$x = \tau_1 c_1 + \ldots + \tau_{n-r} c_{n-r}; \tag{4}$$

обратно, любая линейная комбинация вида (4) дает решение.

Оба утверждения сразу следуют из предыдущей теоремы. Именно, согласно этой теореме подпространство X решений системы (1) имеет размерность $n-r$; следовательно, решения $c_1, \ldots, c_{n-r}$ составляют в нем базис.

Определение. Всякая линейно независимая система решений в числе $n-r$ называется *фундаментальной* для системы уравнений (1).

Вывод. Чтобы решить однородную систему уравнений (1), достаточно найти какую-нибудь фундаментальную систему ее решений $c_1, \ldots, c_{n-r}$. Тогда все решения системы (1) даются формулой (4), в которой каждый из параметров $\tau_1, \ldots, \tau_{n-r}$ независимо от других пробегает всевозможные числовые значения.

Замечание. Одна из фундаментальных систем решений составлена столбцами матрицы Г. Эту систему решений дают формулы (14) предыдущего параграфа.

5. Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Здесь $n = 4$, $r = 2$. Значит, пространство решений имеет размерность $n - r = 2$. Следовательно, нам достаточно найти какие-нибудь два независимых решения, например:

$$\begin{aligned} &x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1; \\ &x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем общее решение системы (5):

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix} = \tau_1 \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} + \tau_2 \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

6. Важные частные случаи. 1) Однородная система n уравнений с n неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Относительно системы (6) мы отметим только следующую теорему, которая часто используется в приложениях линейной алгебры.

Теорема 2. *Система вида* (6) *имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:*

$$D = \operatorname{Det} \| a_{ij} \| = 0.$$

Действительно, в этом и только в этом случае $r = \operatorname{Rang} A < n$ и размерность пространства решений положительна: $n - r > 0$.

2) Однородная система $n-1$ независимых уравнений с n неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1\,1}x_1 + \ldots + a_{n-1\,n}x_n = 0. \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Условие независимости уравнений означает, что (прямоугольная) матрица $A = \|a_{ij}\|$ системы (7) имеет ранг $r = n-1$. В этом случае пространство решений одномерно ($n - r = 1$), и для получения общего решения системы (7) достаточно найти одно ее нетривиальное решение. Покажем, как это сделать.

Составим вспомогательную квадратную матрицу $\tilde{A}$ порядка n, которая получается из матрицы A прибавлением сверху новой строки; именно:

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{ccc} a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1\,1} & \ldots & a_{n-1\,n} \end{array} \right\|,$$

где $a_{01}, \ldots, a_{0n}$ — произвольные числа. Через A_{0j} обозначим алгебраические дополнения элементов a_{0j} в матрице $\tilde{A}$. Тогда величины

$$x_1 = A_{01}, \quad x_2 = A_{02}, \ \ldots, \ x_n = A_{0n} \qquad (8)$$

образуют решение системы (7). В самом деле, подставим величины (8) в уравнение с номером i; мы получим сумму произведений элементов одной строки матрицы $\tilde{A}$ на алгебраические дополнения элементов другой строки, равную, как известно, нулю:

$$a_{i1}A_{01} + \ldots + a_{in}A_{0n} = 0.$$

Таким образом, числа (8) действительно удовлетворяют системе (7).

Обозначим через M_j минор матрицы A порядка $n-1$, который получается вычеркиванием столбца с номером j:

$$M_j = \left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & \ldots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1\,1} & \ldots & a_{n-1\,j-1} & a_{n-1\,j+1} & \ldots & a_{n-1\,n} \end{array} \right\|.$$

Тогда $A_{0j}=(-1)^{j+1} M_j$. Среди миноров M_j имеется по крайней мере один, не равный нулю (базисный минор матрицы A), поэтому решение (8) нетривиально. Общее решение системы (7) можно записать в виде

$$x_j=(-1)^{j+1} M_j \tau,$$

где τ — произвольное число. Иначе говоря, решение системы (7) пропорционально минорам максимального порядка матрицы A, взятым с чередующимися знаками. Иногда это записывают так:

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots = M_1 : (-M_2) : M_3 : \ldots$$

7. Выше, в п. 3, мы доказали, что однородная система уравнений первой степени ранга r определяет в n-мерном линейном пространстве L_n подпространство размерности $n-r$. Покажем, что верно и обратное. Именно, справедлива

Теорема 3. *Всякое подпространство размерности k в пространстве L_n с данным базисом является подпространством решений некоторой однородной системы линейных уравнений ранга $n-k$.*

Доказательство. Пусть в L_n даны базис $e_1, \ldots, e_n$ и подпространство L_k. Возьмем в этом подпространстве k независимых векторов, которые мы обозначим $e'_{n-k+1}, \ldots$ $\ldots, e'_n$; используя лемму из п. 7 § 14 гл. I, дополним их до базиса в L_n:

$$e'_1, \ldots, e'_{n-k}, e'_{n-k+1}, \ldots, e'_n. \tag{9}$$

Подпространство L_k является линейной оболочкой векторов $e'_{n-k+1}, \ldots, e'_n$. Поэтому вектор x из L_n лежит в L_k тогда и только тогда, когда его координаты в базисе (9), имеющие номера $1, \ldots, n-k$, равны нулю:

$$x'_i=0 \qquad (i=1, \ldots, n-k). \tag{10}$$

Формулы (10) представляют собой систему уравнений, определяющую L_k в базисе (9). Перейдем к исходному базису $e_1, \ldots, e_n$.

Для этого воспользуемся формулами преобразования координат (см. гл. II, § 5)

$$x'_i=\sum_{j=1}^{n} Q_{ij} x_j, \qquad i=1, \ldots, n.$$

Отсюда получим искомую систему уравнений (11), эквивалентную системе (10):

$$\sum_{j=1}^{n} Q_{ij} x_j = 0, \qquad i = 1, \ldots, n-k. \tag{11}$$

Так как $n \times n$-матрица $Q = \| Q_{ij} \|$ невырожденная, то все ее строки линейно независимы. Следовательно, ранг системы (11) равен числу ее уравнений: $r = n - k$. Теорема 3 доказана.

8. Как видно из проведенного доказательства, конкретная запись системы уравнений, определяющей L_k, зависит от выбора базиса.

Кроме того, в данном базисе данное подпространство может задаваться различными однородными системами уравнений. Это ясно, поскольку для системы (11) имеется бесконечное множество других, эквивалентных ей систем. Покажем, как можно строить такие системы. Пусть

$$H = \| h_{li} \| = \begin{Vmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1\, n-k} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ h_{n-k\, 1} & \ldots & h_{n-k\, n-k} \end{Vmatrix}$$

— любая невырожденная квадратная матрица порядка $n-k$. Фиксируя l, умножим уравнения (11) соответственно на числа h_{li} ($i = 1, \ldots, n-k$) и сложим их; затем выпишем найденные соотношения, беря $l = 1, \ldots, n-k$. Мы получим однородную систему

$$\sum_{i=1}^{n-k} h_{li} \sum_{j=1}^{n} Q_{ij} x_j = 0 \qquad (l = 1, \ldots, n-k). \tag{12}$$

Если ввести числа

$$R_{lj} = \sum_{i=1}^{n-k} h_{li} Q_{ij} \qquad (l = 1, \ldots, n-k;\ j = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

то система (12) запишется более просто:

$$\sum_{j=1}^{n} R_{lj} x_j = 0 \qquad (l = 1, \ldots, n-k). \tag{14}$$

Система (14), очевидно, есть следствие системы (11). Покажем, что система (11) в свою очередь есть следствие системы (14). При каждом фиксированном $j \, (1 \leqslant j \leqslant n)$ формулу (13) можно рассматривать как систему уравнений с неизвестными Q_{ij} и правыми частями R_{lj}. Решая эту систему по правилу Крамера для каждого j, находим, что

$$Q_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{n-k} H_{i\alpha}R_{\alpha j}, \tag{15}$$

где матрица $\|H_{i\alpha}\|=H^{-1}$ — обратная по отношению к матрице $H=\|h_{li}\|$.

Формула (15) показывает, что коэффициенты системы (11) выражаются через коэффициенты системы (14) с помощью матрицы $\|H_{i\alpha}\|$ совершенно аналогично тому, как коэффициенты (14) выражались через (11) с помощью матрицы $\|h_{li}\|$. Таким образом, системы (11) и (14) эквивалентны. Итак, по данной системе (11) мы можем получить бесконечное множество эквивалентных ей систем вида (12), поскольку бесконечно многими способами можно выбирать невырожденную матрицу H.

З а м е ч а н и е. Если прямоугольные матрицы систем уравнений (11) и (14) обозначить соответственно через $\tilde{Q}$ и R, то две системы равенств (13) и (15) можно заменить двумя матричными равенствами

$$R=H\tilde{Q}, \qquad \tilde{Q}=H^{-1}R.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{Rang} R=\operatorname{Rang}\tilde{Q}$. Иначе говоря, все системы вида (14), которые мы строим по данной системе (11), имеют один и тот же ранг, равный $n-k$.

П р и м е р. Система

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2-x_3-x_4&=0,\\ x_1-x_2+x_3+x_4&=0 \end{aligned}\right\}$$

определяет в четырехмерном линейном пространстве некоторое двумерное подпространство L_2. Беря

$$H=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1 \end{Vmatrix},$$

получим в качестве (14) систему

$$x_1=0, \qquad x_2-x_3-x_4=0,$$

которая определяет то же самое подпространство L_2, что и данная система (иначе говоря, мы заменяем данные уравнения их полусуммой и полуразностью).

9. В заключение параграфа докажем, что линейное невырожденное преобразование переменных сохраняет ранг системы уравнений (1). Запишем систему (1) в виде матричного равенства

$$AX = 0, \tag{1a}$$

где $A = \| a_{ij} \|$ есть $m \times n$-матрица коэффициентов, X — матрица-столбец неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, нуль в правой части обозначает нулевую $m \times 1$-матрицу. Пусть дана замена переменных $X' = QX$ (см. формулы (IIIa) и (III) § 5 гл. II; Q — невырожденная $n \times n$-матрица). Тогда

$$X = P^* X', \tag{16}$$

где $P = \| P_{kl} \| = (Q^{-1})^*$. Подставляя (16) в (1a), получим матричную запись рассматриваемой системы уравнений в новых переменных $(x_1^1, \ldots, x_n^1)$:

$$(AP^*) X' = 0,$$

или подробнее

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} P_{k\alpha} \right) x'_k = 0, \qquad l = 1, \ldots, m.$$

Матрица P невырождена, так что

$$\operatorname{Rang} AP^* = \operatorname{Rang} A$$

согласно п. 3 § 4 гл. II. Тем самым утверждение, сформулированное в начале этого пункта, доказано.

§ 6. Неоднородные системы

1. Пусть дана неоднородная система

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \tag{1}$$

где $l = 1, \ldots, m$ и среди чисел b_i есть отличные от нуля. Допустим, что система совместна, то есть $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} B = r$. Пусть $\{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ — некоторое решение системы (1). Подставив это решение в систему (1), получим тождества

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 = b_i. \tag{2}$$

Вычтем тождества (2) из уравнений (1). В результате получится система (3), эквивалентная системе (1):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0. \tag{3}$$

Положим $x_j - x_j^0 = u_j$; тогда получим однородную систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = 0. \tag{4}$$

Пусть для системы уравнений (4) известна фундаментальная система решений

$$c_1 = \begin{Vmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{Vmatrix}, \quad \ldots, \quad c_{n-r} = \begin{Vmatrix} c_{n-r\,1} \\ \vdots \\ c_{n-r\,n} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

В таком случае, согласно результатам п. 4 § 5, любое решение системы (4) выражается в виде линейной комбинации векторов (5), то есть

$$u_j = \tau_1 c_{1j} + \ldots + \tau_{n-r} c_{n-r\,j}, \tag{6}$$

где $\tau_1, \ldots, \tau_{n-r}$ — произвольные числа. Так как $u_j = x_j - x_j^0$, то из (6) находим

$$x_j = x_j^0 + (\tau_1 c_{1j} + \ldots + \tau_{n-r} c_{n-r\,j}), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Назовем $x_1^0, \ldots, x_n^0$ частным решением системы (1). Сумма, стоящая в скобках в формуле (7), представляет собой общее решение системы (4).

Система (4), полученная из системы (1) заменой правых частей нулями, называется однородной системой, соответствующей системе (1).

Формула (7) показывает, что справедлива

Теорема 1. *Общее решение неоднородной системы* (1) *представляется в виде суммы произвольного частного решения этой системы и общего решения соответствующей ей однородной системы.*

2. Геометрическое истолкование множества решений неоднородной системы линейных уравнений. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство $\mathfrak{A}_n$. Зафиксируем в нем какую-нибудь аффинную систему координат. Тогда каждому решению $x_1, \ldots, x_n$ системы (1) можно поставить в соответствие точку пространства $\mathfrak{A}_n$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$. Имеет место

Теорема 2. *Все решения системы* (1) *образуют в* $\mathfrak{A}_n$ *плоскость размерности* $n-r$.

Доказательство. Все решения системы (1) даются формулой (7). Ввиду независимости векторов (5) эта формула есть не что иное, как параметрические уравнения некоторой плоскости размерности $n-r$ (см. § 3, п. 6). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *В аффинном пространстве* $\mathfrak{A}_n$ *и в любых аффинных координатах всякая плоскость* Π_m *может быть задана системой линейных уравнений вида* (1) *и ранга* $r=n-m$.

Доказательство. Пусть плоскость Π_m проходит через точку A, имеющую координаты $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, в направлении подпространства L_m. Перенесем начало аффинной системы координат в точку A, сохраняя прежний базис. Координаты текущей точки M в исходной системе обозначим через $(x_1, \ldots, x_n)$, в новой системе — через $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$; последние совпадают с координатами вектора $\overline{AM} \in L_m$. По теореме 3 из § 5 подпространство L_m задается некоторой однородной системой линейных уравнений ранга $r=n-m$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j = 0, \qquad i=1, \ldots, r.$$

Учитывая, что $\tilde{x}_j = x_j - x_j^0$, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0.$$

Положив $b_i = \sum a_{ij}x_j^0$, найдем систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=1, \ldots, r, \tag{8}$$

которая имеет тот же ранг $r=n-m$ и определяет Π_m в исходных координатах. Теорема 3 доказана.

3. Следствие. *Плоскость задается однородной системой линейных уравнений тогда и только тогда, когда она проходит через начало координат.*

4. Важный частный случай. Гиперплоскость задается одним линейным уравнением

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b.$$

5. Каждое из уравнений (8) можно рассматривать как уравнение некоторой гиперплоскости. Поэтому каждую плоскость размерности m можно рассматривать как пересечение некоторых гиперплоскостей в количестве $m-n$.

6. Если система линейных уравнений несовместна, то геометрически это означает, что нет ни одной точки, принадлежащей сразу всем гиперплоскостям, которые задаются уравнениями системы.

7. Очевидно, что при переходе к новым аффинным координатам вид уравнений (8) меняется. Кроме того, данная плоскость Π_m в данной системе аффинных координат может задаваться различными системами уравнений. Это ясно, поскольку для системы (8) имеется бесконечное множество других, эквивалентных ей систем. Так, например, можно взять любую невырожденную квадратную матрицу $H=\|h_{ij}\|$, $i, j=1, 2, \ldots, r$, и написать следствия системы (8):

$$\sum_{\alpha=1}^{r} h_{i\alpha}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{\alpha j}x_j-b_\alpha\right)=0. \tag{9}$$

Если ввести обозначения

$$a'_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{r} h_{i\alpha}a_{\alpha j}, \qquad b'_i=\sum_{\alpha=1}^{r} h_{i\alpha}b_\alpha,$$

то уравнения (9) запишутся более просто:

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}x_j=b'_i, \qquad i=1, \ldots, r. \tag{10}$$

Система уравнений (10) не только следует из системы (8), но является эквивалентной ей (что доказывается так же, как аналогичное утверждение в п. 8 § 5).

Возможность перехода от системы (8) к разным системам вида (10) геометрически означает, что Π_m можно определять как пересечение различных наборов независимых гиперплоскостей в числе $n-m$. Независимость гиперплоскостей следует понимать в том смысле, что ранг совместной системы (10) уравнений этих гиперплоскостей имеет максимально возможное значение, т. е. равен числу уравнений ($r = n - m$).

§ 7. Взаимное расположение плоскостей

1. Пересекающиеся плоскости. Во всем этом параграфе размерности плоскостей и подпространств обозначены индексами снизу. Пусть две плоскости Π_k и Π_l в аффинном пространстве $\mathfrak{A}_n$ имеют общую точку A. Примем эту точку за начало аффинной системы координат. Когда текущая точка M пробегает плоскость Π_k (или Π_l), вектор $\overline{AM}$ пробегает подпространство L_k (соответственно L_l). Поэтому вопрос о взаимном расположении двух пересекающихся плоскостей естественно связан с рассмотрением подпространств L_k и L_l в векторном пространстве L_n.

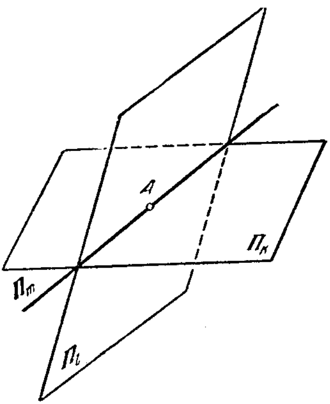


Рис. 10.

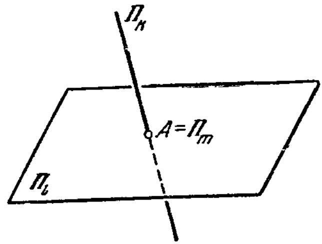


Рис. 11.

Используя свойства подпространств (гл. I, §§ 12—14), нетрудно установить следующие факты:

1) Если плоскости Π_k и Π_l пересекаются, то их пересечением является некоторая плоскость Π_m (на рис. 10 взято $k = l = 2$, $m = 1$).

Замечание 1. Не исключена возможность, что Π_m состоит из одной точки ($m = 0$). Это видно на примере двух пересекающихся прямых или прямой и плоскости (рис. 11). В общем случае по одной точке могут пересекаться две плоскости, сумма размерностей которых не превышает размерности пространства, например двумерные плоскости в четырехмерном пространстве.

Замечание 2. Мы не исключаем и другого крайнего случая, когда одна из двух плоскостей целиком принадлежит другой. Например, $\Pi_k \subset \Pi_l$, $k < l$, тогда $\Pi_m = \Pi_k$ (на рис. 12 $k = m = 1$, $l = 2$).

2) Если плоскости Π_k и Π_l пересекаются по плоскости Π_m, то существует единственная плоскость Π_r размерности $r = k + l - m$, содержащая Π_k и Π_l, причем ни в какой плоскости меньшей размерности Π_k и Π_l не могут одновременно поместиться. Направляющее подпространство L_r плоскости Π_r является суммой направляющих подпространств L_k и L_l. Эта сумма является прямой суммой тогда и только тогда, когда Π_k и Π_l пересекаются по одной точке ($m = 0$, см. рис. 13).

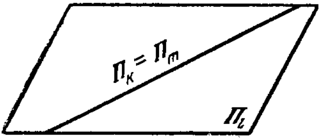


Рис. 12.

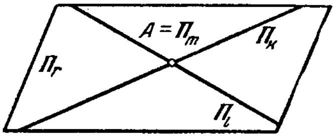


Рис. 13.

В частном случае, когда $k + l - m = n$, роль плоскости Π_r выполняет все пространство $\mathfrak{A}_n$ (при $r = n = 3$ см. рис. 10).

3) Если пересекающиеся плоскости Π_k и Π_l содержатся в какой-нибудь плоскости Π_r, то размерность их пересечения $m \geqslant k + l - r$. В частности,

$$m \geqslant k + l - n \tag{1}$$

для любых двух пересекающихся плоскостей из $\mathfrak{A}_n$.

4) Если плоскости Π_k и Π_l проходят через точку A в направлении подпространств L_k и L_l соответственно и если L_k содержится в L_l, то плоскость Π_k содержится в плоскости Π_l. Если при этом $k = l$, то Π_k совпадает с Π_l (также и L_k совпадает с L_l).

2. Параллельные плоскости. Пусть теперь плоскость Π_k определяется точкой A и подпространством L_k, а плоскость Π_l — точкой B и подпространством L_l. Будем считать, что $l \geqslant k$.

Определение. Плоскость Π_k параллельна плоскости Π_l, если $L_k \subset L_l$.

Позволим себе также говорить, что в этом случае плоскость Π_l параллельна плоскости Π_k.

Замечание 1. Согласно этому определению включение $\Pi_k \subset \Pi_l$ является частным случаем параллельности.

Замечание 2. Если Π_k параллельна Π_l, причем $k=l$, то L_k совпадает с L_l.

Замечание 3. Легко убедиться, что при $n=3$ частные случаи $k=l=1$, $k=l=2$ и $k=1$, $l=2$ согласуются с понятием параллельности прямых и плоскостей, известным из элементарной геометрии (рис. 14).

Пусть в произвольной аффинной системе координат две плоскости Π и Π' одинаковой размерности заданы

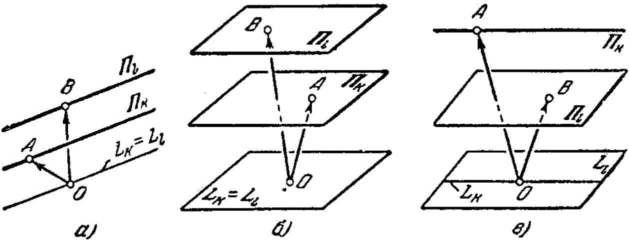


Рис. 14.

системами линейных уравнений. Пользуясь определением параллельности, нетрудно установить следующее утверждение.

Для того чтобы Π *и* Π' *были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие однородные системы уравнений были эквивалентны.*

В частности, две гиперплоскости параллельны тогда и только тогда, когда в одних и тех же координатах они задаются уравнениями

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0 \tag{2}$$

и

$$a_1'x_1 + \ldots + a_n'x_n + b' = 0 \tag{2'}$$

с пропорциональными коэффициентами при переменных:

$$\frac{a_1}{a_1'} = \ldots = \frac{a_n}{a_n'}.$$

Для совпадения гиперплоскостей (2) и (2′) необходимо и достаточно, чтобы были пропорциональны все коэффициенты их уравнений:

$$\frac{a_1}{a'_1} = \ldots = \frac{a_n}{a'_n} = \frac{b_n}{b'_n}.$$

Теорема 1. *Пусть в аффинном пространстве $\mathfrak{A}_n$ даны плоскость Π_k и точка B. Тогда существует единственная плоскость Π'_k размерности k, проходящая через точку B параллельно Π_k. Если $B \in \Pi_k$, то Π'_k совпадает с Π_k; если точка B расположена вне Π_k, то плоскости Π_k и Π'_k не пересекаются.*

Доказательство настолько подготовлено предыдущим, что не требует изложения.

3. Скрещивающиеся плоскости.

Определение. Две плоскости называются *скрещивающимися*, если они не пересекаются и не параллельны.

Хорошо известно, что в трехмерном пространстве $\mathfrak{A}_3$ две прямые линии, то есть одномерные плоскости, могут скрещиваться, тогда как прямая линия и двумерная плоскость в $\mathfrak{A}_3$ скрещиваться не могут. С повышением размерности пространства оно становится более просторным, в результате чего появляется возможность строить в нем скрещивающиеся плоскости разных размерностей, а не только одномерные. Ниже сформулирована теорема 2, содержание которой можно рассматривать как общий прием построения скрещивающихся плоскостей. Именно, пусть в аффинном пространстве $\mathfrak{A}_n$ дана плоскость Π_l ($l < n$). Возьмем произвольную плоскость Π_k так, чтобы Π_k и Π_l не были параллельны и пересекались; плоскость, по которой они пересекаются, обозначим через Π_m. Пусть Π_r — плоскость наименьшей размерности, содержащая Π_k и Π_l. Мы знаем, что $r = k + l - m$.

Теорема 2. *Если $k + l - m < n$, то всякая k-мерная плоскость, которая параллельна Π_k и не лежит в Π_r, скрещивается с Π_l.*

Следствие. *Если целые числа k, l, m, n удовлетворяют неравенствам*

$$0 \leqslant m < k, \qquad 0 \leqslant m < l, \qquad k + l - m < n,$$

то в $\mathfrak{A}_n$ найдутся скрещивающиеся плоскости Π_k и Π_l с направляющими подпространствами L_k и L_l, пересечение которых $L_m = L_k \cap L_l$ имеет размерность m.

Доказательство теоремы 2. Так как $r=k+l-m<n$, то плоскость Π_r не исчерпывает собой всего пространства $\mathfrak{A}_n$. Это позволяет взять (с большим произволом) точку C, не лежащую в Π_r. Обозначим через Π'_k плоскость размерности k, проходящую через точку C параллельно Π_k. Ясно, что Π'_k не содержится в Π_r и что, выбирая по-разному точку C, мы можем получить любую k-мерную плоскость, удовлетворяющую условию теоремы. (См. рис. 15, на котором $k=l=2$, $r=3$, $n=4$, и трехмерные плоскости условно

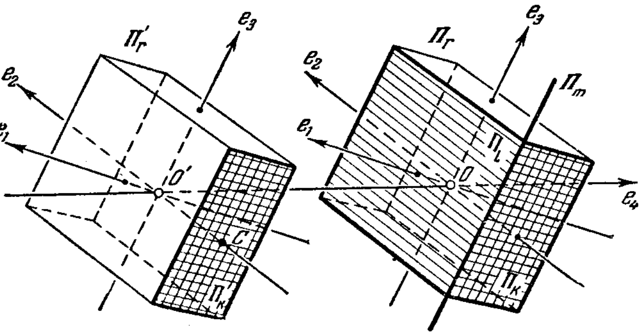


Рис. 15.

изображены в виде параллелепипедов.) Докажем, что плоскости Π_l и Π'_k скрещиваются. Заметим, что плоскость Π'_k не параллельна Π_l, так как в противном случае или $L_k \subset L_l$, или $L_l \subset L_k$, что противоречит условию расположения плоскостей Π_k и Π_l.

Теперь докажем, что Π'_k и Π_l не пересекаются. Проведем через точку C вспомогательную r-мерную плоскость Π'_r, параллельную Π_r. Тогда $\Pi'_k \subset \Pi'_r$, и поэтому Π'_k не может пересечь Π_l, ибо в противном случае точка их пересечения принадлежала бы параллельным плоскостям Π_r и Π'_r. Следовательно, Π'_k скрещивается с Π_l. Теорема 2 доказана.

Пусть в n-мерном аффинном пространстве $\mathfrak{A}_n$ даны скрещивающиеся плоскости Π_k и Π_l с направляющими подпространствами L_k и L_l, причем $L_k \cap L_l = L_m$, $k+l-m<n$.

Теорема 3. *Существует единственная плоскость* Π_{r+1} *размерности* $r+1=(k+l-m)+1$, *содержащая плоскости* Π_k *и* Π_l.

Доказательство. Выберем произвольную точку $A \in \Pi_k$ и зафиксируем произвольную точку $B \in \Pi_l$; обозначим через $L(\overline{AB})$ линейную оболочку вектора $\overline{AB}$ (рис. 16). Допустим, что существует какая-то плоскость $\tilde{\Pi}$, содержащая Π_k и Π_l; пусть $\tilde{L}$ — ее направляющее подпространство. Очевидно, что $\tilde{L}$ должно содержать L_k, L_l и $L(\overline{AB})$, а следовательно, и сумму этих подпространств. Обозначим эту сумму через L_{r+1}:

$$L_{r+1} = L_k + L_l + L(\overline{AB}) \subset \tilde{L}.$$

Обратно, если $\tilde{L}$ — любое подпространство, включающее L_{r+1}, то плоскость $\tilde{\Pi}$, проходящая через точку A в направлении $\tilde{L}$, будет содержать Π_k и Π_l. В самом деле, так

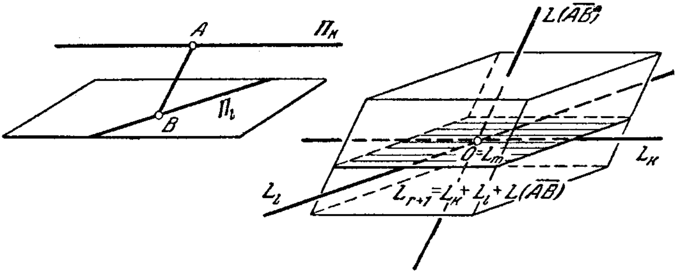


Рис. 16.

как $A \in \tilde{\Pi}$ и $L_k \subset \tilde{L}$, то $\Pi_k \subset \tilde{\Pi}$; так как $A \in \tilde{\Pi}$ и $\overline{AB} \in L$, то $B \in \tilde{\Pi}$, так как $B \in \tilde{\Pi}$ и $L_l \subset \tilde{L}$, то $\Pi_l \subset \tilde{\Pi}$.

Мы получим среди всех плоскостей $\tilde{\Pi}$ искомую плоскость Π_{r+1} минимальной размерности $r+1$ в том единственном случае, когда в качестве $\tilde{L}$ берется L_{r+1}. Подсчитаем $r+1$. С этой целью рассмотрим $L' = L_k + L_l$ и обозначим размерность L' через p. По теореме 3 из § 14 гл. I имеем $p = k + l - m$. Ниже мы покажем, что $L_{r+1} = L' + L(\overline{AB})$ есть прямая сумма; поэтому размерность L_{r+1} равна $p+1$, то есть $(r+1) = (k+l-m)+1$.

Итак, нужно установить, что $L_{r+1} = L' \oplus L(\overline{AB})$. Для этого достаточно показать, что вектор $\overline{AB}$ не принадлежит подпространству L'. Предположим противное. Пусть $\overline{AB} \in L'$. Тогда по определению суммы подпространств существуют векторы x, y такие, что

$$x \in L_k, \quad y \in L_l, \quad \overline{AB} = x + y. \tag{3}$$

По первой аксиоме аффинного пространства найдется точка C такая, что $\overline{AC} = x$, причем $C \in \Pi_k$. По второй аксиоме аффинного пространства

$$x + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}. \tag{4}$$

Учитывая (3), (4), находим, что

$$\overline{BC} = -y \in L_l, \tag{5}$$

так что $C \in \Pi_l$. Получается, что плоскости Π_k и Π_l имеют общую точку C, но это невозможно, поскольку плоскости Π_k и Π_l скрещиваются. Тем самым доказательство теоремы 3 завершено.

Замечание. Рис. 16 лишь частично иллюстрирует теорему 3. Например, если размерности Π_k и Π_l больше m и различны между собой, $m \geqslant 1$, $\Pi_{r+1} \neq \hat{\Pi} \neq \mathfrak{A}_n$, то, как нетрудно подсчитать, $n \geqslant 7$; полностью нарисовать такую ситуацию невозможно. Однако мы и ниже часто будем пользоваться рисунками, изображающими фигуры в пространствах малых размерностей ($n = 2$, 3, иногда $n = 4$) для иллюстрации определений и рассуждений, относящихся к любым n-мерным пространствам.

4. Проведенные выше рассуждения показывают, что плоскости Π_k и Π_l, о которых идет речь в теореме 3, не содержатся ни в какой плоскости меньшей размерности, чем $r + 1$.

Поэтому справедлива также

Теорема 4. *Если скрещивающиеся плоскости Π_k и Π_l лежат в плоскости Π_s, то*

$$s \geqslant (k + l - m) + 1. \tag{6}$$

(Здесь, как и выше, m — размерность пересечения $L_k \cap L_l$.)

Следствие. *Если в $\mathfrak{A}_n$ имеются скрещивающиеся плоскости Π_k и Π_l положительных размерностей, то*

$$k \leqslant n - 2, \qquad l \leqslant n - 2. \tag{7}$$

Неравенства (7) следуют из соотношения (6) при $s = n$, так как для скрещивающихся плоскостей $k - m \geqslant 1$, $l - m \geqslant 1$.

Частный случай. Гиперплоскость не может скрещиваться с какой-либо плоскостью положительной размерности.

5. Сохраняя обозначения предыдущего пункта, сформулируем *достаточное условие пересечения* двух плоскостей.

Теорема 5. *Если в* $\mathfrak{A}_n$ *даны плоскости* Π_k *и* Π_l *такие, что*

$$k+l-m \geqslant n, \tag{8}$$

где m — *размерность пересечения* L_m *направляющих подпространств* L_k *и* L_l, *то* Π_k *и* Π_l *пересекаются.*

Доказательство. Исключая тривиальный случай, когда какая-нибудь из данных плоскостей совпадает со всем пространством, имеем

$$k < n, \quad l < n. \tag{9}$$

В расположении двух данных плоскостей могут быть лишь три возможности:

либо Π_k параллельна Π_l,

либо плоскости Π_k и Π_l скрещиваются,

либо они пересекаются.

Если Π_k параллельна Π_l, то для размерности m пересечения соответствующих им подпространств L_k и L_l имеем

$$m = \min(k, l) \tag{10}$$

и соотношения (9) и (10) противоречат неравенству (8). Если Π_k и Π_l скрещиваются, то соблюдается неравенство (6) при $s=n$, что тоже противоречит условию (8). Остается предположить, что Π_k и Π_l пересекаются. Теорема 5 доказана.

Замечание. Нетрудно доказать, что в условиях теоремы 5 фактически соблюдается равенство $k+l-m=n$. Однако в вычислениях оценочного характера легче проверить неравенство, чем равенство, поэтому достаточное условие пересечения плоскостей мы сформулировали в виде неравенства (8).

6. Укажем алгебраическую интерпретацию теоремы о пересечении плоскостей.

Пусть даны две неоднородные порознь совместные системы линейных уравнений, ранги которых равны r_1 и r_2. Объединим эти две системы, то есть будем рассматривать совместно все входящие в них уравнения. Для такой «объединенной» системы составим соответствующую ей однородную систему и обозначим ранг последней через r_0.

Если $r_0 \geqslant r_1 + r_2$, то «объединенная» неоднородная система уравнений совместна.

В самом деле, если данные системы уравнений определяют плоскости Π_k и Π_l, то однородная система, соответствующая объединению данных систем, определяет $L_m = L_k \cap L_l$. Соответственно имеем: $k = n - r_1$, $l = n - r_2$, $m = n - r_0$. Таким образом, $k + l - m = n + r_0 - (r_1 + r_2) \geqslant n$, и, следовательно, плоскости Π_k и Π_l пересекаются. А это и означает совместность объединенной системы.

В качестве упражнения рекомендуем читателю доказать сформулированное в этом пункте утверждение чисто алгебраически, опираясь не на теорему 5, а на теорему Кронекера — Капелли, и проверить попутно, что из неравенства $r_1 + r_2 \leqslant r_0$ на самом деле следует равенство $r_1 + r_2 = r_0$.

§ 8. Системы линейных неравенств и выпуклые многогранники

1. В этом параграфе мы будем рассматривать действительное n-мерное аффинное пространство $\mathfrak{A}_n$, считая, что в нем дана аффинная система координат.

2. Пусть через некоторую точку $X_0 \in \mathfrak{A}_n$, имеющую координаты $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, проведена прямая в направлении вектора l, координаты которого обозначим $\{l_1, \ldots, l_n\}$. Согласно п. 6 § 3 эту прямую можно задать параметрическими уравнениями

$$x_i = x_i^0 + \tau l_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$
$$-\infty < \tau < +\infty.$$

Пусть на прямой (1) выбраны какие-нибудь точки A и B. Соответствующие им значения параметра τ обозначим τ_1 и τ_2. Предположим, что $\tau_1 < \tau_2$.

Определение. Множество точек прямой, удовлетворяющих неравенствам

$$\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2,$$

называется *отрезком AB*.

3. Если точка A имеет координаты $(a_1, \ldots, a_n)$, точка B имеет координаты $(b_1, \ldots, b_n)$, то в качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $l = \overline{AB}$. Тогда $l_i = b_i - a_i$, и для текущей точки прямой имеем

$$x_i = a_i + (b_i - a_i)\tau = (1-\tau)\,a_i + \tau b_i,$$

причем $\tau = 0$ в точке A, $\tau = 1$ в точке B, так что отрезок AB задается теперь неравенствами $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Положим $1 - \tau = \alpha$, $\tau = \beta$. Тогда для точек отрезка AB и только для них имеем

$$x_i = \alpha a_i + \beta b_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$
$$\alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Точка, в которой $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, называется серединой отрезка AB.

4. Определение. Множество точек действительного аффинного пространства называется *выпуклым*, если вместе с каждыми двумя своими точками A, B оно содержит отрезок AB.

Простейшими примерами выпуклых множеств могут служить: отрезок, плоскость любой размерности, все пространство $\mathfrak{A}_n$.

Множество, состоящее из одной точки, и пустое множество также считаются выпуклыми.

Непосредственно из определения следует, что пересечение любой совокупности выпуклых множеств само является выпуклым множеством. В самом деле, если точки A, B принадлежат пересечению некоторой совокупности выпуклых множеств, то отрезок AB принадлежит каждому из этих множеств, а значит, и их пересечению.

5. Пусть в пространстве $\mathfrak{A}_n$ дана произвольная гиперплоскость

$$A_1x_1 + \ldots + A_nx_n + C = 0. \tag{3}$$

Гиперплоскость (3) разбивает пространство на две части, называемые открытыми полупространствами. Их точки характеризуются неравенствами

$$\sum A_ix_i + C < 0 \text{ и } \sum A_ix_i + C > 0 \tag{4}$$

соответственно. Присоединяя к открытому полупространству гиперплоскость (3), мы получим так называемое замкнутое полупространство. Одно из них состоит из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sum A_i x_i + C \leqslant 0. \tag{5}$$

Другое:

$$\sum A_i x_i + C \geqslant 0. \tag{6}$$

6. Существенно, что рассматриваемое пространство является действительным. В комплексном случае никакая гиперплоскость не разделяет пространства, подобно тому как одна прямая не разделяет трехмерного действительного пространства. Подробнее это означает, что если точки A и B в комплексном пространстве не принадлежат какой-либо гиперплоскости, то их можно соединить линией, не пересекающей этой гиперплоскости. Напротив, в действительном пространстве, если точки A и B принадлежат двум разным открытым полупространствам (4), то любая кривая, соединяющая A и B, пересекает гиперплоскость (3). Доказательство опускаем.

7. Теорема 1. *Каждое полупространство является выпуклым множеством.*

Доказательство проведем, например, для полупространства (5). Пусть точки A и B принадлежат этому полупространству. Тогда

$$\sum A_i a_i + C \leqslant 0, \quad \sum A_i b_i + C \leqslant 0,$$

и для произвольной точки X отрезка AB, учитывая (2), получаем

$$\sum A_i x_i + C = \sum A_i (\alpha a_i + \beta b_i) + C(\alpha + \beta) =$$
$$= \alpha \left(\sum A_i a_i + C \right) + \beta \left(\sum A_i b_i + C \right) \leqslant 0.$$

Таким образом, точка X принадлежит полупространству (5). Но точка X на отрезке AB взята произвольно, значит, весь отрезок AB принадлежит полупространству (5), что и требовалось установить.

8. Определение. Пересечение конечного числа полупространств (если оно не пусто) называется *выпуклым многогранником.*

Мы ограничимся рассмотрением многогранников, образованных пересечением замкнутых полупространств.

С наглядной точки зрения выпуклый многогранник представляет собой кусок пространства, высеченный несколькими гиперплоскостями (при $n=3$ см. рис. 17). Этот кусок может простираться в бесконечность (рис. 18). Может случиться

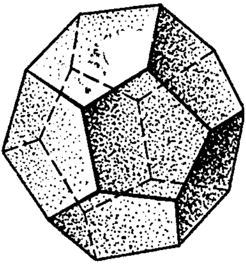


Рис. 17.

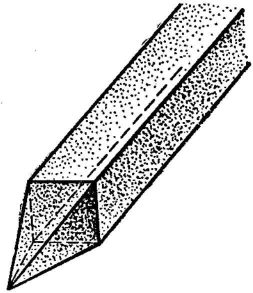


Рис. 18.

также, что многогранник целиком содержится в некоторой k-мерной плоскости $k<n$ (см. рис. 19 при $n=3$, $k=2$).

Если имеется m полупространств, задаваемых неравенствами

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j + C_i \leqslant 0, \quad i=1, \ldots, m, \tag{7}$$

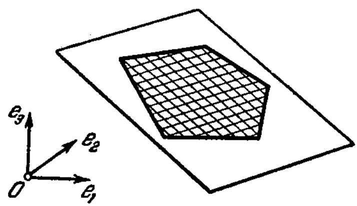


Рис. 19.

то многограннику (пересечению полупространств (7)) принадлежат те и только те точки, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}x_1 + \ldots + A_{1n}x_n + C_1 \leqslant 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{m1}x_1 + \ldots + A_{mn}x_n + C_m \leqslant 0. \end{array}\right\} \tag{8}$$

С другой стороны, если система вида (8) совместна, то она определяет многогранник, образованный пересечением полупространств (7).

Замечание. Очевидно, что неравенство вида (6) можно всегда заменить неравенством вида (7), умножив все его коэффициенты на (-1).

9. Многогранник называется *n-мерным параллелепипедом*, если в некоторой аффинной системе координат он задается неравенствами вида

$$\xi_i \leqslant x_i \leqslant \eta_i, \qquad i=1, \ldots, n, \tag{9}$$

где ξ_i, η_i — какие-нибудь числа. В частности, говорят, что параллелепипед построен на независимых векторах $e_1, \ldots, e_n$, приложенных к точке O, если он задается неравенствами

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \qquad i=1, \ldots, n, \tag{10}$$

в координатах с началом O и базисом $e_1, \ldots, e_n$.

Неравенства (9) всегда можно привести к виду (10) с помощью преобразования аффинных координат.

n-мерный параллелепипед при $n=1$ представляет собой отрезок, при $n=2$ — параллелограмм.

Часть параллелепипеда (10), расположенная в какой-нибудь из гиперплоскостей $x_i=0$ или $x_i=1$, сама является $(n-1)$-мерным параллелепипедом и называется $(n-1)$-мерной *гранью* параллелепипеда (10). Можно рассматривать грани этих $(n-1)$-мерных параллелепипедов, грани их граней и т. д. Таким путем получается набор k-мерных параллелепипедов разных размерностей k, $n-1 \geqslant k \geqslant 1$. Все они называются k-мерными гранями исходного параллелепипеда (10). Одномерные грани называются *ребрами*, их концы — *вершинами* параллелепипеда. Можно показать, что вершинами параллелепипеда (10) являются те и только те точки, у которых каждая из координат равна либо нулю, либо единице.

Пример. В трехмерном евклидовом пространстве с заданной декартовой прямоугольной системой координат (x, y, z) рассмотрим прямоугольные параллелепипеды, ребра которых параллельны координатным осям. Пусть (x_0, y_0, z_0) — координаты центра параллелепипеда, a, b, c — длины его ребер, параллельных осям x, y, z соответственно. Обозначим через $\mathscr{A}$ множество тех параллелепипедов указанного вида, центры которых лежат в кубе $|x| \leqslant \xi$, $|y| \leqslant \xi$, $|z| \leqslant \xi$, длины ребер не превышают η. Каждому параллелепипеду из множества $\mathscr{A}$ можно поставить в соответствие точку шестимерного аффинного пространства $\mathfrak{A}_6$ с координатами (x_0, y_0, z_0, a, b, c). Тогда само множество $\mathscr{A}$ можно рассматривать как шестимерный параллелепипед

$$-\xi \leqslant x_0 \leqslant \xi, \qquad -\xi \leqslant y_0 \leqslant \xi, \qquad -\xi \leqslant z_0 < \xi,$$
$$0 \leqslant a \leqslant \eta, \qquad 0 \leqslant b \leqslant \eta, \qquad 0 \leqslant c \leqslant \eta.$$

Заметим, что геометрические фигуры одного пространства часто бывает удобно рассматривать как точки другого пространства.

10. Определение. Множество точек в аффинном пространстве $\mathfrak{A}_n$ называется *ограниченным*, если координаты всех точек этого множества удовлетворяют неравенству $|x_i| \leqslant M$ ($M > 0$ — некоторое число).

Пользуясь формулами § 2, нетрудно проверить, что это определение не зависит от выбора аффинной системы координат. Множество ограничено в том и только в том случае, если оно содержится в некотором параллелепипеде.

11. Определение. *Выпуклой оболочкой* множества $\mathscr{A}$ точек в аффинном пространстве $\mathfrak{A}$ называется такое выпуклое множество $\overline{\mathscr{A}} \subset \mathfrak{A}$, которое содержится в любом выпуклом множестве, содержащем $\mathscr{A}$.

Иначе говоря, выпуклая оболочка $\overline{\mathscr{A}}$ представляет собой пересечение всевозможных выпуклых множеств, содержащих

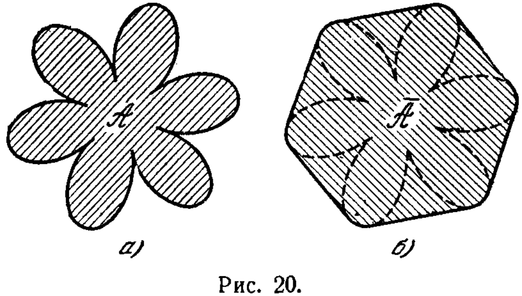


Рис. 20.

данное множество $\mathscr{A}$; говорят также, что $\overline{\mathscr{A}}$ является наименьшим выпуклым множеством, содержащим $\mathscr{A}$ (рис. 20).

Пример. Выпуклой оболочкой двух точек A, B является отрезок AB.

Можно доказать, что выпуклая оболочка любого конечного числа точек является ограниченным выпуклым многогранником и что всякий ограниченный выпуклый многогранник вида (8) представляет собой выпуклую оболочку некоторой конечной системы точек, называемых его вершинами.

12. Покажем одно геометрическое построение, которое бывает полезно в вопросах о выпуклых оболочках.

Пусть дано выпуклое множество $\mathscr{A}$ и точка M. Построим всевозможные отрезки вида MX, при $X \in \mathscr{A}$, и множество точек всех таких отрезков обозначим через $\mathscr{B}$ (рис. 21). Справедлива

Теорема 2. *Множество $\mathscr{B}$ является выпуклой оболочкой объединения $\mathscr{A} \bigcup M$.*

Доказательство. Если $M \in \mathscr{A}$, то $\mathscr{B} = \mathscr{A}$, и утверждение теоремы очевидно. Пусть точка M не принадлежит множеству $\mathscr{A}$. Любое выпуклое множество, содержащее $\mathscr{A} \bigcup M$, обязано содержать все $\mathscr{B}$, поэтому нам достаточно проверить выпуклость $\mathscr{B}$. Пусть точки A, $B \in \mathscr{B}$. Тогда точка A лежит на некотором отрезке MX, а точка B — на некотором отрезке MY, где X, $Y \in \mathscr{A}$ (рис. 22). Нам нужно

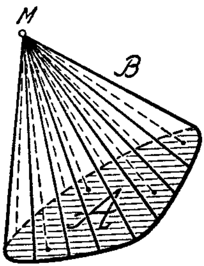


Рис. 21.

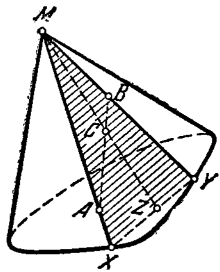


Рис. 22.

установить, что отрезок AB целиком содержится в множестве $\mathscr{B}$. Пусть C — произвольная точка отрезка AB. Тогда (если исключить тривиальные случаи совпадения какой-либо из точек A, B с какой-нибудь из точек M, X, Y), будем иметь

$$\overline{MA} = \lambda \overline{MX}, \qquad 0 < \lambda < 1,$$

$$\overline{MB} = \mu \overline{MY}, \qquad 0 < \mu < 1;$$

$$\overline{MC} = \alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB}, \qquad \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1.$$

На отрезке XY найдется точка Z такая, что

$$\overline{MZ} = \frac{\alpha\lambda}{\gamma} \overline{MX} + \frac{\beta\mu}{\gamma} \overline{MY},$$

где $\nu=\alpha\lambda+\beta\mu$, $0<\nu<1$. Точка Z содержится в множестве $\mathscr{A}$ вследствие выпуклости последнего. Легко видеть, что

$$\overline{MC}=\nu\overline{MZ},$$

то есть, что точка C принадлежит отрезку $MZ\subset\mathscr{B}$. Тем самым теорема 2 доказана.

13. Отметим простейшие свойства выпуклой оболочки.

1) Множество $\mathscr{A}$ совпадает со своей выпуклой оболочкой тогда и только тогда, когда оно выпукло.

2) Если $\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}_2$, то выпуклая оболочка множества $\mathscr{A}_1$ содержится в выпуклой оболочке множества $\mathscr{A}_2$.

Эти два свойства вытекают непосредственно из определений выпуклого множества и выпуклой оболочки.

3) Пусть $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1\cup\mathscr{A}_2$, и пусть $\overline{\mathscr{A}_1}$ — выпуклая оболочка множества $\mathscr{A}_1$. Тогда выпуклая оболочка $\overline{\mathscr{A}}$ множества $\mathscr{A}$ совпадает с выпуклой оболочкой объединения $\overline{\mathscr{A}_1}\cup\mathscr{A}_2$.

Доказательство. $\mathscr{A}_1\cup\mathscr{A}_2\subset\overline{\mathscr{A}_1}\cup\mathscr{A}_2$; поэтому $\overline{\mathscr{A}}$ содержится в выпуклой оболочке множества $\overline{\mathscr{A}_1}\cup\mathscr{A}_2$. С другой стороны, $\overline{\mathscr{A}}$ — выпуклое множество, содержащее $\overline{\mathscr{A}_1}$ и $\mathscr{A}_2$; поэтому выпуклая оболочка объединения $\overline{\mathscr{A}_1}\cup\mathscr{A}_2$ содержится в $\overline{\mathscr{A}}$. Таким образом, множество $\overline{\mathscr{A}}$ и выпуклая оболочка множества $\overline{\mathscr{A}_1}\cup\mathscr{A}_2$ совпадают.

14. Пусть в аффинном пространстве $\mathfrak{A}$ даны точки A_0, $A_1,\ldots,A_p$ с радиус-векторами $a_0, a_1,\ldots,a_p$ соответственно. Имеет место

Теорема 3. *Выпуклая оболочка системы точек A_0, $A_1,\ldots,A_p$ задается формулой*

$$x=\alpha_0a_0+\alpha_1a_1+\ldots+\alpha_pa_p, \tag{11}$$

где x — радиус-вектор произвольной точки из выпуклой оболочки, числа $\alpha_0,\ldots,\alpha_p$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_p=1,\\ \alpha_0\geqslant 0,\ \alpha_1\geqslant 0,\ldots,\alpha_p\geqslant 0.\end{array}\right\} \tag{12}$$

Доказательство проведем посредством индукции по числу точек. Для двух точек теорема 3 справедлива, так как при $p=1$ формулы (11) и (12) задают отрезок A_0A_1.

Пусть теорема 3 доказана для $p+1$ точек. Рассмотрим точки $A_0, \ldots, A_p$; их выпуклую оболочку обозначим $\mathscr{A}$; добавим еще одну точку A_{p+1} с радиус-вектором a_{p+1} и построим выпуклую оболочку $\mathscr{B}$ объединения $\mathscr{A} \cup A_{p+1}$. По свойству 3 п. 13 множество $\mathscr{B}$ совпадает с выпуклой оболочкой системы точек $A_0, A_1, \ldots, A_p, A_{p+1}$. По теореме 2 множество $\mathscr{B}$ состоит из всевозможных отрезков $A_{p+1}X$, где $X \in \mathscr{A}$. Радиус-вектор x точки X дается равенством (11). Обозначим через y радиус-вектор произвольной точки отрезка $A_{p+1}X$. Тогда

$$y = \alpha x + \beta a_{p+1}, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha \geqslant 0, \ \beta \geqslant 0. \tag{13}$$

Положим

$$\beta_i = \alpha \alpha_i, \qquad i = 0, \ldots, p; \ \beta_{p+1} = \beta. \tag{14}$$

Из формул (11) — (14) получаем

$$\left.\begin{aligned} &y = \beta_0 a_0 + \ldots + \beta_p a_p + \beta_{p+1} a_{p+1}, \\ &\beta_0 + \ldots + \beta_p + \beta_{p+1} = 1, \ \beta_j \geqslant 0, \ j = 0, \ldots, p+1. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Таким образом, каждая точка множества $\mathscr{B}$ удовлетворяет соотношениям (15). Обратно, подставив величины (14) в формулы (15), получим для y выражение вида (13), где x удовлетворяет соотношениям (11) и (12). Это значит, что каждая точка, удовлетворяющая условиям (15), принадлежит множеству $\mathscr{B}$. Теорема 3 доказана.

15. Определение. Выпуклая оболочка системы точек $A_0, A_1, \ldots, A_r$, находящихся в общем положении, называется *r-мерным симплексом* с вершинами $A_0, A_1, \ldots, A_r$.

Из теоремы 3 следует, что симплекс с вершинами $A_0, \ldots, A_r$ задается формулами (11) и (12) при $p = r$. При этом числа $\alpha_0, \ldots, \alpha_r$ называются барицентрическими координатами точки симплекса, имеющей радиус-вектор x.

Частные случаи:

нульмерный симплекс — одна точка;

одномерный симплекс — отрезок;

двумерный симплекс — треугольник;

трехмерный симплекс — треугольная пирамида.

Точка симплекса, в которой все барицентрические координаты равны между собой $\left(\alpha_0 = \ldots = \alpha_r = \dfrac{1}{r+1}\right)$, называется *центром симплекса*.

Пусть T_r — симплекс с вершинами $A_0, A_1, \ldots, A_r$, и пусть $A_{i_0}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ — какие-нибудь из его вершин. k-мерный симплекс, который является выпуклой оболочкой вершин $A_{i_0}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, называется *$k$-мерной гранью* симплекса T_r.

Одномерные грани, то есть отрезки, соединяющие вершины, называются *ребрами* симплекса.

Две грани размерностей k и $r-(k+1)$ называются противоположными гранями симплекса T_r, если они не имеют общих вершин. Рекомендуем читателю в качестве упражнений доказать, что симплекс является выпуклой оболочкой пары противоположных граней, что противоположные грани симплекса всегда располагаются в скрещивающихся плоскостях и что отрезок, соединяющий центры противоположных граней, проходит через центр симплекса.

16. Докажем, что n-мерный симплекс в n-мерном пространстве представляет собой пересечение замкнутых подпространств в числе $n+1$.

Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_n$ — вершины симплекса T_n. Примем A_0 за начало координат, базис выберем следующим образом:

$$e_1 = \overline{A_0A_1}, \quad e_2 = \overline{A_0A_2}, \ \ldots, \ e_n = \overline{A_0A_n}.$$

Тогда соотношения (11) и (12) (при $p=n$) в координатах примут вид

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = \alpha_1, \\ &x_2 = \quad \alpha_2, \\ &\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &x_n = \qquad\quad \alpha_n, \\ &\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1, \\ &\alpha_0 \geqslant 0, \ \alpha_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ \alpha_n \geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

откуда следует, что

$$\left.\begin{aligned} &x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0, \\ &x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

С другой стороны, из (17) вытекает (16), если положить $\alpha_i = x_i$ для $i = 1, \ldots, n$, $\alpha_0 = 1 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. Таким образом, системы (16) и (17) эквивалентны и задают один и тот же симплекс T_n (при $n=3$ см. рис. 23).

Система неравенств (17) показывает, пересечением каких полупространств образован симплекс T_n.

17. Мы говорили выше, что многогранник можно представлять себе как кусок пространства, «высеченный» несколькими гиперплоскостями. Можно доказать, что если многогранник ограничен, то число m этих «высекающих» гиперплоскостей, то есть число полупространств, пересечением которых образован многогранник, обязательно превышает размерность пространства.

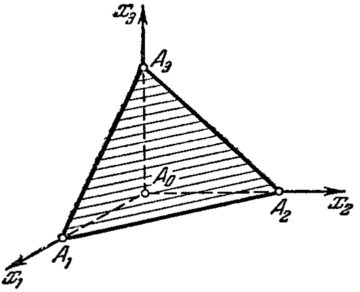


Рис. 23.

Наименьшему возможному числу $m = n + 1$ соответствует симплекс.

Отметим попутно, что слово «симплекс» (simplex) в переводе с латинского означает «простой».

18. Пусть задан многогранник системой неравенств вида (8), и пусть дана функция

$$z = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n, \tag{18}$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — числовые коэффициенты, $x_1, \ldots, x_n$ — координаты точки из $\mathfrak{A}_n$.

Задача о нахождении максимума и минимума функции (18) на многограннике (8) имеет настолько важное значение для приложений (в частности, в экономике), что исследование этой задачи и разработка численных методов ее решения выделились в самостоятельную область, которая получила название «линейного программирования».

С другой стороны, отметим, что геометрическая теория выпуклых многогранников является существенным подспорьем для алгебраической теории линейных неравенств.

ГЛАВА IV. ЛИНЕЙНЫЕ, БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 1. Линейные формы

1. Предположим, что в линейном пространстве L задана числовая функция векторного аргумента, т. е. каждому вектору x поставлено в соответствие число $a(x)$.

В этой главе мы будем понимать функцию $a(x)$ общепринятым образом, именно будем считать ее инвариантной; это значит, что значение $a(x)$ не зависит от выбора базиса в пространстве L.

Замечание. В некоторых дальнейших главах нам придется отказаться от общепринятой точки зрения и рассматривать функции, численное значение которых определяется для данного $x \in L$ (или для данных $x, y, \ldots \in L$) при помощи базиса в L и может от выбора базиса зависеть. Впрочем, и в этом случае можно вернуться к общепринятой точке зрения, расширив понятие области определения функции. В самом деле, если через $\mathfrak{E}$ обозначить множество всех базисов пространства L, то мы можем рассматривать функцию $a(x, e)$, где $x \in L$, $e \in \mathfrak{E}$. Мы получаем обычную (инвариантную) функцию $a(x)$, если $a(x, e) = a(x)$ для всех $e \in \mathfrak{E}$.

Определение. Функция $a(x)$ называется *линейной*, если:

1) $a(x+y) = a(x) + a(y)$ для любых векторов x, y из L;

2) $a(\alpha x) = \alpha a(x)$ для любого числа α и любого вектора x из L.

В качестве значений функции $a(x)$ будем брать действительные числа, если L действительно, и будем допускать комплексные числа, если L комплексно.

2. Примеры. 1) Пусть $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, где $e_1, \ldots, e_n$ — базис в L. В каждом базисе $e_1, \ldots, e_n$ положим $a(x) = x_1$. Тогда свойства 1) и 2) п. 1 для $a(x)$ соблюдаются, но $a(x)$ не удовлетворяет определению линейной функции, поскольку зависит от выбранного базиса.

2) Пусть L — пространство многочленов степени не выше n. Пусть каждому многочлену $x(\tau)$ из L ставится в соответствие число $a(x)$ по формуле

$$a(x)=\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} x(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

где $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ — заданный отрезок числовой оси. Ясно, что числовое значение $a(x)$ не зависит от выбора базиса в L. Условия 1) и 2) п. 1 соблюдены вследствие известных свойств определенного интеграла. Таким образом, функция (1) является линейной функцией в пространстве L.

Замечание. Линейную функцию (1) можно рассматривать также в бесконечномерном пространстве непрерывных функций, заданных на произвольно выбранном отрезке $[\tau_1', \tau_2']$ при условии, что $\tau_1' \leqslant \tau_1$, $\tau_2' \geqslant \tau_2$, или в пространстве всех интегрируемых на $[\tau_1', \tau_2']$ функций (тоже бесконечномерном).

3. Пусть в пространстве L дана линейная функция $a(x)$. Считая, что пространство L является n-мерным, зафиксируем в нем произвольный базис $e_1, \ldots, e_n$ и разложим вектор x по этому базису: $x=x_1e_1+\ldots+x_ne_n$. Тогда линейная функция запишется в виде

$$a(x)=a(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)=x_1a(e_1)+\ldots+x_na(e_n). \tag{2}$$

Обозначим через a_i значение функции $a(x)$ на базисном векторе e_i:

$$a_1=a(e_1), \ldots, \ a_n=a(e_n). \tag{3}$$

Если базис фиксирован, то a_i — вполне определенные числа. Подставив величины (3) в равенство (2), получим выражение функции $a(x)$ в виде однородного многочлена первой степени относительно координат вектора x:

$$a(x)=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n. \tag{4}$$

4. Однородные многочлены степени k принято называть формами степени k; при $k=1$ употребляют термин «линейные формы», при $k=2$ — термин «квадратичные формы».

Согласно формуле (4) всякая линейная функция $a(x)$ в n-мерном линейном пространстве является линейной формой относительно координат ее аргумента x.

В связи с этим линейные функции обычно называют линейными формами.

5. В пространстве L_n перейдем к новому базису $e'_1, \ldots, e'_n$ по формуле

$$e'_i = \sum P_{ij} e_j \tag{I}$$

(см. § 5 гл. II). В новом базисе линейная форма будет иметь новые коэффициенты a'_i:

$$a(x) = a'_1 x'_1 + a'_2 x'_2 + \ldots + a'_n x'_n.$$

Найдем a'_i, пользуясь тем, что эти числа являются значениями формы $a(x)$ на новых базисных векторах:

$$a'_i = a(e'_i).$$

Пользуясь выражением (I) для векторов e'_i и линейностью функции $a(x)$, находим

$$a'_i = a\left(\sum P_{ij} e_j\right) = \sum P_{ij} a\left(e_j\right) = \sum P_{ij} a_j.$$

Итак,

$$a'_i = \sum P_{ij} a_j. \tag{5}$$

Мы видим, что формула (5) совершенно аналогична формуле (I).

6. Докажем, что закон преобразования коэффициентов, выраженный формулой (5), обеспечивает инвариантность значений функции, которая в базисе $e_1, \ldots, e_n$ задается формулой (4).

С этой целью используем формулы (III) и (4) из § 5 гл. II. Положим в новом базисе

$$a(x) = \sum a'_i x'_i = \sum_i \left(\sum_j P_{ij} a_j\right)\left(\sum_k Q_{ik} x_k\right). \tag{6}$$

Заметим, что в формуле (6) и в других аналогичных случаях индексы суммирования в скобках нужно обозначать разными буквами, иначе возникнет путаница при раскрытии скобок. Раскрываем скобки и делаем перегруппировку слагаемых:

$$\sum_i a'_i x'_i = \sum_{i,\,j,\,k} a_j x_k P_{ij} Q_{ik} = \sum_{j,\,k} \left(a_j x_k \sum_i P_{ij} Q_{ik}\right) = \sum_{j,\,k} a_j x_k \delta_{jk}, \tag{7}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Если $j \neq k$, то $\delta_{jk} = 0$, и такие слагаемые учитывать не нужно. Если $j = k$, то $\delta_{jj} = 1$, так что $a_j x_j \delta_{jj} = a_j x_j$. Поэтому

$$\sum_{j,\,k} a_j x_k \delta_{jk} = \sum_j a_j x_j. \tag{8}$$

Сопоставляя формулы (6) — (8), окончательно имеем

$$a(x) = \sum_i a'_i x'_i = \sum_j a_j x_j,$$

то есть численное значение величины $a(x)$ при изменении базиса сохраняется.

7. В линейном пространстве L (быть может, бесконечномерном) рассмотрим всевозможные линейные формы, то есть числовые линейные функции одного векторного аргумента. Будем понимать сумму функций и произведение функции на число в обычном (арифметическом) смысле. Имеет место

Теорема 1. *Множество L^* всех линейных функций, заданных в пространстве L, представляет собой линейное пространство.*

Доказательство. Докажем прежде всего, что сумма двух произвольных линейных функций $a(x)$, $b(x)$ также является линейной функцией. Положим

$$c(x) = a(x) + b(x).$$

Тогда

$$c(x+y) = a(x+y) + b(x+y) = [a(x) + a(y)] + \\ + [b(x) + b(y)] = [a(x) + b(x)] + [a(y) + b(y)] = c(x) + c(y).$$

Кроме того,

$$c(\alpha x) = a(\alpha x) + b(\alpha x) = \alpha a(x) + \alpha b(x) = \alpha\, [a(x) + b(x)] = \\ = \alpha c(x).$$

Таким образом, линейность суммы доказана.

Покажем теперь, что если линейную функцию умножить на произвольное число λ, то получится линейная функция. Пусть $c(x) = \lambda a(x)$. Тогда

$$c(x+y) = \lambda a(x+y) = \lambda a(x) + \lambda a(y) = c(x) + c(y).$$

Далее

$$c(\alpha x) = \lambda a(\alpha x) = \lambda\alpha a(x) = \alpha c(x).$$

Тем самым показано, что $\lambda a(x)$ — линейная функция. Итак, если $a(x)$, $b(x) \in L^*$, то $a(x) + b(x) \in L^*$ и $\lambda a(x) \in L^*$ при любом λ.

Нулевым элементом L^* является (линейная) функция $\theta(x)$, равная нулю для любого вектора x.

Функция $(-1)\cdot a(x)$ является противоположной для $a(x)$.

Нетрудно проверить, что для L^* выполняются все аксиомы линейного пространства, откуда и вытекает справедливость теоремы 1.

8. Определение. Линейное пространство L^* всех линейных функций, определенных на L, называется *сопряженным* пространству L.

Замечание. Согласно определению линейной функции в сопряженном пространстве допускается умножение на такие же числа, как и в исходном; иначе говоря, если L — действительное, то и L^* — действительное, если L — комплексное, то и L^* — комплексное.

9. Теорема 2. *Если линейное пространство n-мерно, то сопряженное ему пространство также n-мерно.*

Доказательство. Введем в L базис $e_1, \ldots, e_n$ и разложим по нему произвольный вектор x из L:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n.$$

Тогда произвольный вектор a из сопряженного пространства L^*, то есть линейная функция $a(x)$, записывается в виде

$$a(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

и однозначно определяется заданием набора коэффициентов $(a_1, \ldots, a_n)$. Этот набор можно рассматривать как вектор из координатного пространства K_n. При сложении линейных функций и умножении их на число соответственно складываются и умножаются на число их коэффициенты. Поэтому в данном случае L^* изоморфно координатному пространству K_n. Теорема 2 доказана.

10. В заключение параграфа рассмотрим геометрический смысл линейной формы. Для этого используем аффинное пространство $\mathfrak{A}_n$, считая векторы из L_n радиус-векторами точек из $\mathfrak{A}_n$, отложенными из некоторой точки O. Будем считать, что значение функции $a(x)$ в точке A равно ее значению на векторе $x = \overline{OA}$. Тем самым функция $a(x)$ будет определена в $\mathfrak{A}_n$.

Справедливы следующие утверждения:

1) Множество точек, в которых линейная функция $a(x)$ принимает постоянное значение, представляет собой гиперплоскость.

2) Всякая гиперплоскость представляет собой геометрическое место точек, в которых некоторая линейная функция сохраняет постоянное значение.

3) Гиперплоскости, соответствующие разным значениям данной линейной функции $a(x)$, параллельны.

4) Гиперплоскость, на которой $a(x)=0$, проходит через начало координат.

Для доказательства этих фактов достаточно записать равенство $a(x)=c$ в координатах

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=c$$

и воспользоваться результатами §§ 6, 7 гл. III.

§ 2. Билинейные формы

1. Числовая функция $a(x, y)$ двух векторных аргументов x, y называется билинейной, если она линейна по каждому аргументу, то есть

1) $a(x_1+x_2, y)=a(x_1, y)+a(x_2, y)$,
$a(\alpha x, y)=\alpha a(x, y)$;

2) $a(x, y_1+y_2)=a(x, y_1)+a(x, y_2)$,
$a(x, \alpha y)=\alpha a(x, y)$.

Здесь x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 — любые векторы пространства L, α — произвольное число.

2. Пусть L — линейное n-мерное пространство, $e_1, \ldots$ $\ldots, e_n$ — базис в нем, и пусть аргументы билинейной функции разложены по этому базису:

$$x=\sum x_ie_i, \qquad y=\sum y_ie_i.$$

Тогда

$$a(x, y)=a\left(\sum x_ie_i, \sum y_ke_k\right)=\sum x_iy_ka\left(e_i, e_k\right). \tag{1}$$

Введем обозначения:

$$a_{ik}=a(e_i, e_k). \tag{2}$$

Тогда получим

$$a(x, y)=\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}x_iy_k. \tag{3}$$

Формула (3) выражает функцию $a(x, y)$ в координатах по данному базису.

Многочлен в правой части формулы (3) называется билинейной формой. Вместе с ним билинейной формой называют и самую функцию $a(x, y)$. Числа a_{ik} называются коэффициентами данной формы в базисе $e_1, \ldots, e_n$. В качестве аргументов x, y можно рассматривать векторы как действительного, так и комплексного линейного пространства. Соответственно говорят, что форма $a(x, y)$ дана в действительном или в комплексном пространстве. В последнем случае в качестве значений формы $a(x, y)$ допускают комплексные числа; коэффициенты a_{ik} в этом случае также являются, вообще говоря, комплексными числами.

3. Легко доказать, что множество всех билинейных форм, заданных в линейном пространстве L, тоже образует линейное пространство (если понимать сложение форм и умножение их на число в обычном арифметическом смысле; см. § 1, где доказательство проведено для линейных форм).

4. В данном базисе $e_1, \ldots, e_n$ рассмотрим одночленные билинейные формы

$$l_{ik}(x, y) = x_i y_k. \tag{4}$$

Из (2) и (3)

$$a(x, y) = \sum a_{ik} l_{ik}(x, y). \tag{5}$$

Если взять $x = e_l$, $y = e_m$ при любых фиксированных l и m, то $l_{lm} = 1$, а все остальные формы (4) будут равны нулю. Отсюда следует, что формы (4) независимы. Поэтому они образуют базис в пространстве билинейных форм. Формула (5) дает разложение билинейной формы (1) по базису (4).

Базис (4) состоит из n^2 элементов. Следовательно, пространство билинейных форм имеет размерность n^2.

5. Билинейная форма $a(x, y)$ называется симметричной, если для любых $x, y \in L$

$$a(x, y) = a(y, x).$$

Билинейная форма $a(x, y)$ называется кососимметричной, если для любых $x, y \in L$

$$a(x, y) = -a(y, x).$$

В случае симметричной билинейной формы коэффициенты симметричны: $a_{ik} = a_{ki}$ (см. формулу (2)). В случае кососимметричной формы $a_{ik} = -a_{ki}$ и, в частности, $a_{ii} = 0$. Как симметричные, так и кососимметричные билинейные формы образуют подпространства в пространстве всех билинейных форм с аргументами из L. Чтобы найти размерности этих подпространств, построим в них базисы.

Симметричную билинейную форму можно записать в виде

$$a(x, y) = \sum_{i<k} a_{ik}(x_i y_k + x_k y_i) + \sum_i a_{ii} x_i y_i. \tag{6}$$

Рассмотрим формы

$$\left.\begin{aligned} \bar{l}_{ik}(x, y) &= x_i y_k + x_k y_i \quad \text{при} \quad i \neq k, \\ \bar{l}_{ii}(x, y) &= x_i y_i. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Билинейные формы (7) линейно независимы и симметричны, а любая симметричная билинейная форма выражается через них по формуле вида (6). Поэтому формы (7) составляют базис в подпространстве всех симметричных билинейных форм. Количество элементов в базисе (7) равно $C_n^2 + n = \frac{1}{2}\,n(n+1)$. Такова же и размерность подпространства симметричных форм. Отсюда следует, что при любом выборе независимых симметричных билинейных форм $w_1(x, y), \ldots, w_N(x, y)$ в числе $N = \frac{1}{2}\,n(n+1)$ произвольная симметричная форма может быть представлена в виде

$$a(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i w_i(x, y),$$

где λ_i — числовые коэффициенты.

Для кососимметричных билинейных форм имеем

$$a(x, y) = \sum_{i<k} a_{ik}(x_i y_k - x_k y_i),$$

и в качестве базиса можно взять формы

$$\tilde{l}_{ik}(x, y) = x_i y_k - x_k y_i.$$

Их общее число равно $\tilde{N} = \frac{1}{2}\,n(n-1)$. Следовательно, при любом выборе кососимметричных независимых форм $\tilde{w}_1, \ldots$ $\ldots, \tilde{w}_{\tilde{N}}$ получаем для произвольной кососимметричной формы

$a(x, y)$ представление

$$a(x, y) = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \lambda_i \tilde{\omega}_i(x, y).$$

6. Теорема. *Пространство билинейных форм является прямой суммой подпространства симметричных и подпространства кососимметричных билинейных форм.*

Доказательство. Очевидно, что билинейная форма является одновременно симметричной и кососимметричной тогда и только тогда, когда она нулевая. Отсюда и из теоремы 1 § 14 гл. I следует, что сумма рассматриваемых подпространств является прямой суммой.

С другой стороны, всякая билинейная форма $a(x, y)$ может быть представлена в виде суммы симметричной и кососимметричной форм, именно

$$a(x, y) = \frac{1}{2}(a(x, y) + a(y, x)) + \frac{1}{2}(a(x, y) - a(y, x)).$$

Следовательно, прямая сумма рассматриваемых подпространств совпадает со всем пространством. Теорема доказана.

7. Пусть делается переход к новому базису:

$$e'_i = \sum P_{ij} e_j. \tag{8}$$

В новом базисе

$$x = \sum x'_i e'_i, \qquad y = \sum y'_k e'_k.$$

Вследствие инвариантности формы $a(x, y)$ имеем

$$a(x, y) = \sum a_{ik} x_i y_k = \sum a'_{ik} x'_i y'_k, \tag{9}$$

где a'_{ik} — новые коэффициенты. Разумеется, инвариантность формы $a(x, y)$ не означает инвариантности ее коэффициентов (вообще говоря, $a'_{ik} \neq a_{ik}$). Найдем выражения коэффициентов a'_{ik} через старые a_{ik}. Воспользуемся тем, что значения формы на базисных векторах совпадают с коэффициентами формы:

$$a'_{ik} = a(e'_i, e'_k). \tag{10}$$

Вместо новых базисных векторов e'_i, e'_k подставим в (10) их выражения (8):

$$a(e'_i, e'_k) = a\left(\sum P_{ij} e_j, \sum P_{kl} e_l\right).$$

Теперь, ввиду линейности формы $a(x, y)$ по каждому из аргументов, получаем

$$a(e'_i, e'_k) = \sum P_{ij} P_{kl} a(e_j, e_l).$$

Таким образом,

$$a'_{ik} = \sum_{j,\, l=1}^{n} a_{jl} P_{ij} P_{kl}. \tag{I}$$

Замечание. Выражения (I) можно получить иным способом, исходя из (9). Именно, так как, согласно § 5 гл. II,

$$x_j = \sum P_{ij} x'_i, \qquad y_l = \sum P_{kl} y'_k,$$

то из (9) имеем

$$\sum a_{jl} x_j y_l = \sum a_{jl} P_{ij} P_{kl} x'_i y'_k = \sum a'_{ik} x'_i y'_k.$$

Отсюда снова находим (I). Вместе с тем видно, что не только (I) следует из (9), но и (9) следует из (I). Таким образом, инвариантность формы влечет за собой закон преобразования ее коэффициентов согласно равенствам (I); в свою очередь преобразование коэффициентов по закону (I) гарантирует инвариантность формы.

§ 3. Матрица билинейной формы

1. Пусть дана произвольная билинейная форма. Запишем ее в развернутом виде:

$$\begin{aligned} a(x, y) = \sum a_{ik} x_i y_k = \\ &= a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + \ldots + a_{1n} x_1 y_n + \\ &+ a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2 + \ldots + a_{2n} x_2 y_n + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ a_{n1} x_n y_1 + a_{n2} x_n y_2 + \ldots + a_{nn} x_n y_n. \end{aligned}$$

Если выписать отсюда таблицу коэффициентов, то получится квадратная матрица, которая называется матрицей билинейной формы:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

В данном базисе матрица билинейной формы полностью ее определяет, так как дает все ее коэффициенты.

2. Допустим, что совершается переход к новому базису

$$e'_i = \sum P_{ij} e_j.$$

В новом базисе форма $a(x, y)$ имеет другую матрицу $A' = \| a'_{ik} \|$. Элементы a'_{ik} матрицы A' выражаются формулами (I) предыдущего параграфа. Преобразуем эти формулы так, чтобы получить матричное соотношение, выражающее (I) целиком. Для этого запишем (I) в виде

$$a'_{ik} = \sum_{j,\, l} P_{ij} (a_{jl} P_{kl}) \tag{1}$$

и введем величины

$$c_{jk} = \sum_{l} a_{jl} P_{kl}. \tag{α}$$

Вследствие (1) и (α)

$$a'_{ik} = \sum_{j} P_{ij} c_{jk}. \tag{β}$$

Составим матрицу $C = \| c_{jk} \|$, считая, как обычно, что первый индекс дает номер строчки, второй — номер столбца.

Соотношения (α) и (β) рассмотрим с точки зрения умножения матриц. При изменении индекса l величина a_{jl} пробегает строчку матрицы A, а величина P_{kl} — строчку матрицы P. Таким образом, в (α) записано произведение строки на строку. Чтобы превратить строку в столбец, достаточно транспонировать матрицу. Соответственно в соотношении (α) будем рассматривать второй множитель под знаком суммы как элемент матрицы P^* (транспонированной матрицы P). Тогда получим произведение строки матрицы A на столбец матрицы P^*. Иначе говоря, (α) эквивалентно матричному равенству

$$C = AP^*. \tag{α_1}$$

Теперь рассмотрим формулу (β). Здесь сразу замечаем, что справа имеем произведение строчки на столбец. Тем самым из (β) следует

$$A' = PC. \tag{β_1}$$

Из (α_1) и (β_1) получаем искомую формулу

$$A' = PAP^*. \tag{2}$$

Формула (2) выражает матрицу билинейной формы в новом базисе через матрицу этой формы в старом базисе и матрицу P, с помощью которой делается переход от старого базиса к новому.

3. Выводы из формулы (2). Заметим, что P и P^* — невырожденные матрицы. Отсюда и по теореме о ранге произведения матриц (гл. II, § 4)

$$\operatorname{Rang} A' = \operatorname{Rang} A. \tag{3}$$

Определение. *Рангом* билинейной формы называется ранг ее матрицы.

Вследствие равенства (3) ранг билинейной формы является инвариантом относительно изменений базиса и тем самым представляет собой величину, которая связана с самой формой, независимо от ее координатного представления. Несколько позже (в § 11) для ранга билинейной формы будет дано геометрическое истолкование.

4. Рассмотрим определитель матрицы билинейной формы в некотором базисе:

$$\Delta = \operatorname{Det} A.$$

В другом базисе $\Delta' = \operatorname{Det} A'$. Из формулы (2) и теоремы о перемножении определителей следует, что

$$\Delta' = \Delta \cdot (\operatorname{Det} P)^2. \tag{4}$$

Таким образом, определитель матрицы билинейной формы не является инвариантом, а изменяется при переходе к новому базису по формуле (4).

5. Пусть даны какая-нибудь билинейная форма $a(x, y) = \sum a_{ij} x_i y_j$, у которой определитель $\Delta \neq 0$, и произвольная линейная форма $b(x) = \sum b_i x_i$. Тогда можно так выбрать y, чтобы $a(x, y) = b(x)$ для любого $x \in L$ (при фиксированном y). Для этого достаточно найти $(y_1, \ldots, y_n)$ из системы

$$\sum a_{ij} y_j = b_i,$$

определитель которой равен $\Delta \neq 0$. Таким образом, одна билинейная форма $a(x, y)$ как бы содержит в себе всевозможные линейные формы, заданные в L.

§ 4. Квадратичные формы

1. Пусть билинейная форма $a(x, y)$ является симметричной: $a(y, x) = a(x, y)$. Это равносильно тому, что в любом базисе симметрична ее матрица: $A^* = A$. В самом деле,

$$a_{ik} = a(e_i, e_k) = a(e_k, e_i) = a_{ki}.$$

Отождествим оба аргумента формы $a(x, y)$. Тогда получим $a(x, x) = a(x, y)$ при $y = x$.

Функция $a(x, x)$ называется *квадратичной формой*, отвечающей данной симметричной билинейной форме $a(x, y)$.

Исходная (симметричная) билинейная форма $a(x, y)$ называется *полярной* для квадратичной формы $a(x, x)$.

2. Докажем, что полярная билинейная форма однозначно определяется своей квадратичной формой.

Пусть дана числовая функция $f(x)$ векторного аргумента. Предположим, что $f(x)$ есть некоторая квадратичная форма, т. е. $f(x) = a(x, x)$, причем $a(x, y)$ нам неизвестна. Чтобы найти ее, рассмотрим $f(x+y)$, где x, y — произвольные векторы. Пользуясь свойствами билинейной формы и ее симметричностью, имеем

$$f(x+y) = a(x+y, x+y) = a(x, x) + a(x, y) + \\ + a(y, x) + a(y, y) = f(x) + 2a(x, y) + f(y).$$

Отсюда получаем искомое выражение

$$a(x, y) = \frac{1}{2}[f(x+y) - f(x) - f(y)]. \tag{1}$$

3. Формулу (1) можно принять за определение квадратичной формы. Именно можно сказать, что $f(x)$ называется квадратичной формой, если левая часть формулы (1) является билинейной функцией.

Следует заметить, что определение квадратичной формы не предусматривает наличия базиса; тем самым, оно применимо в бесконечномерных пространствах.

4. Пример. Пусть L — линейное пространство функций, непрерывных на отрезке [0, 1].

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \int_0^1 [x(t)]^2\, dt,$$

аргумент которой $x = x(t) \in L$.

Имеем

$$\frac{1}{2}[f(x+y)-f(x)-f(y)]=\int_0^1 x(t)y(t)\,dt. \tag{2}$$

Нетрудно непосредственно проверить, что в правой части равенства (2) стоит билинейная форма. Таким образом, $f(x)$ есть квадратичная форма в бесконечномерном пространстве L.

В дальнейшем (§ 10) мы увидим, что отсюда можно получить важные выводы, например доказывать интегральные неравенства, опираясь на чисто алгебраические теоремы.

5. Вернемся к n-мерному случаю. В n-мерном пространстве рассмотрим квадратичную форму и запишем ее выражение через координаты аргументов.

Пусть $a(x, y)=a(y, x)$, $x=y$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x)=a(x, x)=\sum a_{ik}x_ix_k=&\\ =a_{11}x_1x_1&+a_{12}x_1x_2+\ldots+a_{1n}x_1x_n+\\ +a_{21}x_2x_1&+a_{22}x_2x_2+\ldots+a_{2n}x_2x_n+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +a_{n1}x_nx_1&+a_{n2}x_nx_2+\ldots+a_{nn}x_nx_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Если принять во внимание симметричность коэффициентов, то члены суммы (3), кроме диагональных, естественно объединяются в пары. При этом получается часто употребляемая запись квадратичной формы в виде

$$\begin{aligned} f(x)=a_{11}x_1^2&+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\ldots+2a_{1n}x_1x_n+\\ &+a_{22}x_2^2\quad+2a_{23}x_2x_3+\ldots+2a_{2n}x_2x_n+\\ &\qquad\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad+a_{nn}x_n^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что в первой строчке формулы (4) выписаны все члены, содержащие x_1.

6. Матрицей квадратичной формы называется матрица ее полярной билинейной формы

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}\right\|.$$

Из этого определения сразу следует, что матрица квадратичной формы преобразуется по формуле

$$A' = PAP^*,$$

которая доказана в предыдущем параграфе.

7. Ранг квадратичной формы по определению равен рангу ее матрицы: $r = \operatorname{Rang} A$.

8. Квадратичные формы имеют важные геометрические приложения, которые рассматриваются ниже, в гл. VIII и XI. Сейчас мы не будем связывать с квадратичными формами какие-либо геометрические объекты и будем рассматривать их свойства с алгебраической точки зрения.

9. Если в некотором базисе окажется, что все коэффициенты $a_{ik} = 0$ при $i \neq k$, то говорят, что в этом базисе квадратичная форма имеет канонический вид

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2.$$

Для того чтобы получить канонический вид квадратичной формы, базис нужно выбрать специально. В произвольном базисе квадратичная форма будет полной, то есть будет, вообще говоря, иметь все члены.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду является важной задачей как в теоретических вопросах, так и в прикладной математике. Ниже будут даны два метода приведения квадратичной формы к каноническому виду: метод Лагранжа и метод Якоби.

10. Если форма приведена к каноническому виду, то ее матрица становится диагональной:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Так как ранг квадратичной формы есть инвариант, то он равен числу отличных от нуля диагональных элементов матрицы (5).

Если ранг $= r < n$, то после надлежащего изменения номеров матрицу (5) можно записать в виде

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & \text{\Large 0} & \\ & & a_{rr} & & & \\ & & & 0 & & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{Vmatrix}.$$

11. Замечание. Если привести к каноническому виду квадратичную форму, то одновременно приведется к диагональному виду и ее билинейная форма

$$a(x, y) = a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + \ldots + a_{nn}x_ny_n.$$

§ 5. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа

1. Пусть дана квадратичная форма $f(x) = a(x, x)$. Вследствие формулы (4) § 4 мы можем в любом базисе записать $f(x)$ в виде

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + g(x_2, \ldots, x_n), \qquad (1)$$

где g — квадратичная форма, не включающая x_1.

Запись вида (1) позволяет доказать возможность приведения квадратичной формы к каноническому виду по индукции.

Теорема. *Каждую квадратичную форму с помощью невырожденного линейного преобразования можно привести к каноническому виду.*

Замечание. Здесь речь идет о преобразовании переменных, именно числовых аргументов $x_1, \ldots, x_n$ многочлена (1). Но теорему можно понимать и геометрически, поскольку всякое невырожденное преобразование переменных можно рассматривать как преобразование координат при переходе к новому базису (см. гл. II).

2. Доказательство теоремы. Квадратичная форма от одного переменного всегда имеет канонический вид $a_{11}x_1^2$. Примем как предположение индукции, что любую квадратичную форму от $(n - 1)$ числовых аргументов можно привести к каноническому виду невырожденным линейным преобразованием $(n - 1)$ переменных.

Рассмотрим произвольную квадратичную форму $f(x)$ от n числовых аргументов:

$$f(x)=\sum a_{ij}x_i x_j.$$

Пользуясь предположением индукции, докажем, что ее можно привести к каноническому виду невырожденным линейным преобразованием n переменных. Возможны два случая:

1) П е р в ы й с л у ч а й. В квадратичной форме $f(x)$ хотя бы один из коэффициентов a_{ii} при квадратах переменных отличен от нуля. Не нарушая общности, можем считать, что именно $a_{11} \neq 0$. По данным коэффициентам формы $f(x)$ составим следующее линейное преобразование:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = \qquad\qquad x_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = \qquad\qquad\qquad x_n. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Матрицу этого преобразования обозначим $\tilde{Q}$:

$$\tilde{Q}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ 0 & 1 \ldots & 0 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 \ldots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Преобразование (2) невырождено, так как $\operatorname{Det} \tilde{Q}=a_{11} \neq 0$. Отметим также, что невырожденность преобразования (2) вытекает из его обратимости, которая в свою очередь сразу видна из формул (2).

Возведем в квадрат выражение y_1 и разделим на $a_{11} \neq 0$:

$$\frac{1}{a_{11}} y_1^2 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 =$$
$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \varphi(x_2, \ldots, x_n),$$

где φ — некоторая квадратичная форма аргументов $x_2, \ldots, x_n$, т. е. φ не включает x_1. Введем еще одну квадратичную форму ψ тех же аргументов $x_2, \ldots, x_n$, положив

$$\psi(x_2, \ldots, x_n) = g(x_2, \ldots, x_n) - \varphi(x_2, \ldots, x_n),$$

где $g(x_2, \ldots, x_n)$ дана записью $f(x)$ в виде (1). Тогда получим

$$f(x) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \psi(x_2, \ldots, x_n),$$

или, что то же самое,

$$f(x) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \psi(y_2, \ldots, y_n).$$

По предположению индукции существует такое невырожденное преобразование переменных в числе $n-1$

$$z_k = \sum_{l=2}^{n} R_{kl} y_l, \qquad k = 2, \ldots, n, \tag{3}$$

которое приводит к каноническому виду форму ψ:

$$\psi(y_2, \ldots, y_n) = b_{22} z_2^2 + \ldots + b_{nn} z_n^2.$$

Дополним преобразование (3) так, чтобы в нем участвовали все n переменных. Именно, положим

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= y_1, \\ z_2 &= \qquad R_{22} y_2 + \ldots + R_{2n} y_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n &= \qquad R_{n2} y_2 + \ldots + R_{nn} y_n. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Преобразуем переменные $x_1, \ldots, x_n$ в переменные $y_1, \ldots$ $\ldots, y_n$ по формулам (2), а затем переменные $y_1, \ldots, y_n$ преобразуем по формулам (4). В результате получим преобразование переменных $x_1, \ldots, x_n$ в переменные $z_1, \ldots, z_n$, которое приводит исходную квадратичную форму к каноническому виду

$$f(x) = \frac{1}{a_{11}} z_1^2 + b_{22} z_2^2 + \ldots + b_{nn} z_n^2.$$

Последнее преобразование является невырожденным, так как представляет собой произведение невырожденных преобразований (2) и (4).

2) Второй случай. В квадратичной форме $f(x)$ все диагональные коэффициенты a_{ii} равны нулю. Тогда предыдущие рассуждения неприменимы. Но какой-нибудь из коэффициентов отличен от нуля; пусть это будет a_{12}. Тогда квадратичная форма имеет вид

$$f(x) = 2a_{12} x_1 x_2 + \ldots \tag{5}$$

Сделаем преобразование:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2, \\ x_2 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2, \\ x_3 = \qquad\quad \tilde{x}_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \qquad\qquad\quad \tilde{x}_n. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Преобразование (6) обратимо и, следовательно, является невырожденным.

Подставив величины (6) в квадратичную форму (5), получим

$$f(x) = 2a_{12}\tilde{x}_1^2 - 2a_{12}x_2^2 + \dots \qquad (7)$$

Слагаемое $2a_{12}\tilde{x}_1^2$ не может исчезнуть при приведении подобных членов, так как все члены квадратичной формы, которые не выписаны в выражении (5), не содержат произведения x_1x_2 и не могут в результате преобразования (6) дать величину $\tilde{x}_1^2$.

Далее квадратичную форму (7) можно невырожденным преобразованием привести к каноническому виду, поскольку дело свелось к первому случаю: коэффициент при $\tilde{x}_1^2$ отличен от нуля.

Тем самым рассуждения индукции завершены и теорема доказана.

3. Замечание. Из доказательства видно, что квадратичную форму с действительными коэффициентами можно привести к каноническому виду с помощью невырожденного линейного преобразования, которое также имеет действительные коэффициенты.

§ 6. Нормальный вид квадратичной формы

1. Пусть квадратичная форма $f(x)$ приведена к каноническому виду

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} a_{ii}x_i^2, \qquad (1)$$

где $a_{11}, \dots, a_{rr} \neq 0$, r — ранг $f(x)$.

2. Допустим, что мы имеем дело с комплексным пространством и разрешаем себе пользоваться линейными преобразованиями с комплексными коэффициентами. Положим

$$\left.\begin{aligned} y_i &= \sqrt{a_{ii}}\, x_i, \quad \text{если} \quad i \leqslant r, \\ y_i &= x_i, \qquad\quad \text{если} \quad i > r. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из (1) и (2) получим

$$f(x) = y_1^2 + \ldots + y_r^2, \tag{3}$$

считая, что $y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}, \ldots, y_n$ — новые координаты вектора x. Выражение (3) называется нормальным видом квадратичной формы $f(x)$. Заметив, что преобразование (2) невырождено, сделаем вывод:

В комплексном пространстве всякую квадратичную форму можно с помощью невырожденного линейного преобразования привести к нормальному виду (3).

3. Ограничимся теперь действительными пространствами и действительными линейными преобразованиями. Учитывая, что среди коэффициентов a_{ii} могут быть отрицательные, положим

$$\left.\begin{aligned} y_i &= \sqrt{|a_{ii}|}\, x_i, \quad \text{если} \quad i \leqslant r, \\ y_i &= x_i, \qquad\qquad \text{если} \quad i > r. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если первые k коэффициентов a_{ii} положительны, а остальные отрицательны, то из (1) и (4) мы получим

$$f(x) = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2. \tag{5}$$

Выражение (5) также называется нормальным видом формы $f(x)$. Таким образом, в действительном пространстве с помощью невырожденных действительных линейных преобразований всякую квадратичную форму можно привести к нормальному виду (5).

4. В следующем параграфе мы докажем, что в действительном пространстве число положительных и число отрицательных членов в формуле (5) не зависит от того, каким именно (действительным) преобразованием квадратичная форма приведена к нормальному виду.

§ 7. Закон инерции квадратичных форм

1. Пусть в действительном пространстве дана квадратичная форма ранга r:

$$f(x) = \sum a_{ik} x_i x_k,$$

где $\{x_i\}$ — координаты вектора x в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Пусть $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ — какой-нибудь базис, в котором $f(x)$ имеет нормальный вид:

$$f(x) = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2. \tag{1}$$

Здесь $\{y_i\}$ — координаты вектора x в базисе $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$.

2. Число положительных и число отрицательных членов в формуле (1) называется соответственно положительным и отрицательным индексом формы; разность между положительным и отрицательным индексом называется ее сигнатурой.

3. Теорема (закон инерции квадратичных форм). *Положительный и отрицательный индексы являются инвариантами квадратичной формы, то есть не зависят от выбора базиса, в котором она имеет нормальный вид.*

Доказательство. Пусть имеется еще один базис $\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n$, в котором форма $f(x)$ имеет нормальный вид:

$$f(x) = z_1^2 + \ldots + z_m^2 - z_{m+1}^2 - \ldots - z_r^2, \tag{2}$$

где $\{z_i\}$ — координаты x в базисе $\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n$. Нужно доказать, что

$$k = m.$$

Предположим, что $k \neq m$, например $k > m$. Рассмотрим формулы преобразования координат

$$z_i = \sum Q_{ij} y_j. \tag{3}$$

Заметим, что матрица Q коэффициентов Q_{ij} невырождена.

Подставим выражения (3) в формулу (2). Мы должны получить выражение (1); таким образом, имеем тождество

$$z_1^2 + \ldots + z_m^2 - z_{m+1}^2 - \ldots - z_r^2 \equiv y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 \tag{4}$$

т. е. равенство, верное при любых $y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}, \ldots, y_n$, считая, что $z_1, \ldots, z_n$ выражены через $y_1, \ldots, y_n$ с помощью (3).

Составим вспомогательную однородную систему уравнений

$$\left.\begin{array}{c} Q_{11} y_1 + \ldots + Q_{1k} y_k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_{m1} y_1 + \ldots + Q_{mk} y_k = 0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

В системе (5) число неизвестных больше числа уравнений вследствие предположения $k > m$. Поэтому система (5) имеет нетривиальное решение $y_1, \ldots, y_k$. Подставим это решение в тождество (4), взяв дополнительно

$$y_{k+1} = \ldots = y_r = y_{r+1} = \ldots = y_n = 0. \tag{6}$$

В результате, учитывая (3), (5) и (6), получим

$$y_1^2 + \ldots + y_k^2 = -z_{m+1}^2 - \ldots - z_r^2. \tag{7}$$

Однако это невозможно, так как левая часть (7) строго положительна, тогда как правая либо отрицательна, либо равна нулю. Значит, k не может быть больше m. Совершенно аналогично устанавливается, что m не может быть больше, чем k. Поэтому $k = m$. Теорема доказана.

§ 8. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Якоби

1. Пусть дана квадратичная форма $f(x)$, которая расписана в координатах в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$:

$$f(x) = a(x, x) = \sum a_{ik} x_i x_k.$$

Как известно,

$$a_{ik} = a(e_i, e_k).$$

Составим матрицу квадратичной формы $f(x)$:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим так называемые главные миноры матрицы A:

$$\Delta_1 = a_{11}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \Delta_n = \operatorname{Det} A. \tag{1}$$

Кроме того, для удобства записи дальнейших формул введем величину Δ_0, считая $\Delta_0 = 1$.

Метод Якоби проходит в предположении, что все главные миноры матрицы A отличны от нуля:

$$\Delta_1 \neq 0, \quad \Delta_2 \neq 0, \ldots, \Delta_n \neq 0. \tag{2}$$

При этих предположениях ищется специальный новый базис такой, чтобы

$$\left.\begin{aligned} e_1' &= P_{11}e_1, \\ e_2' &= P_{21}e_1 + P_{22}e_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_k' &= P_{k1}e_1 + P_{k2}e_2 + \ldots + P_{kk}e_k, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n' &= P_{n1}e_1 + P_{n2}e_2 + \ldots + \ldots + P_{nn}e_n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Для того чтобы привести квадратичную форму $f(x)$ к каноническому виду, достаточно для любого $k (1 < k \leqslant n)$ обеспечить условия

$$a(e_i', e_k') = a_{ik}' = 0 \qquad \text{при } i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{4}$$

Тогда a_{ki}' тоже будут равны нулю (вследствие симметричности матрицы квадратичной формы), и отличными от нуля окажутся лишь коэффициенты при квадратах числовых аргументов.

2. Заметим, что для выполнения условий (4) достаточно потребовать соблюдения равенств

$$a(e_i, e_k') = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1, \; k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

В самом деле, из (5) и (3) имеем

$$a(e_i', e_k') = a(P_{i1}e_1 + \ldots + P_{ii}e_i, e_k') =$$
$$= P_{i1}\,a(e_1, e_k') + \ldots + P_{ii}a(e_i, e_k') = 0.$$

Для упрощения дальнейших выводов добавим к (5) дополнительное равенство

$$a(e_k, e_k') = 1. \tag{6}$$

3. При $k = 1$ условия (5) исчезают и остается только (6), из которого, с учетом первой строчки формул (3), находим

$$1 = a(e_1, e_1') = P_{11}a(e_1, e_1) = P_{11}a_{11}.$$

Отсюда

$$P_{11}=\frac{1}{a_{11}},$$

поскольку $a_{11}\neq 0$.

Учитывая обозначения (1), можно написать

$$P_{11}=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}.$$

4. Дальше будем проводить рассуждение по индукции. Допустим, что уже определены все коэффициенты, входящие в первые $k-1$ строк формул (3). Для нахождения коэффициентов, входящих в строку с номером k, запишем условия (5) и (6) вместе

$$a(e_1, e'_k)=0, \ \ldots, \ a(e_{k-1}, e'_k)=0, \ a(e_k, e'_k)=1. \tag{7}$$

Отсюда, используя (3), получим для искомых коэффициентов систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}P_{k1}+ \quad a_{12}P_{k2}+\ldots+ \quad a_{1k}P_{kk}&=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{k-1\,1}P_{k1}+a_{k-1\,2}P_{k2}+\ldots+a_{k-1\,k}P_{kk}&=0,\\ a_{k1}P_{k1}+ \quad a_{k2}P_{k2}+\ldots+ \quad a_{kk}P_{kk}&=1. \end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

Определитель системы (7a) совпадает с Δ_k и отличен от нуля вследствие предположения (2). Поэтому искомые коэффициенты $P_{k1}, \ldots, P_{kk}$ найдутся. Остается проверить, что построенное преобразование невырождено. С этой целью найдем из системы (7a) коэффициент P_{kk}. Применяя правило Крамера, получим

$$P_{kk}=\frac{1}{\Delta_k}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\,k-1} & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{k-1\,1} & \ldots & a_{k-1\,k-1} & 0\\ a_{k1} & \ldots & a_{k\,k-1} & 1 \end{vmatrix}=\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}. \tag{8}$$

Далее, используя треугольную структуру матрицы преобразования (3), найдем определитель D этой матрицы:

$$D=P_{11}P_{22}\ldots P_{nn}=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\cdot\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\ldots\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}=\frac{1}{\Delta_n}.$$

Таким образом, $D\neq 0$, а значит, преобразование (3) невырождено.

5. Теперь мы можем определить и коэффициенты квадратичной формы в новом базисе $e'_1, \ldots, e'_n$. Достаточно вычислить лишь диагональные коэффициенты, так как остальные заведомо равны нулю. Используя (3), (7) и (8), находим

$$a'_{kk} = a(e'_k, e'_k) = a(P_{k1}e_1 + \ldots + P_{kk}e_k, e'_k) = \\ = P_{kk}a(e_k, e'_k) = P_{kk} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.$$

Значит, в базисе, который построен по методу Якоби,

$$f(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x'_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x'_2)^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x'_n)^2.$$

§ 9. Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы

1. В этом параграфе будем рассматривать только действительные пространства.

Пусть в линейном пространстве, хотя бы бесконечномерном, задана квадратичная форма $f(x)$.

Определение 1. Форма $f(x)$ называется *положительно определенной*, если $f(x) > 0$ для всех $x \neq \theta$.

Заметим, что $f(\theta) = 0$ всегда. В самом деле, так как $\theta = 0 \cdot z$ и $f(x) = a(x, x)$, где z — произвольный вектор, $a(x, y)$ — билинейная функция, то

$$f(\theta) = a(0 \cdot z, 0 \cdot z) = 0 \cdot a(z, z) = 0.$$

Определение 2. Квадратичная форма $f(x)$ называется *отрицательно определенной*, если $f(x) < 0$ для любого $x \neq \theta$.

Очевидно, что достаточно рассмотреть положительно определенные формы, поскольку отрицательно определенные получаются из них сменой знака.

2. Ограничиваясь квадратичными формами в конечномерных (n-мерных) пространствах, укажем прежде всего ряд простых необходимых признаков положительной определенности. Пусть в каком-нибудь базисе $e_1, \ldots, e_n$ дана квадратичная форма

$$f(x) = a(x, x) = \sum a_{ik}x_ix_k.$$

Как нам известно, $a_{ik} = a(e_i, e_k)$.

1) Если $f(x)$ является положительно определенной, то $a_{ii}>0$ при всех $i=1, 2, \ldots, n$.

Доказательство.

$$a_{ii}=a(e_i, e_i)=f(e_i)>0.$$

Замечание. Это условие вовсе не достаточно для положительной определенности формы. Пример: форма

$$f(x)=x_1^2+1000x_1x_2+x_2^2$$

имеет $a_{ii}=1>0$, но на векторе $(-1, 1)$ принимает отрицательное значение.

2) Если форма $f(x)$ положительно определена, то определитель ее матрицы положителен:

$$\Delta=\operatorname{Det} A>0.$$

Для доказательства приведем $f(x)$ к каноническому виду. Пусть $e_1', \ldots, e_n'$ — канонический базис, то есть базис, в котором $f(x)$ имеет канонический вид:

$$f(x)=a_{11}'(x_1')^2+\ldots+a_{nn}'(x_n')^2.$$

Согласно предыдущему признаку все $a_{ii}'>0$.

Обозначим через Δ' определитель матрицы формы $f(x)$ в каноническом базисе. Имеем

$$\Delta'=\begin{vmatrix} a_{11}' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}' \end{vmatrix}=a_{11}'\ldots a_{nn}'>0.$$

С другой стороны, по формуле (4) § 3

$$\Delta'=\Delta(\operatorname{Det} P)^2,$$

значит, $\Delta>0$.

Замечание. И это условие не является достаточным для положительной определенности квадратичной формы. Пример: форма

$$f(x)=-x_1^2-x_2^2$$

имеет $\Delta>0$, однако $f(x)\leqslant 0$.

3) В n-мерном пространстве каждая положительно определенная форма имеет ранг n. Доказательство вытекает из неравенства $\Delta\neq 0$.

3. Теорема (критерий Сильвестра). *Для положительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительны.*

Доказательство необходимости. Пусть форма $f(x)$ положительно определена. Возьмем произвольный базис $e_1, \ldots, e_k, \ldots, e_n$ и построим линейную оболочку $L(e_1, \ldots, e_k)$. Будем теперь рассматривать квадратичную форму $f(x)$ не на всем пространстве, а лишь на подпространстве $L(e_1, \ldots, e_k)$.

Если $x \in L(e_1, \ldots, e_k)$, то $x = \{x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0\}$ и

$$f(x) = \sum_{i, j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j.$$

Все остальные члены, у коэффициентов которых хотя бы один из двух индексов больше k, исчезают за счет нулевых значений координат.

Форма $f(x)$ на подпространстве $L(e_1, \ldots, e_k)$ является положительно определенной, так как она положительно определена на всем пространстве. Поэтому определитель формы $f(x)$, рассматриваемой на $L(e_1, \ldots, e_k)$, положителен:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0.$$

Но Δ_k — главный минор порядка k матрицы квадратичной формы $f(x)$, индекс k может принимать значения $1, 2, \ldots, n$. Тем самым необходимость признака доказана.

Доказательство достаточности. Пусть $\Delta_k > 0$ при $k = 1, \ldots, n$.

Приведем квадратичную форму к каноническому виду методом Якоби. Получим

$$f(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x_n')^2.$$

Если $x \neq 0$, то хотя бы одна из координат $x_k' \neq 0$, и, следовательно, $f(x) > 0$. Теорема доказана.

4. Обратим внимание на двумерный случай. Пусть

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

где на этот раз числовые аргументы формы обозначены через x, y.

Условие Сильвестра сводится к неравенствам

$$a>0, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac-b^2>0.$$

Разумеется, в двумерном случае теорему Сильвестра можно установить без какой-либо специальной теории, поскольку для положительной определенности необходимо $a>0$ и при $a>0$

$$f=\frac{1}{a}\left[(ax+by)^2+(ac-b^2)y^2\right].$$

§ 10. Определитель Грама. Неравенство Коши—Буняковского

1. Предположим, что в произвольном линейном пространстве L (может быть, бесконечномерном) дана квадратичная форма $f(x)=a(x, x)$ и конечная система векторов $p_1, \ldots, p_k$.

Определение. *Определителем Грама* для квадратичной формы $a(x, x)$ и системы векторов $p_1, \ldots, p_k$ называется величина

$$G(p_1, \ldots, p_k)=\begin{vmatrix} a(p_1, p_1) & \ldots & a(p_1, p_k) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a(p_k, p_1) & \ldots & a(p_k, p_k) \end{vmatrix}.$$

С определителями такого вида приходится часто иметь дело в математической физике и интегральных уравнениях.

2. Теорема. *Пусть пространство L действительно, а квадратичная форма $a(x, x)$ положительно определена. Тогда, если векторы $p_1, \ldots, p_k$ линейно независимы, то $G(p_1, \ldots, p_k)>0$. Если векторы $p_1, \ldots, p_k$ зависимы, то $G(p_1, \ldots, p_k)=0$.*

Доказательство. 1) Пусть векторы $p_1, \ldots, p_k$ линейно независимы. В таком случае они составят базис в своей линейной оболочке $L(p_1, \ldots, p_k)$. Произвольный вектор $x \in L(p_1, \ldots, p_k)$ можно записать в виде

$$x=x_1p_1+\ldots+x_kp_k.$$

Будем рассматривать $f(x)$ на векторах из $L(p_1, \ldots, p_k)$. В базисе $p_1, \ldots, p_k$ имеем

$$f(x) = \sum_{i, j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j$$

(даже если исходное пространство L бесконечномерно).

Так как $f(x)$ положительно определена на всем пространстве L, то она положительно определена и на подпространстве $L(p_1, \ldots, p_k)$, так что

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0. \tag{1}$$

Заметим, что $a_{ij} = a(p_i, p_j)$. Отсюда и из (1)

$$G(p_1, \ldots, p_k) = \Delta_k > 0.$$

2) Пусть теперь $p_1, \ldots, p_k$ линейно зависимы. Тогда найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю, для которых

$$\lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_k p_k = \theta.$$

Учтем, что

$$a(x, \theta) = 0$$

и подставим в это тождество

$$x = p_i, \qquad \theta = \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_k p_k.$$

Придавая i значения $1, \ldots, k$, получим однородную систему k линейных уравнений с k неизвестными

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_1 a(p_1, p_1) + \ldots + \lambda_k a(p_1, p_k) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_1 a(p_k, p_1) + \ldots + \lambda_k a(p_k, p_k) = 0. \end{array}\right\}$$

Эта система заведомо имеет нетривиальное решение $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Поэтому ее определитель равен нулю:

$$G(p_1, \ldots, p_k) = 0.$$

Теорема доказана.

3. Важный частный случай. В условиях доказанной теоремы рассмотрим систему, состоящую из двух векторов p_1, p_2. Имеем

$$\begin{vmatrix} a(p_1, p_1) & a(p_1, p_2) \\ a(p_2, p_1) & a(p_2, p_2) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Если раскрыть этот определитель, учитывая симметричность билинейной формы, то получится неравенство

$$[a(p_1,\ p_2)]^2 \leqslant a(p_1,\ p_1) \cdot a(p_2,\ p_2), \tag{2}$$

которое называется *неравенством Коши — Буняковского.*

При этом знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда векторы p_1 и p_2 линейно зависимы.

4. Рассмотрим пространство непрерывных функций, заданных на каком-нибудь отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. В этом пространстве рассмотрим квадратичную форму

$$f(x) = \int_{t_1}^{t_2} [x(t)]^2\,dt$$

(в связи с этим см. выше, § 4, п. 4).

Для $f(x)$ полярной билинейной формой является

$$a(x,\ y) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,y(t)\,dt.$$

Нетрудно сообразить, что $f(x)$ положительно определена. В самом деле, если непрерывная функция $x(t)$ отлична от тождественного нуля, то

$$\int_{t_1}^{t_2} [x(t)]^2\,dt > 0.$$

Поэтому в данном случае можно применить неравенство (1). В результате получим неравенство Коши — Буняковского для интегралов:

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,y(t)\,dt\right]^2 \leqslant \int_{t_1}^{t_2} [x(t)]^2\,dt \cdot \int_{t_1}^{t_2} [y(t)]^2\,dt. \tag{3}$$

Знак равенства в формуле (3) имеет место в том и только в том случае, когда система $x(t)$, $y(t)$ линейно зависима, или, проще сказать, когда одна из функций $x(t)$, $y(t)$ пропорциональна другой (например, $y(t) = Cx(t)$, $C = \text{const}$).

Этот пример показывает, как алгебраические теоремы работают за пределами собственно алгебры и дают возможность получить результаты из анализа. Общей основой таких приложений является построение в бесконечномерном функциональном пространстве конечномерных линейных оболочек.

§ 11. Нулевое подпространство билинейной и квадратичной формы

1. Пусть $a(x, y)$ — билинейная форма, заданная в пространстве L.

Определение 1. Будем называть *правым нулевым подпространством формы* $a(x, y)$ множество всех элементов y, для каждого из которых при любом $x \in L$ соблюдается равенство

$$a(x, y) = 0. \qquad (*)$$

Это определение, очевидно, не зависит от размерности и может быть использовано в бесконечномерном случае.

Правое нулевое подпространство будем обозначать L_0''.

Аналогично определим левое нулевое подпространство L_0', именно: $y \in L_0'$, если $a(y, x) = 0$ при любом $x \in L$.

2. Докажем прежде всего, что L_0'' на самом деле является линейным подпространством. Пусть $y_1, y_2 \in L_0''$. Тогда $a(x, y_1) = 0$, $a(x, y_2) = 0$ при любом x. Но отсюда следует, что

$$a(x, y_1 + y_2) = a(x, y_1) + a(x, y_2) = 0,$$
$$a(x, \alpha y_1) = \alpha a(x, y_1) = 0.$$

Таким образом, $y_1 + y_2 \in L_0''$ и $\alpha y_1 \in L_0''$.

Совершенно аналогично доказывается, что подпространством является и L_0'.

3. Далее будем рассматривать n-мерное пространство. Зафиксируем в нем базис $e_1, \ldots, e_n$ и запишем билинейную форму в координатах:

$$a(x, y) = \sum a_{ij} x_i y_j,$$

где $a_{ij} = a(e_i, e_j)$.

Покажем, что $y \in L_0''$ тогда и только тогда, когда

$$\sum a_{ij} y_j = 0 \qquad (1)$$

при всех значениях i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Для этого напишем тождество

$$\sum_{i,\,j} a_{ij} x_i y_j = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} y_j \Big) x_i. \qquad (\alpha)$$

Если выполняются условия (1), то выполняется и $(*)$. С другой стороны, из условия $(*)$ следует, что в правой части равенства (α) все коэффициенты при x_i обращаются в нуль, а это и дает нам систему (1).

Точно так же, $y \in L_0'$ тогда и только тогда, когда

$$\sum a_{ij} y_i = 0 \tag{2}$$

при всех значениях j ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Равенства (1) и (2) представляют собой системы уравнений, определяющие L_0'' и L_0' в координатах.

По теоремам о линейных системах (см. гл. III) (размерность L_0'') = (размерность L_0') $= n - r$, где r — ранг билинейной формы $a(x, y)$, т. е. ранг ее матрицы.

Отсюда следует, что ранг билинейной формы можно определить геометрически. Именно, ранг формы $a(x, y)$ равен разности между размерностью всего пространства и размерностью нулевого подпространства этой формы (какое здесь брать нулевое подпространство — правое или левое, — безразлично, так как их размерности одинаковы).

4. Определение 2. Билинейная форма называется *невырожденной*, если размерность L_0' (или L_0'') равна нулю. В остальных случаях билинейная форма называется вырожденной.

Иначе говоря, билинейная форма вырождена, если ее нулевые подпространства имеют ненулевую размерность, или (что то же самое) если ее ранг меньше размерности пространства: $r < n$, или если определитель ее матрицы равен нулю: $\Delta = \operatorname{Det} A = 0$.

5. Предположим, что билинейная форма $a(x, y)$ вырождена, т. е. ее ранг $r < n$. Введем в пространстве специальный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ такой, чтобы $e_{r+1}, \ldots, e_n \in L_0''$. Для этого нужно сначала выбрать линейно независимые векторы из L_0'' (число их как раз равно размерности L_0''), а затем дополнить их до базиса во всем пространстве. Посмотрим, как при таком выборе базиса будет выглядеть матрица билинейной формы. Если $j = r + 1, \ldots, n$, то вследствие определения L_0''

$$a_{ij} = a(e_i, e_j) = 0.$$

Таким образом,

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} & 0 \ldots 0 \\ a_{21} \ldots a_{2r} & 0 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} \ldots a_{nr} & 0 \ldots 0 \end{Vmatrix}.$$

Матрица упрощается, причем тем сильнее, чем ниже ранг билинейной формы (чем выше размерность нулевого подпространства).

Если выбрать базис так, чтобы последние $n-r$ базисных векторов попали в левое нулевое подпространство, то это тоже приведет к упрощению матрицы, но теперь в нуль обратятся не столбцы, а последние строки в числе $n-r$:

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{r1} \ldots a_{rn} \\ 0 \quad\quad 0 \\ \ldots\ldots \\ 0 \quad\quad 0 \end{matrix}\right\|.$$

Пусть билинейная форма симметрична, тогда L_0' совпадает с L_0'' (докажите). Поместим базисные векторы $e_{r+1}, \ldots, e_n$ в L_0'. Тогда эти же векторы окажутся в L_0'', и матрица примет особенно простой вид

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1r} & 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{r1} \ldots a_{rr} & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots\ 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 \ldots\ 0 & 0 \ldots 0 \end{matrix}\right\|. \tag{3}$$

Таким образом, если ранг r симметричной билинейной формы меньше n, то ее рассмотрение полностью сводится к подпространству размерности r (натянутому на $e_1, \ldots, e_r$).

6. Рассмотрим теперь квадратичную форму $f(x)=a(x, x)$.

Определение 3. *Нулевым подпространством квадратичной формы* называется нулевое подпространство L_0 ее полярной формы $a(x, y)$.

Различать L_0' и L_0'' здесь нет надобности, так как $L_0'=L_0''$.

Если квадратичная форма невырождена, то ее нулевое подпространство нульмерно.

Если форма вырождена, то ее ранг $r<n$, а L_0 имеет размерность $n-r$. В базисе $e_1, \ldots, e_n$, векторы $e_{r+1}, \ldots, e_n$ которого помещаются в L_0, матрица квадратичной формы имеет вид (3), и форму $f(x)$ можно рассматривать в r-мерном подпространстве $L(e_1, \ldots, e_r)$.

§ 12. Нулевой конус квадратичной формы

1. Наряду с данным линейным пространством L будем рассматривать аффинное пространство $\mathfrak{A}$, считая, что элементами L являются радиус-векторы точек из $\mathfrak{A}$.

2. Определение. Множество точек аффинного пространства называется *конусом* с вершиной O, если вместе с каждой своей точкой M, не совпадающей с O, оно содержит всю прямую OM (при $n = 3$ см. рис. 24).

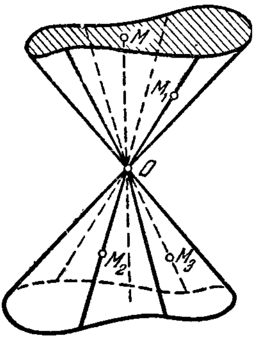


Рис. 24.

В некоторых случаях одну точку O удобно рассматривать как конус, состоящий только из вершины. Простейшими примерами конусов могут служить любая плоскость, проходящая через точку O, а также все пространство $\mathfrak{A}$.

3. Пусть в пространстве L дана квадратичная форма $f(x)$. Ее можно рассматривать и в аффинном пространстве $\mathfrak{A}$, считая, что значение $f(x)$ в точке M определяется при $x = \overline{OM}$, т. е. равно $f(\overline{OM})$.

Обозначим через K_0 множество тех точек аффинного пространства, в которых квадратичная форма $f(x)$ равна нулю $\left(M \in K_0\text{, если } f(\overline{OM}) = 0\right)$.

Теорема 1. *Множество K_0 представляет собой конус с вершиной в начале координат.*

Доказательство. Может случиться, что K_0 состоит из одной точки O (например, если пространство действительное, а форма $f(x)$ положительно определена). Тогда утверждение верно, поскольку мы условились одну точку рассматривать как конус.

Предположим, что существует точка $M \neq 0$, для которой

$$f(x) = 0$$

при $x = \overline{OM}$.

Проведем через O и M прямую и возьмем на ней любую точку M^* (рис. 25). Положим $\overline{OM^*} = x^*$. Тогда $x^* = \lambda x$, где λ — некоторое число. Следовательно,

$$f(x^*) = f(\lambda x) = a(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 a(x, x) = \lambda^2 f(x) = 0.$$

Таким образом, с каждой точкой $M \neq 0$ множество K_0 содержит и все точки прямой OM (рис. 25).

4. Определение. Множество K_0 называется *нулевым конусом* квадратичной формы $f(x)$.

5. Следует обратить внимание на то, что конус не является, вообще говоря, линейным подпространством: если $f(x)=0$, $f(y)=0$, то может быть $f(x+y) \neq 0$.

6. Теорема 2. *Нулевое подпространство квадратичной формы всегда является частью нулевого конуса этой формы:*

$$L_0 \subset K_0.$$

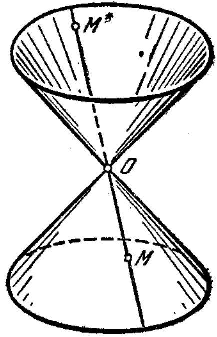


Рис. 25.

Замечание. L_0 определено как множество векторов в линейном пространстве, а K_0 — как множество точек в аффинном пространстве.

Поэтому, говоря о включении $L_0 \subset K_0$, нужно подразумевать, что L_0 есть точечное множество концов радиус-векторов из нулевого подпространства.

Доказательство теоремы. Пусть $y \in L_0$, $y = OM$. Тогда $a(x, y)=0$ при любом x. Положим $x=y$; получим $a(y, y)=f(y)=0$. Следовательно, $y \in K_0$ в том смысле, что $M \in K_0$, где M — конец вектора y.

§ 13. Простейшие примеры нулевых конусов квадратичных форм

1. Рассмотрим более подробно частные случаи, встречающиеся в элементарной аналитической геометрии. Будем считать, что квадратичная форма не равна нулю тождественно и приведена к нормальному виду.

2. Действительная плоскость ($n=2$).

1) $f(x)=x_1^2-x_2^2$. Здесь $r=2$ и размерность L_0 равна нулю. Следовательно, L_0 состоит только из нулевой точки. Нулевой конус K_0 определяется уравнением $x_1^2-x_2^2=0$ и распадается на две прямые: $x_1=x_2$, $x_1=-x_2$. Из-за малой размерности конус не является поверхностью, а представляет собой линию, состоящую из двух пересекающихся прямых (рис. 26).

2) $f(x)=x_1^2+x_2^2$. Здесь также $r=2$ и размерность L_0 равна 0. Нулевой конус определяется уравнением $x_1^2+x_2^2=0$ и состоит из одной точки. Иногда говорят, что такое уравнение определяет мнимый конус.

3) $f(x)=x_1^2$. Здесь $r=1$, размерность L_0 равна 1. Конус K_0 определяется уравнением $x_1^2=0$, следовательно, K_0 состоит из точек, для которых $x_1=0$. Нетрудно сообразить, что в данном случае L_0 должно совпадать с K_0. В самом деле, размерность L_0 равна 1, а по предыдущему L_0 должно войти в нулевой конус, так что L_0 и будет единственной прямой $x_1=0$, содержащейся в K_0. Конус K_0 определяется уравнением второй степени. В рассматриваемом случае говорят, что у K_0 каждую точку оси x_2 нужно считать дважды.

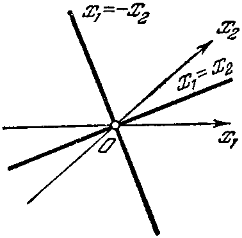


Рис. 26.

В записи квадратичной формы участвует только один квадрат: x_1^2. Это произошло потому, что базисный вектор e_2 помещен в нулевое подпространство.

3. Трехмерное действительное пространство ($n=3$).

1) $f(x)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$. Здесь $r=3$ и размерность L_0 равна нулю. Нулевой конус определяется уравнением $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$.

Если рассматривать пространство с элементарной точки зрения, с углами, расстояниями и т. п., то такое уравнение определяет круглый конус с осью на оси x_3 и прямым углом между образующими.

Евклидово пространство в данном случае служит моделью линейного пространства. Однако нужно иметь в виду, что в линейном (и в аффинном) пространстве не определены углы, нет правила измерения расстояний и потому не имеет смысла понятие «круглый конус». Все же это не препятствует использованию евклидова пространства в качестве модели линейного (или аффинного) пространства. Дополнительные свойства евклидова пространства только помогают наглядности описаний.

2) $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Здесь $r=3$, размерность L_0 равна нулю, K_0 определяется уравнением $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$. Это — мнимый конус; в действительном пространстве он имеет одну только нулевую точку.

3) $f(x)=x_1^2+x_2^2$. Здесь $r=2$, размерность L_0 равна 1. Таким образом, L_0 представляет собой одномерное линейное подпространство, то есть прямую, проходящую через начало координат. Конус K_0 определяется уравнением $x_1^2+x_2^2=0$ и состоит из точек вида $(0, 0, x_3)$, т. е. представляет собой множество точек третьей оси. Так как $L_0 \subset K_0$, то ясно, что L_0 — та же самая прямая (третья координатная ось). Только следует иметь в виду, что в K_0 каждая точка этой прямой считается не один, а два раза.

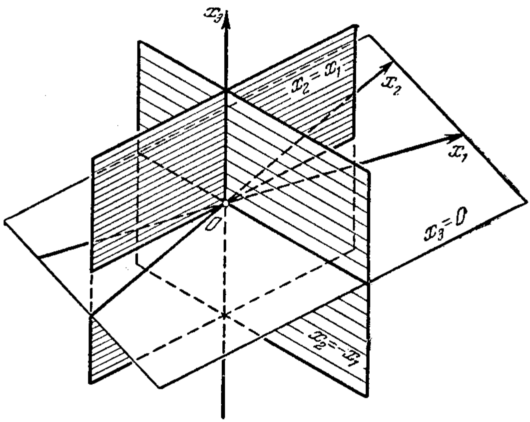


Рис. 27.

Заметим, что третий базисный вектор e_3 помещен в L_0. Поэтому в представлении формы исчезло все, что связано с третьей координатой.

4) $f(x)=x_1^2-x_2^2$. Здесь $r=2$, размерность L_0 равна 1. Конус K_0 определяется уравнением $x_1^2-x_2^2=0$. Левая часть этого уравнения разлагается на два множителя первой степени, так что конус K_0 состоит из двух плоскостей. В качестве модели линейного пространства будем рассматривать евклидово пространство. Тогда K_0 изобразится в виде пары плоскостей, которые проходят через ось x_3, пересекаются под прямым углом и пересекают плоскость $x_3=0$ по биссектрисам координатных углов (рис. 27).

В этом примере подпространство L_0 можно найти двумя способами: путем вычислений или из геометрических соображений. Рассмотрим оба пути.

Запишем полярную билинейную форму и приравняем ее нулю:

$$x_1y_1 - x_2y_2 = 0.$$

Нужно найти такие $y=(y_1, y_2, y_3)$, для которых это уравнение соблюдается при любом $x=(x_1, x_2, x_3)$. Ясно, что $y_1=y_2=0$, а y_3 может принимать любые значения. Таким образом, L_0 совпадает с третьей координатной осью.

Получить этот результат геометрическим путем, как делалось в предыдущем примере, непосредственно нельзя. Известно, что L_0 — прямая, проходящая через начало координат, но таких прямых в K_0 много, и выделить одну из них в качестве L_0 сразу не удается.

Однако можно поступить иначе. Заметим, что в запись квадратичной формы не входит третья координата. Это значит, что третий базисный вектор помещен в L_0. Ввиду одномерности нулевого подпространства отсюда следует, что оно совпадает с третьей координатной осью.

5) $f(x)=x_1^2$. Здесь $r=1$, размерность L_0 равна 2, конус K_0 имеет уравнение $x_1^2=0$ и является плоскостью $x_1=0$ (дважды взятой). L_0 геометрически представляет собой ту же самую плоскость $x_1=0$.

4. Замечание. Выше рассмотрены все варианты, которые могут встречаться при изучении L_0 и K_0 в двумерном и трехмерном действительных пространствах. В самом деле, произвольную квадратичную форму можно привести к каноническому виду, а затем, если понадобится, умножить на (-1). Тем самым дело сведется к одному из рассмотренных выше случаев.

ГЛАВА V. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Взаимные базисы. Контравариантные и ковариантные векторы

1. Пусть L — линейное n-мерное пространство, L^* — сопряженное ему (то есть пространство всех линейных форм, заданных на L; см. выше, § 1 предыдущей главы). Введем в L произвольный базис $e_1, \ldots, e_n$. Координаты произвольного вектора x из L в базисе $e_1, \ldots, e_n$ будем обозначать $\{x^1, \ldots, x^n\}$. В сопряженном пространстве выберем базис $e^1(x), \ldots, e^n(x)$ так, чтобы значения линейных форм $e^i(x)$ на векторах e_j образовали единичную матрицу:

$$e^i(e_j) = \delta^i_j, \tag{1}$$

где δ^i_j — символ Кронекера ($\delta^i_j = 1$ при $i = j$, $\delta^i_j = 0$ при $i \neq j$).

Определение. Базис $e^1(x), \ldots, e^n(x)$ в L^*, удовлетворяющий условиям (1), называется *взаимным* с данным базисом $e_1, \ldots, e_n$ в L.

Из определения следует, что для данного базиса существует единственный взаимный базис и что он задается формулами

$$\left.\begin{aligned} e^1(x) &= 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^n, \\ e^2(x) &= 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^n(x) &= 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \ldots + 1 \cdot x^n. \end{aligned}\right\}$$

2. В пространстве L перейдем к новому базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$. Для удобства дальнейших обозначений формулы (I) из § 5 гл. II мы запишем теперь несколько иначе, именно:

$$e_{i'} = \sum P^i_{i'} e_i. \tag{I}$$

Здесь и далее мы помечаем штрихами индексы, относящиеся к новому базису; никакого другого специального смысла символам $1', 2', \ldots, n'$ мы не придаем, так что $1'=1, 2'=2, \ldots, n'=n$. Теперь в матрице P по строкам изменяется верхний индекс, по столбцам изменяется нижний индекс:

$$P=\left\| \begin{matrix} P^1_{1'}, P^2_{1'}, & \ldots & P^n_{1'} \\ P^1_{2'}, P^2_{2'}, & \ldots & P^n_{2'} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P^1_{n'} P^2_{n'} & \ldots & P^n_{n'} \end{matrix} \right\|.$$

Пусть произвольный вектор x из L разложен по старому и по новому базису:

$$x=x^1e_1+\ldots+x^ne_n=x^{1'}e_{1'}+\ldots+x^{n'}e_{n'}.$$

Формулу (III) из § 5 гл. II, выражающую новые координаты через старые, запишем так:

$$x^{i'}=\sum Q^{i'}_i x^i. \tag{II}$$

Матрицу коэффициентов правых частей равенств (II) будем обозначать через Q. При этом нужно считать, что верхний индекс изменяется по столбцу, а нижний — по строке:

$$Q=\left\| \begin{matrix} Q^{1'}_1 & Q^{1'}_2 & \ldots & Q^{1'}_n \\ Q^{2'}_1 & Q^{2'}_2 & \ldots & Q^{2'}_n \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ Q^{n'}_1 & Q^{n'}_2 & \ldots & Q^{n'}_n \end{matrix} \right\|.$$

При указанной здесь расстановке индексов и в матрице P, и в матрице Q штрихованный индекс означает номер строки, нештрихованный индекс — номер столбца. Равенства

$$Q=(P^*)^{-1}, \qquad P=(Q^*)^{-1} \tag{2}$$

остаются в силе, а формулы (4) из § 5 гл. II принимают вид

$$\sum P^i_{\alpha'}Q^{\alpha'}_j=\delta^i_j, \qquad \sum P^{\beta}_{j'}Q^{i'}_{\beta}=\delta^{i'}_{j'}. \tag{3}$$

Соотношениями (2) и (3) мы часто будем пользоваться ниже, не оговаривая этого дополнительно.

3. В сопряженном пространстве L^* возьмем базис $e^{1'}(x), \ldots, e^{n'}(x)$, взаимный с новым базисом в L, т. е.

удовлетворяющий условиям

$$e^{k'}(e_{i'}) = \delta_{i'}^{k'}. \tag{4}$$

Найдем формулы перехода от базиса $e^k(x)$ к базису $e^{k'}(x)$. Заведомо справедливы соотношения вида

$$e^{k'}(x) = \sum A_k^{k'} e^k(x) \tag{5}$$

с некоторыми коэффициентами $A_k^{k'}$. Поэтому дело сводится к вычислению коэффициентов $A_k^{k'}$ по заданным $P_{i'}^i$. Из (4), (5), (I) и (1) имеем

$$\delta_{i'}^{k'} = e^{k'}(e_{i'}) = \sum_k A_k^{k'} e^k(e_{i'}) = \sum_k A_k^{k'} e^k \left(\sum_i P_{i'}^i e_i\right) =$$
$$= \sum_{i,\,k} A_k^{k'} P_{i'}^i e^k(e_i) = \sum_{i,\,k} A_k^{k'} P_{i'}^i \delta_i^k.$$

Следовательно,

$$\sum_\alpha A_\alpha^{k'} P_{i'}^\alpha = \delta_{i'}^{k'}. \tag{6}$$

Обозначим матрицу искомых коэффициентов правых частей (5) через A, считая, что штрихованный индекс означает номер строки, нештрихованный означает номер столбца, то есть изменяется по строке. Тогда все равенства (6) равносильны одному матричному равенству

$$AP^* = E, \tag{7}$$

где, как обычно, звездочка означает транспонирование. Из (7) получаем

$$A = (P^*)^{-1} = Q.$$

Таким образом,

$$e^{k'}(x) = \sum Q_k^{k'} e^k(x). \tag{I*}$$

4. Пусть произвольная линейная форма $u(x)$, т. е. элемент пространства L^*, разложена по старому и по новому базису:

$$u(x) = u_1 e^1(x) + \ldots + u_n e^n(x) = u_{1'} e^{1'}(x) + \ldots + u_{n'} e^{n'}(x).$$

Найдем формулы, которые выражают новые координаты формы $u(x)$, т. е. коэффициенты разложения $u(x)$ по базису $e^{i'}(x)$, через ее старые координаты. Для этого вспомним, что коэффициенты искомых формул составляют матрицу, обратную и транспонированную к матрице формул (I*). Но обращение и транспонирование матрицы Q дает P. Таким образом,

$$u_{i'} = \sum P_{i'}^{i} u_i. \tag{II*}$$

5. Мы видим, что формулы (I*) и (II*) получаются из известных нам формул (I) и (II), если поменять ролями матрицы P и Q.

6. Для большей наглядности приведем следующую схему.

В пространстве L	$e^i(e_j) = \delta_j^i$ $e^{i'}(e_{j'}) = \delta_{j'}^{i'}$	В пространстве L^*
$e_{i'} = \sum P_{i'}^{i} e_i$ $x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n \in L$ $x^{i'} = \sum Q_i^{i'} x^i$ $x = x^{1'} e_{1'} + \ldots + x^{n'} e_{n'} \in L$ $Q = (P^*)^{-1}$		$e^{i'}(x) = \sum Q_i^{i'} e^i(x)$ $u(x) = u_1 e^1(x) + \ldots$ $\ldots + u_n e^n(x) \in L^*$ $u_{i'} = \sum P_{i'}^{i} u_i$ $u(x) = u_{1'} e^{1'}(x) + \ldots$ $\ldots + u_{n'} e^{n'}(x) \in L^*$ $P = (Q^*)^{-1}$

7. Назовем *сверткой* элемента $a = a^1 e_1 + \ldots + a^n e_n$ из L с элементом $u(x) = u_1 e^1(x) + \ldots + u_n e^n(x)$ из L^* число, которое обозначается через (a, u) или (u, a) и определяется равенством

$$(a, u) = u_1 a^1 + \ldots + u_n a^n = \sum u_k a^k.$$

Очевидно, что свертка есть инвариант, поскольку она представляет собой не что иное, как значение инвариантной формы $u(x) = u_1 x^1 + \ldots + u_n x^n$ на векторе $x = a = a^1 e_1 + \ldots + a^n e_n$.

Инвариантность свертки можно вывести также как следствие формул (II) и (II*). В самом деле,

$$\sum_{k'} u_{k'} a^{k'} = \sum_{k'} \left(\sum_{\alpha} P_{k'}^{\alpha} u_{\alpha} \right) \left(\sum_{\beta} Q_{\beta}^{k'} a^{\beta} \right) = \\ = \sum_{\alpha,\beta} \left(\sum_{k'} P_{k'}^{\alpha} Q_{\beta}^{k'} \right) u_{\alpha} a^{\beta} = \sum_{\alpha,\beta} \delta_{\beta}^{\alpha} u_{\alpha} a^{\beta} = \sum_k u_k a^k.$$

8. Очевидно, что свертка обладает следующими двумя свойствами:

А) При умножении u или x на число свертка (u, x) умножается на то же число:

$$(\alpha u, x) = (u, \alpha x) = \alpha (u, x).$$

Б) Свертка распределительна по сложению:

$$(u + u', x) = (u, x) + (u', x),$$

$$(u, x + x') = (u, x) + (u, x').$$

9. Обратим внимание на полную симметрию взаимоотношений L и L^*. Рассмотрим свертку

$$(u, x) = u_1 x^1 + \ldots + u_n x^n.$$

Если здесь элемент u из L^* фиксирован, а $x = \{x^1, \ldots, x^n\}$ из L произвольно изменяется, то свертка (u, x) представляет собой линейную форму с числовыми аргументами $x^1, \ldots, x^n$, принятую в качестве u. При этом L можно считать координатным пространством. Ничто не мешает нам, однако, считать также u элементом координатного пространства, именно тем элементом, который определяется коэффициентами формы (u, x), и писать $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$.

Будем теперь предполагать, что фиксирован элемент $x = \{x^1, \ldots, x^n\}$ из L, а меняется $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$. В таком случае свертка (u, x) есть линейная форма с числовыми аргументами $u_1, \ldots, u_n$. Мы можем принять в качестве x не набор $\{x^1, \ldots, x^n\}$ коэффициентов этой формы, а саму форму. Тем самым элементы $x \in L$ получают точно такое же истолкование по отношению к элементам $u \in L^*$, какое элементы $u \in L^*$ имеют по отношению к элементам $x \in L$. Иначе говоря, если пространство L^* есть сопряженное для L, то L можно рассматривать как сопряженное для L^*.

10. Симметрия взаимоотношений L и L^* уже усматривалась выше при переходе от формул (I), (II) к формулам (I*), (II*) (см. также таблицу, приведенную в п. 6). Наряду с этим следует иметь в виду, что одно из пространств L и L^* (именно L) принято в качестве исходного. Это обстоятельство сказывается на терминологии, о которой говорится в следующем пункте.

11. Преобразование по формуле (I) с матрицей P называется преобразованием по ковариантному закону.

Преобразование по формуле (II) с матрицей Q называется преобразованием по контравариантному закону.

В данном пространстве L координаты каждого вектора преобразуются по контравариантному закону. В сопряженном пространстве координаты векторов преобразуются по ковариантному закону.

В соответствии с этим векторы данного пространства L принято называть контравариантными, а элементы сопряженного пространства — ковариантными векторами.

12. В тензорном исчислении принято в случае ковариантного закона преобразования пользоваться нижними индексами, в случае контравариантного закона преобразования пользоваться верхними индексами. В соответствии с этим мы пометили верхними индексами координаты векторов из L.

Расстановка индексов у элементов матриц P и Q делается с таким расчетом, чтобы индекс суммирования, дважды встречающийся в выражении общего члена суммы, один раз был нижним индексом и один раз — верхним (см. таблицу п. 6). Если же под знаком суммы имеются свободные индексы, по которым нет суммирования, то такие же индексы (соответственно верхние или нижние) ставятся у величины, полученной в результате суммирования. Соблюдение этих правил помогает определять законы преобразования величин, получаемых в результате суммирования. Вместе с тем эти правила заставляют, например, обозначать верхними индексами номера базисных ковариантных векторов.

13. Ниже, в пределах этой главы, мы будем всюду считать, что выбираемые в L и L^* базисы взаимны. Базис в L^*, взаимный с базисом $\{e_i\} \in L$, будем обозначать через $\{e^i\}$ (упрощая прежнее обозначение $e^i(x)$). Произвольный элемент в L^* будет обозначаться через u (или v и т. п.) вместо $u(x)$ (или $v(x)$ и т. п.).

14. Новое определение сопряженного пространства. Понятие сопряженных пространств можно изложить несколько иным способом, так что их взаимное равноправие будет видно сразу из самого определения.

Пусть L и L^* — два линейных пространства; ради простоты изложения мы с самого начала предположим, что они конечномерны и имеют одну и ту же размерность $= n$. Предположим, что с любой парой элементов $x \in L$, $u \in L^*$ сопоставлено число; мы обозначим его через (x, u) и назовем *сверткой* элементов x, u, если имеют место следующие свойства:

1) Распределительное свойство по каждому элементу:

$$(x,\ u_1+u_2)=(x,\ u_1)+(x,\ u_2),$$

$$(x_1+x_2,\ u)=(x_1,\ u)+(x_2,\ u)$$

для любых x, x_1, $x_2 \in L$, u, u_1, $u_2 \in L^*$.

2) Сочетательное свойство относительно умножения на число любого элемента:

$$(\alpha x,\ u)=(x,\ \alpha u)=\alpha(x,\ u).$$

3) Свойство невырожденности: если $a_1, \ldots, a_n$ линейно независимы в L и $(a_1,\ u)=0, \ldots, (a_n,\ u)=0$, то u есть нулевой элемент в L^*. Аналогично, если $b_1, \ldots, b_n$ линейно независимы в L^* и $(x,\ b_1)=0, \ldots, (x,\ b_n)=0$, то x есть нулевой элемент в L.

Пространства L и L^* могут быть оба действительными или оба комплексными; соответственно этим двум случаям все числа, о которых здесь говорится, предполагаются действительными или комплексными.

Обозначим через $e_1, \ldots, e_n$ произвольный базис в L, через $\tilde{e}^1, \ldots, \tilde{e}^n$ — произвольный базис в L^*. Пусть $x = \sum x^i e_i \in L$, $u=\sum u_k \tilde{e}^k \in L^*$. Вследствие свойств 1) и 2) имеем

$$(x,\ u)=\sum a_i^k x^i u_k, \tag{8}$$

где $a_i^k=(e_i,\ \hat{e}^k)$. Таким образом, свертка выражается в виде билинейной формы (8). Легко убедиться, что свойство 3), т. е. условие невырожденности, означает невырожденность билинейной формы (8). Легко убедиться также, что свертки $(x,\ u)$ можно задавать формулой (8) по-разному, произвольно назначая числа a_i^k, лишь бы иметь $\operatorname{Det} a_i^k \neq 0$; условия 1), 2), 3) будут при этом соблюдены.

Пространства L и L^* назовем (*взаимно*) *сопряженными*, если для них задана свертка и если они рассматриваются вместе с данной сверткой. При нашем теперешнем определении мы можем для данного L построить бесконечно много различных сопряженных пространств L^* (точнее говоря, по-разному сопряженных с L). Желая исключить такую неопределенность, мы определим понятие эквивалентности линейных пространств, сопряженных по-разному с данным L.

Обозначим через L_1^* и L_2^* два n-мерных пространства, сопряженных с L. Назовем их *эквивалентными в смысле сопряженности* с L, если между ними существует линейный изоморфизм такой, что

$$(x, u) = (x, u'), \tag{9}$$

где x — произвольный элемент из L, u — произвольный элемент из L_1^*, u' — соответствующий ему по изоморфизму элемент L_2^*.

Легко убедиться, что *все линейные пространства, сопряженные с данным* L, *эквивалентны между собой*. Чтобы доказать высказанное утверждение, достаточно установить, что если для L и L^* дана (произвольная) свертка, то для любого базиса $e_1, \ldots, e_n \in L$ найдется единственный взаимный с ним базис $e^1, \ldots, e^n$ в пространстве L^*. Иначе говоря, $e^1, \ldots, e^n \in L^*$ можно найти (единственным образом) так, что $(e_i, e^k) = \delta_i^k$.

Для доказательства рассмотрим произвольный базис $\tilde{e}^k$, с помощью которого задана свертка формулой (8). Будем искать первый вектор e^1 базиса $e^1, \ldots, e^n$ в виде

$$e^1 = \alpha_1\tilde{e}^1 + \alpha_2\tilde{e}^2 + \ldots + \alpha_n\tilde{e}^n.$$

Мы должны иметь $(e_1, e^1) = 1$, $(e_2, e^1) = 0, \ldots, (e_n, e^1) = 0$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} a_1^1\alpha_1 + a_1^2\alpha_2 + \ldots + a_1^n\alpha_n &= 1, \\ a_2^1\alpha_1 + a_2^2\alpha_2 + \ldots + a_2^n\alpha_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ a_n^1\alpha_1 + a_n^2\alpha_2 + \ldots + a_n^n\alpha_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Система (10) однозначно разрешима, так как $\operatorname{Det} a_i^k \neq 0$. Аналогично, полагая $e^2 = \beta_1\tilde{e}^1 + \ldots + \beta_n\tilde{e}^n$, найдем e^2 из условий $(e_1, e^2) = 0$, $(e_2, e^2) = 1$, $(e_3, e^2) = 0, \ldots, (e_n, e^2) = 0$. Продолжая процесс, найдем все векторы $e^1, \ldots, e^n \in L^*$ такие, что $(e_i, e^k) = \delta_i^k$. Они составят независимую систему. В самом деле, пусть

$$\lambda_1 e^1 + \ldots + \lambda_n e^n = \theta^* \in L^*.$$

Свертывая левую и правую части этого равенства с вектором $e_k \in L$, найдем

$$\left(e_k, \sum \lambda_i e^i\right) = (e_k, \theta^*),$$

или $\lambda_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, поскольку $(e_k, e^i) = \delta_k^i$ и $(e_k, \theta^*) = 0$. Тем самым доказано, что для любого базиса $e_1, \ldots, e_n \in L$ существует взаимный базис $e^1, \ldots, e^n$ в пространстве L^* при любом задании сопряженности между L и L^*.

Докажем единственность. Допустим, что для данного базиса $e_1, \ldots, e_n \in L$ найдутся в пространстве L^* два взаимных базиса: e_1^i и e_2^i. Имеем: $(e_k, e_1^i) = \delta_k^i$ и $(e_k, e_2^i) = \delta_k^i$. Отсюда $(e_k, e_1^i - e_2^i) = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$ и при любом $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда и по условию невырожденности находим $e_1^i - e_2^i = \theta^*$, или $e_2^i = e_1^i$.

Пусть теперь $x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n \in L$, $u = u_1 e^1 + \ldots$ $\ldots + u_n e^n \in L^*$, где e_i и e^k — взаимные базисы. Формула (8) теперь принимает вид

$$(x, u) = x^1 u_1 + \ldots + x^n u_n. \tag{11}$$

Вместе с тем доказана эквивалентность всех пространств, сопряженных с L. В самом деле, пусть L_1^* и L_2^* — два пространства, сопряженных с L, $e_1, \ldots, e_n$ — любой базис в L, $e^1, \ldots, e^n$ — взаимный с ним базис в L_1^*, $(e^1)', \ldots, (e^n)'$ — взаимный с $e_1, \ldots, e_n$ базис в L_2^*. Установим линейный изоморфизм между L_1^* и L_2^*, полагая

$$u' = u_1 (e^1)' + \ldots + u_n (e^n)', \qquad u' \in L_2^*,$$

в качестве соответствующего элемента для произвольного

$$u = u_1 e^1 + \ldots + u_n e^n, \qquad u \in L_1^*.$$

Тогда вследствие (11)

$$(x, u) = (x, u').$$

Теперь ясно, что новое определение сопряженных пространств по существу не отличается от ранее изложенного. Достаточно заметить, что с произвольным элементом $u \in L^*$ сопоставляется линейная форма

$$(x, u) = u_1 x^1 + \ldots + u_n x^n,$$

где $u_1, \ldots, u_n$ — коэффициенты (постоянные координаты данного вектора $u \in L^*$).

§ 2. Тензорное произведение линейных пространств

1. Пусть даны линейные пространства L и $\tilde{L}$, одновременно действительные или комплексные (возможно, бесконечномерные). С помощью векторов из L и $\tilde{L}$ мы построим некоторые новые объекты, множество которых обозначим через T.

Прежде всего, элементами T будем считать всевозможные пары векторов ab, где $a \in L$, $b \in \tilde{L}$. Кроме того, в качестве элементов T будем рассматривать всевозможные наборы таких пар, взятых каждый раз в конечном числе. Никаких других элементов в T уже не будет. Иначе говоря, любой элемент $t \in T$ имеет вид

$$t = \{a_1b_1, \ldots, a_kb_k\}, \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_k \in L$, $b_1, \ldots, b_k \in \tilde{L}$. *Смысл этого равенства заключается только в том, что элемент множества T, обозначенный буквой t, есть набор пар $a_1b_1, \ldots, a_kb_k$.*

Договоримся на первом месте пары всегда писать элемент из L. Если L и $\tilde{L}$ совпадают, то пары векторов, которые составляют элементы множества T, считаются упорядоченными, т. е. порядок записи векторов в паре существен. Таким образом, в случае $L = \tilde{L}$, $a \in L$, $b \in L$, вообще говоря, $ab \neq ba$.

2. Для дальнейшего оказывается более удобным пару ab называть *произведением* a на b, кроме того, вместо слов «набор пар» употреблять слово *сумма*. Соответственно вместо (1) будем писать

$$t = a_1b_1 + \ldots + a_kb_k, \tag{1'}$$

где $a_1, \ldots, a_k \in L$, $b_1, \ldots, b_k \in \tilde{L}$. Заметим, что очень часто пару ab называют формальным произведением a на b, а сумму (1') — формальной суммой. Далее мы увидим, что указанная арифметическая терминология имеет достаточно оснований.

3. Для множества T мы введем три условия эквивалентности, т. е. условия, при которых некоторые элементы T считаются равными. Именно:

1) формальная сумма не зависит от порядка слагаемых;

2) $(a + b)\,c = ac + bc$,

где a, b — любые векторы из L, c — любой вектор из $\tilde{L}$; аналогично $a\,(b + c) = ab + ac$, где $a \in L$, b, $c \in \tilde{L}$;

3) $(\alpha a) b = a (\alpha b)$, где a, b — любые векторы, взятые соответственно из L и $\tilde{L}$, α — любое число (действительное, если L и $\tilde{L}$ — действительные пространства, комплексное, если эти пространства комплексны).

Замечание. Мы не упомянули еще одно условие эквивалентности как само собой разумеющееся (его следовало бы поставить на самом первом месте), именно, что при допустимой замене векторов $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_k$ элемент t подвергается допустимой замене, то есть переходит в равный себе.

4. Условия п. 3, другими словами, означают, что мы считаем допустимыми заменами элемента

$$t = a_1 b_1 + \ldots + a_k b_k \in T \tag{2}$$

а) изменение порядка записи пар $a_1 b_1, \ldots, a_k b_k$ в сумме (2);

б) замену одной пары суммой пар или замену суммы пар одной парой согласно 2) п. 3; например, если $a_1 = a_1' + a_1''$, то пару $a_1 b_1$ в составе t допустимо заменить суммой $a_1' b_1 + a_1'' b_1$;

в) перенос числового сомножителя от одного вектора данной пары к другому вектору той же пары.

Вместе с этим два элемента $t_1, t_2 \in T$ считаются равными в том и только в том случае, когда с помощью конечного числа допустимых замен их можно привести к одному и тому же набору пар элементов из L и $\tilde{L}$.

5. В множестве T мы введем линейные операции.

1. Суммой двух элементов множества T

$$t = a_1 b_1 + \ldots + a_k b_k,$$
$$t' = a_1' b_1' + \ldots + a_m' b_m'$$

назовем элемент этого множества, который представляет собой набор пар элемента t, объединенный с набором пар элемента t':

$$t + t' = a_1 b_1 + \ldots + a_k b_k + a_1' b_1' + \ldots + a_m' b_m'.$$

2) Произведение элемента t на число α определим равенством

$$\alpha t = (\alpha a_1) b_1 + \ldots + (\alpha a_k) b_k.$$

Вследствие п. 4 сумма $t + t'$ и произведение αt инвариантны относительно допустимых замен элементов t и t'.

Докажем, что множество T вместе с такими линейными операциями является линейным пространством.

Прежде всего заметим, что аксиомы 1), 2) и 5) — 8) линейного пространства с очевидностью соблюдаются для T вследствие данного сейчас определения линейных операций и вследствие условий 1) и 3) п. 3. Остается проверить аксиомы 3) и 4).

Чтобы проверить аксиому 3), нужно обнаружить в T нулевой элемент. Покажем, что нулевым элементом в T является пара $\theta\tilde{\theta}$, где θ — нулевой элемент L, $\tilde{\theta}$ — нулевой элемент $\tilde{L}$. Для этого предварительно установим, что каким бы ни был элемент $b \in \tilde{L}$, имеем $\theta\tilde{\theta} = \theta b$ (аналогично $\theta\tilde{\theta} = a\tilde{\theta}$ для любого $a \in L$). В самом деле, согласно условию 3) п. 3

$$\theta\tilde{\theta} = \theta(0 \cdot b) = (0 \cdot \theta) b = \theta b.$$

Отсюда

$$ab + \theta\tilde{\theta} = ab + \theta b = (a + \theta) b = ab.$$

Наконец, если $t = a_1 b_1 + \ldots + a_k b_k$ — любой элемент из T, то

$$t + \theta\tilde{\theta} = a_1 b_1 + \ldots + (a_k b_k + \theta\tilde{\theta}) = a_1 b_1 + \ldots + a_k b_k = t.$$

Тем самым соблюдение третьей аксиомы линейного пространства для T установлено.

Четвертая аксиома проверяется без труда. Именно, для любого $t \in T$ противоположным элементом является $(-1) \cdot t$. Действительно,

$$\begin{aligned} t + (-1) \cdot t = a_1 b_1 + \ldots + a_k b_k + \\ + (-1)(a_1 b_1 + \ldots + a_k b_k) = (a_1 + (-1) a_1) b_1 + \ldots \\ \ldots + (a_k + (-1) a_k) b_k = \theta \cdot b_1 + \ldots + \theta \cdot b_k = \\ = \theta\tilde{\theta} + \ldots + \theta\tilde{\theta} = \theta\tilde{\theta}. \end{aligned}$$

Доказательство нашего утверждения по поводу множества T полностью завершено.

6. Определение. Линейное пространство T с учетом конструкции его элементов в виде сумм произведений элементов из L и $\tilde{L}$ называется *тензорным произведением* пространства L на $\tilde{L}$. Для его обозначения употребляется символическая запись

$$T = L \otimes \tilde{L}.$$

Элементы пространства T, рассматриваемые как суммы произведений элементов из L и $\tilde{L}$, называются *тензорами* над пространствами L и $\tilde{L}$.

7. Наряду с пространствами L и $\tilde{L}$ рассмотрим сопряженные им пространства L^* и $\tilde{L}^*$ и введем еще одну операцию, называемую *сверткой* элементов из T с элементами из L^* и из $\tilde{L}^*$.

Возьмем сначала в качестве элемента T одну пару ab, $a \in L$, $b \in \tilde{L}$. Пусть $u \in \tilde{L}^*$. Свертку пары ab по ее второму (правому) элементу с элементом u (правую свертку) обозначим через (ab, u) и определим равенством

$$(ab, u) = a(b, u). \tag{3}$$

Здесь (b, u) есть свертка элемента $b \in \tilde{L}$ с элементом $u \in \tilde{L}^*$, понимаемая в смысле п. 7 § 1 этой главы. Так как (b, u) — число, то свертка (3) является вектором, коллинеарным a, т. е. вектором из L.

Свертка пары ab по ее первому (левому) элементу с элементом $v \in L^*$ (левая свертка) обозначается и определяется согласно равенству

$$(v, ab) = (v, a)\, b.$$

Это есть вектор из $\tilde{L}$, коллинеарный с вектором b.

Свертку элемента $t = a_1 b_1 + \ldots + a_k b_k \in T$, например правую с элементом $u \in \tilde{L}^*$, определим почленно:

$$(a_1 b_1 + \ldots + a_k b_k, u) = a_1 (b_1, u) + \ldots + a_k (b_k, u).$$

8. *Свертка элемента $t \in T$ с элементом $v \in L^*$ или с элементом $u \in \tilde{L}^*$ инвариантна относительно допустимых замен элемента t.*

Доказательство. Согласно определению свертки и вследствие п. 7 § 1 этой главы свертка распределительна относительно сложений элементов из T, L и $\tilde{L}$; числовые сомножители выносятся за знак свертки. Поэтому при допустимой замене элемента t получается также допустимая замена его свертки с u или v.

Следствие. *Если два элемента $t_1, t_2 \in T$ равны, то свертки t_1 и t_2 по правым элементам их пар с одним и тем же элементом $u \in \tilde{L}^*$ также равны (разумеется, аналогичное утверждение имеет место для сверток по левым элементам).*

§ 3. Базис в тензорном произведении. Координаты тензора

1. Пусть теперь L и $\tilde{L}$ конечномерны; обозначим их размерности соответственно через n и m. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в L, $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_m$ — базис в $\tilde{L}$. Рассмотрим $T = L \otimes \tilde{L}$.

Лемма. *Если*

$$e_1\tilde{a}_1 + e_2\tilde{a}_2 + \ldots + e_n\tilde{a}_n = \theta\tilde{\theta}, \tag{1}$$

где $\tilde{a}_i \in \tilde{L}$, то

$$\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = \ldots = \tilde{a}_n = \tilde{\theta}. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим в L^* базис $e^1, \ldots, e^n$, взаимный с данным базисом в L. Возьмем левую свертку равенства (1) с вектором e^1. На основании п. 7 § 2 мы получим равенство:

$$(e^1, e_1)\tilde{a}_1 + (e^1, e_2)\tilde{a}_2 + \ldots + (e^1, e_n)\tilde{a}_n = \\ = (e^1, \theta)\tilde{\theta} = 0\cdot\tilde{\theta} = \tilde{\theta}.$$

Отсюда

$$1\cdot\tilde{a}_1 + 0\cdot\tilde{a}_2 + \ldots + 0\cdot\tilde{a}_n = \tilde{\theta}.$$

Следовательно, $\tilde{a}_1 = \tilde{\theta}$. Аналогично найдем остальные равенства (2), свертывая (1) с $e^2, \ldots, e^n$. Лемма доказана.

2. Теорема 1. *Всевозможные пары $e_i\tilde{e}_j$ линейно независимы в пространстве T.*

Доказательство. Пусть имеется соотношение

$$\sum_{i,\,j} \alpha_{ij} e_i \tilde{e}_j = \theta\tilde{\theta}, \tag{3}$$

где α_{ij} — некоторые числа. Равенство (3) можно записать в виде

$$\sum_i e_i \left(\sum_j \alpha_{ij}\tilde{e}_j\right) = \theta\tilde{\theta}.$$

Отсюда и из предыдущей леммы следует, что

$$\sum_j \alpha_{ij}\tilde{e}_j = \tilde{\theta} \tag{4}$$

для каждого номера i. А так как $\tilde{e}_j$ — векторы базиса, то из (4) следует, что $\alpha_{ij}=0$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пары $e_i\tilde{e}_j$ образуют базис в пространстве T.*

Доказательство. Пусть $t \in T$; имеем: $t = a_1b_1 + \ldots + a_kb_k$. Разложим векторы $a_1, \ldots, a_k \in L$ по базису $e_1, \ldots, e_n$, а векторы $b_1, \ldots, b_k \in \tilde{L}$ — по базису $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_m$. Тогда после группировки членов получим

$$t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \tau^{ij} e_i \tilde{e}_j, \tag{5}$$

где τ^{ij} — некоторые числовые коэффициенты. Согласно (5) любой элемент из T линейно выражается через пары $e_i\tilde{e}_j$. Отсюда и из теоремы 1 следует теорема 2.

Следствие. *Если L и $\tilde{L}$ имеют размерности n и m, то тензорное произведение $T = L \otimes \tilde{L}$ конечномерно и имеет размерность nm.*

3. Теперь мы специально рассмотрим три случая тензорного произведения двух пространств, когда либо оба пространства совпадают, либо одно из них является сопряженным к другому.

Пусть L — пространство размерности n, L^* — сопряженное ему; пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в L; $e^1, \ldots, e^n$ — взаимный с ним базис в L^*.

1) Тензорное произведение L на L будем обозначать через T_0^2. Согласно п. 2 любой элемент $t \in T_0^2 = L \otimes L$ имеет разложение

$$t = \sum \tau^{ij} e_i e_j. \tag{6}$$

Элементы произведения $T_0^2 = L \otimes L$ называются *двухвалентными контравариантными тензорами над пространством L.*

2) Произведение L^* на L^* обозначим через T_2^0. Элементы этого произведения называются *двухвалентными ковариант-*

ными тензорами над L. Для любого $t \in T_2^0 = L^* \otimes L^*$ имеем

$$t = \sum \tau_{ij} e^i e^j. \tag{7}$$

3) Произведение L на L^* обозначим через T_1^1; его элементы называются *двухвалентными смешанными тензорами над* L. Для любого $t \in T_1^1 = L \otimes L^*$ имеем

$$t = \sum \tau_j^i e_i e^j. \tag{8}$$

Замечание. Элементы самих пространств L и L^*, т. е. контравариантные и ковариантные векторы, называются также одновалентными тензорами (контра- и ковариантными соответственно).

4. Коэффициенты разложений (6), (7), (8) называются *определяющими числами* или *координатами* своих тензоров в базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства L. Они помечаются верхними или нижними индексами в зависимости от структуры тензора (как именно, видно из (6), (7), (8)).

Замечание. Поскольку тензоры определяются координатами, то часто, когда говорят «дан тензор», пишут при этом его координаты, например τ^{ij} (подобно тому, как в аналитической геометрии говорят: дана точка (x, y)).

5. Элементы произвольной квадратной $n \times n$-матрицы можно принять за координаты некоторого тензора в данном базисе. Их заданием в виде таблицы (т. е. соответственно индексам) всегда будет определен некоторый тензор в T_0^2, а также в T_2^0 и в T_1^1. При переходе к новому базису координаты тензоров преобразуются по специальным законам, отвечающим T_0^2, T_2^0 и T_1^1. Найдем эти законы.

6. Для координат тензоров из $T_0^2 = L \otimes L$ имеет место контравариантный закон преобразования по обоим индексам.

Это значит, что если мы в пространстве L перейдем к новому базису

$$e_{i'} = \sum P_{i'}^i e_i, \tag{9}$$

то новые координаты тензора $t \in T_0^2$ будут выражаться через его старые координаты по формулам

$$\tau^{i'j'} = \sum_{i,\ j} \tau^{ij} Q_i^{i'} Q_j^{j'}. \tag{I}$$

Доказательство. Для формул (9) обратными являются

$$e_i = \sum Q_i^{i'} e_{i'}.$$

Отсюда

$$t = \sum \tau^{ij} e_i e_j = \sum_{i,\,j} \Big(\tau^{ij} \sum_{i'} Q_i^{i'} e_{i'} \sum_{j'} Q_j^{j'} e_{j'} \Big) =$$

$$= \sum_{i',j'} \Big(\sum_{i,j} \tau^{ij} Q_i^{i'} Q_j^{j'} \Big) e_{i'} e_{j'}. \qquad (10)$$

С другой стороны,

$$t = \sum \tau^{i'j'} e_{i'} e_{j'}. \qquad (11)$$

Сравнивая (10) и (11), получим (I), что и требовалось.

7. Закон преобразования (I) выведен нами как следствие инвариантности тензоров $t \in T_0^2$ относительно выбора базиса в пространстве; мы воспользовались этой инвариантностью в тот момент, когда сравнивали (10) и (11). Наоборот, инвариантность тензоров $t \in T_0^2$ следует из (I). Подробнее: если в базисе $e_1, \ldots, e_n \in L$ произвольно даны числа τ^{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) и если при переходе к другому базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'} \in L$ по формулам (9) они заменяются числами $\tau^{i'j'}$ согласно (I), то

$$\sum \tau^{i'j'} e_{i'} e_{j'} = \sum \tau^{ij} e_i e_j.$$

Доказательство. Применяя (9) и (I), получим

$$\sum \tau^{i'j'} e_{i'} e_{j'} = \sum \big(\sum \tau^{\alpha\beta} Q_\alpha^{i'} Q_\beta^{j'} \big) \big(\sum P_{i'}^{i} e_i \big) \big(\sum P_{j'}^{j} e_j \big) =$$

$$= \sum \tau^{\alpha\beta} \big(\sum Q_\alpha^{i'} P_{i'}^{i} \big) \big(\sum Q_\beta^{j'} P_{j'}^{j} \big) e_i e_j = \sum \tau^{\alpha\beta} \delta_\alpha^i \delta_\beta^j e_i e_j = \sum \tau^{ij} e_i e_j.$$

8. Для координат тензоров из $T_2^0 = L^* \otimes L^*$ имеет место ковариантный закон преобразования по обоим индексам:

$$\tau_{i'j'} = \sum \tau_{ij} P_{i'}^{i} P_{j'}^{j}. \qquad (II)$$

Для координат тензоров из $T_1^1 = L \otimes L^*$ имеет место контравариантный закон преобразования по верхнему индексу и ковариантный по нижнему:

$$\tau_{j'}^{i'} = \sum \tau_j^i Q_i^{i'} P_{j'}^{j}. \qquad (III)$$

Обе формулы (II) и (III) выводятся, исходя из инвариантности тензоров в T_2^0 и T_1^1 относительно выбора базиса в L, вполне аналогично формуле (I). При этом для вывода формулы (II) нужно вместо (9) использовать известные нам равенства

$$e^{i'} = \sum Q_i^{i'} e^i. \tag{12}$$

Для вывода (III) следует использовать и равенства (9), и равенства (12).

Замечание. В свою очередь инвариантность тензоров в T_2^0 и T_1^1 в том смысле, как это объяснено в п. 7 для T_0^2, следует из (II) и (III).

9. Линейные операции над тензорами в T_0^2, T_2^0 и T_1^1 выражаются в координатах по обычным правилам.

1) При сложении тензоров их координаты складываются: например, если

$$t = \sum \tau^{ij} e_i e_j \in T_0^2, \qquad s = \sum \sigma^{ij} e_i e_j \in T_0^2,$$

то

$$t + s = \sum (\tau^{ij} + \sigma^{ij}) e_i e_j \in T_0^2.$$

Разумеется, сложение тензоров разной структуры не определено. Если бы мы вздумали складывать их координаты, то не получили бы инвариантного результата.

2) При умножении тензора на число все его координаты умножаются на то же число; например, для $t \in T_0^2$

$$\alpha t = \sum \alpha \tau^{ij} e_i e_j.$$

10. Выражение свертки в координатах требует несколько более подробного объяснения. Пусть даны двухвалентный контравариантный тензор $t = \sum \tau^{ij} e_i e_j \in T_0^2$ и ковариантный вектор $u = \sum u_i e^i \in L^*$. Рассмотрим, например, правую свертку t с вектором u. Имеем

$$(t, u) = (\sum \tau^{ij} e_i e_j, \sum u_k e^k) = \sum \tau^{ij} u_k e_i (e_j, e^k) =$$
$$= \sum \tau^{ij} u_k e_i \delta_j^k = \sum (\sum \tau^{ik} u_k) e_i.$$

Таким образом, в результате этой свертки мы получаем некоторый вектор $x = \sum x^i e_i \in L$, координаты которого находятся путем суммирования по второму индексу τ^{ij}:

$$x^i = \sum \tau^{ik} u_k.$$

Аналогично в случае левой свертки

$$(u, t) = \sum (\sum \tau^{kj} u_k) e_j,$$

мы получаем вектор $y=\sum y^i e_i \in L$, координаты которого находятся путем суммирования по первому индексу τ^{ij}:

$$y^j=\sum \tau^{kj} u_k.$$

11. Если $t=\sum \tau_{ij} e^i e^j \in T_2^0$, $x=\sum x^k e_k \in L$, то правая свертка

$$(t, x)=\sum\left(\sum \tau_{ik} x^k\right) e^i.$$

Это есть вектор $u=\sum u_i e^i \in L^*$, т. е. вектор сопряженного к L пространства. Координаты его находятся путем суммирования по второму индексу τ_{ij}:

$$u_i=\sum \tau_{ik} x^k.$$

Левая свертка представляет собой также вектор из L^* и сводится к суммированию по первому индексу τ_{ij}:

$$(x, t)=\sum\left(\sum \tau_{kj} x^k\right) e^j.$$

12. В случае $t=\sum \tau_j^i e_i e^j \in T_1^1$ возможна свертка и с вектором $x=\sum x^k e_k \in L$ и с вектором $u=\sum u_k e^k \in L^*$. Именно:

$$(t, x)=\left(\sum \tau_j^i e_i e^j, \sum x^k e_k\right)=\sum \tau_j^i x^k e_i\left(e^j, e_k\right)=\sum\left(\sum \tau_k^i x^k\right) e_i.$$

Аналогично

$$(t, u)=\left(\sum \tau_j^i e_i e^j, \sum u_k e^k\right)=\sum \tau_j^i u_k\left(e_i, e^k\right) e^j=\sum\left(\sum \tau_j^k u_k\right) e^j.$$

Таким образом, если $x \in L$, то $(t, x) \in L$. Если $u \in L^*$, то $(t, u) \in L^*$.

13. Для $t \in T_1^1$ возможна внутренняя свертка, которая заключается в замене каждой пары $a_i b_i$ в составе $t=a_1 b_1+\ldots$ $\ldots+a_k b_k$ ($a_i \in L$, $b_i \in L^*$) сверткой (a_i, b_i). Это определение не связано с выбором базиса, поэтому внутренняя свертка смешанного тензора t есть инвариантное число, зависящее только от выбора элемента t из пространства T_1^1.

Если обозначить внутреннюю свертку t через (t), то в произвольном базисе имеем

$$(t)=\sum \tau_j^i\left(e_i, e^j\right)=\sum \tau_j^i \delta_i^j=\sum \tau_k^k=\tau_1^1+\tau_2^2+\ldots+\tau_n^n.$$

Отсюда также можно вывести инвариантность внутренней свертки как следствие формулы (III). В самом деле, из (III) имеем

$$\sum_{k'} \tau_{k'}^{k'}=\sum_{i, j} \tau_j^i\left(\sum_{k'} Q_i^{k'} P_{k'}^j\right)=\sum_{i, j} \tau_j^i \delta_i^j=\sum_k \tau_k^k.$$

14. Мы видим, что свертка во всех случаях приводится в координатах к суммированию по одному контравариантному (верхнему) индексу и по одному ковариантному (нижнему) индексу. При этом общее число валентностей, т. е. общее число индексов, которыми помечены координаты тензоров, понижается на две единицы. В тех случаях, когда остается один индекс, результат свертки есть одновалентный тензор (вектор из L или из L^*). Например, свертка $\sum \tau^{kj} u_k = x^j$ оставляет один свободный индекс (верхний) и дает вектор $\sum x^j e_j \in L$. В тех случаях, когда свободных индексов не остается (как в п. 13), получается числовой инвариант. Поэтому числовые инварианты часто называют тензорами нулевой валентности.

§ 4. Тензоры билинейных форм

1. Пусть в линейном n-мерном пространстве L дана инвариантная билинейная форма $a(x, y)$, $x, y \in L$. Если в L задан базис $e_1, \ldots, e_n$, то в этом базисе форма $a(x, y)$ имеет координатное представление:

$$a(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j. \tag{1}$$

Пусть делается переход к новому базису в L:

$$e_{i'} = \sum P^i_{i'} e_i.$$

В новом базисе форма $a(x, y)$ получает другое координатное представление с новыми коэффициентами $a_{i'j'}$. Согласно § 3 гл. IV

$$a_{i'j'} = \sum a_{ij} P^i_{i'} P^j_{j'}.$$

Таким образом, коэффициенты билинейной формы в L преобразуются по ковариантному закону для каждого индекса (см. (II) п. 8 § 3). Поэтому с формой $a(x, y)$ можно сопоставить тензор из T^0_2, именно

$$a = \sum a_{ij} e^i e^j. \tag{2}$$

Он называется тензором данной билинейной формы. Из п. 7 § 3 следует, что тензор a сопоставляется с формой $a(x, y)$ инвариантно (т. е. он один и тот же независимо от выбора базиса в пространстве L).

Обратно, любому тензору (2) из T^0_2 отвечает билинейная форма в L. В самом деле, если сделать левую свертку (2) с вектором $x=\sum x^i e_i \in L$, а затем найденный вектор (из L^*) свернуть с вектором $y=\sum y^i e_i \in L$, то получится правая часть (1). Тем самым с тензором a сопоставляется билинейная форма

$$a(x,\ y)=((x;\ a),\ y)=\sum a_{ij}x^i y^j. \tag{3}$$

Инвариантность такого построения билинейной формы в L по заранее данному тензору в T_2^0 очевидна, поскольку свертка есть инвариант.

2. Чтобы установить аналогичную связь с теорией билинейных форм для тензоров из T_0^2 и T_1^1, нужно рассматривать билинейные формы от двух ковариантных векторных аргументов и билинейные формы, у которых один из векторных аргументов является контравариантным, другой — ковариантным. И те и другие формы определяются как функции с числовыми значениями, линейные по каждому аргументу. Кроме того, должна быть потребована их инвариантность, т. е. независимость их числовых значений от выбора базиса (см. ниже, пп. 3, 4).

3. Билинейная форма $a(u,\ v)$ с двумя ковариантными аргументами $u=\sum u_i e^i \in L^*$, $v=\sum v_i e^i \in L^*$ имеет координатное представление

$$a(u,\ v)=\sum a^{ij}u_i v_j$$

с коэффициентами

$$a^{ij}=a(e^i,\ e^j).$$

Отсюда и из (I*) п. 3 § 1

$$a^{i'j'}=a(e^{i'},\ e^{j'})=\sum a(e^i,\ e^j)\,Q_i^{i'}Q_j^{j'}=\sum a^{ij}Q_i^{i'}Q_j^{j'}.$$

Таким образом, коэффициенты формы $a(u,\ v)$ преобразуются по контравариантному закону для каждого индекса (см. (I) п. 6 § 3). Поэтому с формой $a(u,\ v)$ инвариантно сопоставляется тензор из T_0^2, именно

$$a=\sum a^{ij}e_i e_j.$$

Обратно, любому заранее данному тензору $a \in T_0^2$ отвечает в виде свертки инвариантная билинейная форма

$$a(u,\ v)=((u,\ a),\ v)=\sum a^{ij}u_i v_j.$$

4. Для билинейной формы $a(x, u)$ с двумя разнородными аргументами $x=\sum x^i e_i \in L$, $u=\sum u_i e^i \in L^*$ имеем

$$a(x, u)=\sum a_i^j x^i u_j,$$

где

$$a_i^j=a(e_i, e^j).$$

Отсюда

$$a_{i'}^{j'}=a(e_{i'}, e^{j'})=\sum a(e_i, e^j) P_{i'}^i Q_j^{j'}=\sum a_i^j P_{i'}^i Q_j^{j'}.$$

Таким образом, коэффициенты формы $a(x, u)$ преобразуются по ковариантному закону для нижнего индекса и по контравариантному — для верхнего. Поэтому с формой $a(x, u)$ инвариантно сопоставляется тензор из T_1^1, именно

$$a=\sum a_i^j e^i e_j.$$

Обратно, любому заранее данному тензору $a \in T_1^1$ отвечает билинейная форма

$$a(x, u)=((a, x), u)=\sum a_i^j x^i u_j.$$

5. Заметим, что валентности тензора формы противоположны валентностям ее аргументов. Например, если некоторый аргумент формы является ковариантным, то соответствующий ему индекс тензора этой формы будет контравариантным (верхним).

6. Формулы (2) и (3) п. 1 устанавливают взаимно однозначное соответствие между билинейными формами в L и тензорами в T_2^0. Очевидно, это соответствие является изоморфизмом относительно линейных операций. Таким образом, в смысле линейной алгебры теория тензоров в T_2^0 равносильна теории форм $a(x, y)$ в L. То же самое можно сказать по поводу теории тензоров в T_0^2 и в T_1^1 и теории форм $a(u, v)$ и $a(x, u)$.

Однако построение отдельной теории тензоров (помимо теории форм) необходимо. Во-первых, дело в том, что в рамки теории форм не укладывается операция свертки. Во-вторых, тензоры сопоставляются не только с формами, но и со многими другими объектами алгебры и геометрии (а также механики и физики). Такое сопоставление, прежде всего, позволяет общими методами строить инварианты рассматриваемых объектов (чаще всего в виде сверток). Кроме того, отсюда возникает возможность выражать связи между объектами в виде тензорных уравнений, т. е. в виде равенств между тензорами. Важной особенностью тензорных уравнений является их инвариантность.

7. Именно, пусть имеется, например, уравнение

$$\tau^{ij}=0. \tag{4}$$

Оно означает, что в данном базисе все координаты некоторого тензора из T_0^2 равны нулю. Но тогда координаты этого тензора равны нулю в любом другом базисе. Арифметически это обстоятельство усматривается из формулы (I) п. 6 § 3, но по существу оно непосредственно проистекает из самого определения тензоров из T_0^2 как инвариантных объектов (уравнение (4) выражает инвариантный факт, что тензор $\tau=\sum\tau^{ij}e_ie_j$ есть нулевой элемент в T_0^2). Разумеется, то же самое можно сказать про уравнения вида $\tau_{ij}=0$ и $\tau^i_j=0$.

Вследствие инвариантности тензорных уравнений для доказательства их справедливости достаточно сделать проверку в каком-нибудь одном, по возможности удобном базисе. Это простое соображение будет часто применяться в дальнейшем.

8. Укажем один п р и з н а к, позволяющий распознавать двухвалентные тензоры.

Пусть некоторый объект A определен в любом базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства L координатами a_{ik}, но мы не знаем, как изменяются его координаты при переходе от одного базиса к другому. Имеет место предложение:

Если свертка координат a_{ik} по какому-нибудь индексу с координатами любого контравариантного вектора всегда имеет по оставшемуся свободному индексу ковариантный закон преобразования, то сами координаты a_{ik} преобразуются по ковариантному закону для каждого индекса.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем для свертки по первому индексу. Пусть $x=\sum x^ie_i$ — произвольный контравариантный вектор (т. е. $x\in L$); рассмотрим свертку

$$b_k=\sum a_{ik}x^i.$$

По условию мы можем рассматривать b_k как координаты некоторого вектора $b\in L^*$ (в базисе $e^1, \ldots, e^n$). Возьмем в L еще один, также произвольный вектор $y=\sum y^ke_k$. Тогда

$$(b,\ y)=\sum b_ky^k=\sum a_{ik}x^iy^k \tag{5}$$

есть инвариант. Следовательно, правая часть (5) есть координатное представление инвариантной билинейной формы. Отсюда и вследствие п. 1 наше предложение доказано.

Замечание. На основании доказанного предложения объекту A инвариантно сопоставляется тензор из T_2^0. Соответственно это предложение можно считать признаком ковариантных двухвалентных тензоров.

9. Аналогично, если

$$y^k = \sum a^{ik} u_i$$

является контравариантным вектором при любом выборе ковариантного вектора u_i, то a^{ik} есть двухвалентный контравариантный тензор. Если

$$y^k = \sum a_i^k x^i$$

является контравариантным вектором при любом выборе контравариантного вектора x^i, то a_i^k — смешанный тензор.

Оба утверждения сводятся (подобно предыдущему) к пп. 3, 4.

§ 5. Многовалентные тензоры. Произведение тензоров

1. Поскольку определено тензорное произведение двух пространств, тем самым определено также тензорное произведение пространств, взятых в любом числе. Достаточно перемножать их последовательно в каком-либо порядке. Если даны линейные пространства L_1, L_2, L_3, то произведение $T = (L_1 \otimes L_2) \otimes L_3$ имеет в качестве своих элементов формальные суммы любого конечного числа слагаемых вида $(ab)c$, где $a \in L_1$, $b \in L_2$, $c \in L_3$. Условия эквивалентности и соответственно допустимые замены элементов T получаются сочетанием условий эквивалентности элементов произведения $L_1 \otimes L_2$ на L_3 и произведения L_1 на L_2. Например,

$$((a' + a'')\,b)\,c = (a'b)\,c + (a''b)\,c;$$

$$((\alpha a)\,b)\,c = (a\,(\alpha b))\,c = (ab)\,\alpha c,$$

где α — число. Кроме того, мы дополнительно потребуем условие эквивалентности ассоциативного характера

$$(ab)\,c = a\,(bc).$$

Оно означает тождество $(L_1 \otimes L_2) \otimes L_3 = L_1 \otimes (L_2 \otimes L_3)$ и позволяет писать abc вместо $(ab)c$ или $a(bc)$. Линейные операции в T определены вместе с произведением $L_1 \otimes L_2$ на L_3. Одновременно определена и свертка, левая — с элементами из L_1^*, правая — с элементами из L_3^*. Можно определить также свертку по средним элементам троек с элементом $u \in L_2^*$, полагая

$$(a_1b_1c_1 + \ldots + a_kb_kc_k,\ u) = (b_1,\ u)\, a_1c_1 + \ldots + (b_k,\ u)\, a_kc_k.$$

Эта свертка есть элемент произведения $L_1 \otimes L_3$.

2. Тензорное произведение любого числа пространств определяется по индукции.

3. Пусть дано линейное пространство L. Положим

$$T_q^p = (L \otimes L \otimes \ldots \otimes L) \otimes (L^* \otimes L^* \otimes \ldots \otimes L^*),$$

где имеется p сомножителей L и q сомножителей L^*. Элементы из T_q^p будем называть тензорами над пространством L, контравариантными p раз и ковариантными q раз (или имеющими p контравариантных и q ковариантных валентностей). Для единообразия обозначим также L через T_0^1 и L^* через T_1^0, что согласуется с условием, по которому элементы из L и L^* называются одновалентными тензорами.

4. Поскольку каждое пространство T_q^p является линейным, то для тензоров в каждом из этих пространств определены линейные операции. Сложение тензоров из разных пространств $T_{q_1}^{p_1}$ и $T_{q_2}^{p_2}$ мы не определяем.

5. Помимо линейных операций над тензорами в каждом T_q^p, мы определим произведение тензоров, взятых из каких угодно, хотя бы различных пространств $T_{q_1}^{p_1}$ и $T_{q_2}^{p_2}$.

Пусть $r \in T_{q_1}^{p_1}$, $s \in T_{q_2}^{p_2}$. *Произведением* r на s назовем упорядоченную пару rs, понимаемую как элемент тензорного произведения $T_{q_1}^{p_1} \otimes T_{q_2}^{p_2}$. Вообще говоря, $rs \neq sr$. В согласии с п. 1 имеем для любых r, s, t

$$(rs)t = r(st).$$

Соответственно получаем произведение трех тензоров: $rst = (rs)t = r(st)$. Вместе с тем определено произведение тензоров для любого числа сомножителей.

6. Допустим, что r и s могут быть представлены в одночленном виде, т. е. в виде произведения элементов из L и L^*:

$$r = a_1 \ldots a_{p_1} b_1 \ldots b_{q_1}, \qquad s = \tilde{a}_1 \ldots \tilde{a}_{p_2} \tilde{b}_1 \ldots \tilde{b}_{q_2},$$

где

$$a_1, \ldots, a_{p_1}, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{p_2} \in L, \; b_1, \ldots, b_{q_1}, \tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_{q_2} \in L^*.$$

Тогда

$$rs = a_1 \ldots a_{p_1} b_1 \ldots b_{q_1} \tilde{a}_1 \ldots \tilde{a}_{p_2} \tilde{b}_1 \ldots \tilde{b}_{q_2}.$$

Здесь порядок записи сомножителей из одного пространства (L или L^*) существен. Однако учитывать здесь взаимное расположение каких-нибудь двух элементов из разных пространств не имеет смысла, поскольку такие элементы различаются сами собой. Поэтому в любом произведении элементов из L и L^* мы всегда будем выписывать сначала все элементы из L, потом все элементы из L^*, сохраняя заданный порядок элементов и в том и в другом случае. Таким образом,

$$rs = a_1 \ldots a_{p_1} \tilde{a}_1 \ldots \tilde{a}_{p_2} b_1 \ldots b_{q_1} \tilde{b}_1 \ldots \tilde{b}_{q_2}.$$

7. Положим $a = a_1 \ldots a_{p_1}$, считая, что $a_1, \ldots, a_{p_1}$ могут быть какими угодно элементами из L. Если $p_1 = 0$, то условимся считать $a = 1$. Аналогично будем понимать $\tilde{a}$, b и $\tilde{b}$. Тогда произвольные тензоры r и s ($r \in T_{q_1}^{p_1}$, $s \in T_{q_2}^{p_2}$) можно записать символически в виде:

$$r = \sum ab, \qquad s = \sum \tilde{a}\tilde{b}.$$

На основании изложенного в п. 1, произведение rs можно получить путем почленного умножения первой из этих сумм на вторую. Учитывая п. 6, имеем

$$rs = \sum a\tilde{a}b\tilde{b}.$$

Отсюда ясно, что $rs \in T_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}$.

8. Пусть $t \in T_q^p$, причем $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$. Аналогично предыдущему положим $a = a_1 \ldots a_p$, $b = b_1 \ldots b_q$,

$$t = \sum ab.$$

Выберем среди $1, 2, \ldots, p$ некоторый номер l и среди $1, 2, \ldots, q$ — номер m. Обозначим через a' произведение всех элементов $a_1, \ldots, a_p$, за исключением a_l, через b' — произведение всех элементов $b_1, \ldots, b_q$, за исключением b_m. Назовем внутренней сверткой тензора t по l-м элементам L и по m-м элементам L^* объект

$$(t)_m^l = \sum (a_l,\ b_m)\, a'b'.$$

Здесь $(a_l,\ b_m)$ — свертка элемента $a_l \in L$ с элементом $b_m \in L^*$, т. е. число (свое для каждого слагаемого суммы). Таким образом, свертка $(t)_m^l$ есть тензор из T_{q-1}^{p-1}. Если $p-1 \geqslant 1$ и $q-1 \geqslant 1$, то к тензору $(t)_m^l$ можно в свою очередь применить операцию свертки; мы получим тензор из T_{q-2}^{p-2}. Разумеется, обе операции можно сделать сразу; например,

$$(t)_{12}^{12} = ((t)_1^1)_2^2 = \sum (a_1,\ b_1)(a_2,\ b_2)\, a_3 \ldots a_p b_3 \ldots b_q.$$

Если $p = q$, то можно исчерпать все валентности тензора t и получить, как говорят, его полную свертку (число).

9. Свертки двух тензоров, которые мы рассматривали выше, всегда можно свести к внутренней свертке одного тензора. Для этого достаточно данные тензоры перемножить и сделать внутреннюю свертку их произведения. Например, свертка элемента $x \in L$ с элементом $u \in L^*$ есть внутренняя свертка произведения xu; правая свертка тензора $t \in T_0^2$ с элементом $u \in L^*$ есть $(tu)_1^2$.

10. В заключение этого параграфа мы должны сделать ряд весьма существенных замечаний по поводу операций над тензорами. Прежде всего, вследствие сказанного в п. 1, линейные операции в T_q^p инвариантны относительно допустимых замен элементов в T_q^p. Произведение $rs \in T_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}$, $r \in T_{q_1}^{p_1}$, $s \in T_{q_2}^{p_2}$, инвариантно относительно допустимых замен элементов r и s в $T_{q_1}^{p_1}$ и $T_{q_2}^{p_2}$, т. е. при таких преобразованиях оно само получает также допустимую замену в $T_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}$. Без этих свойств определение линейных операций над тензорами и произведения тензоров было бы бессмысленным.

11. Из сказанного в п. 1 этого параграфа и в п. 8 § 2 следует, что при допустимой замене тензора t в T_q^p свертка $(t)_m^l$ испытывает также допустимую замену в T_{q-1}^{p-1}. Отсюда имеем: если $t_2 = t_1$, то $(t_2)_m^l = (t_1)_m^l$.

Доказательство. Равенство $t_2 = t_1$ означает, что с помощью допустимых замен тензоров t_2 и t_1 их можно привести к одному и тому же набору t произведений элементов из L и L^*. Но тогда $(t_1)^l_m$ и $(t_2)^l_m$ с помощью допустимых замен сведутся к $(t)^l_m$.

12. В наших определениях мы нигде не использовали базисов. Поэтому линейные операции над тензорами, а также операции перемножения тензоров и внутренней свертки дают результаты, инвариантные в смысле независимости от выбора базиса.

В частности, полная свертка тензора есть числовой инвариант.

§ 6. Координаты многовалентных тензоров

1. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в L, $e^1, \ldots, e^n$ — взаимный с ним базис в L^*. Из теоремы 2 § 3 (по индукции) следует, что всевозможные произведения вида $e_{i_1} \ldots e_{i_p} e^{j_1} \ldots e^{j_q}$ составляют базис в T^p_q.

Таким образом, для любого $t \in T^p_q$ имеет место разложение

$$t = \sum \tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} e_{i_1} \ldots e_{i_p} e^{j_1} \ldots e^{j_q}.$$

Числа $\tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ определяют тензор t и называются его координатами в базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства L. В данном базисе они могут задаваться произвольно, т. е. как бы ни взять числа $\tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$, по ним всегда будет определен некоторый тензор. При этом часто пишут: $t = \left\{\tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\right\}$; говорят также: дан тензор $\tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$. Следует иметь в виду, однако, что фактическое задание какого-нибудь конкретного тензора, хотя бы только трехвалентного, требует довольно сложной информации в виде таблиц, поскольку численные значения координат должны быть указаны для каждой комбинации индексов.

2. При переходе к новому базису $\tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ преобразуются по контравариантному закону для каждого верхнего индекса и по ковариантному закону для каждого нижнего индекса. Именно:

$$\tau^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = \sum \tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} Q^{i'_1}_{i_1} \ldots Q^{i'_p}_{i_p} P^{j_1}_{j'_1} \ldots P^{j_q}_{j'_q}, \qquad (*)$$

где суммирование идет по нештрихованным индексам.

Доказательство. Согласно (I), (I*) § 1

$$e_{i'} = \sum P^i_{i'} e_i, \qquad e^{i'} = \sum Q^{i'}_i e^i.$$

Для этих формул обратными являются

$$e_i = \sum Q^{i'}_i e_{i'}, \qquad e^i = \sum P^i_{i'} e^{i'}.$$

Отсюда

$$t = \sum \tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} e_{i_1} \ldots e_{i_p} e^{j_1} \ldots e^{j_q} =$$
$$= \sum \left(\sum \tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} Q^{i'_1}_{i_1} \ldots Q^{i'_p}_{i_p} P^{j_1}_{j'_1} \ldots P^{j_q}_{j'_q} \right) e_{i'_1} \ldots e_{i'_p} e^{j'_1} \ldots e^{j'_q}. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$t = \sum \tau^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} e_{i'_1} \ldots e_{i'_p} e^{j'_1} \ldots e^{j'_q}. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получим (*), что и требовалось.

3. Закон преобразования (*) выведен нами как следствие инвариантности тензоров $t \in T^p_q$ (мы воспользовались инвариантностью t, когда сравнивали (1) и (2)). Наоборот, инвариантность тензоров $t \in T^p_q$ следует из (*); именно, вследствие (*)

$$\sum \tau^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} e_{i'_1} \ldots e_{i'_p} e^{j'_1} \ldots e^{j'_q} = \sum \tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} e_{i_1} \ldots e_{i_p} e^{j_1} \ldots e^{j_q}.$$

Выводить это равенство из (*) мы не будем, отсылая читателя к п. 7 § 3, где сущность дела показана в частном случае.

4. Линейные операции над тензорами, взятыми в каком-нибудь T^p_q, выражаются в координатах по обычным правилам: при сложении тензоров их координаты складываются, при умножении тензора на число — умножаются на то же число.

5. При умножении тензора $r \in T^{p_1}_{q_1}$ на тензор $s \in T^{p_2}_{q_2}$ каждая координата тензора r умножается на каждую координату тензора s и все такие произведения являются координатами тензора $rs \in T^{p_1+p_2}_{q_1+q_2}$. Например, если $r=\sum r_i e^i$, $s=\sum s_j e^j$, $r, s \in T^0_1$, то $rs=\sum r_i s_j e^i e^j \in T^0_2$; полагая $rs=t=\sum t_{ij}e^i e^j$, получим $t_{ij}=r_i s_j$.

Замечание. Вообще говоря, $rs \neq sr$. Неравенство rs и sr легко усмотреть также в координатах. В самом деле, полагая $sr=\tilde{t}=\sum \tilde{t}_{ij}e^i e^j$, получим $\tilde{t}=\sum s_j r_i e^j e^i=\sum s_i r_j e^i e^j$. Отсюда $\tilde{t}_{ij}=s_i r_j$ и $\tilde{t}_{ij} \neq t_{ij}$.

6. Координаты свертки $(t)^l_m$ получаются из координат тензора t путем суммирования по одному верхнему и одному нижнему индексу, причем верхний индекс занимает место с номером l, а нижний — с номером m. Сущность дела здесь лучше всего пояснить на конкретном примере. Пусть

$$t=\sum a^{ij}_{\alpha\beta}e_i e_j e^\alpha e^\beta.$$

Тогда, например,

$$(t)^1_2=\sum (e_i,\ e^\beta)\, a^{ij}_{k\beta}e_i e^k=\sum \delta^\beta_i a^{ij}_{k\beta}e_j e^k=\sum_{j,\,k}\left(\sum_\beta a^{\beta j}_{k\beta}\right) e_j e^k.$$

Таким образом, координатами (t^1_2) являются суммы вида $\sum\limits_\beta a^{\beta j}_{k\beta}$, где суммирование идет по первому верхнему и второму нижнему индексам.

§ 7. Полилинейные формы и их тензоры

1. Пусть дана инвариантная числовая функция $a(x_1, \ldots, x_q, u^1, \ldots, u^p)$ от векторных аргументов $x_1, \ldots, x_q \in L$, $u^1, \ldots, u^p \in L^*$. Такая функция называется полилинейной формой, если она линейна по каждому своему аргументу.

2. Пусть в пространстве L выбран базис $e_1, \ldots, e_n$, а в пространстве L^* — взаимный с ним базис $e^1, \ldots, e^n$. Тогда каждый контравариантный аргумент $x_k \in L$ данной формы может быть разложен по базису $e_1, \ldots, e_n$:

$$x_k=\sum x^i_k e_i=x^1_k e_1+\ldots+x^n_k e_n.$$

Аналогично каждый ковариантный аргумент разлагается по $e^1, \ldots, e^n$:

$$u^k=\sum u^k_i e^i=u^k_1 e^1+\ldots+u^k_n e^n.$$

Отсюда

$$a(x_1, \ldots, x_q, u^1, \ldots, u^p) = \\ = a\left(\sum x_1^{j_1} e_{j_1}, \ldots, \sum x_q^{j_q} e_{j_q}, \sum u_{i_1}^1 e^{i_1}, \ldots, \sum u_{i_p}^p e^{i_p}\right).$$

Тем самым вследствие линейности формы получается ее координатное представление

$$a(x_1, \ldots, x_q, u^1, \ldots, u^p) = \sum a_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} x_1^{j_1} \ldots x_q^{j_q} \cdot u_{i_1}^1 \ldots u_{i_p}^p, \quad (1)$$

где

$$a_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} = a(e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}, e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}) \quad (2)$$

— коэффициенты правой части (1). Согласно (2) они представляют собой значения формы на базисных векторах.

3. При переходе к новому базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ в L имеем

$$e_{j'_k} = \sum P_{j'_k}^{j_k} e_{j_k}. \quad (3)$$

Соответственно в L^*

$$e^{i'_k} = \sum Q_{i_k}^{i'_k} e^{i_k}. \quad (4)$$

В новом базисе координатное представление формы будет иметь новые коэффициенты. Вследствие инвариантности формы они также являются ее значениями на базисных векторах (разумеется, новых). Таким образом,

$$a_{j'_1 \ldots j'_q}^{i'_1 \ldots i'_p} = a(e_{j'_1}, \ldots, e_{j'_q}, e^{i'_1}, \ldots, e^{i'_p}). \quad (5)$$

Из (5) с учетом (2), (3) и (4) найдем

$$a_{j'_1 \ldots j'_q}^{i'_1 \ldots i'_p} = \sum a_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} Q_{i_1}^{i'_1} \ldots Q_{i_p}^{i'_p} P_{j'_1}^{j_1} \ldots P_{j'_q}^{j_q}, \quad (6)$$

где справа суммирование идет по нештрихованным индексам.

Мы видим, что закон (6) преобразования коэффициентов инвариантной полилинейной формы $a(x_1, \ldots, x_q, u^1, \ldots, u^p)$ совпадает с законом (*) § 6 преобразования координат тензора в T_q^p. Следовательно, с каждой формой $a(x_1, \ldots, x_q, u^1, \ldots, u^p)$ инвариантно сопоставляется тензор в T_q^p:

$$a = \sum a_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \ldots e_{i_p} e^{j_1} \ldots e^{j_q}, \quad (7)$$

он называется *тензором данной формы*.

Обратно, каждому тензору (7) отвечает инвариантная полилинейная форма (1). Заметим, что эта форма представляет собой полную свертку произведения $ax_1\ldots x_q u^1\ldots u^p$.

§ 8. Симметрирование и альтернирование. Косые формы

1. Рассмотрим в базисе $e_1, \ldots, e_n \in L$ полилинейную форму

$$a(x, y, z, \ldots, t) = \sum a_{ijk\ldots s} x^i y^j z^k_{\ldots} t^s \qquad (1)$$

и соответствующий ей (ковариантный) тензор $a_{ijk\ldots s}$. Форма (1) называется *симметричной по данной паре аргументов*, если их перестановка не меняет значения формы. Например, $a(x, y, z, \ldots, t)$ симметрична по первому и третьему аргументам, если $a(x, y, z, \ldots, t) = a(z, y, x, \ldots, t)$ при любых $x, y, z, \ldots, t \in L$.

Симметрия формы по данной паре аргументов влечет симметрию ее тензора по соответствующей паре индексов; в нашем примере имеем симметрию тензора по первому и третьему индексам: $a_{ijk\ldots s} = a_{kji\ldots s}$. В самом деле,

$$a_{ijk\ldots s} = a(e_i, e_j, e_k, \ldots, e_s) = a(e_k, e_j, e_i, \ldots, e_s) = a_{kji\ldots s}.$$

Обратно, если, например, $a_{ijk\ldots s} = a_{kji\ldots s}$, то

$$a(x, y, z, \ldots, t) = \sum a_{ijk\ldots s} x^i y^j z^k_{\ldots} t^s = \sum a_{kji\ldots s} x^i y^j z^k \ldots t^s = \\ = \sum a_{ijk\ldots s} z^i y^j x^k \ldots t^s = a(z, y, x, \ldots, t).$$

Полилинейная форма называется *симметричной*, если она симметрична по каждой паре аргументов; симметричной форме соответствует симметричный тензор.

2. Форма (1) называется *кососимметричной по данной паре аргументов*, если их перестановка меняет знак формы. Например, $a(x, y, z, \ldots, t)$ кососимметрична по первому и третьему аргументам, если $a(x, y, z, \ldots, t) = -a(z, y, x, \ldots, t)$ при любых $x, y, z, \ldots, t$; тензор такой формы кососимметричен по первому и третьему индексам, т. е. $a_{ijk\ldots s} = -a_{kji\ldots s}$.

Полилинейная форма называется *кососимметричной* или *косой*, если она кососимметрична по каждой паре аргументов; кососимметричной форме соответствует кососимметричный тензор.

Косая форма не меняет своего числового значения при любой четной перестановке ее аргументов. При любой нечетной перестановке аргументов косая форма умножается на минус единицу.

3. Симметрия или косая симметрия формы от ковариантных аргументов и соответственно контравариантного тензора определяется в полной аналогии с предыдущим. В случае смешанного тензора свойства симметрии или косой симметрии могут иметь место для нижних индексов или для верхних индексов. Но для пары индексов, из которых один нижний, другой верхний, эти свойства не инвариантны. Например, для тензора a_i^k в некотором базисе возможно равенство $a_i^k = a_k^i$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$; однако при переходе к другому базису оно, вообще говоря, нарушится.

4. Если $a(x, y, z, \ldots, t)$ — произвольная полилинейная форма, то с ней по определенному стандарту может быть сопоставлена симметричная форма от тех же аргументов. Именно:

$$(a(x, y, z, \ldots, t)) = \frac{1}{m!} \sum a(x, y, z, \ldots, t),$$

где сумма справа берется по всем перестановкам символов $x, y, z, \ldots, t$; m — число этих символов (число аргументов). Эта операция называется *симметрированием* и обозначается круглыми скобками. В частных случаях $m = 2$ и $m = 3$ имеем

$$(a(x, y)) = \frac{1}{2!} \{a(x, y) + a(y, x)\},$$

$$(a(x, y, z)) = \frac{1}{3!} \{a(x, y, z) + a(y, z, x) + a(z, x, y) + a(y, x, z) + a(x, z, y) + a(z, y, x)\}.$$

Симметрированию формы соответствует симметрирование ее тензора; например:

$$a_{(ij)} = \frac{1}{2!} \{a_{ij} + a_{ji}\},$$

$$a_{(ijk)} = \frac{1}{3!} \{a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} + a_{jik} + a_{ikj} + a_{kji}\}.$$

Если сама форма a симметрична, то $(a) = a$.

5. С симметрированием тензора полилинейной формы приходится, например, иметь дело в тех случаях, когда аргументы этой формы отождествляются. Именно, если

$$a(x, y) = \sum a_{ik} x^i y^k$$

— билинейная (вообще говоря, не симметричная) форма, и мы строим квадратичную форму $a(x, x)$, то происходит приведение подобных членов:

$$a_{ik}x^i x^k + a_{ki}x^k x^i = (a_{ik} + a_{ki})\, x^i x^k = 2a_{(ik)}x^i x^k.$$

Коэффициентами полученной квадратичной формы называются числа $a_{(ik)}$; они составляют ее (симметричную) матрицу. Полярной для $a(x, x)$ является форма $(a(x, y))$. Аналогично $a_{(ijk)}$ называются коэффициентами кубичной формы $a(x, x, x)$, которая получается путем отождествления аргументов трилинейной формы $a(x, y, z)$.

6. *Операция альтернирования* заключается в том, что с произвольной полилинейной формой $a(x, y, z, \ldots, t)$ по определенному стандарту сопоставляется кососимметричная (косая) форма от тех же аргументов. Она обозначается квадратными скобками и определяется равенством

$$[a(x, y, z, \ldots, t)] = \frac{1}{m!}\left\{\sum\nolimits_1 a(x, y, z, \ldots, t) - \sum\nolimits_2 a(x, y, z, \ldots, t)\right\},$$

где первая сумма берется по всем четным перестановкам символов $x, y, z, \ldots, t$, вторая — по всем нечетным. Например:

$$[a(x, y)] = \frac{1}{2!}\{a(x, y) - a(y, x)\},$$

$$[a(x, y, z)] = \frac{1}{3!}\{a(x, y, z) + a(y, z, x) + a(z, x, y) - a(y, x, z) - a(x, z, y) - a(z, y, x)\}.$$

Соответственно имеем операцию альтернирования тензора:

$$a_{[ij]} = \frac{1}{2!}(a_{ij} - a_{ji}),$$

$$a_{[ijk]} = \frac{1}{3!}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} - a_{jik} - a_{ikj} - a_{kji}).$$

Если форма a косая (кососимметрична по всем аргументам), то $[a] = a$.

7. Отметим два простых свойства множества косых форм:

1) *При отождествлении хотя бы двух аргументов косая форма обращается в нуль.*

В самом деле, пусть, например, совпадают первые два аргумента косой формы; тогда

$$a(y, y, z, \ldots, t) = -a(y, y, z, \ldots, t).$$

Следовательно, $2a(y, y, z, \ldots, t) = 0$.

2) *Если число аргументов косой формы превышает размерность пространства, то форма тождественно равна нулю.*

В самом деле, в этом случае аргументы связаны линейной зависимостью и, следовательно, один из них линейно выражается через остальные. Пусть, например, $x = \alpha y + \beta z + \ldots + \lambda t$. Тогда

$$a(x, y, z, \ldots, t) = \\ = \alpha a(y, y, z, \ldots, t) + \beta a(z, y, z, \ldots, t) + \ldots + \lambda a(t, y, z, \ldots, t),$$

и вследствие первого свойства $a(y, y, z, \ldots, t) = 0, \ldots$ $\ldots, a(t, y, z, \ldots, t) = 0$. Отсюда $a(x, y, z, \ldots, t) = 0$.

8. Рассмотрим косые формы, у которых число аргументов равно размерности пространства.

Пусть $a(x, y, \ldots, t)$ — произвольная косая форма от n аргументов $x, y, \ldots, t$, принадлежащих n-мерному пространству L. Зафиксируем в L произвольный базис $e_1, \ldots, e_n$ и разложим по нему аргументы формы. Согласно п. 2 § 7 имеем

$$a(x, y, \ldots, t) = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x^{i_1} y^{i_2} \ldots t^{i_n}, \tag{2}$$

где

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = a(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}).$$

Из определения косой формы и свойства 1) предыдущего пункта

$$a(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) = \delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot a(e_1, e_2, \ldots, e_n),$$

то есть

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1\,2 \ldots n}. \tag{3}$$

Подставив (3) в (2), мы видим, что в данном базисе рассматриваемую форму можно представить в виде

$$a(x, y, \ldots, t) = a_{1\,2 \ldots n} \cdot \Delta, \tag{4}$$

где Δ — определитель, составленный из координат аргументов:

$$\Delta = \sum \delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} x^{i_1} y^{i_2} \ldots t^{i_n} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & \ldots & x^n \\ y^1 & y^2 & \ldots & y^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t^1 & t^2 & \ldots & t^n \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Коэффициент $a_{12\ldots n}$ будем называть *основным коэффициентом* косой формы (2). Все остальные ее коэффициенты равны либо нулю, либо $\pm a_{12\ldots n}$ (в соответствии с формулой (3)).

Если $a_{12\ldots n} = 0$, то косая форма $a(x, y, \ldots, t)$ равна нулю тождественно.

Если $a_{12\ldots n} \neq 0$, то $a(x, y, \ldots, t)$ отлична от нуля, когда аргументы линейно независимы.

Из формул (4) и (5) следует, что с точностью до числового множителя в пространстве L существует лишь одна косая форма от n аргументов.

В самом деле, если данная форма $a(x, y, \ldots, t)$ не равна нулю тождественно, $b(x, y, \ldots, t)$ — любая другая косая форма от n аргументов, то

$$b(x, y, \ldots, t) = b_{12\ldots n} \cdot \Delta = \beta \cdot a(x, y, \ldots, t),$$

где

$$\beta = \frac{b_{12\ldots n}}{a_{12\ldots n}}.$$

Заметим, что все рассуждения этого пункта проведены в данном базисе, использована лишь косая симметрия форм, но не использована их инвариантность. Этим мы воспользуемся в следующей главе при рассмотрении кососимметричных полилинейных функций, числовое значение которых не инвариантно по отношению к смене базиса.

9. Более детальному изучению косых форм и кососимметричных тензоров специально посвящена десятая глава.

§ 9. Второй вариант изложения понятия тензорного произведения двух линейных пространств

1. В начале этой главы, в § 2 мы определили тензорное произведение $T = L \otimes \tilde{L}$ как множество, элементами которого являются любые конечные наборы пар, составленных элементами из L и $\tilde{L}$. Таким образом, если в качестве элементов L

и $\tilde{L}$ выбраны конкретные объекты, то элементы $L \otimes \tilde{L}$ также вполне конкретны (наборы пар этих объектов). В конструкцию $L \otimes \tilde{L}$ нам пришлось включить описание допустимых замен и линейных операций для элементов множества $L \otimes \tilde{L}$, чтобы сделать его линейным пространством. Поскольку нам пришлось конструировать линейное пространство $L \otimes \tilde{L}$, то изложение понятия тензорного произведения выглядело довольно сложным.

Мы изложим сейчас определение тензорного произведения $L \otimes \tilde{L}$ снова, совершенно независимо от предыдущего. Оно будет более экономно в том отношении, что в качестве $L \otimes \tilde{L}$ будет заранее взято некоторое линейное пространство T (смысл равенства $T = L \otimes \tilde{L}$ будет заключаться в установлении лишь некоторых взаимоотношений между элементами L, $\tilde{L}$ и T). К сожалению, это новое определение будет обладать своими недостатками. Дело в том, что в новой конструкции тензорного произведения $L \otimes \tilde{L}$ останется значительный произвол (в отличие от старой конструкции, где элементы $L \otimes \tilde{L}$ вполне определены элементами L и $\tilde{L}$). Поэтому первоначально далее определяется по данным L и $\tilde{L}$ не одно тензорное произведение $L \otimes \tilde{L}$, а множество разных. Но затем мы определим некоторое естественное понятие изоморфизма этих тензорных произведений, в силу которого они окажутся изоморфными (эквивалентными) друг другу, а также тензорному произведению L на $\tilde{L}$ в смысле нашей старой конструкции § 2. Конечно, чтобы изложить эти вещи, придется также потратить известный труд; в общем итоге экономии изложения по сравнению с первоначальным вариантом, пожалуй, не будет.

2. Мы все-таки даем этот новый вариант изложения понятия тензорного произведения, имея в виду, насколько возможно, помочь читателю уяснить себе следующий вопрос.

Пусть сказано, что линейное пространство T является тензорным произведением линейного пространства L на линейное пространство $\tilde{L}$. Ограничимся сейчас конечномерным случаем. Тогда размерность T равна произведению размерностей L и $\tilde{L}$. Но, разумеется, одного лишь этого соотношения размерностей недостаточно, чтобы охарактеризовать T как тензорное произведение $L \otimes \tilde{L}$. Дело в том, что в конкретных случаях конструкцию тензорного произведения, описанную в § 2, мы можем не усмотреть. Более того, все три пространства L, $\tilde{L}$ и T могут быть даны с точностью до линейных изоморфизмов, а тогда формальные суммы, описанные в § 2, заменятся элементами совсем другой природы. Поэтому ответ на вопрос, что значит, что T является произведением $L \otimes \tilde{L}$, в такой общей ситуации на основе § 2 по существу нельзя и дать. Для этого требуется само определение тензорного произведения высказать в более общей форме, что и будет дальше сделано.

3. Пусть даны линейные пространства L и $\tilde{L}$ размерностей n и m соответственно. Пусть дано также линейное пространство T, размерность которого равна произведению nm. Все пространства L, $\tilde{L}$ и T предполагаются одновременно действительными или одновременно комплексными.

Пусть далее дано некоторое отображение f пары пространств L, $\tilde{L}$ в пространство T. Это значит, что с произвольной парой элементов a, $\tilde{a}$, где $a \in L$, $\tilde{a} \in \tilde{L}$, сопоставлен элемент $t \in T$. Будем для простоты писать

$$t = a\tilde{a}, \tag{1}$$

отождествляя тем самым пару $a\tilde{a}$ с ее образом $t = f(a, \tilde{a})$ в пространстве T. Условимся и в дальнейшем на первом месте пары писать элемент пространства L; если $\tilde{L}$ совпадает с L, то пару в правой части равенства (1) будем считать упорядоченной; таким образом, вообще говоря, $a\tilde{a} \neq \tilde{a}a$, то есть элементы, которые в пространстве T отвечают в силу отображения f парам $a\tilde{a}$ и $\tilde{a}a$, не обязаны совпадать.

Предположим, что имеют место следующие свойства отображения f.

1. Распределительное свойство относительно каждого элемента пары:

$$(a + b)\tilde{a} = a\tilde{a} + b\tilde{a}, \tag{2}$$

$$a(\tilde{a} + \tilde{b}) = a\tilde{a} + a\tilde{b} \tag{3}$$

для любых $a, b \in L$, $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{L}$.

2. Сочетательное свойство:

$$(\alpha a)\tilde{a}=a(\alpha\tilde{a})=\alpha(a\tilde{a}) \tag{4}$$

для любых $a \in L$, $\tilde{a} \in L$ и для любого числа α (действительного или комплексного в зависимости от того, действительны или комплексны пространства L, $\tilde{L}$, T).

В силу свойств (2), (3), (4) вместо слова *пара* можно с достаточным основанием употреблять слово *произведение*. Соответственно этому равенство (1) следует читать так: элемент t пространства T есть произведение элемента a из L на элемент $\tilde{a}$ из $\tilde{L}$.

Замечание. Сейчас равенства (2), (3), (4), в отличие от сходных равенств § 2, выражают свойства отображения f, а не условия допустимых замен в T. Дело в том, что допустимые замены уже заданы в T заранее, одновременно с определением T в качестве линейного пространства.

3. Свойство невырожденности отображения f: если элементы $a_1, \ldots, a_n$ линейно независимы в L, элементы $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m$ линейно независимы в $\tilde{L}$, то система $a_i\tilde{a}_k$ ($i=1, 2, \ldots, n$; $k=1, 2, \ldots, m$) их попарных произведений линейно независима в T.

Согласно предыдущему некоторые элементы пространства T являются произведениями элементов пространств L и $\tilde{L}$. Например, вследствие (4) нулевой элемент в T является произведением нулевого элемента L на любой элемент $\tilde{L}$, или любого элемента L на нулевой элемент $\tilde{L}$. Однако не каждый элемент T есть произведение какого-нибудь элемента L на какой-нибудь элемент $\tilde{L}$. Вместе с тем легко доказать следующее утверждение: *каждый элемент t является линейной комбинацией произведений элементов из L и $\tilde{L}$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в L, $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_m$ — базис в $\tilde{L}$. Тогда вследствие условия (3) система всех попарных произведений $e_i\tilde{e}_k$ есть базис в T (поскольку размерность T равна nm). Таким образом, любой элемент $t \in T$ может быть представлен в виде

$$t=\sum t^{ik}e_i\tilde{e}_k. \tag{5}$$

Здесь $i=1, 2, \ldots, n$; $k=1, 2, \ldots, m$. Утверждение доказано.

Замечание. Если положить $\sum t^{ik} e_i = a_k$, $\tilde{e}_k = \tilde{a}_k$, то равенство (5) примет вид

$$t = \sum a_k \tilde{a}_k. \tag{6}$$

Тем самым каждый элемент $t \in T$ можно представить в виде суммы произведений элементов из L и $\tilde{L}$.

4. Определение. Линейное пространство T размерности nm, рассматриваемое вместе с данным отображением f в него пары линейных пространств L, $\tilde{L}$ размерностей n и m соответственно, называется *тензорным произведением* L на $\tilde{L}$, если f удовлетворяет условиям (1), (2), (3) п. 2. Символически $T = L \otimes \tilde{L}$.

Элементы пространства T, *рассматриваемые в виде линейных комбинаций произведений элементов из* L *и* $\tilde{L}$, т. е. в виде (5) или в виде (6), называются *тензорами* над L и $\tilde{L}$. Числа t^{ik} в равенстве (5) называются *координатами тензора* t в базисе $e_i \tilde{e}_k$ (или в базисах e_i и $\tilde{e}_k$ пространств L и $\tilde{L}$).

5. Покажем, как построить отображение f со свойствами (1), (2), (3) п. 2.

Одновременно уясним себе степень произвола в этом построении.

Предположим сначала, что отображение f уже дано. Пусть e_i и $\tilde{e}_k$ — произвольные базисы в L и $\tilde{L}$. Тогда вследствие свойства (3) попарные произведения $e_i \tilde{e}_k$, определяемые отображением f, составляют базис в T. Допустим, что мы знаем $e_i \in L$, $\tilde{e}_k \in \tilde{L}$ и $e_i \tilde{e}_k \in T$. В таком случае мы полностью знаем отображение f, т. е. для любых $x \in L$, $\tilde{x} \in \tilde{L}$ знаем произведение $x\tilde{x}$ в пространстве T. В самом деле,

$$x = \sum x^i e_i, \qquad \tilde{x} = \sum \tilde{x}^k \tilde{e}_k. \tag{7}$$

Отсюда и вследствие свойств (1), (2)

$$x\tilde{x} = \sum x^i e_i \sum \tilde{x}^k \tilde{e}_k = \sum x^i \tilde{x}^k e_i \tilde{e}_k. \tag{8}$$

Таким образом, если отображение f существует, то оно однозначно определяется заданием произвольных базисов e_i и $\tilde{e}_k$ в L и $\tilde{L}$ и заданием базиса e_{ik} в T, элементы которого суть попарные произведения e_i на $\tilde{e}_k$, т. е. $e_{ik} = e_i \tilde{e}_k$ (последние равенства следует понимать так, что e_{ik} есть образ пары e_i, $\tilde{e}_k$ именно при отображении f).

Но легко видеть, что по этим же условиям **найдется** искомое отображение f. В самом деле, пусть даны $e_i \in L$, $\tilde{e}_k \in \tilde{L}$ и $e_{ik} \in T$ $(i=1, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, m)$; считаем, что каждая из этих систем линейно независима в своем пространстве. Назначим e_{ik} в качестве образов пар e_i, $\tilde{e}_k$ относительно искомого отображения f, т. е. положим $e_i\tilde{e}_k = e_{ik}$. Эти равенства обеспечить можно, так как число всех e_i равно n, число всех $\tilde{e}_k$ равно m, а число всех e_{ik} равно nm. После этого на произвольной паре x, $\tilde{x}$, где x и $\tilde{x}$ даны равенством (7), определим f по равенству (8).

Для построенного таким путем отображения f свойства (1) и (2) п. 3 с легкостью проверяются. Проверим, например, тождество (2).

Пусть $y = \sum y^i e_i$. Тогда

$$(x+y)\,\tilde{x} = \sum (x^i + y^i)\,\tilde{x}^k e_i \tilde{e}_k = \sum x^i \tilde{x}^k e_i \tilde{e}_k + \\ + \sum y^i \tilde{x}^k e_i \tilde{e}_k = x\tilde{x} + y\tilde{x}.$$

Чуть труднее проверить третье свойство, т. е. невырожденность построенного отображения f. Возьмем какую угодно новую пару базисов a_i и $\tilde{a}_k$ в L и $\tilde{L}$. Нам нужно показать, что попарные произведения $a_i\tilde{a}_k$ (т. е. образы пар a_i, $\tilde{a}_k$ в T) линейно независимы. Имеем

$$a_{i'} = \sum P^i_{i'} e_i, \qquad \tilde{a}_{k'} = \sum \tilde{P}^k_{k'} \tilde{e}_k.$$

Отсюда

$$a_{i'}\,\tilde{a}_{k'} = \sum P^i_{i'} \tilde{P}^k_{k'} e_i \tilde{e}_k. \tag{9}$$

Мы видим, что векторы $a_{i'}\tilde{a}_{k'}$ линейно выражаются через $e_i\tilde{e}_k$. Следовательно, ранг системы $a_{i'}\tilde{a}_{k'}$ в пространстве T не больше ранга системы $e_i\tilde{e}_k$.

Но из (9) получаем

$$e_i \tilde{e}_k = \sum Q^{i'}_i \tilde{Q}^{k'}_k a_{i'} \tilde{a}_{k'}. \tag{10}$$

Здесь величина $Q^{i'}_i$ стандартным образом определены по $P^i_{i'}$ (см. § 1). Аналогично определены $\tilde{Q}^{k'}_k$ по $\tilde{P}^k_{k'}$. Из (10) заключаем, что ранг системы $e_i\tilde{e}_k$ не выше ранга системы $a_{i'}\tilde{a}_{k'}$. Следовательно, ранги этих систем равны. А так как система $e_i\tilde{e}_k$ по условию независима в T, то независима и система $a_{i'}\tilde{a}_{k'}$ (так как имеет тот же ранг, равный общему числу векторов).

Итак, мы доказали существование нужных нам отображений и полностью выяснили произвол в их конструкции.

6. Возвращаясь к определению п. 3, заключаем, что $L\otimes\tilde{L}$ определено нами с произволом точно таким же, какой имеется в выборе отображения f.

7. Обозначим через φ произвольное взаимно однозначное отображение $t'=\varphi(t)$ пространства T на себя, которое является линейным изоморфизмом этого пространства (см. § 10 гл. I). Обозначим через f' суперпозицию отображений f и φ; символически: $f'=\varphi f$. Это равенство следует понимать так: сначала f переводит произвольную пару $a, \tilde{a}$ $(a\in L,\ \tilde{a}\in\tilde{L})$ в элемент t пространства T, затем φ переводит t в $t'=\varphi(t)$.

Определение. Тензорные произведения L на $\tilde{L}$, установленные с помощью отображений f и f', будем называть *изоморфными*, если $f'=\varphi f$, где φ — какой-нибудь линейный изоморфизм T на себя. Тензоры t и t' будем называть соответствующими по данному изоморфизму тензорных произведений, если $t'=\varphi(t)$.

Согласно этому определению все тензоры, построенные с помощью f, отображаются в тензоры, построенные с помощью $f'=\varphi f$. Чтобы пояснить, почему рассмотрение тензоров, построенных с помощью f, равносильно рассмотрению их образов при изоморфизме, встанем на арифметическую точку зрения, т. е. будем рассматривать тензоры в координатах.

Пусть $(e_i\tilde{e}_k)'=\varphi(e_i\tilde{e}_k)$, $t=\varphi(t)$. Тогда

$$t'=\sum t^{ik}(e_i\tilde{e}_k)', \tag{11}$$

где t^{ik} — точно те же числа, что и в равенстве (5). Таким образом, при изоморфизме соответствующие тензоры в соответствующих базисах имеют одни и те же координаты. Таким образом, при изоморфизме меняется только изображение тензоров в виде тех или иных элементов пространства T. Но координаты тензоров, а следовательно, и все уравнения, относящиеся к ним в каких-либо задачах, остаются без изменений.

8. Укажем, наконец, следующее предложение, доказательство которого предоставим читателю: если f и f' — два отображения пары пространств L и $\tilde{L}$ в пространство T, удовлетворяющие условиям (1), (2), (3) п. 3, то найдется изоморфизм φ пространства T на себя такой, что $f'=\varphi f$.

Отсюда следует

Теорема. *Все тензорные произведения данного линейного пространства L на данное линейное пространство $\tilde{L}$ изоморфны друг другу.*

ГЛАВА VI. ПОНЯТИЕ ГРУППЫ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Группы и подгруппы. Распределение базисов на классы по данной подгруппе матриц. Ориентация

1. Пусть дано множество G, для элементов которого установлено понятие равенства (или допустимой замены, см. § 1 гл. I), и задана некоторая операция, называемая операцией умножения. Эта операция с каждой парой элементов a, b из G, взятых в определенном порядке, сопоставляет некоторый элемент c того же множества. Символически пишут $c = ab$ и говорят, что c есть произведение a на b. При этом предполагают, что произведение ab инвариантно относительно допустимых замен сомножителей a и b.

Определение. Множество G с заданной в нем операцией умножения называется *группой* (относительно этой операции), если соблюдены требования следующих аксиом:

1. Для любых a, b, $c \in G$

$$(ab)\,c = a\,(bc).$$

2. Существует элемент $e \in G$ такой, что для любого $a \in G$ имеет место равенство

$$ae = a.$$

Элемент e называется единицей группы.

3. Для любого $a \in G$ существует $x \in G$ такой, что

$$ax = e.$$

Этот элемент называется обратным для a и обозначается через a^{-1}.

2. Из аксиом 1, 2, 3 легко выводятся следующие предложения:

а) Если $ax = e$, то $xa = e$.

Доказательство. Согласно аксиоме 3 существует $y \in G$ такой, что $xy = e$. С другой стороны, если $ax = e$, то $a = ae = a(xy) = (ax)y = ey$, откуда $a = ey$. Следовательно, $xa = x(ey) = xy = e$.

б) $ea = a$ для любого $a \in G$.

Доказательство. По аксиоме 3 и по доказанному существует x такой, что $ax = e$ и $xa = e$. Таким образом,

$$ea = (ax)a = a(xa) = ae = a.$$

в) Если $ax = e$, $ay = e$, то $y = x$.

Доказательство. Имеем $y = ye = y(ax) = (ya)x = ex = x$.

Доказанные теоремы означают, что в группе нет необходимости различать левый и правый обратные элементы, а также левую и правую единицы. Кроме того, в группе всегда и притом однозначно определено действие, обратное групповому умножению; именно, уравнение $ax = b$ имеет единственное решение: $x = a^{-1}b$, а уравнение $xa = b$ — единственное решение $x = ba^{-1}$. Отсюда следует, наконец, что каждая группа имеет только одну единицу. В самом деле, если $ae = a$ и $ae^* = a$, то, как доказано, $e^* = e$.

3. Важным примером группы является множество всех невырожденных $n \times n$-матриц (или действительных, или комплексных) с операцией умножения, которая определена в § 2 гл. II. Единицей в группе невырожденных $n \times n$-матриц является единичная матрица E; матрица, обратная к данной невырожденной, строится согласно пп. 4—8 § 3 гл. II. Проверку первой аксиомы группы для умножения матриц (т. е. ассоциативности: $(AB)C = A(BC)$) предоставляем читателю.

Пример матриц показывает, что умножение в группе, вообще говоря, не коммутативно (см. выше, п. 3 § 2 гл. II).

4. Группа называется *коммутативной* или *абелевой*, если для любых ее элементов a, b имеет место равенство $ab = ba$. Впрочем, в этом случае групповую операцию часто называют сложением, соответственно вместо ab часто пишут $a + b$. Тогда единицу абелевой группы называют нулевым элементом.

Примеры. 1) Каждое линейное пространство является абелевой группой относительно операции сложения элементов. Это ясно, поскольку первые четыре аксиомы линейного пространства в точности совпадают с тремя аксиомами группы при дополнительном условии коммутативности.

2) Множество всех действительных чисел, отличных от нуля, образует коммутативную группу относительно операции

обычного умножения. Единицей этой группы является число единица, элементом, обратными числу λ, является число λ^{-1}.

5. Определение. Некоторое подмножество $\tilde{G}$ элементов группы называется ее *подгруппой*, если из $a \in \tilde{G}$, $b \in \tilde{G}$ следует $ab \in \tilde{G}$ и из $a \in \tilde{G}$ следует $a^{-1} \in \tilde{G}$.

Отсюда, в частности, $e \in \tilde{G}$. Тем самым при указанных условиях требования аксиом 1—3 п. 1 соблюдены для $\tilde{G}$, и подмножество $\tilde{G}$ само является группой относительно той же операции умножения, какая задана во всей группе G. Единица группы G является единицей любой ее подгруппы.

6. Примеры подгрупп. 1) В произвольной группе G единица e образует подгруппу, состоящую из одного элемента.

2) Всю группу G можно рассматривать как ее подгруппу.

3) Если линейное пространство L рассматривается как группа относительно операции сложения, то любое его подпространство является подгруппой. Рекомендуем читателю построить пример подгруппы в L, которая не была бы подпространством.

4) В группе действительных чисел, не равных нулю (см. пример 2 п. 4), все положительные числа образуют подгруппу.

5) В этой же группе есть другая подгруппа, состоящая из двух элементов — чисел $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$.

6) В группе всех действительных невырожденных $n \times n$-матриц рассмотрим подмножество $\tilde{G}$, состоящее из матриц с положительным определителем. Из теоремы об определителе произведения матриц (гл. II, § 3) следует, что $\tilde{G}$ — подгруппа.

В самом деле, если $A, B \in \tilde{G}$, то $\operatorname{Det} AB = \operatorname{Det} A \cdot \operatorname{Det} B > 0$, следовательно, $AB \in \tilde{G}$. Если $A \in \tilde{G}$, то $\operatorname{Det} A^{-1} = (\operatorname{Det} A)^{-1} > 0$ и, значит, $A^{-1} \in \tilde{G}$.

7) В группе всех действительных (или комплексных) невырожденных $n \times n$-матриц рассмотрим подмножество $\tilde{G}$, состоящее из всех матриц, определитель которых имеет модуль $= 1$. Легко убедиться, что $\tilde{G}$ является подгруппой. В самом деле, если $A, B \in \tilde{G}$, то $|\operatorname{Det} AB| = |\operatorname{Det} A| \cdot |\operatorname{Det} B| = 1$, следовательно, $AB \in \tilde{G}$; если $A \in \tilde{G}$, то $|\operatorname{Det} A^{-1}| = |\operatorname{Det} A|^{-1} = 1$; следовательно, $A^{-1} \in \tilde{G}$.

7. Пусть в группе всех невырожденных $n \times n$-матриц выделена некоторая подгруппа G. Рассмотрим линейное n-мерное пространство L (действительное, если G состоит из действительных матриц; комплексное, если эти матрицы комплексны). Возьмем в L какой-нибудь базис $e_1, \ldots, e_n$ и перейдем к другому базису

$$e_{i'} = \sum P_{i'}^{i} e_i \tag{1}$$

при условии, что коэффициенты $P_{i'}^{i}$ составляют матрицу P из подгруппы G.

Для сокращения записи вместо (1) удобно писать

$$e' = Pe, \tag{1a}$$

понимая (1a) как матричное равенство, в котором элементами матриц-столбцов e и e' являются векторы, элементами квадратной матрицы P — числа:

$$e = \begin{Vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{Vmatrix}, \quad e' = \begin{Vmatrix} e_{1'} \\ \vdots \\ e_{n'} \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} P_{1'}^{1} & \ldots & P_{1'}^{n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ P_{n'}^{1} & \ldots & P_{n'}^{n} \end{Vmatrix}.$$

Беря в качестве P всевозможные матрицы из G, мы будем получать, таким образом, разнообразные базисы e'; они составят некоторый класс базисов; обозначим его через $\mathscr{E}(e)$. Будем говорить, что класс $\mathscr{E}(e)$ порожден базисом e по данной подгруппе G.

8. Из того, что G является подгруппой, вытекает важная

Теорема. *Если какой-нибудь базис e' принадлежит $\mathscr{E}(e)$, то класс, порожденный базисом e', совпадает с $\mathscr{E}(e)$. Символически: $\mathscr{E}(e') = \mathscr{E}(e)$.*

Доказательство. Пусть e'' — произвольный базис. Предположим, что $e'' \in \mathscr{E}(e')$. Это значит, что существует матрица $P' \in G$, для которой $e'' = P'e'$. С другой стороны, $e' \in \mathscr{E}(e)$. Соответственно имеем матрицу $P \in G$, для которой $e' = Pe$. Отсюда $e'' = (P'P)e$. Но так как G — подгруппа и так как $P \in G$, $P' \in G$, то $P'P \in G$. Следовательно, $e'' \in \mathscr{E}(e)$. Таким образом, каждый базис из $\mathscr{E}(e')$ входит в $\mathscr{E}(e)$, т. е. класс $\mathscr{E}(e')$ включен в класс $\mathscr{E}(e)$.

Заметим теперь, что в случае $e' = Pe$, $P \in G$, будет $e = P^{-1}e'$, причем $P^{-1} \in G$ (так как G — подгруппа). Иначе говоря, если $e' \in \mathscr{E}(e)$, то $e \in \mathscr{E}(e')$. Значит, в предыдущем рассуждении $\mathscr{E}(e)$ и $\mathscr{E}(e')$ можно поменять ролями. Поэтому класс $\mathscr{E}(e)$ включен в класс $\mathscr{E}(e')$. Тем самым $\mathscr{E}(e') = \mathscr{E}(e)$ и теорема доказана.

Замечание. Так как выбор базиса, порождающего класс, безразличен в пределах этого класса, то в дальнейшем вместо $\mathscr{E}(e)$ мы часто будем писать просто $\mathscr{E}$.

9. Из доказанного в предыдущем пункте утверждения следует, что множество всех базисов в L разделяется на классы по заданной подгруппе G так, что каждый базис входит точно в один класс (два класса либо совсем не имеют общих базисов, либо полностью совпадают). Каждый класс $\mathscr{E}$ инвариантен относительно данной подгруппы G; это означает, что для любого базиса $e \in \mathscr{E}$ и для любой матрицы $P \in G$ будет $e' = Pe \in \mathscr{E}$. (То есть после преобразования с помощью любой матрицы подгруппы G любой базис класса $\mathscr{E}$ остается в этом классе.)

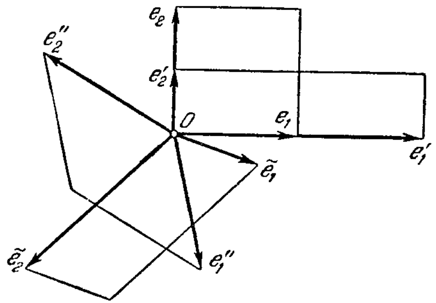


Рис. 28.

10. Пример. Пусть L — евклидова плоскость (точнее, линейное пространство лежащих в ней векторов), G — подгруппа действительных матриц второго порядка, определители которых равны по модулю единице. Тогда каждый класс $\mathscr{E}$ состоит из базисов с одной и той же площадью базисного параллелограмма (рис. 28) (разным классам отвечают разные значения этой площади). В самом деле, пусть

$$e_{1'} = \alpha e_1 + \beta e_2, \qquad e_{2'} = \gamma e_1 + \delta e_2. \tag{2}$$

Обозначим через S площадь базисного параллелограмма для e_1, e_2, через S' — аналогичную площадь для $e_{1'}$, $e_{2'}$. Из (2) имеем

$$S' = S\,|\alpha\delta - \beta\gamma|.$$

Если матрица P преобразования (2) принадлежит G, то $|\alpha\delta - \beta\gamma| = 1$ и $S' = S$. Обратно, если $S' = S$, то $P \in G$.

11. Пусть L снова обозначает линейное n-мерное пространство. Будем предполагать его действительным. Обозначим теперь через G подгруппу, состоящую из всех $n \times n$-матриц с положительным определителем.

Возьмем в L произвольный базис e и построим класс $\mathscr{E}(e)$ по подгруппе G; будем далее обозначать этот класс через $\mathscr{E}$. Очевидно, что класс $\mathscr{E}$ не исчерпывает всех базисов пространства L.

В самом деле, если $\tilde{P}$ — какая-нибудь $n \times n$-матрица с отрицательным определителем, то базис $e' = \tilde{P}e$ не входит в $\mathscr{E}$. Возьмем такой базис e' и построим по подгруппе G класс $\mathscr{E}(e')$; будем его обозначать дальше через $\mathscr{E}'$.

Покажем, что других классов, кроме $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$, в данном случае нет. Для любого базиса e'' пространства L найдутся невырожденные матрицы P' и P'' такие, что $e'' = P''e$ и $e'' = P'e'$. Из последнего равенства и из соотношения $e' = \tilde{P}e$ имеем: $e'' = (P'\tilde{P})e$; следовательно, $P'' = P'\tilde{P}$. Отсюда $\operatorname{Det} P'' = \operatorname{Det} P' \cdot \operatorname{Det} \tilde{P}$. Так как $\operatorname{Det} \tilde{P} < 0$, то определители матриц P' и P'' имеют разные знаки. Значит, один из них положителен. Если $\operatorname{Det} P'' > 0$, то $e'' \in \mathscr{E}$; если $\operatorname{Det} P' > 0$, то $e'' \in \mathscr{E}'$, что и требовалось установить.

12. Итак, все базисы пространства L разделяются по подгруппе G ($P \in G$, если $\operatorname{Det} P > 0$) на два класса.

13. Если два базиса пространства L принадлежат какому-нибудь одному из этих двух классов, то они называются *одинаково ориентированными*. Два базиса называются *противоположно ориентированными*, если они входят в разные классы.

Базисы, входящие в какой-нибудь один из этих классов, принято называть также *положительно ориентированными* (*или правыми*); тогда базисы другого класса называют *отрицательно ориентированными* (*или левыми*). Любой из двух классов можно выбрать в качестве класса положительно ориентированных базисов. Если этот выбор сделан, то говорят, что в пространстве L задана *ориентация*.

14. Разумеется, чтобы высказать понятие ориентации пространства, нет необходимости предварительно говорить о группах. Мы выскажем сейчас это важное понятие еще раз, другими словами, так, что группы при этом упоминаться не будут.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ — два произвольных базиса пространства L. Имеем

$$e_{i'} = \sum P^i_{i'} e_i, \tag{3}$$

где коэффициенты $P^i_{i'}$ составляют невырожденную матрицу P, то есть $\operatorname{Det} P \neq 0$.

Если $\operatorname{Det} P > 0$, то базис $e_{i'}$ называется одинаково ориентированным с базисом e_i; если $\operatorname{Det} P < 0$, то базис $e_{i'}$ называется противоположно ориентированным с базисом e_i.

15. Имеют место следующие предложения:

1. Если базис $e_{i'}$ одинаково ориентирован с базисом e_i, то e_i одинаково ориентирован с $e_{i'}$. В самом деле, согласно (3) векторы $e_{i'}$ выражены через e_i при помощи матрицы P; обратно, векторы e_i выражаются через $e_{i'}$ с помощью матрицы P^{-1}. Таким образом, $\operatorname{Det} P^{-1} = (\operatorname{Det} P)^{-1} > 0$.

2. Если два базиса одинаково ориентированы с третьим, то они одинаково ориентированы между собой. В самом деле, пусть векторы $e_{i'}$ выражены через e_i с помощью матрицы P, пусть векторы $e_{i''}$ выражены через e_i с помощью матрицы P' и $\operatorname{Det} P > 0$, $\operatorname{Det} P' > 0$. Тогда векторы $e_{i''}$ выражаются через $e_{i'}$ с помощью матрицы $P'P^{-1}$ и мы получаем

$$\operatorname{Det}(P'P^{-1}) = \operatorname{Det} P' \cdot \operatorname{Det} P^{-1} > 0.$$

3. Если два базиса противоположно ориентированы с третьим, то они друг с другом ориентированы одинаково. В самом деле, если $\operatorname{Det} P < 0$, $\operatorname{Det} P' < 0$, то $\operatorname{Det}(P'P^{-1}) > 0$.

16. Выберем в пространстве L произвольный базис e_i и назовем его положительно ориентированным (или правым). Назовем также положительно ориентированным (или правым) всякий другой базис, который одинаково ориентирован с e_i; назовем отрицательно ориентированным (или левым) всякий базис, который противоположно ориентирован с базисом e_i. Тем самым все базисы пространства L будут распределены на два класса. Вследствие трех предложений, доказанных в п. 15, любые два базиса из одного класса одинаково ориентированы друг с другом; любые два базиса из разных классов ориентированы противоположно. Указанные классы равноправны, т. е. любой из них можно выбрать в качестве класса положительно ориентированных базисов. Если этот выбор сделан (назначением базиса e_i), то говорят, что в пространстве задана ориентация.

17. В заключение заметим, что понятие ориентации существенно связано с тем, что базис рассматривается как упорядоченный набор векторов. Если нумерация векторов базиса меняется так, что два вектора обмениваются номерами, а остальные сохраняют свои номера, то ориентация базиса меняется на противоположную. В самом деле, пусть базисы e_i и $e_{i'}$ связаны соотношением (3), и пусть сделано указанное изменение нумерации векторов $e_{i'}$. При этом в матрице P произойдет перестановка двух строк и, следовательно, определитель этой матрицы изменит знак.

§ 2. Группы преобразований. Изоморфизм и гомоморфизм групп

1. Пусть имеется некоторое множество M, элементы которого условимся называть точками.

Говорят, что *задано преобразование* множества M, если каждой точке x из M поставлена в соответствие некоторая точка y того же множества M. Символически пишут

$$y = f(x).$$

При этом y называют *образом* точки x, а точку x — *прообразом* точки y.

Преобразования f и g считаются равными, если $g(x) = f(x)$ для любой точки $x \in M$.

Преобразование f называют *взаимно однозначным* или *обратимым*, если каждая точка $y \in M$ является образом некоторой и притом единственной точки $x \in M$. В этом случае преобразование, которое произвольной точке $y = f(x)$ ставит в соответствие ее прообраз x, называется *обратным* для исходного преобразования f и обозначается f^{-1}:

$$y = f(x), \qquad x = f^{-1}(y).$$

Преобразование e называется *тождественным*, если

$$e(x) = x$$

для любой точки x из M. Ясно, что тождественное преобразование обратимо, причем $e^{-1} = e$.

В частном случае, когда M — числовая прямая $-\infty < \tau < +\infty$, понятие преобразования совпадает с понятием функции, заданной на всей прямой. Если функция $t = f(\tau)$

имеет (однозначную) обратную функцию $g(\tau)$, также заданную на всей прямой $-\infty < \tau < +\infty$, то эта обратная функция задает обратное преобразование (символически: $f^{-1} = g$).

2. Пусть φ, f — какие-нибудь преобразования множества M. *Произведением* φ на f мы будем называть преобразование χ, которое действует по формуле

$$\chi(x) = \varphi[f(x)]$$

для любой точки x из M. Символически будем писать $\chi = \varphi f$.

В случае, когда M — числовая прямая, произведение преобразования $t = \varphi(\tau)$ на преобразование $t = f(\tau)$ есть сложная функция $t = \varphi[f(\tau)]$. Произведение преобразований, вообще говоря, не коммутативно (например, $\operatorname{sh}^3 x \neq \operatorname{sh} x^3$).

Для любого преобразования f произвольного множества M имеем очевидные тождества

$$fe = ef = f, \tag{1}$$

а если f обратимо, то

$$f^{-1}f = e, \qquad ff^{-1} = e. \tag{2}$$

Ограничиваясь рассмотрением взаимно однозначных преобразований, укажем, что

$$\text{если } fg = e \quad \text{или} \quad gf = e, \quad \text{то} \quad g = f^{-1}. \tag{3}$$

Произведение преобразований ассоциативно, то есть

$$\psi(\varphi f) = (\psi\varphi) f \tag{4}$$

для любых трех преобразований f, φ, ψ множества M. Это ясно, поскольку каждое из преобразований (4) действует по формуле $y = \psi\{\varphi[f(x)]\}$.

Если преобразования φ, f обратимы, то оба произведения φf и $f\varphi$ тоже обратимы, причем

$$(\varphi f)^{-1} = f^{-1}\varphi^{-1}. \tag{5}$$

Взаимная однозначность каждого из преобразований φf и $f\varphi$ непосредственно следует из взаимной однозначности φ и f, формула (5) вытекает из (1)—(4), так как

$$(f^{-1}\varphi^{-1})(\varphi f) = f^{-1}(\varphi^{-1}\varphi) f = f^{-1} e f = f^{-1} f = e.$$

3. Из определений и свойств, изложенных в пп. 1, 2, следует, что всевозможные обратимые преобразования заданного множества M образуют группу относительно умножений преобразований.

4. Определение. Всякая совокупность G преобразований множества M называется *группой преобразований* этого множества, если G образуют группу относительно умножения преобразований.

Из третьей аксиомы группы следует, что в любую группу преобразований могут входить только обратимые преобразования. Можно сказать поэтому, что любая группа преобразований множества M является подгруппой в группе всех обратимых преобразований этого множества.

5. Ниже, в пределах этой главы мы будем рассматривать только обратимые преобразования, часто не оговаривая этого дополнительно.

6. Пусть G — какая-нибудь совокупность преобразований множества M. Так как равенство (5) соблюдается для любых трех преобразований, то G будет группой, если:

а) из принадлежности G двух преобразований f, φ следует, что $f\varphi \in G$ и $\varphi f \in G$;

б) из принадлежности G некоторого преобразования f следует существование и принадлежность G обратного ему преобразования f^{-1}.

Отсюда уже вытекает принадлежность G тождественного преобразования e; оно является единицей группы G (см. в связи с этим формулы (1) и (2)).

7. В качестве важного примера укажем группу всех невырожденных (действительных или комплексных) линейных преобразований n переменных. Множество M в этом случае есть n-мерное координатное действительное или комплексное пространство. То, что невырожденные линейные преобразования составляют группу, фактически показано в § 3 гл. II; именно, там установлено, что произведение невырожденных линейных преобразований есть невырожденное линейное преобразование, и преобразование, обратное к невырожденному линейному, является таким же. Тем самым соблюдены условия а) и б) п 6.

8. Пусть G, G' — какие-нибудь группы, и пусть группа G отображена на G'. Условимся для обозначения образов употреблять штрихи; например, $a' \in G'$ — образ элемента $a \in G$.

Определение. Взаимно однозначное отображение G на G' называется *изоморфизмом*, если образ произведения равен произведению образов; символически:

$$(ab)' = a'b'. \tag{6}$$

Докажем, что при изоморфизме образ e' единицы e группы G является единицей в группе G'. В самом деле, пусть a' — любой элемент группы G'; он соответствует некоторому элементу a группы G. Имеем: $ae = a$; следовательно, по определению изоморфизма

$$a'e' = (ae)' = a', \tag{7}$$

то есть e' — единица в G'.

Если существует изоморфизм G на G', то группы G и G' называются изоморфными друг другу. При изоморфизме все соотношения между элементами одной группы переносятся на другую. Поэтому с точки зрения теории групп изоморфные группы имеют одинаковое строение. Достаточно изучить одну, чтобы знать другую.

Примеры. 1) Пусть G — группа всех действительных невырожденных $n \times n$-матриц, G' — группа всех действительных невырожденных линейных преобразований n переменных (рассматриваемых как преобразования координатного пространства K_n). Сопоставим с произвольной матрицей A из G линейное преобразование из G', имеющее матрицу A. Тем самым группа G будет взаимно однозначно отображена на G'. Установленное отображение является изоморфизмом, поскольку преобразование с матрицей AB есть произведение преобразований с матрицами A и B. При этом изоморфизме все групповые соотношения, в частности все подгруппы, переносятся из G в G'. Например, подгруппе матриц из G, определитель которых по модулю равен единице, отвечает определенная подгруппа в G'. Она состоит из линейных преобразований с единичным модулем определителя. Позднее мы познакомимся с некоторыми другими важными соответствующими друг другу подгруппами в G и в G'.

2) Если линейные пространства L и L' линейно изоморфны, то они изоморфны и как группы. Обратное, вообще говоря, неверно. В самом деле, из §§ 10, 11 гл. I следует, что n-мерное комплексное пространство C_n и действительное пространство L_{2n} размерности $2n$ изоморфны как группы (относительно операции сложения векторов), в то время как они не являются линейно изоморфными пространствами.

3) Используя п. 6, нетрудно проверить, что совокупность линейных функций $t=\lambda\tau$ при всевозможных $\lambda\neq 0$ образует группу преобразований числовой прямой $-\infty<\tau<+\infty$. Обозначим эту группу через G. Ее называют группой линейных преобразований числовой прямой. Пусть G' — группа действительных чисел λ ($\lambda\neq 0$) относительно умножения: Поставив в соответствие каждому преобразованию $t=\lambda\tau$ число λ, мы получим изоморфное отображение G на G', которое является частным случаем примера 1) при $n=1$. Выше, в п. 6 § 1, были указаны две подгруппы в группе G'. Им соответствуют в G две подгруппы, определяемые условиями: 1) $\lambda=\pm 1$; 2) $\lambda>0$.

Первая из этих подгрупп состоит всего из двух преобразований: тождественного отображения числовой оси $t=\tau$ и зеркального отражения $t=-\tau$.

Вторая подгруппа состоит из бесконечного множества преобразований, именно из всех линейных преобразований, сохраняющих направление числовой оси.

9. Определение. Отображение группы G в группу G' называется *гомоморфизмом*, если образ произведения любых двух элементов из G является произведением их образов в G'.

Иначе говоря, требуется лишь соблюдение условия (6). При этом может случиться, что $a'=b'$ при $a\neq b$ и что некоторые элементы группы G' не являются образами каких бы то ни было элементов из G. Гомоморфизм будем символически обозначать так: $G\to G'$.

Ясно, что изоморфизм есть частный случай гомоморфизма.

Другой частный случай гомоморфизма мы получим, поставив в соответствие каждому элементу произвольно выбранной группы G единицу какой-либо группы G'. Тогда имеем: $a'=e'$, $b'=e'$, $(ab)'=e'=a'b'$, и (6) соблюдено.

10. Теорема. *При любом гомоморфизме $G\to G'$ образ группы G является подгруппой в G'.*

Доказательство. Образ группы G обозначим через $\tilde{G}$. Пусть a', b' — произвольные элементы из $\tilde{G}$, a, b — какие-нибудь из их прообразов. Вследствие (6) умножение не выводит за пределы $\tilde{G}$:

$$a'b'=(ab)'\in\tilde{G}. \tag{8}$$

Из (6) следует также, что

$$a'(a^{-1})' = (aa^{-1})' = e'. \tag{9}$$

Аналогично п. 8 (см. формулу (7)) устанавливается, что образ e' единичного элемента группы G является единицей в G'. Поэтому (9) означает, что

$$(a')^{-1} = (a^{-1})' \in \tilde{G}. \tag{10}$$

Соотношения (8) и (10) показывают, что $\tilde{G}$ удовлетворяет определению подгруппы.

Замечание. Можно доказать, что совокупность всех прообразов единичного элемента группы G' при гомоморфизме $G \to G'$ образует подгруппу в G; эту подгруппу называют ядром гомоморфизма $G \to G'$. На доказательстве останавливаться не будем.

11. Рассмотрим некоторые примеры гомоморфизмов, важные для дальнейшего.

Пустя G — группа всех невырожденных действительных $n \times n$-матриц, G' — группа действительных чисел λ ($\lambda \neq 0$) относительно умножения. Построим следующие отображения G в G':

1) Каждой матрице $A \in G$ ставится в соответствие одно и то же число $\lambda = 1$.

2) Все матрицы, у которых $\operatorname{Det} A > 0$, отображаются в число $\lambda = +1$; все матрицы, у которых $\operatorname{Det} A < 0$, имеют своим образом число $\lambda = -1$.

3) Пусть зафиксировано любое действительное число σ. Каждой матрице $A \in G$ ставится в соответствие число $\lambda = |\operatorname{Det} A|^{\sigma}$.

4) Матрице A ставится в соответствие $\lambda = |\operatorname{Det} A|^{\sigma}$, если $\operatorname{Det} A > 0$, $\lambda = -|\operatorname{Det} A|^{\sigma}$, если $\operatorname{Det} A < 0$.

Во всех четырех примерах имеем гомоморфизм $G \to G'$. В первом — вследствие того, что вся группа G отображена в единицу группы G'. В трех остальных — вследствие теоремы об определителе произведения матриц.

Вместо группы чисел λ ($\lambda \neq 0$) можно взять изоморфную ей группу линейных преобразований $t = \lambda\tau$ ($\lambda \neq 0$) числовой прямой. Тогда мы получим четыре гомоморфизма, в которых образами G являются группы преобразований числовой прямой, состоящие соответственно

1) из одного тождественного преобразования: $t = \tau$;

2) из двух преобразований: $t=\tau$ и $t=-\tau$;

3) из всех преобразований $t=\lambda\tau$, у которых $\lambda>0$;

4) из всех линейных преобразований $t=\lambda\tau$ $(\lambda\neq 0)$.

Оказывается, что перечисленные выше в этом пункте четыре вида отображений G и G' исчерпывают все вообще возможные гомоморфизмы G в G'. Это утверждение будет существенно использовано в следующем параграфе (см., § 3, п. 8). Там же будут даны указания по поводу его доказательства.

§ 3. Инварианты. Осевые инварианты. Псевдоинварианты

1. Пусть дано n-мерное линейное пространство L, которое для упрощения дальнейших формулировок мы будем считать действительным. Предположим, что в L выбран и зафиксирован класс базисов $\mathscr{E}$ по некоторой подгруппе G невырожденных (действительных) $n\times n$-матриц.

Наряду с пространством L рассмотрим некоторое множество T, конкретная природа элементов которого формально не имеет значения. Фактически же в качестве T нам будут встречаться совокупности геометрических объектов пространства L или каких-либо алгебраических объектов, связанных с этим пространством.

Пусть задана числовая функция a двух аргументов: произвольного элемента t из множества T и произвольного базиса e из класса $\mathscr{E}$,

$$a=\psi(t,\ e). \tag{1}$$

Предположим, что значения функции (1) действительны и для всевозможных $t\in T$ заполняют всю числовую ось $-\infty<a<+\infty$ (при любом фиксированном e).

Можно представлять себе, что (как часто бывает в геометрии) правая часть (1) есть символическая запись некоторой функции от координат объекта t. Соответственно вместо (1) можно написать

$$a=\psi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N), \tag{1'}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — координаты t относительно базиса e, т. е. числа, которые каким-либо способом определяют объект t при задании базиса e.

Пример. Объект t есть параллелограмм, построенный в евклидовой плоскости на упорядоченной паре векторов p, q:

$$p = \{x_1, x_2\}, \qquad q = \{y_1, y_2\};$$

в качестве (1′) напишем (в данном случае)

$$a = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Здесь подразумевается, что x_1, x_2 и y_1, y_2 суть координаты p и q в некотором базисе e; тогда x_1, x_2, y_1, y_2 можно считать координатами t в том же базисе. Если e брать в классе ортонормированных базисов евклидовой плоскости, то число a будет ориентированной площадью параллелограмма t.

2. Пусть дано значение $a = \psi(t, e)$. Предположим, что от базиса e мы переходим к любому другому базизу e' того же класса $\mathscr{E}$:

$$e' = Pe, \qquad P \in G.$$

Потребуем, чтобы число $a' = \psi(t, e')$ определялось заданием числа a и матрицы P без каких-либо дополнительных сведений по поводу объекта t и исходного базиса e. Иначе говоря, мы будем считать, что a' является функцией от a и от элементов $P_{i'}^{i}$ матрицы $P = \|P_{i'}^{i}\|$. Символически:

$$a' = f(a, P). \tag{2}$$

Кроме того, будем предполагать, что для каждой матрицы P из G функция (2) задает обратимое преобразование числовой оси $-\infty < a < +\infty$, которое мы будем обозначать символом f_P. Мы будем часто вместо выражения (2) употреблять равносильную ему запись

$$a' = f_P(a).$$

3. При соблюдении требований пунктов пп. 1, 2 будем говорить, что *в пространстве L на множестве T задана скалярная величина a относительно группы G*. Формула (2) называется *законом преобразования* скалярной величины a.

4. Функцию $f(a, P)$ нельзя выбирать произвольно. Условия п. 2 накладывают на нее жесткие ограничения, сущность которых заключается в том, что преобразования $a' = f_P(a)$ составляют группу. Точнее, имеет место

Теорема. *Закон преобразования скалярной величины есть гомоморфизм группы матриц G в группу всех обратимых преобразований числовой прямой.*

Пояснение. Формула (2) ставит в соответствие каждой матрице $P \in G$ преобразование $a' = f_P(a)$ числовой прямой $-\infty < a < +\infty$. Теорема утверждает, что это соответствие есть гомоморфное отображение.

Обозначим через H множество преобразований $a' = f_P(a)$, отвечающих всевозможным матрицам P из G; тогда из сформулированной теоремы и пп. 10 и 4 § 2 вытекает

Следствие. *Множество H есть группа преобразований числовой прямой $-\infty < a < +\infty$.*

Доказательство теоремы. Поскольку обратимость каждого преобразования $a' = f_P(a)$ дана, а все обратимые преобразования числовой прямой $-\infty < a < +\infty$ составляют группу, то достаточно проверить, что

$$f_{P'} f_P = f_{P'P} \tag{3}$$

для любых матриц P, P' из G. Возьмем произвольный базис $e \in \mathscr{E}$ и рассмотрим базисы $e' = Pe$, $e'' = P'e' = (P'P)e$. Обозначим через a, a', a'' значения скалярной величины (1) в базисах e, e' и e'' соответственно. Согласно п. 2 имеем

$$a'' = f(a', P') = f(a, P'P). \tag{4}$$

Из (2) и (4) получаем условие на функцию f

$$f(f(a, P), P') = f(a, P'P). \tag{5}$$

Правой части равенства (5) соответствует преобразование $f_{P'P}$. Сложной функции, стоящей в левой части равенства (5), соответствует преобразование, равное произведению $f_{P'} f_P$. Поэтому соотношение (5) (где a — любое число, $-\infty < a < +\infty$) равносильно формуле (3). Теорема доказана.

5. Замечание. В справедливости теоремы можно убедиться с помощью несколько более наглядных соображений.

В самом деле, пусть матрица $P \in G$ дает переход от базиса e к базису e', а матрица $P' \in G$ — переходит от базиса e' к базису e''. Тогда матрица $P'P \in G$ дает непосредственный переход от e к e''. Пересчитаем значения нашей величины, исходя из базиса e и переходя к базису e'' один раз — через посредство базиса e', другой раз — непосредственно. Если $f_{P'} f_P \neq f_{P'P}$, то мы получим разные результаты, что недопустимо, так как для каждого объекта из T в каждом базисе класса $\mathscr{E}$ значение величины должно быть однозначно определенным. Следовательно, $f_{P'}f_P = f_{P'P}$, что и требуется.

6. Каждый гомоморфизм группы G в любую группу преобразований числовой прямой задает в пространстве L некоторую скалярную величину.

Поясним это подробнее. Пусть некоторый гомоморфизм ставит в соответствие матрице $P \in G$ обратимое преобразование f_P числовой прямой, то есть функцию $a' = f_P(a)$, заданную на всей прямой и имеющую обратную функцию, тоже заданную на всей прямой. Положим $f(a, P) = f_P(a)$. Тогда из (3) следует (5) и (4), откуда вытекает однозначная определенность величины a во всех базисах класса $\mathscr{E}$.

Мы должны построить множество T, то есть определить геометрические объекты t, на которых была бы задана скалярная величина a с данным законом преобразования $f(a, P)$. Это можно сделать по-разному. Например, в качестве t можно взять точку числовой прямой, которая имеет координату a в обычной декартовой шкале. Одновременно следует считать, что в классе $\mathscr{E}$ выбран произвольный базис e. При переходе к новому базису $e' = Pe$ перейдем на числовой прямой к другой шкале по формуле $a' = f_P(a)$. Будем считать, что в базисе e' той же точке t отвечает ее координата a' в новой шкале. Тогда все требования пп. 1, 2 будут соблюдены.

7. Особенно часто встречаются так называемые *линейные геометрические объекты* или *линейные скалярные величины*, которые характеризуются тем, что преобразования f_P линейны, то есть закон преобразования (2) имеет вид

$$a' = f(P)\,a.$$

В этом случае вместо (5) имеем более простое соотношение

$$f(P)\,f(P') = f(PP'), \tag{6}$$

наложенное только на матрицы P, P' (любые из G).

Соотношение (6) легко вывести сразу, без ссылки на (5). В самом деле, если

$$a' = f(P)\,a, \qquad a'' = f(P')\,a',$$

то

$$a'' = f(P)\,f(P')\,a.$$

С другой стороны, мы должны иметь непосредственно

$$a'' = f(PP')\,a.$$

Тем самым выполняется (6).

8. Пусть теперь G — группа всех действительных невырожденных $n \times n$-матриц (n фиксировано).

Как сообщалось (без доказательства) в п. 11 § 2, все гомоморфизмы G в группу действительных чисел (по умножению) сводятся к четырем видам отображений, которые перечислены в п. 11 § 2.

Это же утверждение можно высказать так:

Если числовая функция $f(P)$ от матричного аргумента удовлетворяет соотношению (6) для любых $P, P' \in G$, то:

1) либо $f(P) = 1$ для всех $P \in G$;

2) либо $f(P) = 1$ для $P \in G$, $\operatorname{Det} P > 0$, и $f(P) = -1$ для $P \in G$, $\operatorname{Det} P < 0$;

3) либо $f(P) = |\operatorname{Det} P|^{\sigma}$ для всех $P \in G$ (здесь σ — какое-нибудь данное действительное число);

4) либо $f(P) = \pm |\operatorname{Det} P|^{\sigma}$, где знак плюс имеет место для $P \in G$, $\operatorname{Det} P > 0$, знак минус — для $P \in G$, $\operatorname{Det} P < 0$.

Заметим, что случаи 3) и 4) включают, в частности, случаи 1) и 2) при $\sigma = 0$. Заметим, что мы исключаем из рассмотрения тривиальный случай, когда $f(P)$ является тождественным нулем ($f(P) \equiv 0$ для всех $P \in G$).

Доказательство высказанного утверждения мы могли бы провести лишь с помощью некоторых средств, изложенных в дальнейших главах. Поэтому мы даем это доказательство в специальном приложении (см. Приложение в конце книги).

Но мы воспользуемся высказанным утверждением теперь же. Оно позволит нам перечислить все возможные виды линейных величин. Именно, существуют лишь следующие четыре вида линейных скалярных величин:

1) Инварианты, то есть величины, не зависящие от выбора базиса. Их закон преобразования

$$a' = a \tag{I}$$

для любой матрицы P. Группа H состоит из одного тождественного преобразования числовой оси.

В предыдущих главах мы неоднократно предполагали, что имеем дело именно с такими величинами (например, когда рассматривали линейные, квадратичные, билинейные и полилинейные формы).

2) Осевые (или аксиальные) инварианты. Их закон преобразования таков:

$$a' = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \operatorname{Det} P > 0, \\ -a, & \text{если} \quad \operatorname{Det} P < 0. \end{cases} \tag{II}$$

Здесь группа H состоит из двух линейных преобразований $a' = a$ и $a' = -a$.

Название «осевые инварианты» выражает зависимость этих величин от ориентации координатных осей. Они не меняются при переходе к новому базису с сохранением ориентации, но меняют знак, если ориентация базиса заменяется на противоположную.

Пример. К числу осевых инвариантов принадлежит ориентированная площадь ориентированного параллелограмма на евклидовой плоскости. Эта величина положительна, если пара векторов, определяющих параллелограмм и его ориентацию, одинаково ориентирована с базисом, отрицательна — в противном случае. Элементы множества T — всевозможные ориентированные параллелограммы на евклидовой плоскости.

3) Псевдоинварианты веса σ. Их закон преобразования имеет вид

$$a' = a \, |\operatorname{Det} P|^{\sigma}, \tag{III}$$

где σ — заданное действительное число.

Здесь каждой матрице P ставится в соответствие линейное преобразование $a' = \lambda a$ при $\lambda = |\operatorname{Det} P|^{\sigma}$. Группа H состоит из всех линейных преобразований $a' = \lambda a$ с положительным коэффициентом λ.

Пример. Согласно § 3 гл. IV определитель матрицы инвариантной билинейной формы преобразуется по закону

$$\Delta' = \Delta (\operatorname{Det} P)^2.$$

Таким образом, величина Δ относится к числу псевдоинвариантов веса $\sigma = 2$. Множество T в этом примере состоит из всевозможных инвариантных билинейных форм, заданных в пространстве L.

4) Осевые псевдоинварианты веса σ:

$$a' = \begin{cases} a\,|\operatorname{Det} P|^{\sigma}, & \text{если} \quad \operatorname{Det} P > 0, \\ -a\,|\operatorname{Det} P|^{\sigma}, & \text{если} \quad \operatorname{Det} P < 0, \end{cases} \tag{IV}$$

где σ — заданное действительное число.

9. Если G — какая-нибудь группа действительных $n \times n$-матриц, то скалярные величины с законами преобразования (I), (II), (III) и (IV) называются соответственно инвариантами, осевыми (или аксиальными) инвариантами, псевдоинвариантами веса σ и осевыми (или аксиальными) псевдоинвариантами веса σ относительно группы G. В случае группы матриц, у которых $|\operatorname{Det} P| = 1$, псевдоинварианты не отличаются от инвариантов, а осевые псевдоинварианты — от осевых инвариантов.

Если же наложить условие $\operatorname{Det} P = +1$, то все четыре класса величин становятся неразличимыми (сводятся к инвариантам относительно указанной группы).

Отметим попутно, что группу матриц с определителем, равным единице, обычно называют унимодулярной группой (как в действительном, так и в комплексном случае).

10. Термин «инвариант» часто употребляется в более широком смысле, чем в пп. 8, 9.

Именно, инвариантами какой-либо группы преобразований называются всевозможные объекты, свойства и величины, сохраняющиеся при применении любого преобразования из данной группы.

Очевидно, что каждый инвариант некоторой группы является инвариантом для любой ее подгруппы. Обратное неверно: инвариант подгруппы может не быть инвариантом всей группы. В этом смысле можно сказать, что чем обширней группа преобразований, тем меньше у нее инвариантов, но зато они отражают более устойчивые, более глубокие свойства реального мира.

Геометрия распадается на ряд разделов, в каждом из которых исследуются инварианты какой-нибудь определенной группы преобразований того или иного пространства. Так например, в элементарной геометрии рассматриваются свойства фигур в трехмерном евклидовом пространстве, сохраняющиеся при любом движении фигуры как твердого тела (иначе говоря, инварианты группы движений трехмерного евклидова пространства). В следующих главах мы познакомимся с несколькими важными группами преобразований и с некоторыми их инвариантами.

§ 4. Тензорные величины

1. Здесь мы определим некоторые классы величин, родственные тензорам и включающие их как частный случай. Геометрическим истолкованием этих величин мы сейчас заниматься не будем. Мы будем только предполагать, что в каждом базисе они задаются известным набором чисел (координат) и что при переходе к новому базису эти числа преобразуются так же, как коэффициенты полилинейных форм. Чтобы не осложнять изложения громоздкими формулами, будем считать, что определяющие числа (координаты величин) помечены двумя индексами (нижним и верхним). Соответственно будем рассматривать формы от двух векторных аргументов (один из которых контравариантный, другой ковариантный). Переход к любому числу индексов тривиален.

2. Пусть в линейном n-мерном пространстве L дана билинейная форма $a(x, u)$, $x \in L$, $u \in L^*$. Если в L введен базис $e_1, \ldots, e_n$, а в L^* — взаимный базис $e^1, \ldots, e^n$, то $x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n$, $u = u_1 e^1 + \ldots + u_n e^n$, и форма $a(x, u)$ получает координатное представление

$$a(x, u) = \sum a_i^k x^i u_k,$$

где

$$a_i^k = a(e_i,\ e^k). \tag{1}$$

При переходе к новому базису имеем

$$e_{i'} = \sum P_{i'}^i e_i, \qquad e^{k'} = \sum Q_k^{k'} e^k. \tag{2}$$

Коэффициенты координатного представления формы при этом изменятся. Новые коэффициенты $a_{i'}^{k'}$ будут выражаться через старые коэффициенты a_i^k тем или иным способом в зависимости от характера самой формы как скалярной величины. Именно, может случиться, что числовое значение $a(x, u)$ данной формы на произвольной паре векторов x, u заменится новым значением $a'(x, u)$; тогда закон преобразования $a(x, u)$ в $a'(x, u)$ определит закон преобразования a_i^k в $a_{i'}^{k'}$. Мы будем предполагать, что данная форма как скалярная величина относится к одному из четырех классов, указанных в п. 7 предыдущего параграфа. Соответственно рассмотрим четыре случая.

3. 1) Форма $a(x, u)$ является инвариантом. В этом случае

$$a_{i'}^{k'} = a'(e_{i'}, e^{k'}) = a(e_{i'}, e^{k'}).$$

Отсюда с учетом (1) и (2) получаем

$$a_{i'}^{k'} = \sum a_i^k P_{i'}^i Q_k^{k'}. \tag{I}$$

Это есть известный нам закон преобразования координат (двухвалентного смешанного) тензора.

2) Форма $a(x, u)$ является осевым инвариантом. В этом случае

$$a_{i'}^{k'} = a'(e_{i'}, e^{k'}) = \pm a(e_{i'}, e^{k'}),$$

где имеем знак плюс, если $\operatorname{Det} P > 0$, знак минус, если $\operatorname{Det} P < 0$. Отсюда с учетом (1) и (2)

$$a_{i'}^{k'} = \pm \sum a_i^k P_{i'}^i Q_k^{k'} \tag{II}$$

при том же условии насчет знака в правой части.

Величины, у которых определяющие числа a_i^k преобразуются по закону (II), называются *осевыми* (или *аксиальными*) *тензорами*.

3) Форма $a(x, u)$ является псевдоинвариантом веса σ. В этом случае

$$a_{i'}^{k'} = a'(e_{i'}, e^{k'}) = a(e_{i'}, e^{k'}) \, |\operatorname{Det} P|^{\sigma}.$$

Отсюда с учетом (1) и (2)

$$a_{i'}^{k'} = |\operatorname{Det} P|^{\sigma} \sum a_i^k P_{i'}^i Q_k^{k'}. \tag{III}$$

Величины, у которых определяющие числа a_i^k преобразуются по закону (III), называются *псевдотензорами* веса σ.

4) Форма $a(x, u)$ является осевым псевдоинвариантом веса σ. В этом случае

$$a_{i'}^{k'} = a^i(e_{i'}, e^{k'}) = \pm a(e_{i'}, e^{k'}) \, |\operatorname{Det} P|^{\sigma}$$

и соответственно

$$a_{i'}^{k'} = \pm |\operatorname{Det} P|^{\sigma} \sum a^k P_{i'}^i Q_k^{k'}, \tag{IV}$$

где справа берется знак плюс, если $\operatorname{Det} P > 0$, знак минус, если $\operatorname{Det} P < 0$.

Величины, у которых определяющие числа a_i^k преобразуются по закону (IV), называются *осевыми* (или *аксиальными*) *псевдотензорами веса* σ.

4. Законы преобразований (I) — (IV) для a_i^k выведены нами как следствие соответствующих законов преобразования (I) — (IV) § 3 для скалярной величины $a(x, u)$. Легко показать, что и обратно, если a_i^k преобразуются по законам (I) — (IV), то для скалярной величины

$$a(x, u) = \sum a_i^k x^i u_k$$

имеют место соответственно законы преобразований (I) — (IV) § 3.

5. В этом параграфе мы считали, что преобразование (2) определяется любой невырожденной матрицей P. Можно предполагать, что матрицы P берутся из некоторой группы G, а допустимые базисы составляют соответствующий класс $\mathscr{E}$. Тогда высказанные выше определения дадут нам четыре класса тензорных величин относительно группы G.

6. Будем рассматривать совокупность чисел a_i^k как точку координатного пространства K (размерности n^2). Тогда любой из четырех законов (I) — (IV) определяет по заданной матрице $P \in G$ некоторое преобразование пространства K (разумеется, свое для каждого закона (I) — (IV)). Обозначим это преобразование для какого-нибудь одного закона (I)—(IV) через f_P. Справедливы утверждения:

а) Множество всех f_P ($P \in G$) является некоторой группой H преобразований пространства K.

в) Отображение G на H, при котором матрице $P \in G$ соответствует преобразование $f_P \in H$, является гомоморфизмом; именно

$$f_{P'} f_P = f_{P'P} \tag{3}$$

для любых матриц P', $P \in G$.

Доказательство аналогично п. 4 § 3.

Соотношение (3) чрезвычайно важно. Если бы оно не имело места, то законы (I) — (IV) были бы бессмысленны, так как различные переходы к новому базису — непосредственно или через промежуточные базисы — давали бы разные результаты.

7. Из законов преобразований (I) — (IV) следует, что обращение в нуль всех координат тензорной величины в одном базисе влечет за собой обращение в нуль всех ее координат в любом другом базисе: если $a_i^k=0$, то $a_{i'}^{k'}=0$.

8. Если определяющие числа тензорной величины (любого из четырех классов) помечены многими индексами, то внизу пишутся те из них, по которым в законах преобразований (I) — (IV) идет суммирование с верхними индексами элементов матрицы P. Число нижних индексов называется ковариантной валентностью тензорной величины. Остальные индексы пишутся сверху; число их равно контравариантной валентности.

З а м е ч а н и е. Скалярные величины любого из четырех классов, о которых говорилось в § 3, можно рассматривать как тензорные величины (соответствующего класса) нулевой валентности.

9. Пусть T означает множество всех тензорных величин какого-нибудь одного из классов (I) — (IV) и какой-нибудь одной структуры в отношении валентностей (т. е. с одним и тем же числом нижних и верхних индексов). Тогда, если над элементами T производить линейные операции, как в координатном пространстве (т. е. сумму величин строить путем сложения их соответствующих координат, произведение величины на число — путем умножения на это число всех ее координат), то в результате будут получаться тензорные величины того же множества T. Убедимся в этом, взяв для простоты в качестве T множество двухвалентных смешанных псевдотензоров данного веса σ. Рассмотрим два псевдотензора из T с координатами a_i^k и b_i^k в некотором базисе. В новом базисе получим $a_{i'}^{k'}$, $b_{i'}^{k'}$. Можно считать, что $a_{i'}^{k'}$ выражены уже написанным в п. 3 равенством (III). Аналогично

$$b_{i'}^{k'}=|\operatorname{Det} P|^{\sigma}\sum b_i^k P_{i'}^i Q_k^{k'}. \tag{IIIa}$$

Складывая (III) и (IIIa) почленно, получим

$$a_{i'}^{k'}+b_{i'}^{k'}=|\operatorname{Det} P|^{\sigma}\sum\left(a_i^k+b_i^k\right)P_{i'}^i Q_k^{k'}.$$

Таким образом, сумма двух тензорных величин из T имеет точно тот же закон преобразования, что и каждая из этих величин. Умножая обе части равенства (III) на произвольное число α, увидим, что $\alpha a_{i'}^{k'}$ выражается через αa_i^k по тому же закону.

10. Если две тензорные величины принадлежат T, то равенство между ними имеет инвариантный характер. Подробнее, пусть, например, для a_i^k и b_i^k имеем в одном базисе равенства $b_i^k = a_i^k$ при любых i, k. Тогда в любом другом базисе $b_{i'}^{k'} = a_{i'}^{k'}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что, согласно п. 9, разность $b_i^k - a_i^k$ есть тензорная величина и, следовательно, обращение ее в нуль не зависит от базиса.

З а м е ч а н и е. Разумеется, в одном базисе равенство $b_i^k = a_i^k$ возможно для любых величин a_i^k, b_i^k. Но если эти величины взяты из разных классов (I)—(IV), т. е. имеют разные законы преобразований, то при переходе к новым базисам равенство нарушится.

11. Произведение двух любых тензорных величин, взятых из каких угодно классов (I)—(IV), строится путем умножения каждой координаты одной величины на каждую координату другой (в одном и том же базисе). Полученная величина будет относится к одному из классов (I)—(IV) в зависимости от выбора сомножителей. Например, если a_i^k есть псевдотензор веса σ_1, b_i^k — псевдотензор веса σ_2, то $a_i^k b_j^m$ будет (четырехвалентным) псевдотензором веса $\sigma_1 + \sigma_2$. В самом деле, при указанных предположениях

$$a_{i'}^{k'} = |\operatorname{Det} P|^{\sigma_1} \sum a_i^k P_{i'}^i Q_k^{k'},$$

$$b_{j'}^{m'} = |\operatorname{Det} P|^{\sigma_2} \sum b_j^m P_{j'}^j Q_m^{m'}.$$

Перемножая эти равенства, получим

$$a_{i'}^{k'} b_{j'}^{m'} = |\operatorname{Det} P|^{\sigma_1 + \sigma_2} \sum a_i^k b_j^m P_{i'}^i P_{j'}^j Q_k^{k'} Q_m^{m'}.$$

12. Отметим, что произведение двух осевых тензоров есть обычный тензор. Произведение обычного тензора на осевой есть осевой тензор.

13. Свертка по одному верхнему и одному нижнему индексу тензорной величины одного из классов (I)—(IV) дает тензорную величину того же класса. Полная свертка приводит к скалярной величине того же класса. Например, свертка двухвалентного смешанного псевдотензора веса σ есть псевдоинвариант веса σ. В самом деле, из (III) имеем

$$\sum a_{\alpha'}^{\alpha'} = |\operatorname{Det} P|^{\sigma} \sum \left(a_i^k \sum P_{\alpha'}^i Q_k^{\alpha'} \right) = \\ = |\operatorname{Det} P|^{\sigma} \sum a_i^k \delta_k^i = |\operatorname{Det} P|^{\sigma} \sum a_{\alpha}^{\alpha};$$

таким образом, для величины $a = \sum a_{\alpha}^{\alpha}$ получается закон преобразования вида (III) § 3.

§ 5. Ориентированный объем параллелепипеда. Дискриминантный тензор

1. Пусть в линейном n-мерном пространстве L выбран некоторый базис $e_1, \ldots, e_n$ и тем самым задана ориентация пространства (см. § 1). Возьмем в L упорядоченный набор произвольных векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и каждый из них разложим по данному базису:

$$x_1 = x_1^1 e_1 + \ldots + x_1^n e_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = x_n^1 e_1 + \ldots + x_n^n e_n.$$

Матрицу, составленную из коэффициентов этих разложений, т. е. из координат векторов $x_1, \ldots, x_n$ по базису $e_1, \ldots, e_n$, обозначим через X.

Сопоставим с упорядоченным набором векторов $x_1, \ldots, x_n$ число $D(x_1, \ldots, x_n)$, равное определителю матрицы X:

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^n \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_n^1 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

При переходе к другому базису

$$e_{i'} = \sum P_{i'}^i e_i \tag{1}$$

мы сопоставим с тем же набором векторов $x_1, \ldots, x_n$ число $D'(x_1, \ldots, x_n)$, равное определителю матрицы X', которая составлена из координат векторов $x_1, \ldots, x_n$ по базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$.

Легко найти закон преобразования величины $D(x_1, \ldots, x_n)$. Именно, вместе с (1) мы имеем для координат любого вектора следующие равенства:

$$x^{i'} = \sum Q_i^{i'} x^i.$$

Отсюда получаем матричное равенство

$$X' = XQ^*.$$

Следовательно,

$$D'(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{Det} X' = \operatorname{Det} X \operatorname{Det} Q^* = \\ = \operatorname{Det} Q^* D(x_1, \ldots, x_n).$$

Но, как мы знаем, $Q^* = P^{-1}$. Таким образом, имеет место соотношение

$$D'(x_1, \ldots, x_n) = \pm |\operatorname{Det} P|^{-1} D(x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$

где справа следует брать знак плюс, если $\operatorname{Det} P > 0$, знак минус, если $\operatorname{Det} P < 0$.

Мы видим, что $D(x_1, \ldots, x_n)$ является осевым псевдоинвариантом веса $\sigma = -1$, который определен на всех упорядоченных наборах из n векторов каждый. Заметим, что $D(x_1, \ldots, x_n) > 0$, если векторы $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимы и упорядоченный набор $x_1, \ldots, x_n$ ориентирован положительно (т. е. одинаково с базисом $e_1, \ldots, e_n$).

2. Из свойств определителя непосредственно следует, что $D(x_1, \ldots, x_n)$ представляет собой полилинейную форму, т. е. функцию, линейную по каждому своему векторному аргументу.

Форма $D(x_1, \ldots, x_n)$ является косой, т. е. кососимметричной по любой паре аргументов (поскольку определитель меняет знак при перестановке двух строк).

Разлагая определитель согласно его непосредственному определению, получаем координатное представление формы $D(x_1, \ldots, x_n)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$:

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \sum \delta_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}.$$

Здесь $\delta_{i_1 \ldots i_n} = 0$, если среди индексов $i_1, \ldots, i_n$ имеются одинаковые; $\delta_{i_1 \ldots i_n} = +1$, если $i_1, \ldots, i_n$ составляют четную перестановку натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$; $\delta_{i_1 \ldots i_n} = -1$, если перестановка $i_1, \ldots, i_n$ нечетная.

Отсюда и из предыдущего пункта следует, что $\delta_{i_1 \dots i_n}$ является осевым ковариантным псевдотензором веса $\sigma = -1$. Ясно также, что $\delta_{i_1 \dots i_n}$ кососимметричен по любой паре индексов.

Замечание. Можно прямым путем убедится, что если мы подвергнем $\delta_{i_1 \dots i_n}$ преобразованию по чисто ковариантному закону вида (IV) § 4, то получим числа

$$\delta_{i'_1 \dots i'_n} = \pm |\operatorname{Det} P|^{-1} \sum \delta_{i_1 \dots i_n} P^{i_1}_{i'_1} \dots P^{i_n}_{i'_n} \tag{3}$$

точно такие же, как $\delta_{i_1 \dots i_n}$. Именно, $\delta_{i'_1 \dots i'_n} = 0$, если среди индексов есть одинаковые; $\delta_{i'_1 \dots i'_n} = \pm 1$ в зависимости от четности перестановки $i'_1 \dots i'_n$. Для пояснения мы заметим только, что если $i'_1 = 1,\ i'_2 = 2,\ \dots,\ i'_n = n$, то сумма в правой части (3) равна $\operatorname{Det} P$; поэтому $\delta_{1'2' \dots n'} = +1$; остальные случаи предоставляем читателю.

3. Пользуясь формой $D(x_1, \dots, x_n)$, можно построить новую косую форму от $x_1, \dots, x_n$, которая уже будет осевым инвариантом, т. е. будет только знаком реагировать на ориентацию базиса, сохраняя во всех базисах свою абсолютную величину. Но для этого нам придется привлечь на помощь некоторую инвариантную квадратичную форму.

Возьмем по своему усмотрению какую угодно инвариантную квадратичную форму $a(x, x)$ при единственном условии, чтобы она была невырожденной. В произвольном базисе $e_1, \dots, e_n$ эта форма имеет определенное координатное представление и вместе с ним определенную матрицу A; при этом $\Delta = \operatorname{Det} A \neq 0$. При переходе к новому базису согласно (1), форма $a(x, x)$ получит новую матрицу A'. Если $\Delta' = \operatorname{Det} A'$, то, как нам известно,

$$\Delta' = \Delta (\operatorname{Det} P)^2.$$

Отсюда

$$\sqrt{|\Delta'|} = \sqrt{|\Delta|}\ |\operatorname{Det} P|. \tag{4}$$

Перемножая почленно (2) и (4), найдем

$$\sqrt{|\Delta'|}\, D'(x_1, \dots, x_n) = \pm \sqrt{|\Delta|}\, D(x_1, \dots, x_n).$$

Таким образом, косая полилинейная форма $\sqrt{|\Delta|}\, D(x_1, \dots, x_n)$ является осевым инвариантом.

4. Отсюда сразу следует, что в произвольном базисе $e_1, \ldots, e_n$ числа

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \sqrt{|\Delta|}\, \delta_{i_1 \ldots i_n}$$

являются координатами некоторого осевого тензора. Его называют дискриминантным тензором для формы $a(x, x)$. В гл. VIII—X дискриминантный тензор будет существенно использован.

5. Пусть $\mathfrak{A}$ — действительное аффинное n-мерное пространство, соответствующее линейному n-мерному пространству L.

Возьмем произвольную точку $A \in \mathfrak{A}$ и произвольные векторы $x_1, \ldots, x_n \in L$ в числе, равном размерности. Пусть далее M — какая-нибудь точка пространства $\mathfrak{A}$, определяемая равенством

$$AM = \tau_1 x_1 + \ldots + \tau_n x_n,$$

где $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — действительные числа. Если $\tau_1, \ldots, \tau_n$ изменяются независимо друг от друга при условиях $0 \leqslant \tau_k \leqslant 1$ $(k = 1, \ldots, n)$, то всевозможные получаемые при этом точки составляют некоторую пространственную фигуру, которая называется параллелепипедом, построенным на векторах $x_1, \ldots, x_n$, приложенных к точке A. При $n = 2$ параллелепипед называется также параллелограммом (см. выше, § 8 гл. III).

Пусть пространство L ориентировано заданием базиса $e_1, \ldots, e_n$. Тогда, если векторы $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимы, то построенному на них параллелепипеду приписывается положительная или отрицательная ориентация. Именно, параллелепипед считается положительно ориентированным, если положительно ориентирован упорядоченный набор векторов $x_1, \ldots, x_n$.

6. Мы хотим с каждым параллелепипедом сопоставить некоторое число, которое по аналогии с трехмерным евклидовым пространством естественно было бы назвать его объемом (в двумерном случае — площадью). Учитывая эту аналогию, мы предъявим к искомой величине следующие требования:

1) Объем должен зависеть только от векторов $x_1, \ldots, x_n$, но не от точки A.

2) Объем должен быть положительным числом в случае положительной ориентации параллелепипеда, отрицательным —

в случае отрицательной ориентации; должен быть нулем, если векторы $x_1, \ldots, x_n$ линейно зависимы (тогда весь параллелепипед лежит в гиперплоскости).

3) Абсолютная величина объема должна быть инвариантом.

4) При удлинении одного из векторов $x_1, \ldots, x_n$ в α раз объем должен увеличиваться в α раз.

5) Если $x_1 = x_1' + x_1''$, то объем параллелепипеда, построенного на векторах $x_1, x_2, \ldots, x_n$, должен равняться сумме объемов параллелепипедов, построенных на $x_1', x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ и $x_1'', x_2, \ldots, x_n$; аналогичное свойство должно иметь место в отношении остальных векторов набора $x_1, \ldots, x_n$.

Оказывается, что указанные требования по существу определяют объем как функцию от $x_1, \ldots, x_n$. В самом деле, они означают, что эта функция должна быть полилинейной формой от $x_1, \ldots, x_n$, кососимметричной по каждой паре аргументов; как числовая величина она должна быть осевым инвариантом.

Но в точности такими свойствами обладает полилинейная форма $\sqrt{|\Delta|}\,D(x_1, \ldots, x_n)$, приведенная в п. 3. С другой стороны, согласно изложенному в § 8 гл. V, всякая другая полилинейная форма, обладающая теми же свойствами, пропорциональна форме $\sqrt{|\Delta|}\,D(x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, если объем ориентированного параллелепипеда, который построен на векторах $x_1, \ldots, x_n$, обозначить через $V(x_1, \ldots, x_n)$, то

$$V(x_1, \ldots, x_n) = C\sqrt{|\Delta|}\,D(x_1, \ldots, x_n), \tag{5}$$

где C — любая инвариантная постоянная (разумеется, отличная от нуля).

7. Мы можем менять постоянную C и форму $a(x, x)$, определитель Δ которой участвует в равенстве (5). Однако множитель $C\sqrt{|\Delta|}$ в правой части (5) будет единственным образом определен, если мы по своему усмотрению назначим параллелепипед с единичным объемом, т. е. произвольно возьмем линейно независимые векторы $a_1, \ldots, a_n$ и потребуем, чтобы $V(a_1, \ldots, a_n) = 1$. Определяя указанным способом $C\sqrt{|\Delta|}$, получим формулу:

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(a_1, \ldots, a_n)}.$$

Таким образом, измерение объемов в аффинном пространстве однозначно определяется произвольным выбором единицы объема. Мотивированный выбор единицы объема естественно делается в линейных пространствах, наделенных метрикой; об этом см. гл. VIII.

8. Если при замене базисов мы будем использовать не всю группу невырожденных матриц, а ограничимся ее унимодулярной подгруппой G, то не будет надобности в квадратичной форме $a(x, x)$, так как относительно G сама величина $D(x_1, \ldots, x_n)$ является инвариантом. При этом необходимо также ограничиться базисами из некоторого класса $\mathscr{E}$ относительно унимодулярной подгруппы G. Допустим, что класс $\mathscr{E}$ выбран. Полагая в этом случае

$$V(x_1, \ldots, x_n) = CD(x_1, \ldots, x_n), \tag{6}$$

получим объем как инвариант относительно унимодулярной подгруппы. Так как $D(e_1, \ldots, e_n) = 1$, то $C = V_0$, где $V_0 = V(e_1, \ldots, e_n)$ есть объем параллелепипеда, построенного на базисных векторах $e_1, \ldots, e_n$. Заметим еще, что можно в формуле (6) взять $C = 1$; тогда $V(e_1, \ldots, e_n) = 1$, то есть параллелепипед, построенный на базисных векторах $e_1, \ldots, e_n$, имеет единичный объем. В данном случае все базисы выбранного класса $\mathscr{E}$ характеризуются тем, что для них $V = +1$.

9. Точно также вспомогательная квадратичная форма $a(x, x)$ не нужна, если рассматривается какой-либо класс базисов $\tilde{\mathscr{E}}(e)$ по подгруппе матриц с единичным модулем определителя. В таком случае объем тоже выражается формулой (6), но является осевым инвариантом. Будем считать, как и выше, что $C = 1$. Тогда параллелепипед, построенный на векторах базиса e, снова будет иметь объем $V = +1$, а все базисы класса $\tilde{\mathscr{E}}$ будут характеризоваться тем, что для них $|V| = 1$. При этом $V = +1$ или $V = -1$ в зависимости от ориентации произвольного базиса класса $\tilde{\mathscr{E}}(e)$ по отношению к исходному базису e.

Чтобы подчеркнуть зависимость знака объема от ориентации, часто употребляют термин «ориентированный объем параллелепипеда».

ГЛАВА VII. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ 1. Общие сведения

1. Определение. Отображение $y = Ax$, $x \in L$, $y \in L$, линейного пространства L в себя (или на себя) называется *линейным*, если

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2) \tag{1}$$

для любых векторов $x_1, x_2 \in L$ и любых чисел α, β. Здесь и в дальнейшем числовые множители действительны или комплексны в зависимости от того, действительно или комплексно пространство L.

Отображение $y = Ax$ называют также линейным преобразованием пространства L; иногда говорят, что $A(x)$ есть *линейный оператор* в L.

Линейные преобразования представляют собой многомерное обобщение линейной функции одного числового аргумента $f(x) = kx$. Их разнообразие быстро растет с повышением размерности.

При записи линейных преобразований скобки обычно опускают и вместо $A(x)$ пишут Ax.

Простейшими примерами линейных преобразований могут служить тождественное преобразование

$$Ex = x \tag{2}$$

и нулевое преобразование

$$\Theta x = 0,$$

где слева Θ есть символ линейного преобразования, которое каждому вектору x ставит в соответствие нулевой вектор.

2. Произведение двух любых линейных преобразований A и B линейно:

$$AB(\alpha x_1 + \beta x_2) = A(\alpha Bx_1 + \beta Bx_2) = \alpha ABx_1 + \beta ABx_2.$$

3. Для линейных преобразований определяются операции сложения и умножения на числа:

$$(A+B)x = Ax + Bx, \qquad (\alpha A)x = \alpha Ax. \tag{3}$$

Нетрудно показать, что преобразования $A+B$ и αA тоже линейны и что множество линейных преобразований пространства L само является линейным пространством. Роль нулевого вектора в пространстве линейных преобразований выполняет нулевое преобразование Θ. Доказательство этих утверждений предоставляем читателю.

4. Наличие трех операций: умножения линейных преобразований, сложения и умножения их на числа — позволяет строить многочлены от преобразований:

$$p(A) = \alpha_0 A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n E, \tag{4}$$

где α_j — числа; степени преобразования определяются повторным умножением: $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$ и т. п. Для любого преобразования A по определению считают, что

$$A^0 = E, \tag{5}$$

так что слагаемое $\alpha_n E$ в многочлене (4) играет роль свободного члена.

5. Предполагая пространство конечномерным, введем в нем базис $e_1, \ldots, e_n$.

Предположим, что нам известны образы базисных векторов Ae_k в данном базисе, то есть известны коэффициенты разложений:

$$Ae_k = \sum A_k^\alpha e_\alpha. \tag{6}$$

Тогда известна матрица величин A_k^α. Один из индексов поставлен сверху, а другой снизу не случайно. Ниже мы покажем, что A есть тензор с такими валентностями. Положим

$$A^* = \begin{Vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \ldots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \ldots & A_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ A_n^1 & A_n^2 & \ldots & A_n^n \end{Vmatrix}.$$

Знак * поставлен потому, что гораздо чаще в приложениях линейных преобразований встречается не эта матрица, а транспонированная, и для нее оставлен более простой символ A.

Покажем, что, зная матрицу A, можно для любого x вычислить y:

$$y=\sum y^i e_i = Ax = A\left(\sum x^k e_k\right).$$

Воспользуемся линейностью преобразования A:

$$y=\sum x^k A e_k = \sum x^k A_k^\alpha e_\alpha.$$

Изменив обозначение одного из индексов, получим

$$y=\sum y^i e_i = \sum_i \left(\sum_k A_k^i x^k\right) e_i,$$

откуда

$$y^i = \sum_{k=1}^{n} A_k^i x^k, \qquad i=1, \ldots, n. \tag{7}$$

Эта координатная запись равносильна одному матричному равенству

$$y = Ax, \tag{8}$$

где

$$A=\begin{Vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \ldots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \ldots & A_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1^n & A_2^n & \ldots & A_n^n \end{Vmatrix}, \qquad x=\begin{Vmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{Vmatrix}, \qquad y=\begin{Vmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{Vmatrix}.$$

Легко проверить, что разные матрицы A и B задают в данном базисе разные линейные преобразования.

Итак, линейное преобразование $y=Ax$ векторов пространства L выражается в виде линейного преобразования переменных (7), которое в матричной форме записывается *тем же самым равенством* $y=Ax$. Оно называется координатным представлением линейного преобразования A.

6. Используя формулы (3) и (7), нетрудно проверить, что при сложении линейных преобразований их матрицы складываются, при умножении линейного преобразования на число матрица умножается на то же число, так что пространство линейных преобразований n-мерного линейного пространства L изоморфно пространству $n \times n$-матриц. Аналогично § 2 гл. II можно показать, что при умножении двух линейных преобразований их матрицы перемножаются. Тождественному преобразованию соответствует единичная матрица E, нулевому преобразованию соответствует матрица, состоящая из нулей. Согласно сказанному равенства (2) — (5) можно в равной мере понимать и как выражения для преобразований, и как выражения для матриц.

7. Укажем некоторые обобщения понятий, введенных в этом параграфе. Пусть даны два линейных пространства L и L'. Линейным отображением пространства L в пространство L' или линейным оператором из L в L' называется функция $y = Ax$, которая каждому вектору $x \in L$ ставит в соответствие некоторый вектор y из L' и удовлетворяет условию линейности (1). При $L' = L$ получаем линейное преобразование, определенное в п. 1. Для линейных операторов определены действия сложения и умножения на число согласно формулам (3); можно показать, что множество всех линейных отображений пространства L в L' само образует линейное пространство.

Если каждое из пространств L и L' рассматривать как группу относительно сложения векторов, то любой линейный оператор $L \to L'$ представляет собой гомоморфизм. Если пространства L и L' конечномерны и в них выбраны базисы, то линейный оператор $L \to L'$ задается матрицей и выражается в виде линейного преобразования координат векторов, но в отличие от п. 4 матрица, вообще говоря, будет прямоугольной. При совпадении размерностей L и L' оператор A имеет квадратную матрицу.

Пусть даны три линейных пространства L, L', L'', и пусть рассматриваются два линейных отображения:

1) $y = Bx$, где $x \in L$, $y \in L'$,

2) $z = Ay$, где $y \in L'$, $z \in L''$.

Произведение AB оператора A на оператор B определяется формулой

$$z = ABx = A(Bx)$$

и отображает L в L''. Линейность AB доказывается так же, как в п. 1.

§ 2. Линейное преобразование как тензор

1. Будем считать, что пространство L является n-мерным.

Рассмотрим линейное преобразование $y = Ax$ пространства L. Оно определено инвариантно, то есть независимо от каких бы то ни было базисов.

Теперь нас интересует тензорная природа преобразования. В пространстве L перейдем к новому базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$. Тогда

$$Ae_{k'} = \sum A_{k'}^{\alpha'} e_{\alpha'}.$$

Как выражаются $A_{k'}^{i'}$ через A_k^i? Нетрудно сообразить, что имеет место тензорный закон преобразования, соответствующий расстановке индексов. Это можно установить без всяких вычислений. Действительно, совокупность всех векторов x из L совпадает с множеством всевозможных одновалентных контравариантных тензоров. Свертка $\sum A_k^i x^k$ при любом $x \in L$ дает одновалентный контравариантный тензор y^i, которому соответствует один вполне определенный вектор $y = \sum y^i e_i$, независимо от базиса e_i. Отсюда на основании известного признака (гл. V, § 4, пп. 8, 9) заключаем, что A_k^i — тензор, и сразу можем написать закон преобразования его определяющих чисел:

$$A_{k'}^{i'} = \sum_{i,\, k} A_k^i P_{k'}^k Q_i^{i'}. \tag{1}$$

Таким образом, каждому линейному преобразованию инвариантно сопоставляется тензор

$$A = \sum A_k^i e_i e^k \tag{2}$$

из $T_1^1 = L \otimes L^*$, где $e^1, \ldots, e^n \in L^*$ — базис, взаимный с $e_1, \ldots, e_n$.

Верно и обратное: всякому двухвалентному смешанному тензору можно инвариантно сопоставить линейное преобразование, поскольку свертка тензора (2) с вектором $x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n$ дает контравариантный вектор:

$$y = y^1 e_1 + \ldots + y^n e_n, \quad y^i = \sum A_k^i x^k,$$

не зависящий от выбора базиса $e_1, \ldots, e_n$.

2. Можно рассматривать линейные отображения L в L^*, L^* в L, L^* в L^* и аналогично предыдущему доказать, что им также соответствуют двухвалентные тензоры.

Покажем, как расставить индексы, зная уже, что преобразование представляет собой тензор.

Пусть, например, $u = Ax$, где $x \in L$, $u \in L^*$. Перейдем к координатной записи. Вектор x контравариантный, его координаты помечаются индексами сверху: $\{x^k\}$. Буква A должна иметь нижний индекс k, чтобы можно было провести свертку по k. Вектор u ковариантный, его координаты помечаются индексами снизу: $\{u_i\}$.

Поэтому в результате свертки должен получаться ковариантный вектор. Это значит, что и другой индекс у буквы A должен быть нижним:

$$u_i = \sum A_{ik} x^k.$$

Эта запись соответствует тому, что линейное отображение пространства L в сопряженное пространство L^* сопоставляется с дважды ковариантным тензором A_{ik}.

Аналогично для преобразования $y = Bv$ сопряженного пространства L^* в L имеем координатное представление вида

$$y^i = \sum B^{ij} v_j,$$

так что соответствующий тензор B^{ij} является дважды контравариантным.

3. Пусть A — линейное преобразование пространства L. Матрица A этого преобразования в данном базисе $e_1, \ldots, e_n$ записывается так:

$$A = \begin{Vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \ldots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \ldots & A_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1^n & A_2^n & \ldots & A_n^n \end{Vmatrix}.$$

При переходе к новому базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ получится новая матрица A', элементы которой выражаются формулой (1). Запишем формулу (1) в матричной символике. Для того чтобы не спутать порядок умножения матриц, лучше написать их подробно.

Строчки матрицы P развертываются по верхнему индексу:

$$P = \begin{Vmatrix} P_{1'}^1 & P_{1'}^2 & \ldots & P_{1'}^n \\ P_{2'}^1 & P_{2'}^2 & \ldots & P_{2'}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n'}^1 & P_{n'}^2 & \ldots & P_{n'}^n \end{Vmatrix}.$$

Строчки матрицы Q развертываются по нижнему индексу:

$$Q=\begin{Vmatrix} Q_1^{1'} & Q_2^{1'} & \dots & Q_n^{1'} \\ Q_1^{2'} & Q_2^{2'} & \dots & Q_n^{2'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_1^{n'} & Q_2^{n'} & \dots & Q_n^{n'} \end{Vmatrix}.$$

Формулу (1) можно переписать так:

$$A_{k'}^{i'}=\sum_{i,\ k} Q_i^{i'} A_k^i P_{k'}^k.$$

Отсюда получаем искомое матричное выражение

$$A'=QAP^*$$

или

$$A'=QAQ^{-1}, \tag{1a}$$

где, как обычно,

$$Q=(P^*)^{-1}.$$

4. Из полученных матричных формул вытекают очень важные следствия.

Поскольку Q — невырожденная матрица, то из формулы (1a) следует, что $\mathrm{Rang}\, A'=\mathrm{Rang}\, A$. Таким образом, ранг матрицы A есть инвариант. Далее, инвариантом является определитель линейного преобразования, поскольку

$$\mathrm{Det}\, A'=\mathrm{Det}\, Q\, \mathrm{Det}\, A\, (\mathrm{Det}\, Q)^{-1}=\mathrm{Det}\, A.$$

Инвариантом является также полная свертка тензора A_k^i

$$\sum_{\alpha} A_\alpha^\alpha=A_1^1+A_2^2+\dots+A_n^n,$$

которая представляет собой след матрицы линейного преобразования.

Следует заметить, что когда мы говорим «определитель матрицы» или «след матрицы», не указывая, какому объекту эта матрица отвечает, то вопрос об инвариантности не ясен. Например, и определитель, и след матрицы билинейной формы не являются инвариантами.

5. Пусть A — линейное преобразование пространства, и пусть тем же символом A обозначена матрица этого преобразования в произвольно выбранном базисе. Предыдущий пункт позволяет ввести следующие определения:

1) *Рангом преобразования* A называется ранг матрицы A.

2) *Определителем преобразования* A называется определитель матрицы A.

3) *Следом преобразования* A называется след матрицы A.

Геометрический смысл ранга и определителя преобразования рассмотрен в следующем параграфе.

§ 3. Геометрический смысл ранга и определителя линейного преобразования. Группа невырожденных линейных преобразований

1. Пусть в векторном n-мерном пространстве L задано линейное преобразование A. Предположим, что $\operatorname{Rang} A = r$.

Обозначим через $\mathscr{M}$ или через $A(L)$ образ пространства L, то есть множество элементов y вида $y = Ax$, где x пробегает все L.

Теорема 1. *Множество $\mathscr{M} = A(L)$ есть линейное подпространство размерности r в пространстве L.*

Доказательство. Имеем

$$y = Ax = A(\sum x^k e_k) = \sum x^k Ae_k.$$

Следовательно, $\mathscr{M} = A(L)$ представляет собой линейную оболочку векторов $Ae_1, \ldots, Ae_n$; но, как известно, линейная оболочка данной системы векторов есть подпространство, размерность которого равна рангу этой системы векторов. Координаты векторов $Ae_1, \ldots, Ae_n$ образуют строки матрицы A, так что размерность $A(L)$ равна рангу A. Теорема доказана.

2. Обозначим через $\mathscr{N}$ полный прообраз нулевого вектора θ при преобразовании A, то есть множество всех тех векторов x пространства L, для которых $Ax = \theta$. Множество $\mathscr{N}$ называют *ядром* преобразования A.

Теорема 2. *Если* $\operatorname{Rang} A = r$, *то ядро $\mathscr{N}$ преобразования A является подпространством размерности $n - r$ в пространстве L.*

Доказательство. $x \in \mathscr{N}$ тогда и только тогда, когда $Ax = \theta$. Записав это векторное равенство в координатах в произвольном базисе $e_1, \ldots, e_n$, получим систему однородных линейных уравнений, ранг которой равен r:

$$\left.\begin{array}{c} A_1^1 x^1 + \ldots + A_n^1 x^n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_1^n x^1 + \ldots + A_n^n x^n = 0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Согласно § 5 гл. III множество векторов, координаты которых удовлетворяют системе (1), является подпространством размерности $n-r$, что и требовалось доказать.

3. Теоремы 1 и 2 позволяют дать два геометрических определения ранга преобразования, эквивалентных первоначальному алгебраическому определению (§ 2, п. 5).

1) Ранг линейного преобразования равен размерности образа всего пространства L.

2) Ранг линейного преобразования равен разности между размерностью пространства и размерностью ядра преобразования (то есть полного прообраза нулевого вектора).

4. Пусть $r<n$. Рассмотрим действие преобразования A с геометрической точки зрения.

При этом нам будет удобно не делать разницы между линейным пространством L и соответствующим ему аффинным пространством $\mathfrak{A}$, отождествляя каждую точку из $\mathfrak{A}$ с ее радиус-вектором.

Рассмотрим неоднородную систему уравнений

$$\sum A^i_j x^j = y^i, \quad i=1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $A=\|A^i_j\|$ — матрица рассматриваемого линейного преобразования. Эта система разрешима тогда и только тогда, когда вектор $y=y^1e_1+\ldots+y^ne_n$ принадлежит подпространству $\mathscr{M}=A(L)$. Для каждого $y\in\mathscr{M}$ множество решений системы (2) образует плоскость размерности $n-r$, параллельную подпространству $\mathscr{N}$ (см. в связи с этим §§ 6, 7 гл. III). Очевидно, что каждая точка пространства принадлежит одной из таких плоскостей.

Таким образом, все пространство расслаивается на параллельные плоскости размерности $n-r$, каждая из которых отображается в одну точку подпространства $\mathscr{M}$.

5. Определение. В случае, когда $\operatorname{Rang} A=n$, преобразование A называется *невырожденным*.

Можно дать другие эквивалентные условия невырожденности:

1) $\operatorname{Det} A\neq 0$,
2) $\mathscr{M}=A(L)=L$,
3) $\mathscr{N}=\theta$.

Каждый элемент пространства L имеет в этом случае прообраз и притом единственный. Это можно проверить непосредственно, решив систему (2) по правилу Крамера. Обозначив через $\tilde{A}_k^i$ элементы обратной матрицы A^{-1}, получим

$$x^i = \sum \tilde{A}_k^i y^k$$

или в символической форме

$$x = A^{-1}y. \tag{3}$$

Преобразование (3) является линейным преобразованием, обратным данному.

6. Теорема 3. *Множество всех невырожденных линейных преобразований образует группу преобразований пространства L.*

Доказательство. Из теоремы о ранге произведения матриц (гл. II, § 4) следует, что преобразование AB невырождено, если невырождены A и B. Далее $\operatorname{Det} A^{-1} = (\operatorname{Det} A)^{-1} \neq 0$, поэтому обратное преобразование A^{-1} невырождено. Таким образом, множество невырожденных линейных преобразований пространства L удовлетворяет определению группы преобразований (см. § 2 гл. VI).

7. Теорема 4. *В n-мерном линейном пространстве невырожденное линейное преобразование A определяется однозначно, если заданы: произвольная система n независимых векторов $x_1, \ldots, x_n$ в качестве прообразов и произвольная система n независимых векторов $y_1, \ldots, y_n$ в качестве образов.*

Доказательство. Векторы $x_1, \ldots, x_n$ примем за базис в L и разложим по этому базису векторы $y_1, \ldots, y_n$

$$y_k = \overset{1}{a}_k x_1 + \ldots + \overset{n}{a}_k x_n. \tag{4}$$

Матрица A искомого преобразования в базисе $x_1, \ldots, x_n$ однозначно определяется заданием векторов (4), поскольку ее столбцы образованы координатами этих векторов ($A_k^i = \overset{i}{a}_k$, см. выше, п. 5 § 1). $\operatorname{Det} A \neq 0$ вследствие независимости векторов (4). Тем самым теорема 4 доказана.

8. Выясним геометрический смысл определителя линейного преобразования A.

С этой целью будем пользоваться понятием объема параллелепипеда (см. § 5 гл. VI). Определим класс базисов по подгруппе матриц с единичным модулем детерминанта и возьмем один из базисов $e_1, \ldots, e_n$ этого класса. Обозначим V_0 ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $e_1, \ldots, e_n$, и вычислим ориентированный объем V параллелепипеда, построенного на векторах $Ae_1, \ldots, Ae_n$. Учитывая, что координаты векторов Ae_i образуют столбцы матрицы A, получаем согласно формуле (6) § 5 гл. VI

$$V = V_0 \operatorname{Det} A.$$

Следовательно, *при данном линейном преобразовании все объемы изменяются в одно и то же число раз, и детерминант преобразования является коэффициентом этого изменения.* В случае невырожденного преобразования получаем $V \neq 0$, причем базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $Ae_1, \ldots, Ae_n$ имеют одинаковую ориентацию, если $\operatorname{Det} A > 0$, и противоположную ориентацию, если $\operatorname{Det} A < 0$. В случае вырожденного преобразования $\operatorname{Det} A = 0$, векторы $Ae_1, \ldots, Ae_n$ линейно зависимы, $V = 0$. Заметим еще, что равенство (5) может быть непосредственно выведено из теоремы об определителе произведения матриц.

§ 4. Инвариантные подпространства

1. Определение. Подпространство $L' \subset L$ называется *инвариантным* подпространством преобразования $y = Ax$, если $Ax \in L'$ для каждого $x \in L'$. (Символически можно записать $A(L') \subset L'$.)

Примерами инвариантных подпространств могут служить подпространства $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$, введенные в § 3. Докажем это:

1) $Ax \in \mathscr{M}$ для любого вектора $x \in L$, в частности для любого $x \in \mathscr{M}$, поэтому $A(\mathscr{M}) \subset \mathscr{M}$.

2) Если $x \in \mathscr{N}$, то $Ax = \theta \in \mathscr{N}$, так что $A(\mathscr{N}) \subset \mathscr{N}$.

Нулевое подпространство (состоящее из одного вектора θ) инвариантно для любого линейного преобразования A, поскольку $A\theta = \theta$.

2. Пусть L' — подпространство, инвариантное относительно A. Тогда преобразование A не выводит за пределы L' векторы, принадлежащие L'. Тем самым в подпространстве L' определено линейное преобразование

$$y = Ax, \quad x \in L', \quad y \in L'. \tag{1}$$

Мы будем говорить, что преобразование A, заданное в пространстве L, индуцирует преобразование (1) в инвариантном подпространстве L'. Иногда удобно индуцированное преобразование обозначать другим символом (отличным от буквы A), например A'. Тогда $A'x = Ax$, если $x \in L'$, $A'x$ не определено, если x не принадлежит L'.

Если преобразование A невырождено, то индуцированное преобразование A' тоже невырождено, и потому $A(L') = A'(L') = L'$. Это ясно, поскольку в противном случае нашелся бы вектор $x \in L' \subset L$, $x \neq \theta$, для которого $Ax = \theta$.

3. Если подпространство $\tilde{L}$ не инвариантно относительно A, то найдется вектор $x \in \tilde{L}$, для которого Ax не принадлежит $\tilde{L}$. Поэтому A не индуцирует в подпространстве $\tilde{L}$ никакого преобразования.

4. Покажем, что если известно инвариантное подпространство L', то можно упростить матрицу преобразования, поместив в L' несколько базисных векторов.

Пусть векторы $e_1, \ldots, e_k \in L'$. Тогда их образы принадлежат L' и разлагаются по этим же векторам:

$$\begin{gathered} Ae_1 = A_1^1 e_1 + \ldots + A_1^k e_k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Ae_k = A_k^1 e_1 + \ldots + A_k^k e_k. \end{gathered}$$

Дальше идут, вообще говоря, более длинные разложения:

$$\begin{gathered} Ae_{k+1} = A_{k+1}^1 e_1 + \ldots + A_{k+1}^k e_k + A_{k+1}^{k+1} e_{k+1} + \ldots + A_{k+1}^n e_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Ae_n = A_n^1 e_1 + \ldots + A_n^k e_k + A_n^{k+1} e_{k+1} + \ldots + A_n^n e_n. \end{gathered}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае матрица преобразования (транспонированная по отношению к матрице коэффициентов выписанных разложений) запишется так:

$$A = \left\| \begin{matrix} A_1^1 & \ldots & A_k^1 & A_{k+1}^1 & \ldots & A_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_1^k & \ldots & A_k^k & A_{k+1}^k & \ldots & A_n^k \\ & & & A_{k+1}^{k+1} & \ldots & A_n^{k+1} \\ & \boxed{0} & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & A_{k+1}^n & \ldots & A_n^n \end{matrix} \right\|. \qquad (2)$$

5. Рассмотрим важный частный случай, когда пространство L является прямой суммой двух ненулевых инвариантных подпространств L' и L'':

$$L = L' \oplus L'', \quad A(L') \subset L', \quad A(L'') \subset L''.$$

Выберем базисы в L' и L'':

$$e_1, \ldots, \; e_k \in L', \quad e_{k+1}, \ldots, \; e_n \in L''.$$

Тогда по теореме 4 из § 14 гл. I векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис пространства L. В таком базисе выкладки предыдущего пункта применимы и к $e_1, \ldots, e_k$ и к $e_{k+1}, \ldots, e_n$; поэтому матрица A распадается на два автономных «ящика»

$$A = \left\| \begin{array}{c|c} \boxed{k \times k} & 0 \\ \hline 0 & \boxed{(n-k) \times (n-k)} \end{array} \right\|.$$

Эти «ящики» представляют собой матрицы линейных преобразований, индуцированных на L' и L''.

Тем самым изучение преобразования всего пространства в целом сводится к изучению его действия в L' и L''.

6. Ниже, в § 10, используется

Лемма. *Если $L = L' \oplus L''$ и подпространства L', L'' инвариантны относительно A, то $A(L) = A(L') \oplus A(L'')$.*

Доказательство. Если L есть сумма L' и L'' (хотя бы и не прямая), то, как нетрудно проверить, $A(L) = A(L') + A(L'')$. С другой стороны, вследствие инвариантности L' и L'' имеем

$$A(L') \subset L', \quad A(L'') \subset L''.$$

Отсюда

$$A(L') \cap A(L'') \subset L' \cap L'',$$

но сумма L' и L'' прямая, поэтому $L' \cap L'' = \theta$. Следовательно, $A(L') \cap A(L'') = \theta$ и, значит, $A(L') + A(L'') = A(L') \oplus A(L'')$, что и требовалось доказать.

§ 5. Примеры линейных преобразований

Предварительное замечание. Рассматривая примеры преобразований, удобно не делать разницы между линейным пространством L и соответствующим аффинным пространством $\mathfrak{A}$ (как в п. 4 § 3).

1. Подобие. Размерность пространства L любая. Преобразование задается формулой

$$Ax = \lambda x$$

для любого x и некоторого фиксированного λ, называемого коэффициентом подобия. Все векторы «растягиваются» в одинаковое число раз (при $|\lambda| < 1$ — фактически сжимаются). В этом случае каждое подпространство является инвариантным. Матрица подобного преобразования n-мерного пространства при произвольном выборе базиса имеет вид

$$A = \lambda E = \begin{Vmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{Vmatrix}; \quad \operatorname{Det} A = \lambda^n.$$

Тождественное преобразование E можно рассматривать как подобие с коэффициентом, равным единице, а нулевое преобразование Θ — как подобие с коэффициентом, равным нулю. В пространстве всех линейных преобразований, заданных на L, подобные преобразования $A = \lambda E$ образуют одномерное подпространство (прямую, проходящую через точки Θ и E).

2. $n = 3$. Пусть $x = \{x^1, x^2, x^3\}$—произвольный вектор, $y = \{y^1, y^2, y^3\}$ — его образ. Преобразование $y = Ax$ зададим формулами

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + x^2 + x^3, \\ y^2 = x^1 + x^2 + x^3, \\ y^3 = 2x^1 + x^2 - x^3. \end{cases} \tag{1}$$

Ясно, что преобразование вырожденное, причем $\operatorname{Rang} A = 2$. Образом всего пространства служит подпространство $\mathscr{M} = A(L)$, задаваемое уравнением

$$y^2 = y^1.$$

Найдем полный прообраз произвольной точки $y^1 = a$, $y^2 = a$, $y^3 = b$ плоскости $\mathscr{M} = A(L)$ (рис. 29). При указанных значениях y^1, y^2, y^3 система (1) совместна; первое уравнение можно отбросить, и останутся два уравнения, определяющие прямую:

$$x^1 + x^2 + x^3 = a,$$
$$2x^1 + x^2 - x^3 = b,$$

которую обозначим через $\mathscr{P}$.

Найденная прямая и есть искомый прообраз. При разных a и b все такие прямые параллельны между собой и покрывают все пространство. На рис. 29 буквой $\mathcal{N}$ обозначена прямая, которая является полным прообразом θ. Точки, не лежащие на плоскости $A(L)$, прообразов не имеют.

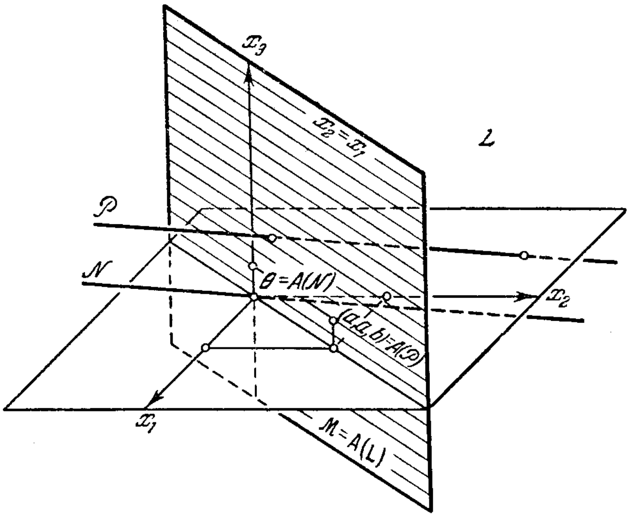


Рис. 29.

3. $n=2$. Преобразование $y=Ax$ зададим формулами

$$\begin{cases} y^1 = kx^1, \\ y^2 = x^2. \end{cases}$$

Матрица преобразования $A = \begin{Vmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Возьмем произвольную точку M и ее образ M'. Отрезок MM' параллелен оси x^1. Продолжим этот отрезок до пересечения с осью x^2 в точке K (рис. 30). Тогда при любом выборе точки M имеем

$$\frac{KM'}{KM} = k.$$

Если $|k| < 1$, то отрезок KM сжимается. Если $k < 0$, то точки M и M' лежат в разных полуплоскостях $x^1 > 0$ и $x^1 < 0$ (рис. 31).

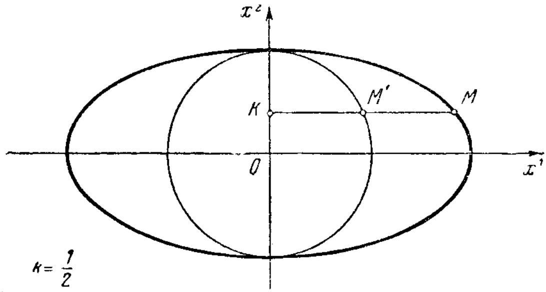


Рис. 30.

Такое преобразование называется сжатием по направлению оси x^1 к оси x^2. Название «сжатие» условно; при $|k| > 1$ следовало бы говорить «растяжение».

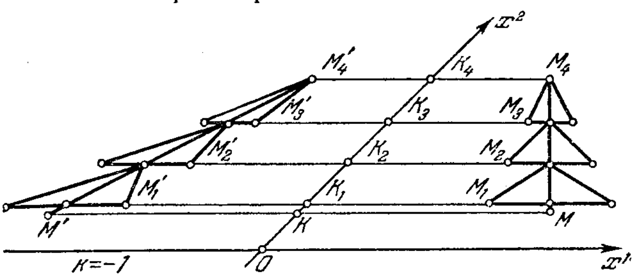


Рис. 31.

4. Преобразование

$$\begin{cases} y^1 = x^1, \\ y^2 = \qquad kx^2 \end{cases}$$

с матрицей $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{Vmatrix}$ представляет собой сжатие в направлении оси x^2 к оси x^1 (при $|k| > 1$ фактически происходит растяжение, см. рис. 32).

5. Преобразование

$$\left.\begin{aligned} y^1 &= k_1 x^1, \\ y^2 &= \qquad k_2 x^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

называется сжатием по направлениям двух осей $\left(\text{см. рис. 33, на котором } k_1 = \frac{1}{2},\ k_2 = 2\right)$.

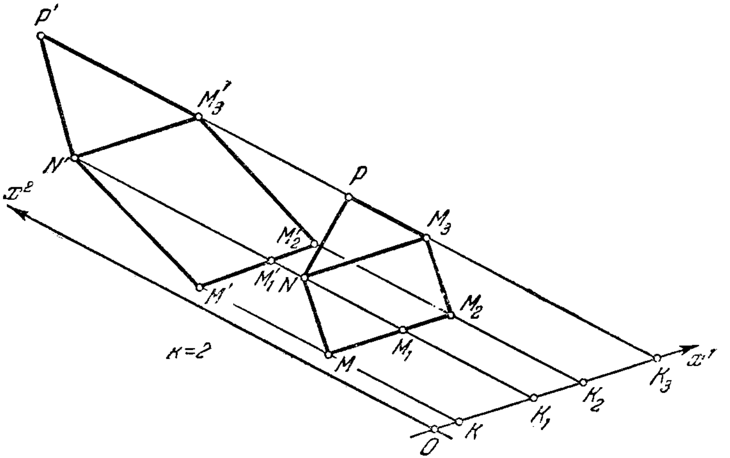


Рис. 32.

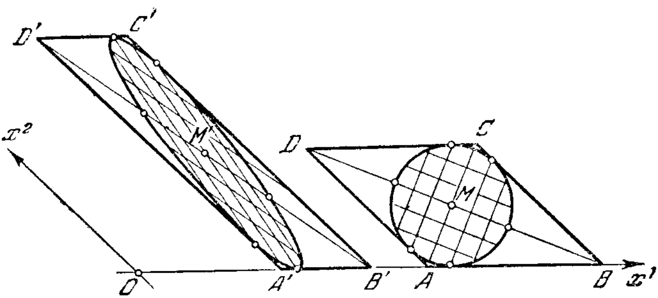


Рис. 33.

Матрица преобразования (2) является диагональной: $A = \begin{Vmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{Vmatrix}$. Положим $A_1 = \begin{Vmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{Vmatrix}$.

Тогда $A = A_1 A_2 = A_2 A_1$. Поэтому преобразование с матрицей A можно получить как суперпозицию сжатия в направлении оси x^1 к оси x^2 и сжатия в направлении оси x^2 к оси x^1, произведенных в любом порядке. Преобразования такого вида часто встречаются в теории упругости.

Легко проверить, что в каждом из примеров пп. 3—5 оси x^1 и x^2 являются инвариантными подпространствами.

6. Пусть $L = L' \oplus L''$; размерность L какая угодно, подпространства L' и L'' не нулевые. Пусть L' и L'' — инвариантные подпространства преобразования A, которое в L' индуцирует тождественное преобразование, а в L'' — подобие с коэффициентом λ. Такое преобразование называется сжатием с коэффициентом λ к подпространству L' в направлении подпространства L''.

Представив x в виде $x = x' + x''$, $x' \in L'$, $x'' \in L''$, получим

$$Ax = x' + \lambda x''.$$

Пусть векторы $e_1, \ldots, e_k$ образуют базис в L', векторы $e_{k+1}, \ldots, e_n$ — базис в L''. Тогда в базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрица преобразования A имеет вид

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \lambda \end{Vmatrix}.$$

Отметим, что линейная оболочка $L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ любой подсистемы базиса $e_1, \ldots, e_n$ представляет собой инвариантное подпространство.

7. Положив в предыдущем примере $\lambda = 0$, получим преобразование, которое называется проекцией пространства L на подпространство L' в направлении подпространства L''. Проекцию можно определить непосредственно следующим образом. Если x — любой вектор из L, то он однозначно представляется в виде $x = x' + x''$, где $x' \in L'$, $x'' \in L''$. Тогда проекция x на L' в направлении L'' есть $Ax = x'$. Проекция является вырожденным преобразованием, образом всего L служит L', а полным прообразом нулевого вектора является L''.

8. Далее в виде примера мы даем следующую важную для дальнейшего конструкцию. Пусть в пространстве L

зафиксирован базис $e_1, \ldots, e_n$. В этом базисе преобразование, которое мы обозначим $G_n(\lambda)$ или, короче, G, зададим формулами

$$\left.\begin{array}{l} Ge_1 = \lambda e_1, \\ Ge_2 = e_1 + \lambda e_2, \\ Ge_3 = \qquad e_2 + \lambda e_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ge_n = \qquad\qquad e_{n-1} + \lambda e_n. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Матрица этого преобразования в базисе $e_1, \ldots, e_n$ называется *n-мерной жордановой клеткой, соответствующей числу* λ:

$$G_n(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{Vmatrix}.$$

На главной диагонали жордановой клетки стоят λ, на параллельной соседней сверху диагонали — единицы, остальные элементы — нули.

Подпространства вида $L(e_1, \ldots, e_k)$, $k < n$, являются инвариантными, в каждом из них преобразование задается жордановой клеткой $G_k(\lambda)$ размерности k.

Очевидно, что преобразование $G_n(\lambda)$ вырождено тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$. В этом случае $\mathscr{M} = G(L) = L(e_1, \ldots, e_{n-1})$, $\mathscr{N} = L(e_1)$.

Рассмотрим подробнее трехмерный случай при $\lambda = 0$. Преобразование $A = G_3(0)$ задается формулой

$$\begin{Vmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Vmatrix},$$

так что

$$y^1 = x^2, \quad y^2 = x^3, \quad y^3 = 0.$$

Каждая прямая, параллельная оси x^1 и пересекающая плоскость $x^1 = 0$ в точке $(0, a, b)$, переводится в точку с координатами $(a, b, 0)$, расположенную на плоскости $x^3 = 0$. Если оси x^1, x^2, x^3 взаимно перпендикулярны, то можно считать, что сначала все пространство проектируется на плоскость (x^2, x^3), а затем эта плоскость накладывается на

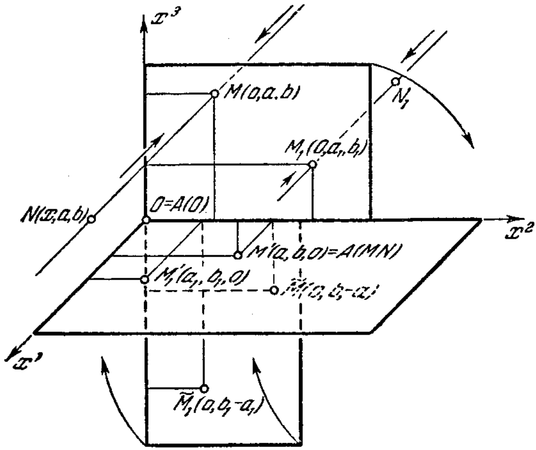


Рис. 34.

плоскость (x^1, x^2) так, что положительная полуось x^2 совмещается с положительной полуосью x^1, положительная полуось x^3 совмещается с положительной полуосью x^2 (рис. 34).

§ 6. Собственные векторы и характеристический многочлен преобразования

1. Определение. *Собственным вектором* данного линейного преобразования A называется всякий ненулевой вектор x, удовлетворяющий условию

$$Ax = \lambda x, \tag{1}$$

где λ — какое-нибудь число.

Число λ называется *собственным значением* преобразования A, соответствующим данному собственному вектору x.

Для краткости говорят: «λ — собственное значение данного собственного вектора». Собственный вектор переходит в коллинеарный ему вектор. В действительном пространстве собственное значение показывает, во сколько раз собственный вектор «вытягивается» (при $|\lambda| < 1$ фактически «сжимается»).

Нетрудно сообразить, что если x — собственный вектор, то αx — также собственный вектор при любом $\alpha \neq 0$, и что линейная оболочка каждого собственного вектора представляет собой инвариантное одномерное подпространство (инвариантную прямую).

2. Во многих вопросах алгебры и ее приложений встречается необходимость найти все собственные векторы данного линейного преобразования. Займемся этой задачей.

Рассмотрим линейное преобразование $y = Ax$. Рассмотрим вместе с ним тождественное преобразование E. Мы имеем $Ex = E$ при любом $x \in L$. Поэтому условие (1), при котором x является собственным вектором данного преобразования, можно записать в виде

$$(A - \lambda E)\, x = \theta. \tag{2}$$

Пусть преобразование $y = Ax$ представлено в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$ формулами

$$y^k = \sum A^k_j x^j, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Так как единичная матрица $E = \| \delta^k_j \|$, то вследствие (3) соотношение (2) равносильно следующей системе однородных уравнений:

$$\sum \left(A^k_j - \lambda \delta^k_j \right) x^j = 0, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где $x^1, \ldots, x^n$—координаты собственного вектора x в базисе $e_1, \ldots, e_n$, λ — собственное значение вектора x.

Определение. Матрица $A - \lambda E$ системы (4) называется *характеристической матрицей* данного преобразования A, ее определитель

$$p(\lambda) = \operatorname{Det}(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} A^1_1 - \lambda & A^1_2 & \ldots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 - \lambda & \ldots & A^2_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A^n_1 & A^n_2 & \ldots & A^n_n - \lambda \end{vmatrix}$$

называется *характеристическим определителем* преобразования A.

Очевидно, что $p(\lambda)$ есть многочлен степени n относительно λ. Его называют *характеристическим многочленом* матрицы A (или преобразования A).

Общий план решения задачи о собственных векторах сводится теперь к следующему. Сначала составляется так называемое характеристическое уравнение

$$p(\lambda)=0. \tag{5}$$

Равенство (5) необходимо и достаточно для того, чтобы система (4) имела нетривиальные решения. Поэтому в комплексном пространстве корни уравнения (5) и только они являются собственными значениями преобразования A. В действительном пространстве собственными значениями являются все действительные корни и только они. Допустим, что все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ найдены. Предположим для определенности, что мы имеем дело с действительным пространством. Тогда, отбросив все комплексные корни, будем последовательно перебирать остальные. Каждый из них подставим в систему (4). Каждый раз эта система получит определенные числовые коэффициенты.

Ранг полученной системы будет некоторым числом r, причем $r<n$, так что система будет иметь $n-r$ независимых решений. Найдя их, мы найдем тем самым $n-r$ независимых собственных векторов с одним и тем же собственным значением, равным взятому корню. Их линейная оболочка, с исключением из нее нулевого вектора, дает все собственные векторы с тем же собственным значением. Это следует из теоремы о множестве решений линейной однородной системы уравнений.

Перебрав таким способом все действительные корни характеристического уравнения, мы найдем вообще все собственные векторы данного преобразования.

В случае комплексного пространства нужно перебрать все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

3. Примеры. 1) Подобие представляет собой преобразование, для которого все ненулевые векторы являются собственными с одним и тем же собственным значением, равным коэффициенту подобия.

2) Преобразование $G_n(\lambda_0)$ (см. выше § 5, п. 8) имеет только один линейно независимый собственный вектор. Действительно, для $G_n(\lambda_0)$ характеристический многочлен $p(\lambda)= (\lambda_0-\lambda)^n$ имеет единственный корень $\lambda=\lambda_0$ кратности n. При $\lambda=\lambda_0$ характеристическая матрица $G_n(\lambda_0)-\lambda_0 E$ имеет ранг $n-1$ (ненулевой минор порядка $n-1$ получается

вычеркиванием левого столбца и нижней строки). Поэтому система вида (4), составленная для преобразования $G_n(\lambda_0)$, имеет при $\lambda=\lambda_0$ только одно линейно независимое решение. Из формул (3) § 5 видно, что собственным является вектор e_1.

3) Преобразование двумерной действительной плоскости

$$\left.\begin{aligned} y^1 &= x^1+2x^2, \\ y^2 &= -x^1+x^2 \end{aligned}\right\}$$

не имеет собственных векторов, так как $P(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+3$ не имеет действительных корней.

Предоставляем читателю найти собственные значения и собственные векторы в остальных примерах § 5.

§ 7. Основные теоремы о характеристическом многочлене и собственных векторах

1. Теорема 1. *Ранг характеристической матрицы при фиксированном λ есть инвариант относительно изменения базиса.*

Доказательство. Теорема является следствием общего предложения об инвариантности ранга матрицы линейного преобразования, поскольку характеристическая матрица есть матрица преобразования $A-\lambda E$.

2. Теорема 2. *Характеристический многочлен $p(\lambda)$ инвариантен относительно преобразования базиса.*

Доказательство. Пусть A и A' — матрицы данного преобразования в базисах $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$, P — матрица перехода от первого базиса ко второму, $Q=(P^*)^{-1}$. Согласно § 2 имеем

$$A'-\lambda E=A'-\lambda E'=Q(A-\lambda E)Q^{-1} \tag{1}$$

($E'=E$, так как тождественное преобразование в любом базисе имеет единичную матрицу). Из (1) находим

$$\operatorname{Det}(A'-\lambda E)=\operatorname{Det} Q \operatorname{Det}(A-\lambda E)\operatorname{Det} Q^{-1}=\operatorname{Det}(A-\lambda E).$$

Замечание. Запишем характеристический многочлен в виде

$$p(\lambda)=(-1)^n[\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}- \ldots +(-1)^n p_n].$$

Нетрудно проверить, что p_1 — след матрицы A, $p_n=\operatorname{Det} A$. Из теоремы 2 вытекает инвариантность всех коэффициентов

$p(\lambda)$, в частности p_1 и p_n. Тем самым мы получили другое доказательство инвариантности определителя и следа матрицы преобразования.

3. Теорема 3. *Если $L = L_1 \oplus L_2$, L_1 и L_2 ненулевые инвариантные относительно A подпространства, то $p(\lambda) = p_1(\lambda) p_2(\lambda)$, где $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$ — характеристические многочлены преобразований, индуцированных в L_1 и L_2.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — базис в L_1, $e_{k+1}, \ldots, e_n$ — базис в L_2. Согласно § 4 в базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства L матрица $A - \lambda E$ имеет вид

$$A - \lambda E = \left\| \begin{array}{cccc|ccc} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1k} & & & \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2k} & & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} - \lambda & & & \\ \hline & & & & a_{k+1\,k+1} - \lambda & \ldots & a_{k+1\,n} \\ & 0 & & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & a_{n\,k+1} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{array} \right\|.$$

Отсюда

$$\operatorname{Det}(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} - \lambda \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} a_{k+1\,k+1} - \lambda & \ldots & a_{k+1\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n\,k+1} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda).$$

4. Теорема 4. *Если некоторому собственному значению λ отвечает m линейно независимых собственных векторов, то их линейная оболочка L является m-мерным инвариантным подпространством, а индуцированное в $\tilde{L}$ преобразование есть подобие с коэффициентом λ.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — линейно независимые собственные векторы, соответствующие числу λ. Возьмем произвольный вектор x из $\tilde{L} = L(e_1, \ldots, e_m)$, разложим его по базису $e_1, \ldots, e_m$ подпространства $\tilde{L}$ и применим к нему данное преобразование A.

Получим

$$Ax = A(x^1 e_1 + \ldots + x^m e_m) = x^1 Ae_1 + \ldots + x^m Ae_m = \\ = x^1 \lambda e_1 + \ldots + x^m \lambda e_m = \lambda x \in \tilde{L},$$

откуда и вытекает теорема 4.

5. В приложениях линейной алгебры очень важную роль играет вопрос об упрощении матрицы линейного преобразования за счет выбора подходящего базиса.

Теорема 5. *Матрица преобразования A диагональна тогда и только тогда, когда базис состоит из собственных векторов.*

Доказательство. 1) Если базис $e_1, \ldots, e_n$ состоит из собственных векторов преобразования A, то

$$\left.\begin{array}{llll} Ae_1 = \lambda_1 e_1, & & & \\ Ae_2 = & \lambda_2 e_2, & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Ae_n = & & & \lambda_n e_n, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения (вообще говоря, различные). Коэффициенты правых частей равенств (2) образуют матрицу A^*, которая в данном случае совпадает с матрицей A:

$$A^* = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{Vmatrix} = A. \qquad (3)$$

Преобразование $y = Ax$ в этом базисе имеет координатное представление

$$\left.\begin{array}{llll} y_1 = \lambda_1 x_1, & & & \\ y_2 = & \lambda_2 x_2, & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n = & & & \lambda_n x_n. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

2) Пусть дано, что в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрица A имеет диагональный вид

$$A = \begin{Vmatrix} A_1^1 & & & 0 \\ & A_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n^n \end{Vmatrix}.$$

Тогда $A^* = A$,

$$\left.\begin{aligned} Ae_1 &= A_1^1 e_1, \\ Ae_2 &= \qquad A_2^2 e_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ae_n &= \qquad\qquad A_n^n e_n, \end{aligned}\right\}$$

а это значит, что все базисные векторы собственные, причем $\lambda_i = A_i^i$. Теорема доказана.

Замечание. Преобразование (4) можно представить как произведение n сжатий; сначала производится сжатие с коэффициентом λ_1 к подпространству $L(e_2, \ldots, e_n)$ в направлении $L(e_1)$, затем сжатие с коэффициентом λ_2 к подпространству $L(e_1, e_3, \ldots, e_n)$ в направлении $L(e_2)$ и т. д. Нетрудно проверить, что сжатия можно проводить в любом порядке. (При $|\lambda_i| > 1$ фактически получаются «растяжения».)

6. Примеры п. 3 предыдущего параграфа показывают, что базиса из собственных векторов может не быть, а тогда матрицу преобразования нельзя привести к диагональному виду. Вопрос о том, как в таком случае можно упростить матрицу преобразования, рассматривается ниже, в §§ 9, 10.

§ 8. Нильпотентные преобразования. Общая структура вырожденных преобразований

1. В этом параграфе рассматриваются вырожденные линейные преобразования в n-мерном пространстве L, действительном или комплексном — безразлично.

2. Определение. Преобразование B называется *нильпотентным*, если $B^p = \Theta$ для какой-либо положительной степени p.

Иначе говоря,

$$B^p x = \theta \quad \text{для любого} \quad x \in L. \tag{1}$$

Наименьшее (натуральное) число p, для которого соблюдается (1), называется *высотой* нильпотентного преобразования.

Замечание. Если $B^p x = \theta$ для некоторого числа p и некоторого вектора $x \in L$, то для этого вектора x и любого (целого) $m > p$ имеем

$$B^m x = B^{m-p}(B^p x) = B^{m-p}\theta = \theta.$$

Простейшим примером нильпотентного преобразования может служить нулевое преобразование Θ; его высота равна единице.

Всякое нильпотентное преобразование выраждено. Это ясно: если $B^p = \Theta$, то $\operatorname{Det}(B^p) = (\operatorname{Det} B)^p = 0$; значит, $\operatorname{Det} B = 0$.

Однако нильпотентные преобразования — это не просто частный случай выражденных преобразований; они являются основным элементом в структуре любого выражденного преобразования. Именно, справедлива

Теорема. *Пусть B — выражденное линейное преобразование пространства L. Тогда*

$$L = L_1 \oplus L_2, \tag{2}$$

где L_1, L_2 — инвариантные подпространства, причем:

1) *преобразование, индуцированное в L_1, нильпотентно;*

2) *если подпространство L_2 не нулевое, то индуцированное в нем преобразование невыраждено.*

Короче, можно сказать, что B нильпотентно в L_1 и невыраждено в L_2. В частности, преобразование B нильпотентно в пространстве L, если размерность L_1 равна n ($L_1 = L$), а размерность L_2 равна нулю ($L_2 = \theta$) и только в этом случае.

Доказательство см. ниже, п. 4; оно опирается на вспомогательные предложения, изложенные в п. 3.

3. Рассмотрим последовательные степени данного выражденного преобразования B:

$$B,\ B^2,\ B^3,\ \ldots,\ B^k,\ \ldots$$

Обозначим через $\mathcal{N}_k$ ядро преобразования B^k, через $\mathcal{M}_k$ — образ всего пространства L при преобразовании B^k. Пусть r_k — размерность $\mathcal{M}_k$. Согласно п. 1 § 3

$$r_k = \operatorname{Rang}(B^k).$$

Исследуем свойства последовательностей подпространств $\mathscr{M}_k$ и $\mathscr{N}_k$ $(k=1, 2, \ldots)$.

1) *$\mathscr{M}_k$ при любом k является инвариантным подпространством для преобразования B.*

Доказательство. Если $x \in \mathscr{M}_k$, то существует $y \in L$ такой, что $B^k y = x$. Отсюда находим

$$Bx = B(B^k y) = B^{k+1} y = B^k (By) \in \mathscr{M}_k.$$

2) *Имеют место следующие включения:*

$$L \supset \mathscr{M}_1 \supset \mathscr{M}_2 \supset \ldots \supset \mathscr{M}_k \supset \mathscr{M}_{k+1} \supset \ldots \tag{3}$$

В самом деле, включения (3) следуют из предыдущего свойства, так как $\mathscr{M}_{k+1} = B(\mathscr{M}_k) \subset \mathscr{M}_k$.

3) *Справедливы соотношения*

$$n > r_1 > \ldots > r_{p-1} > r_p = r_{p+1} = \ldots = r_k = \ldots, \tag{4}$$

где p — некоторое натуральное число. Вместе с тем

$$\mathscr{M}_k = \mathscr{M}_p \quad \text{при} \quad k > p.$$

В инвариантном подпространстве $\mathscr{M}_p$ индуцируется невырожденное преобразование.

Доказательство. Из (3) видно, что $r_j \geqslant r_{j+1}$. Вследствие вырожденности B имеем $r_1 < n$. Ранги r_j неотрицательны, поэтому строгих неравенств в последовательности (4) может быть лишь конечное число. Пусть p — *наименьшее* натуральное число, для которого соблюдается равенство

$$r_p = r_{p+1}. \tag{5}$$

Если $r_p = 0$, то, очевидно, $r_k = r_p = 0$, $\mathscr{M}_k = \mathscr{M}_p = \theta$ при $k > p$. Пусть $r_p \geqslant 1$. Тогда из (5) и (3) следует, что B индуцирует в подпространстве $\mathscr{M}_p$ невырожденное преобразование, то есть $\mathscr{M}_{p+1} = B(\mathscr{M}_p) = \mathscr{M}_p$, откуда $\mathscr{M}_{p+2} = B(\mathscr{M}_{p+1}) = B(\mathscr{M}_p) = \mathscr{M}_p$. Аналогично $\mathscr{M}_{p+3} = \mathscr{M}_p$, ..., $\mathscr{M}_k = \mathscr{M}_p$ при любом $k > p$. Вместе с тем $r_k = r_p$ при $k > p$. Третье свойство доказано полностью.

4) *Имеют место следующие включения:*

$$\mathscr{N}_1 \subset \mathscr{N}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{N}_k \subset \mathscr{N}_{k+1} \subset \ldots \tag{6}$$

При этом

$$\mathscr{N}_k = \mathscr{N}_p, \quad \text{если} \quad k > p, \tag{7}$$

где p — наименьшее число, удовлетворяющее условию (5).

Доказательство. Включения (6) очевидны. В самом деле, если $x \in \mathscr{N}_k$, то $B^k x = \theta$ и $B^{k+1}x = B(B^k x) = \theta$, так что $x \in \mathscr{N}_{k+1}$.

По теореме 2 § 3 размерность n_k подпространства $\mathscr{N}_k$ равна $n - r_k$. До тех пор, пока ранги r_k строго убывают с ростом k, размерности n_k строго возрастают. Для $k \geqslant p$ все ранги r_k одинаковы; вместе с тем одинаковы и размерности $n_p, n_{p+1}, \ldots, n_k, \ldots$ Отсюда и из (6) следует (7).

5) *$\mathscr{N}_k$ при любом k является инвариантным подпространством преобразования B. Преобразование, индуцированное в $\mathscr{N}_k$, нильпотентно.*

Доказательство. Инвариантность $\mathscr{N}_k$ при $k = 1$ следует из соотношений $B(\mathscr{N}_1) = \theta \in \mathscr{N}_1$, а при $k > 1$ — из включений (6), поскольку $B(\mathscr{N}_k) \subset \mathscr{N}_{k-1} \subset \mathscr{N}_k$. Нильпотентность преобразования, индуцированного в $\mathscr{N}_k$, очевидна, так как $B^k(\mathscr{N}_k) = \theta$.

4. Доказательство теоремы п. 2. Покажем, что

$$L = \mathscr{N}_p \oplus \mathscr{M}_p, \tag{8}$$

если p удовлетворяет условию (5). Поскольку B нильпотентно в $\mathscr{N}_p$ и невырождено в $\mathscr{M}_p$, то тем самым будет получено искомое разложение (2) ($L_1 = \mathscr{N}_p$, $L_2 = \mathscr{M}_p$). Мы знаем, что сумма размерностей $\mathscr{N}_p$ и $\mathscr{M}_p$ равна n, поэтому для получения формулы (8) достаточно проверить, что

$$\mathscr{N}_p \cap \mathscr{M}_p = \theta \tag{9}$$

(см. в связи с этим § 14 гл. I).

Равенство (9) докажем от противного. Пусть $x \neq \theta$, $x \in \mathscr{N}_p \cap \mathscr{M}_p$. Рассмотрим векторы

$$x, Bx, \ldots, B^p x = \theta. \tag{10}$$

Все они принадлежат $\mathscr{M}_p$ (вследствие инвариантности $\mathscr{M}_p$). Обозначим через y последний из векторов системы (10), отличный от θ ($y = B^k x$, где k — некоторое число, $0 \leqslant k < p$). Тогда будем иметь

$$y \neq \theta, \quad By = \theta, \quad y \in \mathscr{M}_p. \tag{11}$$

Но (11) противоречит невырожденности преобразования B в подпространстве $\mathscr{M}_p$. Тем самым (9) установлено, и теорема доказана.

5. Замечания. 1) Из п. 3 видно, что высота нильпотентного преобразования, индуцированного в подпространстве $\mathcal{N}_p$, равна p (здесь, как и выше, p — наименьшее из чисел, удовлетворяющих условию (5); при $k<p$ с ростом k происходит расширение подпространств $\mathcal{N}_k$ и сужение подпространств $\mathcal{M}_k$; при $k \geqslant p$ подпространства $\mathcal{N}_k$ и $\mathcal{M}_k$ уже не изменяются).

Таким образом, подпространство $\mathcal{N}_p$ может быть найдено как ядро преобразования B^k при любом $k \geqslant p$. Аналогично $\mathcal{M}_p = B^k(L)$ при $k \geqslant p$.

2) Нетрудно заметить также, что при $k<p$ пересечения $\mathcal{N}_k \cap \mathcal{M}_k$ содержат ненулевые векторы, поэтому суммы $\mathcal{N}_k + \mathcal{M}_k$ не являются прямыми и не исчерпывают всего пространства L.

§ 9. Канонический базис нильпотентного преобразования

1. Рассмотрим еще некоторые вопросы, связанные с нильпотентными преобразованиями. Сначала введем терминологию, важную для дальнейшего.

Будем говорить, что векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *образуют серию длиной k относительно преобразования B* (не обязательно нильпотентного), если эти векторы не нулевые, и если

$$Ba_1 = a_2,\ Ba_2 = a_3,\ \ldots,\ Ba_{k-1} = a_k,\ Ba_k = \theta. \qquad (1)$$

Вектор a_1 будем называть *старшим* или *первым*, вектор a_k — *младшим* или *последним* вектором серии (1). Если $a \neq \theta$, $Ba = \theta$, то будем говорить, что a образует серию, состоящую из одного вектора, и является в ней одновременно старшим и младшим.

Базис пространства L будем называть *каноническим* относительно преобразования B, если он состоит из одной серии или из нескольких серий, не имеющих друг с другом общих векторов.

2. Отметим следующие свойства нильпотентных преобразований:

1) *Если в пространстве L имеется серия относительно нильпотентного преобразования B, содержащая k векторов, то высота этого преобразования $p \geqslant k$.*

В самом деле, в серии вида (1) $B^{k-1}a_1 = a_k \neq \theta$, откуда $p > k-1$.

2) *Если высота нильпотентного преобразования B равна p, то существует серия относительно B длиной p и нет более длинных серий.*

Доказательство. По определению высоты в пространстве существует вектор x такой, что $B^{p-1}x \neq \theta$. Тогда векторы

$$x, \quad Bx, \quad B^2x, \quad \ldots, \quad B^{p-1}x$$

образуют серию длиной p, так как среди них нет нулевых (в противном случае $B^{p-1}x$ был бы нулевым) и $B(B^{p-1}x) = B^px = \theta$. Более длинной серии в пространстве быть не может по предыдущему свойству.

3) *Всякая серия линейно независима.*

Доказательство. Напишем для (произвольной) серии (1) соотношение

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \theta. \qquad (*)$$

Подействуем на обе части этого равенства оператором B^{k-1}. Мы получим $\lambda_1 a_k = \theta$, так как $B^{k-1}a_1 = a_k$, $B^{k-1}a_i = \theta$ при $i > 1$. Поскольку $a_k \neq \theta$, находим $\lambda_1 = 0$. Теперь, действуя на (*) оператором B^{k-2}, найдем $\lambda_2 = 0$. Продолжая процесс, получим, что все числа $\lambda_k = 0$. Утверждение доказано.

Следствие. *Если n — размерность пространства L, p — высота нильпотентного преобразования в L, то*

$$p \leqslant n.$$

4) *Если в пространстве L для некоторого преобразования B существует канонический базис, то преобразование B нильпотентно и его высота равна числу векторов в самой длинной серии этого базиса.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис, и пусть в самую длинную из его серий входит k векторов. Тогда для каждого базисного вектора имеем: $B^ke_j = \theta$. Возьмем произвольный вектор $x \in L$, разложим его по базису $e_1, \ldots, e_n$ и применим к нему преобразование B^k:

$$B^kx = B^k(x^1e_1 + \ldots + x^ne_n) = x^1B^ke_1 + \ldots + x^nB^ke_n = \theta.$$

Это значит, что преобразование B нильпотентно и его высота $p \leqslant k$. С другой стороны, по свойству 1) имеем $p \geqslant k$. Следовательно, $p = k$.

3. Примеры. 1) Для нулевого преобразования Θ любой вектор образует серию длиной $k = 1$, поэтому любой базис пространства L является каноническим относительно Θ. Нетрудно заметить, что если преобразование B имеет высоту $p = 1$, то оно является нулевым ($B = \Theta$).

2) Рассмотрим преобразование $G_n(0)$ (см. п. 8 § 5 при $\lambda = 0$). По определению преобразования $G_n(0)$ существует базис $e_1, \ldots, e_n$, состоящий из одной серии:

$$G_n(0)\, e_n = e_{n-1}, \ \ldots, \ G_n(0)\, e_2 = e_1, \ G_n(0)\, e_1 = \theta.$$

Отюда и из свойства 4) в п. 2 следует, что преобразование $G_n(0)$ нильпотентно и его высота $p = n$.

Отметим, что матрица этого преобразования в заданном базисе $e_1, \ldots, e_n$ — вырожденная n-мерная жорданова клетка

$$G_n(0) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & \text{\Large 0} \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \text{\Large 0} & & & & 0 \end{Vmatrix}.$$

3) Пусть в базисе $e_1, \ldots, e_n$ некоторое преобразование B задается матрицей, в которой вдоль главной диагонали располагается несколько вырожденных жордановых клеток разных размерностей, а остальные элементы — нули. Эту матрицу символически запишем так:

$$B = \begin{Vmatrix} G_{k_1}(0) & & & \text{\Large 0} \\ & G_{k_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & G_{k_l}(0) \end{Vmatrix}. \qquad (2)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant k_l$, так как изменением нумерации базисных векторов можно добиться перестановки клеток, идущих вдоль диагонали матрицы B.

Для наглядности выпишем полностью матрицу вида (2) с тремя клетками G_{k_i} размерностей $k_1=4$, $k_2=3$ и $k_3=1$:

$$\left\| \begin{matrix} G_4(0) & & 0 \\ & G_3(0) & \\ 0 & & G_1(0) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc|ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|. \tag{2a}$$

Одномерная клетка $G_1(0)$ состоит из одного числа нуль. В пределах каждой из клеток $G_k(0)$ размерности $k \geqslant 2$ над главной диагональю расположена диагональ из единиц. Между двумя соседними клетками эти единицы разделены нулем.

Таким образом, одна диагональ матрицы (2а), как и вообще любой матрицы вида (2), состоит из единиц, прерываемых нулями. Эта диагональ расположена непосредственно над главной диагональю матрицы. Все остальные элементы матрицы — нули.

Вследствие (2) базис $e_1, \ldots, e_n$ канонический; он состоит из l попарно непересекающихся серий, длина наибольшей из них k_1. Отсюда следует, что B — нильпотентное преобразование с высотой $p=k_1$. Линейная оболочка каждой серии, входящей в базис, является инвариантным подпространством.

Этот пример включает в себя два предыдущих как частные случаи. Если $k_1=1$, то все клетки одномерные, каждая из них состоит из одного числа нуль, вся матрица нулевая, и преобразование B нулевое. Если $l=1$, то матрица B состоит из одной клетки: $B=G_n(0)$.

Нетрудно видеть, что и обратно, если для преобразования B существует канонический базис и попарно непересекающиеся серии базиса расположены одна за другой, то матрица преобразования B в таком базисе имеет вид (2). Каждой серии соответствует клетка $G_{k_\alpha}(0)$, размерность которой k_α равна числу векторов в серии.

4. Последний из рассмотренных выше примеров охватывает всевозможные нильпотентные преобразования. Это следует из основной теоремы (теоремы 1), которую мы чуть дальше сформулируем и докажем.

5. Лемма. *Пусть дана система векторов, которая представляет собой объединение нескольких серий. Тогда, если последние векторы всех этих серий составляют линейно независимую систему, то и вся данная система векторов линейно независима.*

Доказательство удобнее провести после основной теоремы.

Теорема 1. *Для каждого нильпотентного преобразования существует канонический базис (далеко не единственный).*

Доказательство теоремы мы проведем конструктивно, т. е. фактически покажем, как построить канонический базис. Пусть B — нильпотентное преобразование высоты p в n-мерном пространстве L.

Рассмотрим уже знакомую нам последовательность включений

$$\mathscr{N}_1 \subset \mathscr{N}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{N}_k \subset \mathscr{N}_{k+1} \subset \ldots \subset \mathscr{N}_p = L,$$

где $\mathscr{N}_k$ — ядро преобразования B^k. Построим следующие подпространства:

$$\mathscr{K}_2 = B(\mathscr{N}_2), \quad \mathscr{K}_3 = B^2(\mathscr{N}_3), \quad \ldots, \quad \mathscr{K}_p = B^{p-1}(\mathscr{N}_p).$$

Мы имеем $B(\mathscr{K}_i) = \theta$. Следовательно, все $\mathscr{K}_2, \mathscr{K}_3, \ldots, \mathscr{K}_p$ принадлежат $\mathscr{N}_1$ ($\mathscr{K}_i \subset \mathscr{N}_1$). С другой стороны,

$$\mathscr{K}_{i+1} = B^i(\mathscr{N}_{i+1}) = B^{i-1}B(\mathscr{N}_{i+1}) \subset B^{i-1}(\mathscr{N}_i) = \mathscr{K}_i$$

(так как $B(\mathscr{N}_{i+1}) \subset \mathscr{N}_i$). Таким образом,

$$\mathscr{K}_p \subset \mathscr{K}_{p-1} \subset \ldots \subset \mathscr{K}_2 \subset \mathscr{N}_1.$$

Пусть k_j — размерность $\mathscr{K}_j$, n_i — размерность $\mathscr{N}_i$.

Выберем в $\mathscr{N}_1$ базис, векторы которого обозначим

$$e_1^p, \ldots, e_{k_p}^p;\ e_{k_p+1}^{p-1}, \ldots, e_{k_{p-1}}^{p-1};\ \ldots \\ \ldots;\ e_{k_3+1}^2, \ldots, e_{k_2}^2;\ e_{k_2+1}^1, \ldots, e_{n_1}^1. \qquad (3)$$

Точка с запятой разделяет две группы векторов, каждая из которых имеет некоторый специальный характер; эти группы помечены верхним индексом.

Выбор базиса (3) производится при следующих условиях. В качестве первой группы, т. е. e_i^p, берется любой базис в $\mathscr{K}_p$; в качестве второй группы, т. е. e_i^{p-1}, берется любое дополнение e_i^p до базиса $\mathscr{K}_{p-1}$ и т. д.

Поскольку $e_i^p \in \mathscr{K}_p = B^{p-1}(\mathscr{N}_p)$, то все эти векторы имеют прообразы относительно B^{p-1}. Возьмем для вектора e_i^p какой-нибудь прообраз e_i^1. Имеем $e_i^p = B^{p-1}(e_i^1)$. Вместе с тем мы получаем для каждого i ($i = 1, \ldots, k_p$) серию длины p:

$$e_i^1,\ e_i^2 = B(e_i^1),\ \ldots,\ e_i^p = B^{p-1}(e_i^1);$$

$$B^p(e_i^1) = \theta.$$

Аналогично при $k_p < i \leqslant k_{p-1}$ векторы e_i^{p-1} имеют прообразы e_i^1 относительно B^{p-2}, поскольку при этих значениях i будет $e_i^{p-1} \in \mathscr{K}^{p-1} = B^{p-2}(\mathscr{N}_{p-1})$. Соответственно для каждого i ($k_p < i \leqslant k_{p-1}$) получается серия длины $p-1$: e_i^1, $e_i^2 = B(e_i^1)$, $\ldots$, $e_i^{p-1} = B^{p-2}(e_i^1)$; $B^{p-1}(e_i^1) = \theta$. Продолжая процесс, мы получим систему векторов, которую запишем сокращенно по следующей схеме:

$$\begin{array}{l}
e_{k_p}^p;\quad e_{k_{p-1}}^{p-1};\ \ldots;\ e_{k_3}^3;\ e_{k_2}^2;\ e_{n_1}^1;\\
e_{k_p}^{p-1};\ e_{k_{p-1}}^{p-2};\ \ldots;\ e_{k_3}^2;\ e_{k_2}^1;\\
e_{k_p}^{p-2};\ e_{k_{p-1}}^{p-3};\ \ldots;\ e_{k_3}^1;\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
e_{k_p}^2;\quad e_{k_{p-1}}^1;\\
e_{k_p}^1.
\end{array} \tag{4}$$

Здесь в каждой строке из каждой группы выписан только последний представитель; например, в первой строке из группы $e_1^p, \ldots, e_{k_p}^p$ записан только $e_{k_p}^p$.

В схеме (4) некоторые группы могут не существовать. Например, если $\mathscr{K}_p$ совпадает с $\mathscr{K}_{p-1}$, то вторую группу в схеме (4) следует вычеркнуть. Заметим еще для пояснения, что если, например, $\mathscr{K}_2 \equiv \mathscr{K}_3$ ($k_2 = k_3$), то во второй строке схемы (4) выпадает группа $e_{k_2}^1$ и следующая строка имеет ту же длину. В схеме (4) серии расположены по столбцам и идут снизу вверх. Нижний индекс можно рассматривать как номер серии, верхний индекс дает номер вектора внутри серии. Таким образом, в верхней строке расположены последние векторы серий. Они образуют базис в $\mathscr{N}_1$ и, следовательно, линейно независимы; отсюда и по лемме заключаем, что независимы все векторы системы (4). Докажем, что общее число l их равно n, т. е. размерности L. Очевидно,

$$l = n_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_p \tag{5}$$

(напомним, что в схеме (4) каждый написанный столбец на самом деле представляет собой символическое обозначение нескольких столбцов). Пусть ρ_k — ранг преобразования B^k на подпространстве $\mathscr{N}_{k+1}$ (которое является инвариантным относительно B^k, так как $B^k(\mathscr{N}_{k+1}) = \mathscr{K}_{k+1} \subset \mathscr{N}_1 \subset \mathscr{N}_{k+1}$). Учитывая, что $\mathscr{N}_k$ — ядро B^k в подпространстве $\mathscr{N}_{k+1}$, имеем:

$$\begin{aligned}
n_1 &= n_2 - \rho_1, & k_2 &= \rho_1;\\
n_2 &= n_3 - \rho_2, & k_3 &= \rho_2;\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
n_{p-1} &= n_p - \rho_{p-1}, & k_p &= \rho_{p-1};\\
n_p &= n. & &
\end{aligned}$$

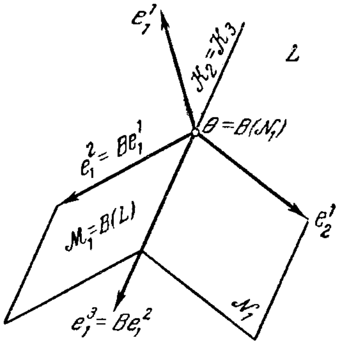


Рис. 35.

Отсюда $n = n_1 + \rho_1 + \ldots + \rho_{p-1} = n_1 + k_2 + \ldots + k_p$. Следовательно, $l = n$, и теорема доказана.

На рис. 35 дана иллюстрация схемы (4) в случае, когда $n = 4$, $p = 3$, $n_1 = 2$, а пространства $\mathscr{K}_2$ и $\mathscr{K}_3$, будучи одномерными, совпадают.

З а м е ч а н и е. Если доказывать только ф а к т с у щ е с т в о в а н и я канонического базиса, то можно ограничиться более краткими рассуждениями, воспользовавшись индукцией по высоте преобразования. Именно, пусть в пространстве L задано нильпотентное преобразование B некоторой высоты $p + 1 \geqslant 2$. Тогда в подпространстве $\mathscr{M}_1 = B(L)$ преобразование B имеет высоту p. Пусть в $\mathscr{M}_1$ канонический базис найден (если $p = 1$, то любой базис в $\mathscr{M}_1$ является каноническим). Начальные векторы серий этого базиса дополним прообразами относительно B, удлинив тем самым каждую из серий на один вектор. Затем совокупность последних векторов серий дополним до базиса в подпространстве $\mathcal{N}_1$. В результате получим систему векторов в числе $r_1+n_1=n$ ($r_1=\operatorname{Rang} B=$ размерности $\mathcal{M}_1$), независимую в силу леммы и потому образующую базис в L, очевидно, канонический.

6. Вернемся к доказательству леммы. Мы всегда можем считать, что данная система векторов записана по схеме (4). Составим произвольную линейную комбинацию всех векторов этой системы и приравняем ее нулевому вектору. В подробной записи мы получим следующее равенство, в левой части которого все суммы берутся только по нижнему индексу:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k_p}\alpha_i^p e_i^p+\sum_{k_{p-1}}\alpha_i^{p-1}e_i^{p-1}+\ldots+\sum_{k_2}\alpha_i^2 e_i^2+\sum_{n_1}\alpha_i^1 e_i^1+\\
&+\sum_{k_p}\alpha_i^{p-1}e_i^{p-1}+\sum_{k_{p-1}}\alpha_i^{p-2}e_i^{p-2}+\ldots+\sum_{k_2}\alpha_i^1 e_i^1+\ldots\\
&\ldots+\sum_{k_p}\alpha_i^2 e_i^2+\sum_{k_{p-1}}\alpha_i^1 e_i^1+\\
&+\sum_{k_p}\alpha_i^1 e_i^1=\theta;
\end{aligned}\tag{6}$$

здесь α_i^k — некоторые числа (коэффициенты линейной комбинации). Расположение написанных сумм соответствует схеме (4). Под знаком каждой суммы указано число, до которого идет суммирование по i, причем начинается суммирование после числа, написанного под знаком предыдущей суммы той же строки (в первых суммах каждой строки суммирование начинается от единицы).

Если в схеме (4) какая-нибудь группа столбцов отсутствует, то в соответствующем столбце соотношения (6) будем считать множители α_i^k равными нулю.

Подействуем на обе части равенства (6) оператором B^{p-1}. Мы получим из последней строки

$$\sum_{k_p}\alpha_i^1 B^{p-1}(e_i^1)=\theta,$$

или

$$\sum_{k_p}\alpha_i^1 e_i^p=\theta \tag{7}$$

(все остальные члены суммы (3) при воздействии на них оператором B^{p-1} дадут в результате θ).

Если последние векторы всех серий образуют независимую систему, то и часть $e_1^p, \ldots, e_{k_p}^p$ этой системы независима. Тогда из (7) имеем

$$\alpha_1^1=0, \ \ldots, \ \alpha_{k_p}^1=0.$$

Теперь вычеркнем в соотношении (6) нижнюю строку. На оставшуюся часть подействуем оператором B^{p-2}. Аналогично предыдущему получим, что числа α_i^2, α_i^1, которые участвуют во второй снизу строке, все равны нулю. Продолжая процесс, установим, что вообще все $\alpha_i^k=0$. Лемма доказана.

7. Пусть B — нильпотентное преобразование с высотой p. Обозначим через l_j число серий длины j в некотором каноническом базисе преобразования B.

Теорема 2. *Для каждого j ($j \leqslant p$) число l_j является инвариантом относительно перехода к другому каноническому базису преобразования B.*

Доказательство. Для базиса, который построен в доказательстве предыдущей теоремы, имеем по построению

$$l_p=k_p; \quad l_j=k_j-k_{j+1}, \quad 2\leqslant j<p; \quad l_1=n_1-k_2.$$

Рассмотрим совершенно произвольный канонический базис. Заметим, что последние векторы всех его серий должны попасть в $\mathscr{N}_1$. Обозначим общее число этих векторов через n_1', число попавших в $\mathscr{K}_p$ через k_p', число попавших в $\mathscr{K}_{p-1}$ через k_{p-1}' и т. д.

Имеем

$$k_p'\leqslant k_p, \quad k_{p-1}'\leqslant k_{p-1}, \quad \ldots, \quad n_1'\leqslant n_1, \tag{8}$$

так как в каждом случае число независимых векторов не больше размерности содержащего их пространства. Пусть n' — число всех векторов рассматриваемого произвольного базиса. Тогда согласно доказательству предыдущей теоремы (см. равенство (5))

$$\begin{aligned} n'&=n_1'+k_2'+\ldots+k_p',\\ n&=n_1+k_2+\ldots+k_p. \end{aligned} \tag{8a}$$

Так как $n'=n$, то из (8) и (8а) находим $n_1'=n_1$, $k_j'=k_j$. Но

$$l_p'=k_p'; \quad l_j'=k_j'-k_{j+1}', \quad 2\leqslant j<p; \quad l_1'=n_1'-k_2'.$$

Следовательно, $l_j'=l_j$ при любом j. Теорема доказана.

Замечание. Сущность доказательства предыдущей теоремы можно высказать в двух словах следующим образом: размерности k_j и n_1 подпространств $\mathscr{K}_j$ и $\mathscr{N}_1$ инвариантны по самому определению этих подпространств; но для любого канонического базиса все l_k выражаются через k_j и n_1. Следовательно, инвариантны и все l_k.

8. Нетрудно выразить l_k через ранги преобразований B^j на данном пространстве L.

Обозначим ранг B^j на L через r_j. По предыдущему имеем

$$n_j = n_{j+1} - \rho_j.$$

Вместе с тем

$$n_j = n - r_j, \qquad n_{j+1} = n - r_{j+1}.$$

Из написанных равенств получаем

$$\rho_j = r_j - r_{j+1}.$$

Таким образом, при $2 \leqslant j < p$

$$l_j = k_j - k_{j+1} = \rho_{j-1} - \rho_j = r_{j-1} - 2r_j + r_{j+1}. \tag{9}$$

Кроме того,

$$l_1 = n - 2r_1 + r_2, \qquad l_p = r_{p-1}. \tag{9a}$$

Замечание. Каждой серии канонического базиса отвечает жорданова клетка в матрице (2). Поэтому формула (9) выражает количество l_k жордановых клеток размерности k в матрице (2) для всех значений k $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Заметим еще, что, полагая $r_0 = n$ (как ранг $B^0 = E$) и $r_k = 0$ при $k \geqslant p$ (поскольку при $k \geqslant p$ имеем $B^k = \Theta$), мы можем вместо (9) и (9a) пользоваться только формулой (9):

$$l_k = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1}; \tag{9}$$

здесь можно брать любое $k \geqslant 1$.

9. Отметим очевидный факт, используемый в дальнейшем. *Преобразование B вырождено тогда и только тогда, когда оно имеет собственное значение, равное нулю.*

10. Теорема 3. *Для того чтобы линейное преобразование B в n-мерном пространстве L было нильпотентным, необходимо и достаточно, чтобы его характеристический многочлен имел вид $p(\lambda) = (-\lambda)^n$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 1, так как в случае нильпотентного преобразования B характеристическая матрица $B-\lambda E$ в каноническом базисе имеет на диагонали элементы $(-\lambda)$, а ниже диагонали нули, и потому

$$p(\lambda)=\mathrm{Det}(B-\lambda E)=(-\lambda)^n.$$

Достаточность сейчас доказывать не будем, так как она вытекает из следующей, более общей теоремы.

11. Пусть B — вырожденное преобразование; пусть

$$p(\lambda)=(-1)^n\lambda^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ \ldots\ (\lambda-\lambda_j)^{m_j} \tag{10}$$

— его характеристический многочлен. Корни $\lambda_2, \ldots, \lambda_j$ (вообще говоря, комплексные) все разные.

Согласно теореме § 8 имеем

$$L=L_1\oplus L_2, \tag{11}$$

причем B нильпотентно на L_1, невырождено на L_2 (L_1 и L_2 инвариантны относительно B).

Теорема 4. *Размерность L_1 равна кратности m_1 нулевого корня многочлена $p(\lambda)$. На подпространстве L_2 преобразование B имеет характеристический многочлен $p_2(\lambda)=(-1)^{n-m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ \ldots\ (\lambda-\lambda_j)^{m_j}$.*

Доказательство. По теореме 3 § 7 имеем соответственно (11)

$$p(\lambda)=p_1(\lambda)p_2(\lambda). \tag{12}$$

Пусть n_1 — размерность L_1. По теореме 3 (по ее уже доказанной части)

$$p_1(\lambda)=(-1)^{n_1}\lambda^{n_1}. \tag{13}$$

Сравнивая (10), (12) и (13), находим: $n_1\leqslant m_1$. С другой стороны, если $n_1<m_1$, то $p_2(\lambda)$ должен иметь нулевой корень кратности $m_1-n_1>0$. Однако это невозможно, поскольку преобразование B на L_2 невырождено. Таким образом, $n_1=m_1$. Отсюда, а также из (10), (12) и (13) следует и второе утверждение теоремы.

Замечание 1. Ясно, что достаточность в теореме 3 является частным случаем теоремы 4 при $m_1=n$.

Замечание 2. Обозначим через p высоту преобразования B в L_1. Имеем: $p\leqslant m_1$, поскольку высота преобразования не превышает размерности пространства. С другой стороны, мы знаем, что L_1 может быть определено как ядро преобразования B^k при любом $k \geqslant p$. Поэтому, если кратность m_1 нулевого собственного значения известна, то мы можем найти L_1 как ядро преобразования B^{m_1}, не вычисляя p.

§ 10. Приведение матрицы преобразования к жордановой нормальной форме

1. Определение. Говорят, что матрица A имеет *жорданову нормальную форму*, если вдоль ее главной диагонали расположены жордановы клетки, а остальные элементы — нули:

$$A = \begin{Vmatrix} G_{k_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & G_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & G_{k_t}(\lambda_t) \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

Не исключена возможность, что в матрице (1) $k_i = k_j$ или $\lambda_i = \lambda_j$ для некоторых номеров i, j.

Напомним, что каждая жорданова клетка есть $k_i \times k_i$-матрица вида

$$G_{k_i}(\lambda_i) = \begin{Vmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{Vmatrix}.$$

Жорданова клетка первого порядка состоит из одного числа λ_i:

$$G_1(\lambda_i) = \| \lambda_i \|, \qquad G_1(0) = \| 0 \|.$$

2. Теорема. *В n-мерном комплексном пространстве L для каждого линейного преобразования A существует базис, в котором матрица этого преобразования имеет жорданову нормальную форму. При переходе к другому аналогичному базису матрица A сохраняется с точностью до перестановки клеток.*

Базис, о котором идет речь в теореме, будем называть каноническим. Это название согласуется с терминологией § 9: случай, рассмотренный в § 9, получается, когда все $\lambda_i = 0$.

Замечание. Доказательство этой теоремы для нильпотентных преобразований дано в § 9. Предыдущие результаты позволяют свести изучение общего случая к рассмотрению нильпотентных преобразований.

Доказательство теоремы (вместе с вспомогательными предложениями) изложено ниже.

3. Вспомогательные предложения. Пусть дано линейное преобразование A в n-мерном пространстве L. Положим

$$A-\alpha E=B,$$

где α — некоторое число.

Лемма 1. *Если B нильпотентно в L и, следовательно, имеет канонический базис, то A в этом базисе имеет жорданову нормальную форму* (1), *где все $\lambda_i=\alpha$.*

Доказательство. В каноническом базисе преобразование B имеет матрицу

$$B=\begin{Vmatrix} G_{k_1}(0) & & & 0 \\ & G_{k_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & G_{k_t}(0) \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Этот же самый базис $e_1, \ldots, e_n$ является каноническим для A вследствие тождества

$$G_{k_i}(\alpha)=G_{k_i}(0)+\alpha E,$$

которое в подробной записи выглядит так:

$$\begin{Vmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \alpha & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \alpha \;\; 1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 0 \;\; 1 \end{Vmatrix}+\alpha\begin{Vmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Вследствие (2) и (3) матрица преобразования A в базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет жорданову нормальную форму

$$A=\begin{Vmatrix} G_{k_1}(\alpha) & & & 0 \\ & G_{k_2}(\alpha) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & G_{k_t}(\alpha) \end{Vmatrix}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$ — *корни характеристического многочлена преобразования* A. *Тогда преобразование* $B = A - \alpha E$ *имеет характеристический многочлен, корни которого суть* $\lambda_1 - \alpha, \ldots, \lambda_j - \alpha$, *причем кратность корня* $\lambda_i - \alpha$ *равна кратности корня* λ_i.

Доказательство. Лемма 2 вытекает из тождества

$$\operatorname{Det}(B - \lambda E) = \operatorname{Det}(A - \alpha E - \lambda E) = p(\lambda + \alpha).$$

Лемма 3. *Некоторое подпространство* $\tilde{L}$ *инвариантно относительно преобразования* $B = A - \lambda E$ *тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно преобразования* A.

Доказательство. 1) Пусть $\tilde{L}$ инвариантно относительно A. Это значит, что если $x \in \tilde{L}$, то $Ax \in \tilde{L}$, а тогда

$$Bx = Ax - \lambda x \in \tilde{L}.$$

2) Если $\tilde{L}$ инвариантно относительно B, то оно инвариантно и относительно A, так как $A = B - (-\lambda)E$.

4. Докажем существование канонического базиса для произвольного линейного преобразования A, заданного в n-мерном комплексном пространстве L.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$ — различные между собой корни характеристического многочлена $p(\lambda)$ преобразования A, так что

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_j)^{m_j}, \tag{4}$$

где m_i — кратность корня λ_i ($i = 1, 2, \ldots, j$), $m_1 + m_2 + \ldots$ $\ldots + m_j = n$. Рассмотрим вырожденное преобразование $B_1 = A - \lambda_1 E$. Обозначим через L_1 ядро преобразования

$$B_1^{m_1} = B_1 B_1 \ldots B_1 = (A - \lambda_1 E)^{m_1}$$

и положим $B_1^{m_1}(L) = \tilde{L}$. Мы знаем, что

$$L = L_1 \oplus \tilde{L}, \tag{5}$$

причем B_1 нильпотентно в L_1. По теореме 1 из § 9 в L_1 существует базис, канонический для B_1. Этот же базис является каноническим и для преобразования A, рассматриваемого в L_1 (L_1 и $\tilde{L}$ инвариантны относительно A по лемме 3).

Соответственно разложению (5) имеем

$$p(\lambda) = p_1(\lambda)\tilde{p}(\lambda),$$

где по теореме 4 § 9 $p_1(\lambda) = (-1)^{m_1}(\lambda - \lambda_1)^{m_1}$, а

$$\tilde{p}(\lambda) = (-1)^{n-m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_j)^{m_j}.$$

Теперь рассмотрим A в инвариантном подпространстве $\tilde{L}$ и, рассуждая аналогично предыдущему, получим

$$\tilde{L} = L_2 \oplus \tilde{\tilde{L}}, \tag{6}$$

где L_2 — инвариантное подпространство размерности m_2, в котором существует канонический базис для преобразования $B_2 = A - \lambda_2 E$, а вместе с тем и для преобразования A. Подпространство L_2 определяется как ядро преобразования

$$B_2^{m_2} = B_2 B_2 \ldots B_2 = (A - \lambda_2 E)^{m_2}, \tag{7}$$

рассматриваемого в $\tilde{L}$. Однако если рассматривать преобразование (7) во всем пространстве L, то его ядро должно содержать L_2 и имеет ту же самую размерность m_2. Поэтому L_2 — *ядро преобразования* (7), *рассматриваемого во всем пространстве* L. Из (5) и (6) получаем $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \tilde{\tilde{L}}$.

Продолжая этот процесс, мы после j-го шага придем к разложению

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_j, \tag{8}$$

где L_i — ядро преобразования $B_i^{m_i} = (A - \lambda_i E)^{m_i}$; размерность L_i равна m_i. В каждом из L_i преобразование A имеет канонический базис. Объединение этих базисов дает искомый базис всего пространства L.

Замечание. Изложенное доказательство дает способ фактического приведения A к нормальной жордановой форме, причем в доказательстве указано, как найти канонический базис. Но можно написать жорданову форму преобразования A, минуя построение канонического базиса. Такая возможность вытекает из следующего пункта.

5. Докажем однозначную определенность жордановой нормальной формы матрицы данного преобразования. Пусть канонический базис $e_1, \ldots, e_n$ найден; матрица преобразования A имеет в нем вид (1). Предположим, что жордановы клетки, соответствующие λ_1, расположены в первых r строках матрицы (1). Тогда линейная оболочка первых r базисных векторов образует подпространство L_1 в разложениях вида (5) и (8):

$$L_1 = L(e_1, \ldots, e_r), \qquad \tilde{L} = L(e_{r+1}, \ldots, e_n) = L_2 \oplus \ldots \oplus L_j.$$

Преобразование $B_1 = A - \lambda_1 E$ нильпотентно в L_1. Базис $e_1, \ldots, e_r$ подпространства L_1 является каноническим для B_1; количество и длины серий этого базиса (относительно L_1)

равны количеству и размерностям жордановых клеток, соответствующих числу λ_1 в канонической матрице преобразования A. Количество серий различной длины в каноническом базисе нильпотентного преобразования определяется по формуле (9) § 9. Применительно к рассматриваемому случаю величины r_k равны рангам преобразований B_1^k, рассматриваемых в L_1, или, что то же самое, размерностям подпространств $B_1^k(L_1)$. Покажем, что в формулу (9) § 9 вместо r_k можно подставить ранги преобразований B_1^k, рассматриваемых во всем пространстве L. Пусть R_k — ранг B_1^k в пространстве L. Тогда R_k равно размерности $B_1^k(L)$.

В силу невырожденности B_1 в подпространстве $\tilde{L}$ имеем

$$\tilde{L} = B_1(\tilde{L}) = B_1^2(\tilde{L}) = \ldots = B_1^k(\tilde{L}).$$

Согласно п. 6 § 4 находим

$$B_1^k(L) = B_1^k(L_1 \oplus \tilde{L}) = B_1^k(L_1) \oplus B_1^k(\tilde{L}) = B_1^k(L_1) \oplus \tilde{L}. \quad (9)$$

Обозначим через s размерность $\tilde{L}$. Из (9) получаем

$$R_k = r_k + s,$$

так что (поскольку s не зависит от k) имеем

$$R_{k-1} - 2R_k + R_{k+1} = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1} \quad (10)$$

(правая часть (10) входит в формулу (9) § 9).

Аналогичные рассуждения применимы к остальным вырожденным преобразованиям $B_i = A - \lambda_i E$.

Вывод. Пусть l_k^i — количество жордановых клеток размерности $k \geqslant 1$, соответствующих собственному числу λ_i, в матрице данного преобразования A, записанной в каноническом базисе. Тогда

$$l_k^i = \operatorname{Rang}(A - \lambda_i E)^{k-1} - 2\operatorname{Rang}(A - \lambda_i E)^k + \operatorname{Rang}(A - \lambda_i E)^{k+1}. \quad (11)$$

Все слагаемые в правой части формулы (11) не зависят от выбора базиса. Теорема п. 2 доказана полностью.

6. Пусть канонический базис найден. Тогда каждое из подпространств L_i, входящих в разложение (8), само представляется в виде прямой суммы инвариантных подпространств, в каждом из которых преобразование задается одной жордановой клеткой. *Полиномы вида* $(\lambda - \lambda_i)^k$, *равные с точностью до знака характеристическим многочленам этих* *жордановых клеток, называются элементарными делителями матрицы преобразования A; k — порядок жордановой клетки.*

Количество элементарных делителей данной степени k с данным собственным значением λ_i равно числу l_k^i (см. (11)). В теории матриц доказывается, что элементарные делители могут быть вычислены, если известны общие наибольшие делители миноров порядка s матрицы $A-\lambda E$ для $s=1, \ldots, n$. Тем самым дается другой способ нахождения нормальной жордановой формы матрицы A.

7. Теорема п. 2 справедлива в действительном пространстве в предположении, что все корни $p(\lambda)$ действительны. Доказательство в точности повторяет пп. 3—5.

8. Если в действительном пространстве L задано преобразование A, у которого некоторые корни характеристического многочлена комплексны, то вместо (4) имеем

$$p(\lambda)=(-1)^{n-m}(\lambda-\lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda-\lambda_k)^{m_k} \tilde{p}(\lambda), \tag{12}$$

где $\tilde{p}(\lambda)$ — полином степени m, не имеющий действительных корней, $m_1+\ldots+m_k+m=n$. Соответственно разложению (12) получаем разложение пространства L на инвариантные подпространства: $L=L_1 \oplus \ldots \oplus L_k \oplus \tilde{L}$, где L_i — подпространство размерности m_i (ядро преобразования $(A-\lambda_i E)^{m_i}$), в котором A имеет одно собственное значение λ_i, а $\tilde{L}$ — подпространство размерности m, в котором A невырождено и не имеет ни одного собственного вектора. В каждом из L_i можно выбрать канонический базис. В $\tilde{L}$ выберем базис как угодно. Тогда матрица A примет вид

$$A=\left\| \begin{matrix} G^{(1)} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & G^{(k)} & \\ 0 & & & \tilde{A} \end{matrix} \right\|,$$

где $G^{(1)}, \ldots, G^{(k)}$ — нормальные жордановы формы матриц преобразования A в подпространствах $L_1, \ldots, L_k$; $\tilde{A}$ — невырожденная $m \times m$-матрица. Вопрос о дальнейшем упрощении матрицы A (за счет специального выбора базиса в $\tilde{L}$, упрощающего клетку $\tilde{A}$) мы не будем рассматривать.

§ 11. Преобразования простой структуры

1. Определение. Линейное преобразование A в пространстве L называется преобразованием *простой структуры*, если в L существует базис, состоящий из собственных векторов этого преобразования.

В случае преобразования простой структуры жорданова нормальная форма матрицы состоит из одномерных жордановых клеток. Фактически мы уже встречались выше с преобразованиями простой структуры в п. 5 § 7.

Сейчас установим два признака существования базиса из собственных векторов.

2. Первый признак (достаточный). *Если характеристический многочлен линейного преобразования A комплексного пространства L не имеет кратных корней, то в L существует базис из собственных векторов преобразования A.*

Доказательство. В условиях признака разложение (8) § 10 содержит n различных одномерных инвариантных подпространств $L_1, \ldots, L_n$. При этом каждое L_i является линейной оболочкой собственного вектора e_i. Согласно § 14 гл. I векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис в L.

3. Второй признак (необходимый и достаточный). *В комплексном пространстве L существует базис из собственных векторов преобразования A тогда и только тогда, когда для каждого корня λ_i характеристического многочлена $p(\lambda)$ ранг матрицы $A-\lambda_i E$ равен разности $n-m_i$,* где *m_i — кратность этого корня, n — размерность пространства L.*

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть существует базис из собственных векторов. В этом базисе матрица преобразования A диагональна (см. § 7, формулу (3)), а характеристическая матрица имеет вид

$$A-\lambda E = \begin{Vmatrix} \lambda_1-\lambda & & & 0 \\ & \lambda_2-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n-\lambda \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

так что

$$p(\lambda) = \operatorname{Det}(A-\lambda E) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\,\ldots\,(\lambda_n-\lambda).$$

Если, например, λ_1 имеет кратность m_1, то есть

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{m_1},$$
$$\lambda_{m_1+1} \neq \lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n \neq \lambda_1,$$

то на диагонали матрицы (1) при $\lambda = \lambda_1$ первые m_1 элементов равны нулю, а остальные отличны от нуля, поэтому

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda_1 E) = n - m_1. \tag{2}$$

Ввиду инвариантности $p(\lambda)$ и ранга характеристической матрицы равенство (2) не зависит от выбора базиса.

2) Достаточность. Согласно п. 4 § 10 размерность подпространства L_i равна кратности m_i корня λ_i. Если

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda_i E) = n - m_i, \tag{3}$$

то собственному значению λ_i соответствует m_i линейно независимых собственных векторов (см. § 6, п. 2). Все они находятся в подпространстве L_i и образуют в нем базис. Если (3) соблюдается для каждого номера i, то объединение таких базисов для всех $i = 1, \ldots, j$ дает базис пространства L (см. § 14 гл. I), причем полученный базис состоит из собственных векторов.

Доказательство второго признака завершено.

Замечание. В условиях второго признака преобразование A действует в каждом из L_i как подобие с коэффициентом λ_i (см. в связи с этим § 7, п. 4).

4. Оба сформулированных признака справедливы в действительном пространстве при дополнительном условии, что все корни характеристического многочлена действительны.

Доказательство предоставляем читателю.

5. Из результатов § 10 следует, что произвольное линейное преобразование A в комплексном линейном пространстве L (а также в действительном пространстве при условии, что $p(\lambda)$ имеет лишь действительные корни) можно представить в виде суммы

$$A = B + C,$$

где B — нильпотентное преобразование, C — преобразование простой структуры (см. формулы (1) и (2) § 10).

§ 12. Эквивалентность матриц

1. Определение. Две $n \times n$-матрицы A и B называются *эквивалентными*, если существует невырожденная $n \times n$-матрица Q такая, что $B = QAQ^{-1}$ (матрицы A, B, Q либо все действительны, либо все комплексны).

Геометрический смысл этого определения состоит в следующем: если A рассматривать как матрицу некоторого линейного преобразования в произвольно выбранном базисе $e_1, \ldots, e_n$, то матрица B задает то же самое преобразование в другом базисе $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$, причем $Q = (P^*)^{-1}$, где P — матрица правых частей формул:

$$e_{i'} = \sum P^i_{i'} e_i$$

(см. формулу (1a) из § 2).

Нетрудно проверить, что если A эквивалентна B, то B эквивалентна A и что две матрицы, порознь эквивалентные третьей, эквивалентны между собой. Тем самым вся совокупность матриц (либо действительных, либо комплексных) распадается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой матриц.

2. Пусть H — некоторая подгруппа матриц. Если в определении эквивалентности брать матрицы Q из H, то получим матрицы, эквивалентные относительно данной подгруппы H. Разные матрицы, эквивалентные данной относительно H, выражают одно и то же линейное преобразование в разных базисах, принадлежащих одному классу базисов по подгруппе H.

3. Из результатов § 10 следует, что для каждой комплексной $n \times n$-матрицы A существует эквивалентная ей матрица G, имеющая нормальную жорданову форму. Перестановка клеток в матрице G переводит ее в эквивалентную матрицу G', так как переходу от G к G' соответствует с геометрической точки зрения перестановка некоторых наборов векторов в одном базисе. Процесс нахождения матрицы G, эквивалентной A, называют приведением матрицы A к жордановой нормальной форме.

Две матрицы, жордановы нормальные формы которых различаются собственными значениями, количеством или размерами жордановых клеток, не эквивалентны между собой.

4. Если для данной матрицы A известна ее нормальная жорданова форма G, то матрица Q в равенстве

$$G = QAQ^{-1} \tag{1}$$

может быть найдена следующим путем. Умножив обе части (1) справа на Q и перенеся все члены в одну сторону, получим равенство

$$GQ - QA = 0, \tag{2}$$

которое можно рассматривать как однородную систему линейных уравнений, в которой неизвестными являются элементы матрицы Q. Любое решение такой системы, удовлетворяющее дополнительному условию

$$\operatorname{Det} Q \neq 0, \tag{3}$$

дает нужную матрицу Q. При больших n этот способ становится очень трудоемким, так как система (2) содержит n^2 уравнений.

Разработаны другие методы нахождения матриц G и Q по заданной матрице A; один из них фактически изложен нами в §§ 9 и 10 [1]).

5. Пример. Привести к жордановой нормальной форме матрицу $A = \begin{Vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 6 \end{Vmatrix}$.

Решение. Составляем характеристический многочлен:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 25,$$

откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$. Далее находим

$$A - \lambda_1 E = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \operatorname{Rang}(A - \lambda_1 E) = 1.$$

Сумма кратности корня λ_1 и ранга $(A - \lambda_1 E)$ превышает $n = 2$, поэтому для преобразования с матрицей A не существует базиса из собственных векторов. В такой ситуации ($n = 2$, корень λ_1 кратный, базиса из собственных векторов нет) для жордановой нормальной формы имеется единственная

[1]) Кроме того, см., например, Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, «Наука», 1967.

возможность: двумерная жорданова клетка, соответствующая данному $\lambda_1 = 5$:

$$G = \begin{Vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Можно рассуждать иначе. Нетрудно подсчитать, что

$$(A - \lambda_1 E)^2 = \Theta,$$

поэтому ранги последовательных неотрицательных степеней матрицы $(A - \lambda_1 E)$ образуют такую последовательность:

$$r_0 = 2, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = r_3 = \ldots = 0.$$

Подставляя r_i в формулу (11) § 10, находим, что число одномерных жордановых клеток в матрице G равно нулю, число двумерных — единице, что согласуется с формулой (4).

Найдем теперь матрицу Q. Подставив в (2) A, G и $Q = \begin{Vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{Vmatrix}$, получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} Q_{11} + Q_{12} + Q_{21} \phantom{+ Q_{22}} &= 0, \\ -Q_{11} - Q_{12} \phantom{+ Q_{21}} + Q_{22} &= 0, \\ Q_{21} + Q_{22} &= 0, \\ -Q_{21} - Q_{22} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(Все индексы написаны внизу, так как тензорная природа формул нас сейчас не интересует.) Последние два уравнения системы (5) являются следствием первых двух, из которых находим

$$\begin{aligned} Q_{11} &= a, & Q_{12} &= b, \\ Q_{21} &= -a - b, & Q_{22} &= a + b, \end{aligned}$$

где a, b — произвольные числа. Нужно обеспечить условие (3):

$$\operatorname{Det} Q = \begin{vmatrix} a & b \\ -a - b & a + b \end{vmatrix} = (a + b)^2 \neq 0,$$

откуда $a \neq -b$. Никаких других ограничений на a, b не накладывается.

Взяв, например, $a=1$, $b=0$, получим

$$Q=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что равенство (1) соблюдается.

§ 13. Формула Гамильтона — Кэли

1. Прямым следствием § 10 является тождество, известное под названием формулы Гамильтона—Кэли.

Пусть

$$p(\lambda)=(-1)^n(\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_{n-1}\lambda+p_n)$$

— характеристический многочлен линейного преобразования A. Тогда $p(A)$ *есть нулевое линейное преобразование.* Подробнее:

$$A^n+p_1A^{n-1}+\ldots+p_{n-1}A+p_nE=\Theta. \qquad (1)$$

2. Доказательство. Сейчас в наших рассуждениях будем считать пространство комплексным. Согласно п. 4 § 10 мы имеем

$$p(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots(\lambda-\lambda_j)^{m_j}. \qquad (2)$$

Соответственно

$$p(A)=(-1)^n(A-\lambda_1E)^{m_1}\ldots(A-\lambda_jE)^{m_j}, \qquad (3)$$

в чем легко убедиться, одновременно перемножая скобки в правых частях (2) и (3). Используя обозначения п. 4 § 10, вместо (3) можно написать

$$p(A)=(-1)^nB_1^{m_1}\ldots B_j^{m_j}. \qquad (4)$$

Порядок сомножителей в (3) и (4) безразличен, потому что здесь встречаются только произведения операторов A и E, которые перестановочны.

Пусть x — произвольный вектор из L. Так как L есть сумма L_i, то можно написать разложение

$$x=x_1+\ldots+x_j, \qquad \text{где } x_i\in L_i, \qquad i=1,\ldots,j. \qquad (5)$$

С другой стороны, по определению B_i и L_i имеем

$$B_i^{m_i}(L_i)=\theta. \tag{6}$$

Теперь видно, что

$$p(A)x=\theta$$

вследствие (4) — (6), поскольку в формуле (4) сомножители можно писать в любом порядке. Таким образом, формула (1) доказана.

Формула Гамильтона — Кэли верна не только в комплексном, но и в действительном пространстве, поскольку действительное пространство всегда можно расширить до комплексного. Подробнее: имея данный базис, следует позволить рассматривать векторы с комплексными координатами; линейное преобразование A при этом естественно распространится на полученное комплексное пространство (его матрицу A нужно оставить без изменения).

ГЛАВА VIII. ПРОСТРАНСТВА С КВАДРАТИЧНОЙ МЕТРИКОЙ

§ 1. Скалярное произведение

1. Пусть L — действительное линейное пространство. Введем в пространстве L новую операцию — *скалярное умножение векторов.*

Действие скалярного умножения ставит в соответствие каждой паре векторов x, y из L действительное число, которое обозначается (x, y) и называется *скалярным произведением* вектора x на вектор y.

По аналогии с элементарной аналитической геометрией потребуем соблюдения следующих свойств:

1) Коммутативность: $(x, y)=(y, x)$.

2) Распределительность (дистрибутивность): $(x_1+x_2, y) = (x_1, y)+(x_2, y)$.

3) Однородность: $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$ для любого действительного числа α.

4) Невырожденность: если $(x, y)=0$ при фиксированном x и любом y из L, то $x=\theta$.

Здесь всюду x, y, x_1, x_2 — произвольные векторы пространства L.

2. Обратим внимание на то, что в элементарной аналитической геометрии перечисленные выше свойства скалярного произведения доказываются как теоремы, а здесь мы рассматриваем эти свойства как аксиомы, включая их в определение скалярного произведения.

3. Второе и третье свойства вместе означают линейность скалярного произведения по первому аргументу. Вследствие коммутативности имеет место линейность и по второму аргументу.

Итак, *скалярное произведение* (x, y) *представляет собой билинейную форму, симметричную* согласно первому свойству и *невырожденную* вследствие четвертого свойства. Действительно, четвертое свойство означает, что нулевое подпространство билинейной формы (x, y) нульмерно, откуда и вытекает ее невырожденность (см. выше, гл. IV, § 11).

4. Очевидно, справедливо и обратное утверждение:

Каждую невырожденную симметричную билинейную форму $g(x, y)$, заданную в пространстве L, можно принять в качестве скалярного произведения, положив

$$(x, y) = g(x, y)$$

для любых $x, y \in L$.

Замечание. Разумеется, скалярное произведение зависит от выбора формы $g(x, y)$. Если в качестве скалярного произведения выбирать разные формы, то для данной пары векторов x, y пространства L скалярное произведение будет получать, вообще говоря, разные численные значения.

5. Пусть в пространстве L введено скалярное произведение $(x, y) = g(x, y)$.

Предполагая пространство n-мерным, возьмем в нем произвольный базис $e_1, \ldots, e_n$. Если $x = \sum x^i e_i$, $y = \sum y^k e_k$, то скалярное произведение запишется в координатах так:

$$(x, y) = g(x, y) = \sum g_{ik} x^i y^k, \tag{1}$$

где g_{ik} — коэффициенты билинейной формы $g(x, y)$ в данном базисе $e_1, \ldots, e_n$. Они являются значениями этой формы на базисных векторах, то есть их скалярными произведениями. Таким образом,

$$(e_i, e_k) = g_{ik}, \tag{2}$$

причем $g_{ik} = g_{ki}$. Равенства (2) составляют таблицу умножения базисных векторов.

Если правые части таблицы (2) даны, то тем самым однозначно определено скалярное произведение любой пары векторов x, y (согласно равенству (1)).

6. Определение 1. Векторы x, y называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

В координатах условие ортогональности векторов x, y имеет вид

$$\sum g_{ik} x^i x^k = 0.$$

Определение 2. Вектор x *ортогонален подпространству* L', если $(x, y) = 0$ для любого $y \in L'$.

Заметим, что если L' имеет размерность k, то для ортогональности вектора x подпространству L' достаточно, чтобы

x был ортогонален к каким-нибудь независимым векторам в числе k, лежащим в L'. В самом деле, если независимые векторы $a_1, \ldots, a_k$ лежат в L' и если $(x, a_1) = 0, \ldots, (x, a_k) = 0$, то для любого $y \in L$ имеем $y = \lambda^1 a_1 + \ldots + \lambda^k a_k$, откуда

$$(x, y) = \lambda^1 (x, a_1) + \ldots + \lambda^k (x, a_k) = 0.$$

Определение 3. Подпространства L', L'' называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$ для любого $x \in L'$ и любого $y \in L''$.

Определение 4. Подпространство L'' называется *ортогональным дополнением* подпространства L' в пространстве L, если L' и L'' ортогональны и их прямая сумма совпадает с L.

Замечание. Подчеркнем, что ортогональность векторов и ортогональность подпространств существенно зависит от того, какая именно билинейная форма $g(x, y)$ взята в качестве скалярного произведения (x, y) в пространстве L.

§ 2. Норма вектора

1. Пусть в линейном пространстве L задано скалярное произведение.

Определение. *Нормой вектора* x называется число

$$\|x\| = +\sqrt{(x, x)}. \tag{1}$$

Норма является обобщением понятия модуля или длины вектора, известного из элементарной геометрии.

Скалярное произведение (x, x) является действительным числом, но оно может не быть положительным, так что норма вектора может оказаться мнимой. Условимся считать, что радикал в формуле (1) может быть либо неотрицательным действительным числом, либо мнимым числом с положительным множителем при i $(i = +\sqrt{-1})$.

2. Из определения нормы следует, что

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

для любого $x \in L$ и любого числа α.

В частности,

$$\|-x\| = \|x\|, \qquad \|\theta\| = 0. \tag{2}$$

Ненулевые векторы, норма которых равна нулю, называются *изотропными*. Изотропные векторы существуют тогда и только тогда, когда квадратичная форма (x, x) не является знакоопределенной.

3. Квадратичная форма $\|x\|^2=(x, x)$ называется *метрической формой рассматриваемого пространства.*

Она определяется билинейной формой (x, y) и в свою очередь определяет ее как свою полярную форму. Таким образом, задание скалярного произведения и задание квадратичной формы для измерения норм векторов равносильны. Поэтому пространства с заданным скалярным произведением называют также пространствами с квадратичной метрикой.

Если пространство n-мерно, то метрическая форма в координатах имеет вид

$$\|x\|^2=(x, x)=\sum g_{ik}x^i x^k.$$

4. Теорема. *Если метрическая форма является положительно определенной, то для любых двух векторов $x, y \in L$ соблюдается неравенство*

$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|. \tag{3}$$

Доказательство. Используем неравенство Коши—Буняковского (см. § 10 гл. IV)

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)\cdot(y, y). \tag{4}$$

Учитывая (4), находим, что

$$\|x+y\|^2=(x+y, x+y)=(x, x)+2(x, y)+(y, y) \leqslant$$
$$\leqslant (x, x)+2\sqrt{(x, x)\cdot(y, y)}+(y, y)=(\|x\|+\|y\|)^2,$$

откуда следует (3).

Замечание. Из (3) следует, что если метрическая форма положительно определена, то

$$\|x-y\| \geqslant \|x\|-\|y\|, \quad \|x+y\| \geqslant \|x\|+\|y\|.$$

5. Рассмотрим аффинное пространство $\mathfrak{A}$, которому соответствует линейное пространство L с квадратичной метрикой.

Для каждой пары точек A, B из $\mathfrak{A}$ определим расстояние $\rho(A, B)$, полагая его равным норме вектора $\overline{AB}$:

$$\rho(A, B)=\|\overline{AB}\|. \tag{5}$$

Имеем

$$\rho(A, B)=\rho(B, A), \qquad \rho(A, A)=0. \tag{6}$$

Формулы (6) следуют из (2) и (5).

6. В случае положительно определенной метрической формы (x, x) расстояние между точками равно нулю только тогда, когда точки совпадают, и, кроме того, для любых трех точек A, B, C из $\mathfrak{A}$ соблюдается неравенство треугольника

$$\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C). \tag{7}$$

Неравенство (7) следует из неравенства (3) и формулы (5).

7. Если между точками аффинного пространства $\mathfrak{A}$ определено расстояние по формуле (5), то говорят, что в аффинном пространстве $\mathfrak{A}$ задана квадратичная метрика. В аффинных координатах квадрат расстояния имеет выражение

$$\rho^2(A, B) = \sum g_{ik}(x_2^i - x_1^i)(x_2^k - x_1^k), \tag{8}$$

где $x_1^1, \ldots x_1^n$ — аффинные координаты точки A, $x_2^1, \ldots, x_2^n$ — аффинные координаты точки B.

Правую часть (8), квадратичную относительно разностей координат произвольных точек A и B, называют метрической формой пространства $\mathfrak{A}$.

§ 3. Ортонормированные базисы

1. В пространстве с квадратичной метрикой базисы не равноправны. Среди них есть такие, которые наиболее удобны с точки зрения данной метрики.

Именно, базис $e_1, \ldots, e_n$ можно выбрать так, чтобы метрическая форма $g(x, x)$ имела в нем нормальный вид

$$\|x\|^2 = g(x, x) = (x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \ldots - (x^n)^2.$$

Тогда скалярное произведение двух векторов представится так:

$$xy = x^1y^1 + \ldots + x^ky^k - x^{k+1}y^{k+1} - \ldots - x^ny^n.$$

Ясно, что скалярные произведения $(e_i, e_j) = 0$, если $i \neq j$, то есть при $i \neq j$ базисные векторы ортогональны. При этом $\|e_i\|^2 = 1$, если $i = 1, \ldots, k$; $\|e_i\|^2 = -1$, если $i = k+1, \ldots, n$. Тем самым векторы базиса нормированы так, что квадраты их норм по модулю равны единице. Векторы e_i называются единичными, если $i \leqslant k$, мнимоединичными, если $i \geqslant k+1$. Вообще вектор a называется единичным, если $\|a\|^2 = 1$, мнимоединичным, если $\|a\|^2 = -1$.

Определение. Базис $e_1, \ldots, e_n$, удовлетворяющий перечисленным в этом пункте условиям, называется *ортонормированным.*

Теорема 1. *В n-мерном линейном пространстве с заданной квадратичной метрикой всякий набор из попарно ортогональных единичных или мнимоединичных векторов общим числом n является базисом, в котором метрическая форма имеет нормальный вид.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — указанный набор векторов. Убедимся, что они линейно независимы. Рассмотрим соотношение

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = \theta.$$

Отсюда, умножая скалярно на e_1, получим

$$\lambda_1 (e_1, e_1) + \lambda_2 (e_2, e_1) + \ldots + \lambda_n (e_n, e_1) = (\theta, e_1).$$

Но по условию $(e_1, e_1) = \pm 1$, $(e_j, e_1) = 0$ $(j \neq 1)$; кроме того, $(\theta, e_1) = 0$. Следовательно, $\lambda_1 = 0$. Аналогично докажем, что $\lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$. Таким образом, установлено, что векторы $e_1, \ldots, e_n$ независимы и, значит, действительно составляют базис.

Так как $g(e_i, e_i) = (e_i, e_i) = \pm 1$, $g(e_i, e_j) = (e_i, e_j) = 0$, то форма $g(x, x)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет нормальный вид.

2. Наряду с доказанной выше теоремой 1 мы отметим следующее утверждение.

В n-мерном линейном пространстве всегда можно задать, причем единственным способом, такую квадратичную метрику, что произвольный заранее данный базис $e_1, \ldots, e_k$, $e_{k+1}, \ldots, e_n$ станет ортонормированным, его векторы $e_1, \ldots, e_k$ станут единичными, а векторы $e_{k+1}, \ldots, e_n$ — мнимоединичными; здесь k — также любое заранее данное целое число от 0 до n.

Доказательство. Искомая метрика однозначно определяется заданием метрической формы $g(x, x)$, которая в базисе $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ имеет вид

$$g(x, x) = (x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \ldots - (x^n)^2.$$

3. Согласно закону инерции квадратичных форм число единичных и число мнимоединичных векторов не зависит от выбора базиса, ортонормированного в данной квадратичной метрике.

Определение. Число k единичных векторов ортонормированного базиса называется *положительным индексом* пространства с данной квадратичной метрикой.

Если $k=n$ или если $k=0$, то пространство называется *евклидовым*.

Если $1 \leqslant k \leqslant n-1$, то пространство называется *псевдоевклидовым*.

Особенно большое значение имеет псевдоевклидово пространство при $k=n-1$. Оно называется пространством Минковского и при $n=4$ играет важную роль в теории относительности.

§ 4. Ортогональная проекция. Ортогонализация

1. В этом параграфе мы рассмотрим евклидово пространство L, то есть линейное пространство со знакоопределенной метрической формой. Будем считать метрическую форму положительно определенной. (Случай отрицательно определенной метрической формы отдельного рассмотрения не требует. Это будет ясно из § 5.) Размерность пространства L может быть бесконечной.

Пусть в L дано подпространство L'. Допустим, что вектор $x \in L$ представляется в виде суммы

$$x = x' + \tilde{x}, \tag{1}$$

где $x' \in L'$, а $\tilde{x}$ ортогонален к L'. Тогда вектор x' называется *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство L'. Ортогональная проекция вектора x на L' единственна. В самом деле, пусть имеется другое разложение $x = x_1' + \tilde{x}_1$, где $x_1' \in L'$, $\tilde{x}_1$ ортогонален к L'. В этом случае $x' - x_1' = \tilde{x}_1 - \tilde{x}$; отсюда

$$(x' - x_1')^2 = (x' - x_1',\ x' - x_1') = (\tilde{x}_1 - \tilde{x},\ x' - x_1') = 0, \tag{*}$$

так как $x' - x_1' \in L'$, а $\tilde{x}$ и $\tilde{x}_1$ ортогональны к L'. Из (*) следует, что $x' - x_1' = \theta$, то есть $x_1 = x_1'$, поскольку метрическая форма пространства положительно определена.

Частный случай, когда L трехмерно, L' двумерно, показан на рис. 36.

Преобразование пространства L, которое каждому вектору x ставит в соответствие вектор x' согласно формуле (1), тоже называется ортогональной проекцией (или ортогональным проектированием) на L'.

Если пространство L рассматривается как точечное, а L' — как плоскость в нем, то точка M' с радиус-вектором $\overline{OM}' = x'$ называется ортогональной проекцией на L точки M, имеющей радиус-вектор $\overline{OM} = x$ (рис. 36).

2. Докажем, что ортогональная проекция M' точки M на L' представляет собой ближайшую к M точку в L'.

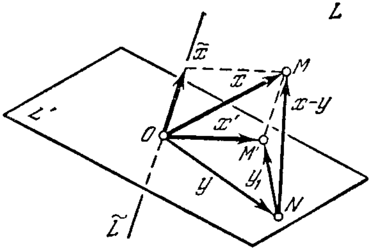


Рис. 36.

Пусть $y = \overline{ON}$ — произвольный вектор подпространства L'. Нужно доказать, что

$$\| x - y \| \geqslant \| \tilde{x} \|, \tag{2}$$

причем равенство в (2) достигается только тогда, когда $y = x'$ (то есть когда N совпадает с M', рис. 36).

Положим $x' - y = y_1$. Тогда $x - y = \tilde{x} + y_1$, и

$$\| x - y \|^2 = (\tilde{x} + y_1, \tilde{x} + y_1) =$$
$$= \| \tilde{x} \|^2 + \| y_1 \|^2 + 2(\tilde{x}, y_1) = \| \tilde{x} \|^2 + \| y_1 \|^2, \tag{3}$$

поскольку $(\tilde{x}, y_1) = 0$ вследствие ортогональности вектора $\tilde{x}$ подпространству L', содержащему y'.

Заметим, что

$$\| y_1 \|^2 = (y_1, y_1) \geqslant 0$$

ввиду положительной определенности метрической формы рассматриваемого пространства. Поэтому (2) следует из (3). Равенство в (2) достигается лишь тогда, когда $y_1 = \theta$ (то есть когда $y = x'$).

3. Пусть

$$L' = L(z_1, \ldots, z_k),$$

где $z_1, \ldots, z_k$ — некоторая конечная независимая система векторов из L. В этом случае для нахождения ортогональной проекции x' заданного вектора x на подпространство L' достаточно надлежащим образом вычислить коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ в разложении

$$x' = \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_k z_k. \tag{4}$$

С этой целью запишем условие ортогональности вектора $\bar{x} = x - x'$ каждому из векторов z_j

$$(x - x', \ z_j) = 0. \tag{5}$$

Подставив разложение (4) в (5) и используя свойства скалярного произведения, получаем для α_i систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{k} (z_i, \ z_j)\alpha_i = (x, \ z_j), \qquad j = 1, \ldots, k. \tag{6}$$

Определитель системы (6) представляет собой определитель Грама для положительно определенной квадратичной формы (x, x) и независимых векторов $z_1, \ldots, z_k$. Поэтому он положителен (см. § 10 гл. IV), а система (6) однозначно разрешима. Тем самым искомая проекция найдется.

4. Ниже нам потребуется следующая

Лемма. *Пусть в пространстве с положительно определенной метрической формой имеется система попарно ортогональных векторов $a_1, \ldots, a_k$, то есть $(a_i, \ a_k) = 0$ при $i \neq k$. Если ни один из этих векторов не нулевой, то они линейно независимы.*

Доказательство. Рассмотрим соотношение

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = \theta. \tag{7}$$

Умножим (7) скалярно на a_1:

$$\lambda_1 (a_1, \ a_1) + \lambda_2 (a_1, \ a_2) + \ldots + \lambda_k (a_1, \ a_k) = (a_1, \ \theta). \tag{8}$$

Так как $a_1 \neq \theta$, а метрическая форма положительно определена, то $(a_1, \ a_1) = \| a_1 \|^2 \neq 0$. Остальные скалярные произведения в левой части (8) обратятся в нуль по условию леммы; $(a_1, \ \theta) = 0$ из-за участия нулевого вектора. Следовательно, $\lambda_1 = 0$. Аналогично устанавливается, что $\lambda_2 = \ldots$ $\ldots = \lambda_k = 0$. Лемма доказана.

5. Пусть в пространстве L дана упорядоченная система линейно независимых векторов $e_1, \ldots, e_k$. Речь будет идти о замене этой системы другой системой векторов, ортогональной и в некотором смысле эквивалентной данной. С этой целью проводится геометрическое построение, называемое процессом ортогонализации. Оно напоминает процесс выбора базиса при приведении квадратичной формы к каноническому виду методом Якоби.

Новая система векторов $e_{1'}, \ldots, e_{k'}$ строится с соблюдением следующих условий:

1) $e_{1'} \in L(e_1), \quad e_{2'} \in L(e_1, e_2), \ldots,$

$$e_{i'} \in L(e_1, \ldots, e_i), \ldots, e_{k'} \in L(e_1, \ldots, e_k).$$

2) Векторы $e_{1'}, \ldots, e_{k'}$ попарно ортогональны.

3) Система $e_{1'}, \ldots, e_{k'}$ линейно независима.

В таком случае говорят, что новая система векторов получена из первоначальной системы $e_1, \ldots, e_k$ процессом ортогонализации.

Если данная система состоит из трех векторов e_1, e_2, e_3 в трехмерном евклидовом пространстве, то новую систему $e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}$ построим так:

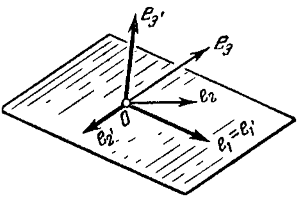


Рис. 37.

первый вектор сохраним ($e_{1'} = e_1$);

второй вектор проведем к нему ортогонально в плоскости, проходящей через e_1 и e_2;

третий вектор проведем ортогонально этой плоскости (рис. 37).

Переходя к случаю большей размерности, нужно четвертый вектор располагать перпендикулярно данному трехмерному пространству и т. д. В общем случае положим

$$\begin{aligned} e_{1'} &= e_1, \\ e_{2'} &= e_2 + \alpha e_{1'}, \\ e_{3'} &= e_3 + \beta e_{2'} + \gamma e_{1'}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_{k'} &= e_k + \lambda_1 e_{(k-1)'} + \lambda_2 e_{(k-2)'} + \ldots + \lambda_{k-1} e_{1'}. \end{aligned} \tag{9}$$

Из формул (9) следует, что векторы $e_{i'}$ расположены в нужных линейных оболочках и являются ненулевыми вследствие независимости векторов $e_1, \ldots, e_k$.

Остается подобрать коэффициенты $\alpha, \beta, \ldots$ так, чтобы векторы $e_{i'}$ были попарно ортогональны. Тогда система $e_{1'}, \ldots, e_{k'}$ будет независимой по лемме п. 4.

Найдем α. Мы имеем

$$(e_{2'}, e_{1'}) = (e_2, e_{1'}) + \alpha (e_{1'}, e_{1'}) = 0,$$

отсюда

$$\alpha = -\frac{(e_2, e_{1'})}{(e_{1'}, e_{1'})}. \tag{10}$$

Деление выполнимо, так как $(e_{1'}, e_{1'}) = (e_1, e_1) \neq 0$. Вектор $(-\alpha e_1)$ представляет собой ортогональную проекцию e_2 на $L(e_1)$ (рис. 38).

Дальше обеспечим ортогональность третьего вектора первым двум:

$$(e_{3'}, e_{1'}) = (e_3, e_{1'}) + \underline{\beta(e_{2'}, e_{1'})} + \gamma(e_{1'}, e_{1'}) = 0,$$

$$(e_{3'}, e_{2'}) = (e_3, e_{2'}) + \beta(e_{2'}, e_{2'}) + \underline{\gamma(e_{1'}, e_{2'})} = 0.$$

Подчеркнутые члены обращаются в нуль, а $(e_{2'}, e_{2'}) \neq 0$ по построению. Поэтому находим

$$\gamma = -\frac{(e_3, e_{1'})}{(e_{1'}, e_{1'})}, \qquad \beta = -\frac{(e_3, e_{2'})}{(e_{2'}, e_{2'})}. \tag{11}$$

Формулы (9) и (11) геометрически означают, что для построения вектора $e_{3'}$ нужно из вектора e_3 вычесть его ортогональную проекцию на подпространство $L(e_1, e_2)$ (рис. 39).

Дальше процесс идет аналогично.

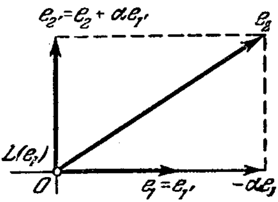


Рис. 38.

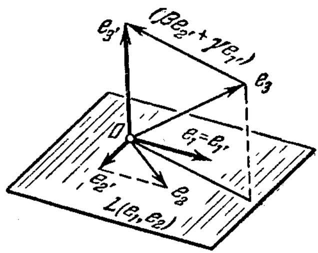


Рис. 39.

6. В процессе ортогонализации иногда бывает важно обеспечить соблюдение еще двух дополнительных условий.

4) При любом $j\,(1 \leqslant j \leqslant k)$ система $e_{1'}, \ldots, e_{j'}$ ориентирована так же, как система $e_1, \ldots, e_j$.

5) $\| e_{i'} \| = 1$.

Формулы (9) гарантируют соблюдение условия 4). В самом деле, из (9) имеем

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = e_{1'}, \\ e_2 = -\alpha e_{1'} + e_{2'}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_k = -\lambda_{k-1} e_{1'} - \ldots - \lambda_1 e_{(k-1)'} + e_{k'}, \end{array}\right\}$$

так что в матрице, выражающей e_i через $e_{i'}$, левый верхний минор порядка j (при любом $j \leqslant k$) положителен (равен $+1$).

Для того чтобы обеспечить условие 5), достаточно после проведения ортогонализации каждый из полученных векторов разделить на его норму.

Замечание. Нетрудно доказать (например, по индукции), что условия 1) — 5), перечисленные в пп. 5 и 6, по данной системе $e_1, \ldots, e_k$ однозначно определяют систему векторов $e_{1'}, \ldots, e_{k'}$.

7. Многочлены Лежандра. В математическом анализе и его приложениях приходится использовать разложение произвольных функций в ряды по данным функциям, рассматривая такие разложения функций аналогично разложениям векторов по данному базису. При этом удобно иметь аналоги ортогонального базиса; таковыми являются ортогональные системы функций. Одним из простейших примеров ортогональных систем являются многочлены Лежандра.

В пространстве непрерывных функций на отрезке $[-1, 1]$ вводится квадратичная метрика со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_{-1}^{+1} x(t) y(t)\, dt. \tag{12}$$

Соответственно

$$\|x\|^2 = \int_{-1}^{+1} x^2(t)\, dt. \tag{13}$$

Мы уже рассматривали выражение (13) и доказали, что это квадратичная форма (см. § 4 гл. IV). Следует обратить внимание на ее положительную определенность: $\|x\|^2 \geqslant 0$, причем $\|x\|^2 = 0$ тогда и только тогда, когда непрерывная функция $x(t) = 0$ во всех точках отрезка.

Возьмем систему одночленов

$$1,\ t,\ t^2,\ t^3, \ldots,\ t^k, \ldots \tag{14}$$

и применим к ней процесс ортогонализации. В результате получим последовательность многочленов

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = t, \quad f_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}, \ f_3(t) = \\ = t^3 - \frac{3}{5} t, \ldots \tag{15}$$

Номера многочленов (15) выбраны так, чтобы они совпадали с их степенями. Коэффициенты многочленов вычисляются согласно формулам (9) с учетом (10), (11), (12) и (14).

После специальной нормировки вида

$$p_k(t) = \lambda_k f_k(t),$$

где λ_k выбираются из условия

$$p_k(1) = 1, \tag{16}$$

получаем последовательность многочленов $p_k(t)$ (степени $k = 0, 1, 2, \ldots$), называемых многочленами Лежандра. Можно доказать, что

$$p_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} \{(t^2 - 1)^k\}. \tag{17}$$

Учитывая замечание в п. 6, для этого достаточно проверить, что все многочлены (17) попарно ортогональны (здесь удобно применить интегрирование по частям), и что они удовлетворяют условию (16).

Можно доказать также, что

$$\|p_k(t)\|^2 = \frac{2}{2k+1}.$$

Таким образом, система многочленов Лежандра ортогональна, но не нормирована (нормы p_k не равны единице).

§ 5. Метрический изоморфизм

1. Определение. Два пространства L и L' с квадратичной метрикой называются *метрически изоморфными* друг другу, если между ними существует линейный изоморфизм, при котором скалярное произведение любой пары векторов в L равно скалярному произведению их образов в L'. Линейный изоморфизм при этом условии называется метрическим изоморфизмом (о линейном изоморфизме см. § 10 гл. I).

Замечание. Метрически изоморфные пространства имеют одинаковые свойства не только линейные, но и метрические, т. е. основанные на понятии скалярного произведения. Поэтому достаточно среди множества метрически изоморфных пространств изучить одно, чтобы знать остальные.

2. Теорема 1. *Пространства с квадратичной метрикой, имеющие одинаковые размерности и одинаковые* *положительные индексы, метрически изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть L и L' оба n-мерны и имеют один и тот же положительный индекс $k (0 \leqslant k \leqslant n)$. Согласно § 4 мы можем в L найти ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, а в L' — ортонормированный базис $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$. Эти базисы имеют одинаковое число единичных векторов, равное k; будем считать, что в каждом из этих базисов единичными являются первые k векторов.

Пусть x — произвольный вектор пространства L. Разложим его по базису $e_1, \ldots, e_n$: $x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n$. Поставим в соответствие вектору x тот вектор $x' \in L'$, который в базисе $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ имеет такие же координаты: $x' = x^1 e_{1'} + \ldots + x^n e_{n'}$. Тем самым между L и L' установлен линейный изоморфизм (см. § 10 гл. I). Рассмотрим два произвольных вектора x, y пространства L и их образы x', y' в L'. Так как в базисах $e_1, \ldots, e_n$ и $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ метрические формы пространств L и L' имеют одинаковые координатные представления, а координаты векторов x, y совпадают соответственно с координатами векторов x', y', то $(x, y) = (x', y')$. Таким образом, установленный между L и L' линейный изоморфизм является метрическим изоморфизмом. Теорема доказана.

Для пространств L и L' с квадратичной метрикой справедлива также следующая

Теорема 2. *Если пространство L имеет размерность n и положительный индекс $k (0 \leqslant k \leqslant n)$, а пространство L' метрически изоморфно ему, то L' также имеет размерность n и положительный индекс k.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в L, первые k векторов которого единичные; пусть векторы $e_{1'}, \ldots, e_{n'} \in L'$ соответствуют векторам $e_1, \ldots, e_n$ по изоморфизму. Так как метрический изоморфизм является линейным изоморфизмом, то, повторяя доказательство теоремы 2 § 10 гл. I, найдем, что размерность L' равна n и что $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ составляют базис в L'. Из определения метрического изоморфизма сразу следует, что базис $e_{1'}, \ldots, e_{n'} \in L'$ ортонормированный и что первые k его векторов и только они единичны. Теорема доказана.

Следствие. *Псевдоевклидовы пространства с различными размерностями или с различными положительными* *индексами не изоморфны. Евклидово пространство не изоморфно никакому псевдоевклидову.*

Замечание. Однако нет надобности отдельно изучать n-мерные квадратично-метрические пространства с положительными индексами k и $n-k$. Достаточно у одного из них сменить знак метрической формы, чтобы получить другое.

§ 6. k-ортогональные матрицы и k-ортогональные группы

1. Рассмотрим n-мерное пространство с квадратичной метрикой с данным положительным индексом $k\,(0 \leqslant k \leqslant n)$. Пусть в этом пространстве берутся два любых базиса $e_1, \ldots, e_n$ и $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ при условии, что оба они ортонормированные и в каждом из них единичными являются первые k векторов.

Напишем по обычному стандарту формулы перехода от первого базиса ко второму:

$$e_{i'} = \sum P^i_{i'} e_i. \qquad (1)$$

Матрица P, составленная из коэффициентов этих формул, в данном случае обладает специальной природой. Постараемся ее выяснить. С этой целью напишем метрическую форму пространства в базисе $e_1, \ldots, e_n$:

$$\| x \|^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \ldots - (x^n)^2. \qquad (1)$$

Наряду с этой формой рассмотрим матрицу

$$E_k = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & & -1 \end{matrix} \right\|,$$

у которой на первых k местах по главной диагонали стоит $+1$, на остальных местах главной диагонали -1, а все остальные элементы равны нулю. Очевидно, что матрица G метрической формы в базисе $e_1, \ldots, e_n$ совпадает с матрицей E_k:

$$G = E_k.$$

В силу наших условий относительно рассматриваемых базисов метрическая форма в базисе $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ имеет точно такой же вид (1), как и в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Поэтому матрица G' метрической формы в базисе $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ также равна E_k:

$$G' = E_k.$$

С другой стороны, согласно общему закону преобразования матрицы квадратичной формы имеем

$$G' = PGP^*.$$

Отсюда получаем следующий вывод: если матрица P является матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису, то

$$PE_kP^* = E_k; \tag{2}$$

существенно, что в обоих базисах именно первые k векторов являются единичными (остальные — мнимоединичными).

Легко понять, что одновременно доказано обратное утверждение: если матрица P удовлетворяет условию (2), если исходный базис $e_1, \ldots, e_n$ является ортонормированным и если первые k его векторов единичные (остальные — мнимоединичные), то базис $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$, полученный по формуле (1), будет тоже ортонормированным, и его первые k векторов также будут единичными.

2. Определение. Всякая $n \times n$-матрица P, удовлетворяющая условию (2), называется *k-ортогональной* ($0 \leqslant k \leqslant n$).

Заметим, что это определение имеет чисто алгебраический характер; его можно было бы высказать вне связи с геометрией квадратично-метрических пространств.

3. Всякие k-ортогональные матрицы невырожденные. В самом деле, очевидно, что $\operatorname{Det} E_k = \pm 1$.

Отсюда и из (2)

$$\operatorname{Det} P \cdot \operatorname{Det} P^* = 1, \tag{3}$$

следовательно, $\operatorname{Det} P \neq 0$. Из (3) видно также, что $\operatorname{Det} P = \pm 1$.

4. Вследствие (2) имеем $P^{-1}E_k = E_kP^*$, или (так как $E_kE_k = E$)

$$P^{-1} = E_kP^*E_k. \tag{4}$$

Мы видим, что операция обращения матрицы, трудоемкая в общем случае, для k-ортогональных матриц сводится к операциям транспонирования и умножения на E_k (последнее означает только смену знака некоторых элементов).

5. Теорема. *В группе всех невырожденных $n \times n$-матриц k-ортогональные матрицы составляют подгруппу.*

Мы обозначим ее через O_k и будем называть k-ортогональной подгруппой (или группой).

Доказательство. Пусть O_k обозначает пока просто множество всех k-ортогональных $n \times n$-матриц. Возьмем из O_k две любые матрицы P_1, P_2; тогда $P_1 E_k P_1^* = E_k$, $P_2 E_k P_2^* = E_k$. Отсюда

$$(P_1 P_2) E_k (P_1 P_2)^* = P_1 (P_2 E_k P_2^*) P_1^* = P_1 E_k P_1^* = E_k.$$

Таким образом, если $P_1 \in O_k$, $P_2 \in O_k$, то $P_1 P_2 \in O_k$.

Возьмем из O_k произвольную матрицу P; тогда $P E_k P^* = E_k$. Отсюда и вследствие (4)

$$P^{-1} E_k (P^{-1})^* = P^{-1} E_k (E_k P^* E_k)^* = P^{-1} E_k (E_k P E_k) = \\ = P^{-1} E_k P E_k = E_k.$$

Таким образом, если $P \in O_k$, то $P^{-1} \in O_k$. Теорема доказана.

Замечание. Согласно п. 3 все $O_k (0 \leqslant k \leqslant n)$ входят в подгруппу $n \times n$-матриц с единичным модулем определителя.

6. Множество всех ортонормированных базисов в пространстве с квадратичной метрикой с данным положительным индексом представляет собой не что иное, как класс базисов, который определен по группе O_k каким-нибудь одним ортонормированным базисом этого пространства (см. § 1 гл. VI).

Геометрия пространства с квадратичной метрикой имеет предметом своего изучения инварианты относительно группы O_k в классе ортонормированных базисов. Говоря об инвариантах, мы понимаем этот термин в широком смысле; именно, мы имеем в виду не только инвариантные числовые величины (как, например, скалярное произведение, норма вектора), но также инвариантные объекты (например, плоскости) и инвариантные отношения (например, отношение ортогональности).

7. Заметим теперь, что любой класс базисов по группе O_k является классом ортонормированных базисов в некоторой (вполне определенной) квадратичной метрике.

В самом деле, пусть $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный базис линейного пространства L. Согласно п. 2 § 3 существует (вполне определенная) квадратичная метрика, в которой базис $e_1, \ldots, e_n$ является ортонормированным и имеет в качестве единичных первые k своих векторов. Тогда класс базисов, определенный по группе O_k базисом $e_1, \ldots, e_n$, будет состоять из ортонормированных базисов именно в этой метрике.

8. Вывод. Таким образом, множество всех базисов линейного n-мерного пространства расслаивается на классы по группе O_k так, что каждому классу отвечает своя квадратичная метрика, в которой базисы этого класса являются ортонормированными.

Одновременно определяется бесконечное множество квадратично-метрических пространств на одном и том же, образно говоря, линейном «каркасе» L. Все они метрически изоморфны между собой; геометрии этих пространств алгебраически тождественны, так как все они имеют своим предметом инварианты группы O_k. Однако с точки зрения линейного пространства L эти квадратично-метрические пространства различны, поскольку одна и та же пара векторов x, y пространства L имеет в них разные численные значения скалярного произведения. Все сказанное мы поясним чуть позднее на примерах (см. §§ 7, 8).

9. Будем считать, что квадратичная метрика выбрана. Пусть k-ортогональная матрица P определяет переход от ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ к ортонормированному базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$. Одновременно рассмотрим соответствующее преобразование координат

$$x^{i'} = \sum Q_i^{i'} x^i. \tag{5}$$

Матрица этого преобразования $Q = (P^*)^{-1}$. Убедимся, что матрица Q также является k-ортогональной. С этой целью напишем следующую цепочку равенств:

$$QE_kQ^* = (P^*)^{-1}E_kP^{-1} = (PE_kP^*)^{-1} = E_k^{-1} = E_k.$$

Мы получили соотношение $QE_kQ^* = E_k$; тем самым k-ортогональность Q установлена.

Итак, при переходе от одного ортонормированного базиса к другому координаты произвольного вектора подвергаются (как переменные) линейному преобразованию с k-ортогональной матрицей.

Замечание. Линейные преобразования (5) переменных $x^1, \ldots, x^n$ в переменные $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ с k-ортогональной матрицей Q могут быть охарактеризованы без обращения к преобразованию базисов и соответственно без обращения к матрице P. Именно, такие линейные преобразования и только они сохраняют нормальный вид квадратичной формы; иначе говоря, если матрица Q является k-ортогональной (и только в этом случае), то имеет место тождество

$$(x^{1'})^2 + \ldots + (x^{k'})^2 - (x^{(k+1)'})^2 - \ldots - (x^{n'})^2 \equiv$$
$$\equiv (x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \ldots - (x^n)^2,$$

в левой части которого $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ выражены по формулам (5).

10. Из предыдущего ясно, что множество всех линейных преобразований переменных с k-ортогональными матрицами составляет группу, изоморфную группе O_k, причем изоморфизмом может служить отображение, которое матрице $P \in O_k$ относит линейное преобразование с матрицей $Q = (P^*)^{-1}$. В этом же можно убедиться с помощью формальных действий с матрицами. В самом деле, если P_1, $P_2 \in O_k$ и $Q_1 = (P_1^*)^{-1}$, $Q_2 = (P_2^*)^{-1}$, то $Q_1 Q_2 = (P_1^*)^{-1} (P_2^*)^{-1} = (P_2^* P_1^*)^{-1} = ((P_1 P_2)^*)^{-1}$. Мы видим, что произведению матриц P_1, P_2 отвечает произведение их образов, что служит условием изоморфизма.

§ 7. Группа евклидовых поворотов

1. В двумерном случае существуют два метрически неизоморфных пространства, соответственно положительным индексам $k = 1$ и $k = 2$.

Если $k = 2$, то в ортонормированном базисе метрическая форма имеет вид

$$\| x \|^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2. \tag{1}$$

Ей отвечает геометрия обычной евклидовой плоскости (где скалярное произведение дается известной формулой $(x, y) = x^1 y^1 + x^2 y^2$, где определен угол между векторами, а тригонометрические функции углов даются в координатах также хорошо известными формулами элементарной аналитической геометрии и т. д.). Если $k = 1$, то

$$\| x \|^2 = (x^1)^2 - (x^2)^2. \tag{2}$$

Метрической форме (2) отвечает двумерная геометрия Минковского.

2. Здесь мы займемся формой (1). Начнем с рассмотрения k-ортогональных матриц. Впрочем, сразу же оговоримся, что при $n=2$, $k=2$ (как и вообще при $k=n$) k-ортогональные матрицы просто называются ортогональными.

При $n=2$, $k=2$ имеем $E_k=E$. Поэтому общее условие $PE_kP^*=E_k$ для k-ортогональности матрицы P в данном частном случае принимает вид: $PP^*=E$.

Пусть

$$P=\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}.$$

Согласно сказанному, эта матрица ортогональна тогда и только тогда, когда

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha^2+\beta^2=1, & \alpha\gamma+\beta\delta=0, \\ \gamma\alpha+\delta\beta=0, & \gamma^2+\delta^2=1. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Здесь три различных уравнения. Ввиду простоты этой системы не составляет труда найти все ее решения. В самом деле, вследствие второго уравнения системы (3) мы можем написать: $\gamma=-\lambda\beta$, $\delta=+\lambda\alpha$, где λ — новая неизвестная. Подставляя эти выражения в последнее уравнение системы, получим

$$\gamma^2+\delta^2=\lambda^2(\alpha^2+\beta^2)=\lambda^2=1.$$

Таким образом, $\lambda=\pm 1$. Чтобы выяснить геометрический смысл выбора знака, подсчитаем определитель матрицы P:

$$\operatorname{Det} P=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\lambda\beta & \lambda\alpha \end{vmatrix}=\lambda(\alpha^2+\beta^2)=\lambda.$$

Следовательно, значениям $\lambda=\pm 1$ отвечают преобразования базиса соответственно с сохранением или с нарушением ориентации.

Используем теперь уравнение $\alpha^2+\beta^2=1$. Вследствие этого уравнения $\alpha=\cos\theta$, $\beta=\sin\theta$, где θ — произвольный параметр. Одновременно имеем: $\gamma=-\lambda\sin\theta$, $\delta=\lambda\cos\theta$. Тем самым найдены все решения системы (3) и соответственно все ортогональные матрицы (разумеется, только при $n=2$).

Ограничимся случаем $\lambda = +1$. Тогда

$$P = \begin{Vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Формула (4) дает все ортогональные матрицы, для которых $\operatorname{Det} P > 0$ (т. е. $\operatorname{Det} P = +1$). Легко понять, что они сами по себе составляют группу (подгруппу всей ортогональной группы). Это же обстоятельство усматривается из следующих двух равенств:

$$\begin{Vmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{Vmatrix}.$$

Они легко проверяются и выражают тот факт, что произведение матриц вида (4) и обращение матрицы вида (4) приводят к матрицам того же вида.

3. Возьмем на евклидовой плоскости ортонормированный базис e_1, e_2; см. рис. 40, где изображены ортогональные друг другу векторы e_1, e_2, которые исходят из начала координат и имеют концы на единичной окружности $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$.

Перейдем к новому базису с помощью матрицы P вида (4):

$$\left.\begin{aligned} e_{1'} &= e_1\cos\theta + e_2\sin\theta, \\ e_{2'} &= -e_1\sin\theta + e_2\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

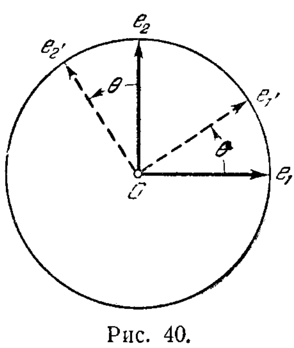


Рис. 40.

В силу первого из этих равенств вектор $e_{1'}$ является единичным и составляет с вектором e_1 угол θ при обычном условии относительно ориентации углов (т. е. угол понимается с учетом знака, как принято в тригонометрии). Второе равенство можно написать в виде

$$e_{2'} = e_1\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + e_2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда следует, что вектор $e_{2'}$, будучи единичным, составляет с вектором e_1 угол $\theta+\frac{\pi}{2}$. Значит, с вектором e_2 он составляет такой же угол θ, как вектор $e_{1'}$ с вектором e_1. Иначе говоря, базис $e_{1'}$, $e_{2'}$ получается поворотом на угол θ базиса e_1, e_2 целиком.

Таким образом, ортонормированный базис e_1, e_2, произвольно взятый в евклидовой плоскости, определяет по группе матриц (4) класс базисов, которые получаются поворотом базиса e_1, e_2 на всевозможные углы; все они ортонормированы и одинаково ориентированы с базисом e_1, e_2.

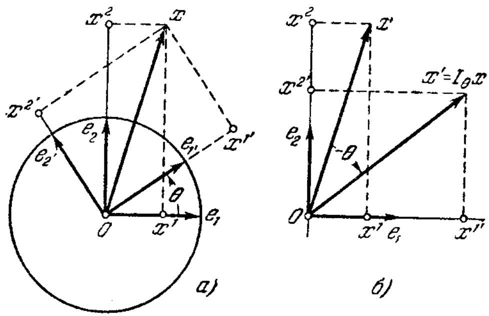


Рис. 41.

Замечание. Чтобы получить, исходя из базиса e_1, e_2, класс базисов по всей ортогональной группе, нужно добавочно построить класс базисов по группе матриц (4), взяв в качестве исходного базис $e_1, -e_2$.

4. Преобразованию базиса по матрице P отвечает преобразование координат с матрицей $Q=(P^*)^{-1}$. В данном случае $PP^*=E$. Отсюда $Q=P$. Следовательно, если базис преобразуется по формулам (5), то координаты произвольного вектора преобразуются по формулам с той же матрицей:

$$\left.\begin{aligned} x^{1'} &= x^1\cos\theta+x^2\sin\theta, \\ x^{2'} &= -x^1\sin\theta+x^2\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

5. Сейчас мы рассматривали соотношения (6) как формулы преобразования координат данного вектора $x=x^1e_1+x^2e_2$ при повороте базиса e_1, e_2 (рис. 41, а). Эти же формулы можно рассматривать с другой точки зрения. Именно, можно считать, что базис e_1, e_2 не меняется, но что формулы (6) сопоставляют с произвольным вектором $x=x^1e_1+x^2e_2$ новый вектор $x'=x^{1'}e_1+x^{2'}e_2$. В этом смысле формулы (6) являются координатным представлением в базисе e_1, e_2 некоторого линейного преобразования евклидовой плоскости; мы обозначим его I_θ. Согласно формуле (6) вектор $x'=I_\theta x$ имеет ту же норму, что и вектор x, и получается путем поворота вектора x на угол $(-\theta)$ (рис. 41, б). Так как угол θ — общий для всех векторов, то при линейном преобразовании $x'=I_\theta x$ все векторы поворачиваются одинаковым образом. Поэтому линейное преобразование I_θ называют поворотом евклидовой плоскости на угол $(-\theta)$.

Множество всех поворотов (т. е. на всевозможные углы) составляет группу поворотов евклидовой плоскости или, как еще говорят, группу вращений. Она изоморфна группе матриц вида (4), которая поэтому также называется группой поворотов или вращений.

6. Преобразование, сохраняющее метрику пространства, называется изометрическим (или изометричным).

Сейчас мы ограничимся некоторыми примерами, а в следующей главе изучим изометрические преобразования подробнее.

7. При любом повороте $x'=I_\theta x$ метрические свойства образов совпадают с метрическими свойствами прообразов (норма образа равна норме прообраза: $\|x'\|=\|x\|$; скалярное произведение образов равно скалярному произведению прообразов: $(x', y')=(x, y)$). Поэтому всякий поворот I_θ является изометрическим преобразованием. К числу изометрических преобразований евклидовой плоскости относятся также зеркальные отражения относительно некоторой прямой; например, преобразование $x^{1'}=x^1$, $x^{2'}=-x^2$.

Ниже, в §§ 7, 8 гл. IX доказано, что на двумерной евклидовой плоскости произвольное изометрическое преобразование определяется в ортонормированном базисе координатным представлением с произвольной ортогональной матрицей (с определителем любого знака); оно является либо вращением плоскости на некоторый угол, либо зеркальным отражением, либо произведением некоторого вращения на зеркальное отражение.

З а м е ч а н и е. Мы не учитываем параллельные сдвиги евклидовой плоскости, смещающие начало координат, поскольку евклидову плоскость рассматриваем сейчас как векторное пространство.

8. В геометрии евклидовой плоскости рассматриваются инварианты ортогональной группы. При этом сам факт инвариантности имеет чисто алгебраическую природу; например, инвариантность норм векторов означает тождество $(x^{1'})^2+(x^{2'})^2=(x^1)^2+(x^2)^2$ как следствие формул (6) или формул $x^{1'}=x^1$, $x^{2'}=-x^2$. С геометрической же стороны дела здесь возможны два воззрения. Если ортогональная группа рассматривается как группа, порождающая класс ортонормированных базисов, то инвариантность относительно этой группы означает равноправие таких базисов. Если ортогональная группа рассматривается как группа, порождающая изометрические линейные преобразования, то инвариантность относительно этой группы означает сохранение метрических свойств фигур (систем векторов) при поворотах и зеркальных отражениях.

9. Выше мы указывали, что в одном и том же линейном пространстве можно по-разному ввести метрику, принимая за скалярное произведение различные билинейные формы. Проиллюстрируем это на примере евклидовой плоскости.

Согласно элементарной геометрии на евклидовой плоскости можно сравнивать длины и измерять углы; пусть единица масштаба выбрана и в качестве базиса взяты векторы a_1, a_2 единичной длины, ортогональные с элементарной точки зрения. Тогда можно ввести скалярное произведение (x, y), полагая

$$(x, y)=x^1y^1+x^2y^2, \tag{7}$$

где $x=x^1a_1+x^2a_2$, $y=y^1a_1+y^2a_2$. Согласно §§ 1, 2 будут определены длины всех векторов, понятие ортогональности, а по известной из элементарной аналитической геометрии формуле можно будет выразить угол между векторами через их длины и скалярное произведение. При этом длины и углы, определенные посредством скалярного произведения (7), заданного в базисе a_1, a_2, совпадут с длинами и углами, определяемыми в элементарной планиметрии.

Теперь на этой же плоскости наряду с ее естественной геометрией мы рассмотрим другую геометрию, введенную искусственно. Для этого наряду с базисом a_1, a_2 возьмем какой-нибудь неортонормированный базис e_1, e_2; см. рис. 42, где для удобства дальнейшего изложения мы берем в качестве e_2 единичный вектор, а в качестве e_1 — вектор длиною больше единицы и ортогональный к вектору e_2. Исходя из этого базиса, мы построим класс базисов по группе матриц (4), т. е. по формулам (5). Введем на плоскости новую квадратичную метрику, определив скалярное произведение той же самой формулой (7), но считая теперь, что x^1, x^2, y^1, y^2 — координаты векторов x, y в базисе e_1, e_2, изображенном на рис. 42. В новой метрике векторы e_1, e_2 ортогональны и имеют длины, равные единице; также ортонормированным будет базис $e_{1'}$, $e_{2'}$, определяемый формулами (5) при любом значении θ. Короче говоря, в новой метрике повторится все, что говорилось до настоящего пункта. Но изображается все это с точки зрения старой метрики в искаженном виде. Например, единичная окружность, которая в базисе e_1, e_2 рис. 42 дается уравнением $(x^1)^2+(x^2)^2=1$, в смысле старой метрики является эллипсом. Произвольный ортонормированный базис, определяемый формулами (5), составлен векторами $e_{1'}$, $e_{2'}$, которые в старой метрике не ортогональны, а идут по двум сопряженным диаметрам эллипса $(x^1)^2+(x^2)^2=1$.

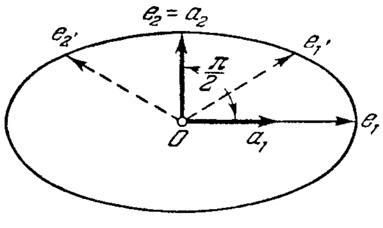


Рис. 42.

Чтобы убедиться в справедливости этих замечаний, достаточно установить метрический изоморфизм между евклидовой плоскостью с ее первоначальной метрикой и этой же плоскостью с ее новой метрикой. Согласно § 5 (см. доказательство теоремы 1) мы получим метрический изоморфизм, если установим линейный изоморфизм, при котором базисы, изображенные на рис. 40 и 42, соответствуют друг другу. Ради наглядности будем считать, что евклидова плоскость дана в двух экземплярах Π_1 и Π_2 соответственно рис. 40 и рис. 42. Расположим Π_1 и Π_2 в трехмерном евклидовом пространстве так, как изображено на рис. 43. Именно, совместим векторы, которые в плоскостях Π_1 и Π_2 обозначены через e_2 (что можно сделать, так как мы взяли эти векторы одной и той же длины, равной единице), после чего, поворачивая плоскость Π_2 вокруг e_2, приведем ее в такое расположение, чтобы концы векторов, обозначенных через e_1, оказались на одном перпендикуляре к плоскости Π_1. Теперь каждому вектору x плоскости Π_1 мы поставим в соответствие такой вектор x' плоскости Π_2, который ортогонально проектируется на плоскость Π_1 в вектор x. Очевидно, это соответствие является линейным изоморфизмом; вместе с тем оно является метрическим изоморфизмом, так как ортонормированному базису плоскости Π_1 соответствует базис плоскости Π_2, ортонормированный в ее новой метрике.

Из нашей конструкции сразу усматривается справедливость сделанных выше замечаний. Именно, что единичная окружность в новой метрике плоскости Π_2 является в ее старой метрике эллипсом; что базисы, ортонормированные в новой метрике, составлены векторами, которые идут по сопряженным диаметрам этого эллипса. В качестве новых метрических свойств векторов в плоскости Π_2 берутся свойства их прообразов в плоскости Π_1 (именно, в качестве нормы вектора в плоскости Π_2 берется норма его прообраза в плоскости Π_1; в качестве скалярного произведения двух векторов на Π_2 берется скалярное произведение их прообразов Π_1).

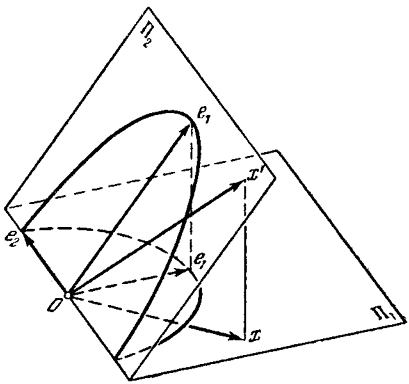


Рис. 43.

Отметим, в частности, что линейное преобразование I_θ, которое имеет в базисе e_1, e_2 плоскости Π_2 координатное представление (6), есть поворот плоскости Π_2 в смысле новой метрики; в первоначальной же метрике это преобразование есть так называемый эллиптический поворот евклидовой плоскости. Название это связано с тем, что если параметр θ изменяется, то образ $x' = I_\theta x$ фиксированного вектора x описывает своим концом эллипс, проходящий через конец вектора x; различным векторам x, y, z отвечают эллипсы, подобные и подобно расположенные (см. рис. 44; все сказанное сейчас легко понять, если снова обратиться к рис. 43). На рис. 44 заштрихованы две фигуры, одна из которых переводится в другую некоторым эллиптическим поворотом.

В геометрии, искусственно введенной нами на плоскости, эти две фигуры следует считать одинаковыми (конгруэнтными), то есть наложимыми одна на другую.

10. Можно было бы базис e_1, e_2 взять совершенно произвольно и, считая, что $x = x^1 e_1 + x^2 e_2$, $y = y^1 e_1 + y^2 e_2$, ввести скалярное произведение по формуле

$$(x, y) = g(x, y) = \sum_{i, j=1}^{2} a_{ij} x^i y^j, \tag{8}$$

где билинейная форма $g(x, y)$ выбрана как угодно, лишь бы квадратичная форма $g(x, x)$ была положительно определена. Из § 5 следует, что мы получим двумерное пространство, метрически изоморфное евклидовой плоскости. Используя положительную определенность $g(x, x)$, нетрудно доказать, что окружности, то есть линии

$$\|x\|^2 = g(x, x) = \text{const}$$

на плоскости со скалярным произведением (8), с элементарной точки зрения являются эллипсами.

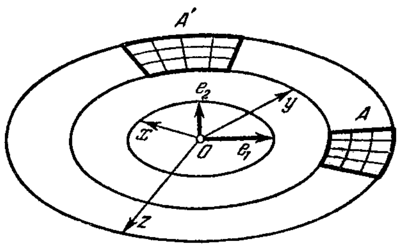


Рис. 44.

Итак, мы видим, что на одной и той же плоскости можно задать бесконечно много различных евклидовых метрик. Чтобы более наглядно представить себе это обстоятельство, следует заметить, что любой эллипс с центром в нулевой точке является единичной окружностью в одной (вполне определенной) евклидовой метрике. Таким образом, различных евклидовых метрик на плоскости «столько же, сколько» различных эллипсов с общим центром.

11. Разумеется в линейных пространствах большей размерности тоже можно вводить разные изоморфные между собой метрики. Так, например, в пространстве функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$, можно ввести скалярное произведение

$$(x, y) = \int_{-1}^{1} \varphi(t)\, x(t)\, y(t)\, dt, \tag{9}$$

где $\varphi(t)$ — произвольно выбранная положительная непрерывная функция. Тогда вместо формулы (13) § 4 будем иметь

$$\| x(t) \|^2 = \int_{-1}^{1} \varphi(t) x^2(t)\, dt.$$

Полученное пространство метрически изоморфно пространству непрерывных функций со скалярным произведением (12) § 4, заданных на $[-1, 1]$. Метрическим изоморфизмом между ними является, например, отображение, переводящее $x(t)$ в $x(t)\sqrt{\varphi(t)}$.

Отметим попутно, что пары функций, для которых обращается в нуль скалярное произведение (9), называют ортогональными с весом $\varphi(t)$ на отрезке $[-1, 1]$.

§ 8. Группа гиперболических поворотов

1. Теперь мы займемся (двумерной) геометрией Минковского. Все наши построения мы будем вести на обычной евклидовой плоскости. Возьмем на ней ортонормированный базис e_1, e_2 и введем метрику Минковского с помощью квадратичной формы

$$\| x \|^2 = (x^1)^2 - (x^2)^2 \tag{1}$$

в базисе e_1, e_2. Соответственно имеем формулу для скалярного произведения

$$(x, y) = x^1 y^1 - x^2 y^2. \tag{2}$$

В этой метрике $\| e_1 \|^2 = 1$, $\| e_2 \|^2 = -1$, $(e_1, e_2) = 0$. Таким образом, базис e_1, e_2 является ортонормированным и в метрике (1), при этом вектор e_1 оказывается единичным, вектор e_2 — мнимоединичным.

Чтобы сразу же почувствовать особенность метрики (1), целесообразно начать с рассмотрения единичной окружности. Так мы называем геометрическое место концов всевозможных векторов, нормы которых по абсолютной величине равны единице (считая, что все векторы приложены к нулевой точке). В данном базисе единичная окружность определяется уравнением $|(x^1)^2 - (x^2)^2| = 1$. Отсюда либо $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 1$, либо $(x^1)^2 - (x^2)^2 = -1$. В евклидовой геометрии два последних уравнения определяют в базисе e_1, e_2 сопряженные равносторонние гиперболы, общими асимптотами которых служат биссектрисы координатных углов. Таким образом, единичная окружность в метрике Минковского состоит из двух евклидовых гипербол; на одной из них лежат концы единичных, на другой — мнимоединичных векторов (рис. 45). В отличие от нашей терминологии единичной окружностью иногда называют только первую из этих двух гипербол, а другую — мнимоединичной.

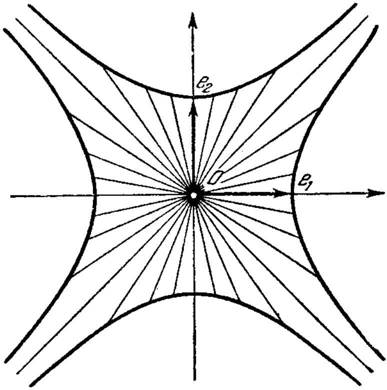


Рис. 45.

Рассмотрим произвольный вектор $x = x^1 e_1 + x^2 e_2$, идущий по какой-нибудь асимптоте этих гипербол; в этом случае $|x^1| = |x^2|$, следовательно, $\|x\|^2 = 0$. Таким образом, на асимптотах лежат изотропные векторы, т. е. векторы с нулевой нормой.

2. Важное замечание. На плоскости Минковского не соблюдается неравенство треугольника. Это сразу видно на примере треугольника OAB (рис. 46), где векторы $\overline{OA}$ и $\overline{AB}$ изотропны (параллельны асимптотам гипербол). Если обозначим $\overline{OA} = x$, $\overline{AB} = y$, то

$$\|x+y\| > \|x\| + \|y\| = 0$$

или, в терминах расстояний,

$$\rho(O, B) > \rho(O, A) + \rho(A, B) = 0.$$

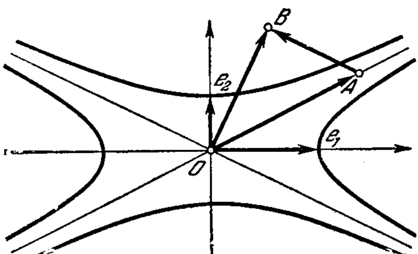


Рис. 46.

Можно доказать, что в любом псевдоевклидовом пространстве найдутся три точки, для которых аксиома треугольника не соблюдается. Доказательство предоставляем читателю.

3. Пусть x, y — два неизотропных вектора. Предположим, что они перпендикулярны друг другу в смысле Минковского, и постараемся описать, что означает такая их перпендикулярность с евклидовой точки зрения. Из (2) мы имеем $(x, y) = x^1y^1 - x^2y^2 = 0$; тогда $((x^1)^2 - (x^2)^2) \cdot ((y^1)^2 - (y^2)^2) = -(x^2y^1 - x^1y^2)^2$. Отсюда следует, что $\|x\|^2 = (x^1)^2 - (x^2)^2$ и $\|y\|^2 = (y^1)^2 - (y^2)^2$ суть числа разных знаков. Значит, если один из векторов x, y имеет в метрике Минковского действительную норму, то другой — мнимую; в евклидовом смысле это означает, что векторы x, y либо их продолжения пересекают разные гиперболы $(x^1)^2 - (x^2)^2 = \pm 1$. Так как сейчас нас интересуют только направления векторов x, y, то без потери общности мы можем считать, что концы их

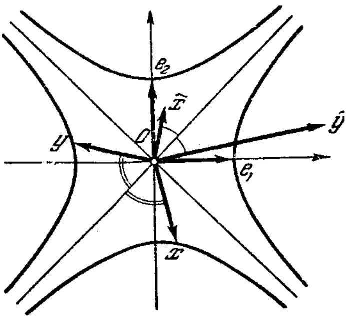


Рис. 47.

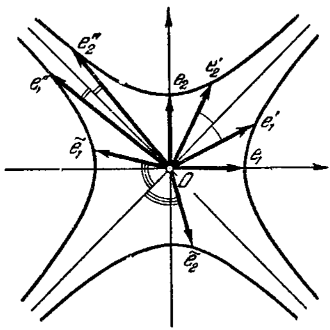


Рис. 48.

лежат на единичной окружности метрики Минковского. Пусть, например, $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 1$, $(y^1)^2 - (y^2)^2 = -1$. Если при этом $(x, y) = x^1y^1 - x^2y^2 = 0$, то $(y^1 - x^1)^2 - (y^2 - x^2)^2 = 0$ и, обратно, из последнего соотношения следует $(x, y) = 0$. Но равенство $(y^1 - x^1)^2 - (y^2 - x^2)^2 = 0$ означает, что разность $y - x$ векторов x, y есть изотропный вектор, т. е. направлена по некоторой координатной биссектрисе. А это равносильно тому, что векторы x, y симметричны относительно другой биссектрисы.

Итак, векторы x, y ортогональны друг другу в смысле Минковского в том и только в том случае, когда в евклидовом смысле они расположены на лучах, симметричных относительно какой-нибудь из координатных биссектрис (рис. 47).

Заметим, что изотропный вектор x (лежащий на биссектрисе) ортогонален сам себе; в самом деле, $(x, x) = \|x\|^2 = 0$.

4. Изложенное в предыдущем пункте позволяет дать евклидово описание всех базисов, ортонормированных в рассматриваемой метрике Минковского. Именно, произвольный ортонормированный базис составлен векторами $e_{1'}$, $e_{2'}$, концы которых лежат на гиперболах $(x^1)^2-(x^2)^2=\pm 1$ симметрично относительно одной из их (общих) асимптот (рис. 48).

5. Рассмотрим теперь k-ортогональные матрицы ($n=2$, $k=1$), соответствующие двумерной метрике Минковского. Запишем любую из таких матриц в виде $P=\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$. Согласно определению k-ортогональности имеем в нашем случае

$$\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix}.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}\alpha^2-\beta^2=1, \qquad \alpha\gamma-\beta\delta=0,\\ \gamma\alpha-\delta\beta=0, \qquad \gamma^2-\delta^2=1.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Найдем общее решение этой системы (трех уравнений). Вследствие второго уравнения системы (3) мы можем написать

$$\gamma=\lambda\beta, \qquad \delta=\lambda\alpha, \tag{4}$$

где λ — новая неизвестная. Подставляя эти выражения в последнее уравнение, получим

$$\gamma^2-\delta^2=\lambda^2(\beta^2-\alpha^2)=-\lambda^2=-1.$$

Таким образом, $\lambda=\pm 1$. С другой стороны,

$$\operatorname{Det} P=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \lambda\beta & \lambda\alpha\end{vmatrix}=\lambda(\alpha^2-\beta^2)=\lambda.$$

Следовательно, значениям $\lambda=\pm 1$ соответствуют преобразования базиса с сохранением или с нарушением ориентации.

Используем теперь уравнение $\alpha^2-\beta^2=1$. Его общее решение имеет вид

$$\alpha=\pm\operatorname{ch}\theta, \qquad \beta=\pm\operatorname{sh}\theta, \tag{5}$$

где θ — произвольный параметр. Однако можно считать, что если $\alpha>0$, то

$$\alpha=\operatorname{ch}\theta, \qquad \beta=\operatorname{sh}\theta, \qquad -\infty<\theta<+\infty, \tag{5а}$$

а если $\alpha<0$, то

$$\alpha=-\operatorname{ch}\theta, \qquad \beta=-\operatorname{sh}\theta, \qquad -\infty<\theta<+\infty, \tag{5б}$$

поскольку остальные случаи (5) сводятся к (5а) или (5б) заменой θ на $-\theta$.

Формулы (4), (5а) и (5б) с учетом того, что $\lambda = \pm 1$, дают все решения системы (3). Тем самым найдены все k-ортогональные матрицы при $n=2$, $k=1$.

Подвергая исходный базис e_1, e_2 преобразованию с произвольной k-ортогональной матрицей, мы получим новый базис $e_{1'}$, $e_{2'}$:

$$\left.\begin{aligned} e_{1'} &= \alpha e_1 + \beta e_2, \\ e_{2'} &= \gamma e_1 + \delta e_2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

у которого вектор $e_{1'}$ является единичным:

$$\| e_{1'} \|^2 = \alpha^2 - \beta^2 = +1,$$

а вектор $e_{2'}$ — мнимоединичным:

$$\| e_{2'} \|^2 = \gamma^2 - \delta^2 = -1.$$

Отсюда видно, что преобразование (6) не может перевести вектор, конец которого лежит на одной из гипербол $(x^1)^2 - (x^2)^2 = \pm 1$, в вектор с концом на другой гиперболе.

6. Выясним евклидов геометрический смысл условий $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$. Так как базис e_1, e_2 ортонормирован в евклидовой метрике плоскости, то, беря евклидовы скалярные произведения, получим

$$(e_{1'}, e_1) = \alpha (e_1, e_1) + \beta (e_2, e_1) = \alpha. \tag{7}$$

Таким образом, при $\alpha > 0$ векторы $e_{1'}$ и e_1 составляют острый угол, при $\alpha < 0$ — тупой. Отсюда заключаем: если $\alpha > 0$, то вектор $e_{1'}$ имеет конец на той же ветви гиперболы $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 1$, что вектор e_1 (на рис. 48 это — правая ветвь); если $\alpha < 0$, то концы векторов e_1, $e_{1'}$ лежат на разных ветвях этой гиперболы.

7. Аналогично (7) можно β, γ, δ выразить через евклидовы скалярные произведения векторов:

$$\beta = (e_{1'}, e_2), \qquad \gamma = (e_{2'}, e_1), \qquad \delta = (e_{2'}, e_2).$$

Разные случаи расположения базиса $e_{1'}$, $e_{2'}$ в зависимости от знаков λ, α и β показаны на рис. 49 и 50.

8. Рассмотрим матрицы P при $\lambda = +1$, $\alpha > 0$. Согласно предыдущему

$$P = \begin{Vmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

$\lambda = +1$

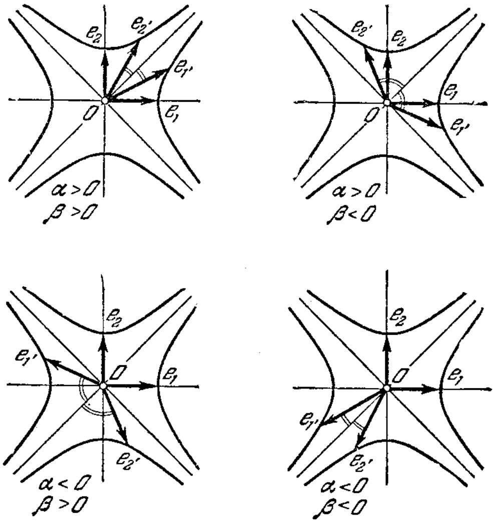


Рис. 49.

$\lambda = -1$

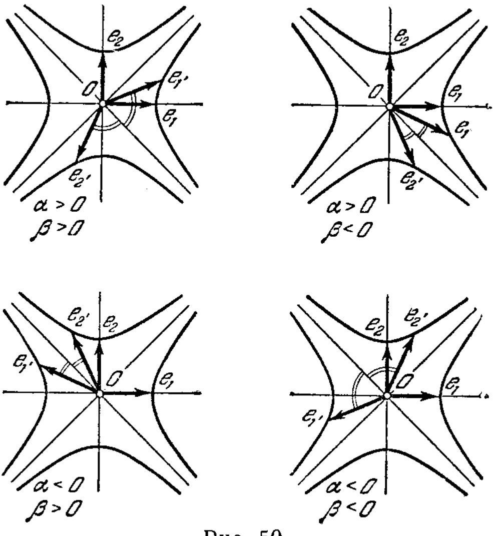


Рис. 50.

При переходе от ортонормированного (в метрике Минковского) базиса e_1, e_2 к новому базису с помощью матрицы P вида (8) получается ортонормированный базис $e_{1'}$, $e_{2'}$ с той же ориентацией, что и e_1, e_2, кроме того, концы векторов $e_{1'}$, $e_{2'}$ лежат на тех же ветвях гипербол $(x^1)^2-(x^2)^2=\pm 1$, на каких лежат концы соответствующих векторов e_1, e_2. В двумерной геометрии Минковского матрицы вида (8) играют такую же роль, что и матрицы (4) § 7 в евклидовой двумерной геометрии.

9. Матрицы вида (8) составляют подгруппу всей k-ортогональной группы при $k=1$, $n=2$. В самом деле, имеют место равенства

$$\left\|\begin{matrix}\operatorname{ch}\theta_1 & \operatorname{sh}\theta_1\\ \operatorname{sh}\theta_1 & \operatorname{ch}\theta_1\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\operatorname{ch}\theta_2 & \operatorname{sh}\theta_2\\ \operatorname{sh}\theta_2 & \operatorname{ch}\theta_2\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\operatorname{ch}(\theta_1+\theta_2) & \operatorname{sh}(\theta_1+\theta_2)\\ \operatorname{sh}(\theta_1+\theta_2) & \operatorname{ch}(\theta_1+\theta_2)\end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|\begin{matrix}\operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta\\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta\end{matrix}\right\|^{-1}=\left\|\begin{matrix}\operatorname{ch}(-\theta) & \operatorname{sh}(-\theta)\\ \operatorname{sh}(-\theta) & \operatorname{ch}(-\theta)\end{matrix}\right\|.$$

Они легко устанавливаются и означают, что произведение матриц вида (8) и обращение матрицы вида (8) приводит к матрицам того же вида.

10. Преобразованию базиса по матрице P отвечает преобразование координат с матрицей $Q=(P^*)^{-1}$:

$$\left.\begin{aligned}x^{1'}&=x^1\operatorname{ch}\theta-x^2\operatorname{sh}\theta,\\ x^{2'}&=-x^1\operatorname{sh}\theta+x^2\operatorname{ch}\theta.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

С другой стороны, аналогично п. 5 § 7 мы можем считать, что базис e_1, e_2 не меняется, но что формулы (9) сопоставляют с произвольным вектором $x=x^1e_1+x^2e_2$ новый вектор $x'=x^{1'}e_1+x^{2'}e_2$. В этом смысле формулы (9) являются координатным представлением в базисе e_1, e_2 некоторого линейного преобразования плоскости. Мы обозначим его H_θ. По отношению к метрике Минковского это есть изометрическое преобразование, аналогичное повороту $x'=I_\theta x$ плоскости с евклидовой метрикой. Поэтому преобразование $x'=H_\theta x$ называют *гиперболическим поворотом* плоскости; название «гиперболический» связано с тем, что при фиксированном x и при изменяющемся θ конец вектора $x'=H_\theta x$ скользит по гиперболе $(x^1)^2-(x^2)^2=\|x\|^2$ (рис. 51).

Пусть на плоскости задана произвольная геометрическая фигура W. Гиперболический поворот H_θ переводит ее в некоторую новую фигуру W'. По определению считают, что фигуры W и W' конгруэнтны в метрике Минковского. В евклидовой метрике они, вообще говоря, не конгруэнтны (то есть не наложимы). Простейший пример показан на рис. 52, где фигура и ее образ обозначены W и W' и показаны штриховкой.

11. Мы убедимся сейчас, что аналогия между гиперболическим и обычным (евклидовым) поворо-

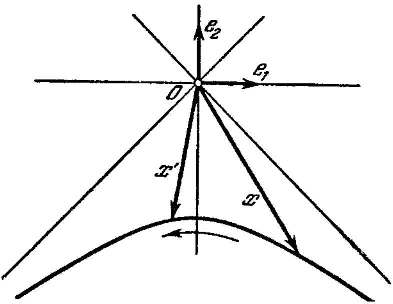


Рис. 51.

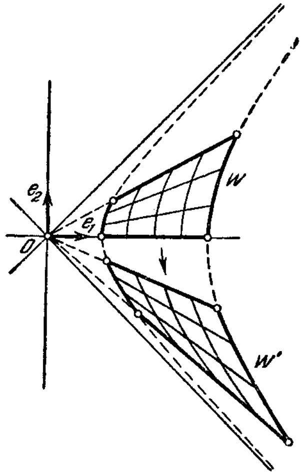


Рис. 52.

том идет весьма далеко. С этой целью выясним геометрический смысл параметра θ в гиперболическом повороте $x' = H_\theta x$. Предположим для простоты выкладок, что $x = \{x^1, x^2\}$ — единичный вектор, т. е. что его конец лежит на гиперболе $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 1$. Обозначим через $S(\theta)$ площадь криволинейного треугольника, который ограничен векторами x, $x' = H_\theta x$ и дугой гиперболы между их концами (рис. 53). Будем считать, что $S > 0$, если поворот от x к x' происходит против часовой стрелки, $S < 0$ в противном случае. Пусть $x'' = H_{\Delta\theta} x'$; ΔS — приращение площади $S(\theta)$ при переходе от x' к x''; $\Delta\sigma$ — ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах x' и x'' (рис. 53). Тогда

$$\Delta\sigma = \begin{vmatrix} x^{1'} & x^{2'} \\ x^{1''} & x^{2''} \end{vmatrix} = -(x^{1'})^2 \operatorname{sh} \Delta\theta + (x^{2'})^2 \operatorname{sh} \Delta\theta = -\operatorname{sh} \Delta\theta;$$

здесь использованы формулы (9) с заменой θ на $\Delta\theta$ и уравнение гиперболы $(x^{1'})^2-(x^{2'})^2=1$. С другой стороны,

$$\Delta S\approx\frac{1}{2}\Delta\sigma=-\frac{1}{2}\operatorname{sh}\Delta\theta\approx-\frac{1}{2}\Delta\theta,$$

где приближенные равенства имеют место с точностью до величин высшего порядка малости относительно $\Delta\theta$. Отсюда

$$dS=-\frac{1}{2}\,d\theta.$$

Таким образом, если учесть, что $S=0$ при $\theta=0$, то получим равенство

$$\theta=-2S.$$

Заметим, что когда совершается обычный (евклидов) поворот плоскости на угол θ, то каждый единичный вектор скользит концом по единичной окружности, причем угол θ по абсолютной величине равен удвоенной площади, которую заметает поворачиваемый вектор. Как видно из только что приведенных выкладок, аналогичное явление имеет место и при гиперболическом повороте. Единичный (или мнимоединичный) вектор скользит концом по одной из гипербол $(x^1)^2-(x^2)^2=\pm1$ и заметает площадь, равную по абсолютной величине половине «гиперболического угла» θ.

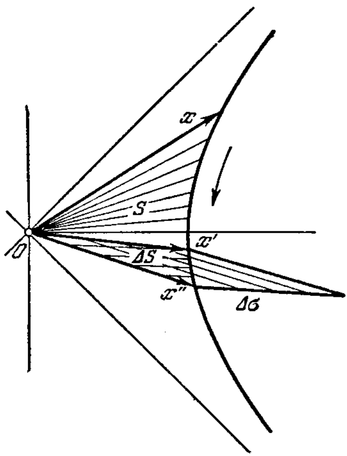


Рис. 53.

12. Из формул (9) непосредственно видно, что гиперболический поворот имеет собственные векторы, направленные по (общим) асимптотам гипербол $(x^1)^2-(x^2)^2=\pm1$. В самом деле, если вектор $x=\{x^1,\ x^2\}$ лежит на первой асимптоте, то $x^1=x^2$, и тогда $x^{1'}=x^{2'}$; таким образом, для первой асимптоты $x'=H_\theta x=\lambda_1 x$, где, как легко видеть,

$$\lambda_1=\operatorname{ch}\theta-\operatorname{sh}\theta.$$

Аналогично для второй асимптоты $x = \{x^1, \ -x^2\}$ и $x' = H_\theta x = \lambda_2 x$, где

$$\lambda_2 = \operatorname{ch}\theta + \operatorname{sh}\theta.$$

Существенно заметить, что

$$\lambda_1\lambda_2 = 1. \tag{10}$$

При $\theta > 0$ имеем $\lambda_1 < 1$, $\lambda_2 > 1$; в этом случае плоскость сжимается в λ_1 раз к прямой $x_2 = -x_1$ и вследствие (10) во столько же раз растягивается в ортогональном направлении от прямой $x^2 = x^1$, что показано на рис. 54 на примере нескольких точек. При этом все точки плоскости, не лежащие на инвариантных прямых $x^2 = \pm x^1$, скользят по гиперболам $(x^1)^2 - (x^2)^2 = \text{const}$, что наглядно ясно (вследствие (10)) вне зависимости от рассуждений предыдущих пунктов.

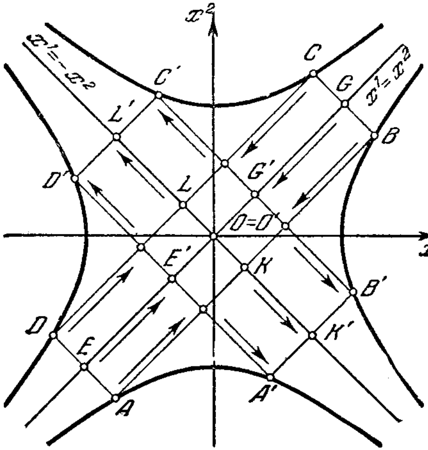


Рис. 54.

Если $\theta < 0$, то направления растяжения и сжатия меняются ролями сравнительно со случаем $\theta > 0$, и направление движения точек по гиперболам изменяется на противоположное.

13. Заметим в заключение, что на одной и той же евклидовой плоскости можно задать бесконечно много различных метрик Минковского. Каждой из них соответствует своя пара сопряженных гипербол в качестве единичной окружности; обратно, любая пара сопряженных гипербол служит единичной окружностью для некоторой (вполне определенной) метрики Минковского.

Если гиперболы, составляющие единичную окружность некоторой метрики Минковского, не являются равносторонними, то указанная выше евклидова характеристика ортогональности двух векторов в смысле Минковского (их симметрия относительно одной из асимптот) теряет силу. Более общим (во всех случаях верным) является следующее утверждение: два вектора ортогональны в данной метрике Минковского в том и только в том случае, когда они идут по двум сопряженным диаметрам гипербол, составляющих в этой метрике единичную окружность. На доказательстве этого утверждения мы останавливаться не будем.

Снабжая плоскость различными метриками Минковского, мы получаем различные квадратично-метрические пространства. Но, разумеется, все они метрически изоморфны друг другу. Их геометрии тождественны с алгебраической точки зрения, поскольку имеют своим предметом инварианты одной и той же k-ортогональной группы.

§ 9. Тензорная алгебра в пространствах с квадратичной метрикой

1. Мы снова будем рассматривать квадратично-метрические пространства любой размерности. В этом параграфе мы изложим тензорную алгебру в таких пространствах. Точнее сказать, здесь будут указаны специальные положения тензорной алгебры, связанные с наличием метрики. Заметим, что тензорный аппарат оказывается полезным во многих задачах теории квадратично-метрических пространств, особенно в тех случаях, когда обстоятельства вынуждают употреблять произвольные (не ортонормированные) базисы.

2. Пусть R_n — линейное n-мерное пространство с заданной метрической формой

$$\|x\|^2 = g(x, x) = \sum g_{ik} x^i x^k, \tag{1}$$

где $x = \sum x^i e_i$ в произвольном базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Соответственно для скалярного произведения имеем:

$$(x, y) = g(x, y) = \sum g_{ik} x^i y^k. \tag{2}$$

Тензор квадратичной формы (1) или, что то же самое, билинейной формы (2) называется *метрическим тензором* пространства R_n. Это есть ковариантный двухвалентный симметричный тензор, определяющие числа которого в базисе $e_1, \ldots, e_n$ даются таблицей умножения базисных векторов:

$$(e_i, e_j) = g_{ij}.$$

3. Матрицу метрического тензора в базисе $e_1, \ldots, e_n$, т. е. матрицу формы (2), обозначим $G = \| g_{ik} \|$. Вследствие невырожденности формы $g(x, y)$ имеем: $\operatorname{Det} G \neq 0$. Поэтому существует обратная матрица G^{-1}. Элементы G^{-1} по принятому стандарту обозначают буквами g с индексами сверху:

$$G^{-1} = \| g^{ik} \|.$$

По определению обратной матрицы имеем

$$\sum g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j. \tag{3}$$

4. Теорема 1. *Величины g^{ik} являются определяющими числами двухвалентного контравариантного тензора.*

Замечание. Утверждение теоремы означает, что при переходе к новому базису имеет место закон преобразования

$$g^{i'k'} = \sum g^{ik} Q^{i'}_i Q^{k'}_k, \tag{4}$$

где $g^{i'k'}$ — элементы матрицы, обратной матрице $\| g_{i'k'} \|$ ковариантного метрического тензора в новом базисе. Равенство (4) надлежит вывести как следствие закона преобразования

$$g_{i'k'} = \sum g_{ik} P^i_{i'} P^k_{k'}, \tag{4a}$$

который нам известен вместе с определением метрического тензора. Однако прямой вывод (4), исходя из (4a), технически затруднителен. Поэтому далее дается доказательство теоремы, основанное на ранее изложенном признаке тензорных величин (см. гл. V, § 4).

Доказательство теоремы. Рассмотрим пространство R^*_n, сопряженное пространству R_n, и в нем базис $e^1, \ldots, e^n$, взаимный с базисом $e_1, \ldots, e_n \in R_n$.

Построим преобразование $u = G(x)$, которое каждому вектору $x = \sum x^k e_k \in R_n$ ставит в соответствие вектор $u = \sum u_i e^i \in R^*_n$ по формуле

$$u_i = \sum g_{ik} x^k. \tag{5}$$

Так как валентности здесь согласованы, то преобразование $u = G(x)$ инвариантно.

С другой стороны, ввиду того, что $\operatorname{Det} G \neq 0$, образом пространства R_n служит все пространство R^*_n. Это значит, что для каждого вектора $u \in R^*_n$ найдется такой вектор

$x \in R_n$, что $u = G(x)$. Этот вектор x однозначно определяется формулой

$$x^i = \sum g^{ik} u_k. \tag{6}$$

Для получения (6) достаточно решить систему уравнений (5), считая x^k неизвестными, u_i — известными числами.

Формула (6) показывает, что при свертке g^{ik} с произвольным ковариантным вектором u_k получается одновалентный контравариантный тензор. По известному признаку тензорной величины заключаем, что g^{ik} — тензор, валентности которого соответствуют расположению индексов. Теорема доказана.

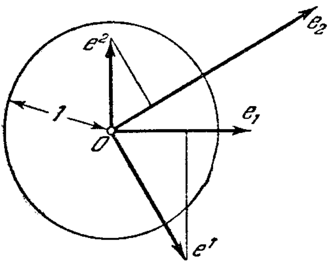


Рис. 55.

5. Тензор g^{ik} называется *контравариантным метрическим тензором*.

6. В пространствах с квадратичной метрикой удобно использовать вместе с данным базисом еще так называемый взаимный ему базис.

Определение. Базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $e^1, \ldots, e^n$ в R_n называются *взаимными*, если $(e^i, e_j) = \delta^i_j$.

Замечание. В отличие от гл. V, здесь данный и взаимный базис берутся в одном пространстве. Ниже будет показано, что понятие взаимных базисов в одном квадратично-метрическом пространстве по существу сводится к понятию взаимных базисов, лежащих в данном и сопряженном пространстве.

На рис. 55 изображены взаимные базисы e_1, e_2 и e^1, e^2 на плоскости с обычной евклидовой метрикой. Согласно определению взаимных базисов мы имеем в этом случае четыре условия:

$$(e^1, e_1) = 1, \quad (e^1, e_2) = 0,$$
$$(e^2, e_1) = 0, \quad (e^2, e_2) = 1.$$

Из них следует, что вектор e^1 перпендикулярен к вектору e_2, а вектор e^2 — к вектору e_1; кроме того, так как $(e^1, e_1) > 0$ и $(e^2, e_2) > 0$, то векторы e^1, e_1, а также e^2, e_2 составляют острые углы. Точный учет на рисунке условий $(e^1, e_1) = 1$, $(e^2, e_2) = 1$ требует задания масштабной единицы (этими условиями определяются длины векторов e^1, e^2 по данным векторам e_1, e_2). В двумерном евклидовом случае геометрически ясно, что данный базис однозначно определяет взаимный ему. Вместе с тем справедлива следующая общая теорема.

Теорема 1. *Для произвольно заданного базиса $e_1, \ldots, e_n$ в R_n взаимный базис $e^1, \ldots, e^n$ определяется всегда и однозначно.*

Доказательство. Векторы искомого взаимного базиса можно представить в виде

$$e^k = \sum A^{k\alpha} e_\alpha, \tag{7}$$

где $A^{k\alpha}$ — неизвестные числовые коэффициенты.

Правую и левую части равенств (7) умножим скалярно на e_i. Учитывая, что

$$(e^k, e_i) = \delta_i^k, \qquad (e_\alpha, e_i) = g_{\alpha i}, \tag{8}$$

получим

$$\delta_i^k = \sum A^{k\alpha} g_{\alpha i}.$$

Произведение неизвестной матрицы $A = \| A^{k\alpha} \|$ на известную невырожденную матрицу G дает единичную матрицу $E = \| \delta_i^k \|$. Отсюда $A = G^{-1}$, то есть $A^{k\alpha} = g^{k\alpha}$. Таким образом, получаем единственно возможные равенства

$$e^k = \sum g^{k\alpha} e_\alpha. \tag{9}$$

Так как $\operatorname{Det}(g^{k\alpha}) \neq 0$, то векторы $e^1, \ldots, e^n$, определяемые согласно (9), линейно независимы и, значит, составляют базис. Остается непосредственной проверкой убедиться, что этот базис действительно является взаимным с данным. Имеем

$$(e^k, e_i) = \sum g^{k\alpha} (e_\alpha, e_i) = \sum g^{k\alpha} g_{\alpha i} = \delta_i^k,$$

что и требуется. Теорема доказана.

7. Обращая формулы (9), получим

$$e_k = \sum g_{k\alpha} e^\alpha. \tag{10}$$

8. Умножая формулы (9) скалярно на e^i, получим

$$(e^i, e^k) = \sum g^{k\alpha} (e^i, e_\alpha) = \sum g^{k\alpha} \delta_\alpha^i.$$

Отсюда находим таблицу умножения векторов взаимного базиса

$$(e^i, e^k) = g^{ik}. \tag{11}$$

Правые части этой таблицы дают определяющие числа контравариантного метрического тензора.

9. Пусть (x, y) — произвольные векторы из R_n. Разложим их по взаимному базису, причем координаты по этому базису (здесь и в дальнейшем) будем помечать нижними индексами. Умножая скалярно x на y и пользуясь формулами (11), получаем

$$(x, y) = \sum g^{ik} x_i y_k. \tag{12}$$

Одновременно имеем

$$\| x \|^2 = \sum g^{ik} x_i x_k. \tag{13}$$

Формулы (12), (13) взаимны с формулами (2), (1).

10. Пусть даны два вектора $x, u \in R_n$. Разложим x по базису $e_1, \ldots, e_n$:

$$x = \sum x^i e_i.$$

Вектор u разложим по взаимному базису $e^1, \ldots, e^n$:

$$u = \sum u_k e^k.$$

Составим скалярное произведение

$$(u, x) = \sum u_k x^i (e^k, e_i) = \sum u_k x^i \delta_i^k = \\ = \sum u_k x^k = u_1 x^1 + \ldots + u_n x^n.$$

Мы видим, что в координатах вектора x по данному базису, а вектора u — по взаимному базису скалярное произведение (u, x) выражается в виде *свертки*. Разумеется векторы u и x здесь можно поменять ролями; соответственно получим

$$(u, x) = u^1 x_1 + \ldots + u^n x_n.$$

11. В пространстве R_n каждой линейной форме $u(x)$ однозначно соответствует некоторый вектор $u \in R_n$ так, что $u(x) = (u, x)$. Иначе говоря, в R_n каждая линейная форма единственным образом представляется в виде скалярного произведения. В самом деле, в базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеем

$$u(x) = u_1 x^1 + \ldots + u_n x^n,$$

где $u_1, \ldots, u_n$ — вполне определенные коэффициенты формы $u(x)$. Отсюда $u(x) = (u, x)$, где $u = \sum u_i e^i$ ($e^1, \ldots, e^n$ — взаимный базис).

12. Линейные формы пространства R_n являются элементами сопряженного пространства R_n^*. Согласно предыдущему пункту каждой форме $u(x) \in R_n^*$ отвечает вектор $u \in R_n$ так, что $u(x) = (u, x)$.

Очевидно, что это есть взаимно однозначное соответствие между R_n^* и R_n. Легко убедиться также в том, что оно представляет собой линейный изоморфизм. В самом деле, если $u(x) = (u, x)$ и $v(x) = (v, x)$, то $u(x) + v(x) = (u + v, x)$ и $\alpha u(x) = (\alpha u, x)$, где α — любое число.

13. Мы можем теперь не различать R_n^* и R_n, если элементы R_n^* заменить их образами в R_n при только что указанном изоморфизме. Тогда каждый вектор из R_n одновременно является вектором из R_n^*. Соответственно говорят, что пространство с квадратичной метрикой является самосопряженным ($R_n = R_n^*$).

Если x и u — любые векторы R_n, но один из них рассматривается как вектор из R_n, а другой — как вектор из R_n^*, то свертка их в смысле § 2 гл. V совпадает со скалярным произведением (u, x); при этом нужно считать, что $e_1, \ldots, e_n \in R_n$, $e^1, \ldots, e^n \in R_n^*$.

14. Пусть данный базис $e_1, \ldots, e_n$ преобразуется с помощью матрицы P по формулам

$$e_{i'} = \sum P_{i'}^i e_i. \tag{14}$$

Если при этом вводится базис $e^{1'}, \ldots, e^{n'}$, взаимный с новым базисом $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$, то

$$e^{i'} = \sum Q_i^{i'} e^i, \tag{15}$$

где, как обычно, $Q = \| Q_i^{i'} \| = (P^*)^{-1}$. Доказывать формулы (15) нет необходимости. В самом деле, согласно п. 13 определение взаимных базисов в R_n сводится к определению взаимных базисов в R_n и R_n^*; поэтому для установления формул (15) достаточно сослаться на результаты § 1 гл. V.

15. Пусть x — произвольный вектор из R_n. Мы можем разложить его как по базису $e_1, \ldots, e_n$, так и по взаимному базису $e^1, \ldots, e^n$:

$$x = \sum x^i e_i = \sum x_k e^k. \tag{16}$$

Из формул (14) и (15) следует, что при переходе к новому базису координаты x^i преобразуются по контравариантному закону, а координаты x_k — по ковариантному:

$$x^{i'} = \sum Q_i^{i'} x^i, \qquad x_{k'} = \sum P_{k'}^k x_k.$$

Поэтому x^i и x_k называют, соответственно, контравариантными и ковариантными координатами вектора x. Из (16), (9) и (10) вытекают формулы

$$x^k = \sum g_{ki} x^i, \tag{17}$$

$$x^i = \sum g^{ik} x_k, \tag{18}$$

которые выражают (в данном базисе) ковариантные координаты вектора через его контравариантные координаты, а также контравариантные координаты через ковариантные. Что касается самого вектора x, то его в равной мере можно считать как контравариантным, так и ковариантным (поскольку $R_n^* = R_n$).

Из сказанного в этом пункте следует, что каждый одновалентный тензор (контравариантный x^i или ковариантный x_k), можно инвариантным образом представить в виде вектора в R_n ($\sum x^i e_i$ или $\sum x_k e^k$). Одновалентные тензоры x^i и x_k представляют собой один и тот же вектор в R_n в том и только в том случае, когда они связаны условием (17) или (18) (что безразлично, поскольку из (17) следует (18) и наоборот).

16. Теперь нетрудно сообразить, что в R_n и многовалентные тензоры можно по желанию задавать ковариантными, контравариантными или смешанными координатами. Пусть, например,

$$a = \sum a^{ik} e_i e_k$$

— двухвалентный контравариантный тензор, т. е. элемент тензорного произведения $R_n \otimes R_n$. Заменяя e_k согласно (10), найдем

$$a = \sum a^{ik} e_i e_k = \sum a^{ik} e_i g_{k\alpha} e^\alpha = \sum a^{ik} g_{k\alpha} e_i e^\alpha = \sum a^{i\beta} g_{\beta k} e_i e^k.$$

Положим

$$a_k^i = \sum a^{i\beta} g_{\beta k}. \tag{19}$$

Тогда тот же тензор представится в виде

$$a = \sum a_k^i e_i e^k,$$

т. е. в виде элемента тензорного произведения $R_n \otimes R_n^*$. Формулы (19) выражают такими словами: второй верхний индекс тензора a спущен с помощью метрического тензора.

Из (19) и (3) следует

$$a^{ik}=\sum a^i_\alpha g^{\alpha k};$$

здесь нижний индекс снова поднят наверх.

В тензорных выкладках иногда приходится многократно поднимать и опускать индексы (образно говорят — «жонглировать» индексами). Чтобы при этом не нарушить их первоначального расположения, можно закреплять соответствующие места точками; например, в формуле (19) вместо a^i_k лучше писать $a^i_{.k}$, чтобы подчеркнуть, что вниз спущен второй индекс, а первый остался наверху.

17. Выше мы говорили, что g_{ik} и g^{ik} являются соответственно ковариантным и контравариантным метрическими тензорами. Однако вследствие формул (3) и (10) имеет место тензорное равенство

$$\sum g_{ik}e^i e^k=\sum g^{ik}e_i e_k.$$

Поэтому лучше говорить, что есть один метрический тензор, а g_{ik} и g^{ik} суть его ковариантные и контравариантные координаты.

18. Пусть теперь дано, что R_n имеет положительный индекс k $(0\leqslant k\leqslant n)$; пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в R_n при условии, что первые k его векторов единичные (остальные — мнимоединичные). Тогда

$$G=\| g_{ik}\|=E_k=\left\|\begin{matrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -1\end{matrix}\right\|. \tag{20}$$

(см. § 3, п. 1). Отсюда

$$G^{-1}=\| g^{ij}\|=E_k=G. \tag{21}$$

Вследствие (21) базис $e^1, \ldots, e^n$, взаимный с базисом $e_1, \ldots, e_n$, также является ортонормированным и также имеет в качестве единичных первые k векторов. Кроме того, из (20) и (9), или из (21) и (10), следуют соотношения

$$e^i=e_i, \qquad i=1, 2, \ldots, k;$$

$$e^i=-e_i, \qquad i=k+1, \ldots, n.$$

Таким образом, единичные векторы взаимных ортонормированных базисов соответственно совпадают, мнимоединичные — отличаются знаком. Наряду с этим, согласно формулам (17) и (18), имеем

$$x^i = x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k;$$
$$x^i = -x_i, \qquad i = k+1, \ldots, n.$$

Аналогичные равенства имеют место для тензоров любой валентности; мы напишем их в частном случае трехвалентного тензора, у которого опускается первый индекс:

$$a_{i\cdot\cdot}^{\cdot jl} = a^{ijl}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k;$$
$$a_{i\cdot\cdot}^{\cdot jl} = -a^{ijl}, \qquad i = k+1, \ldots, n.$$

19. В следующем параграфе мы укажем некоторые примеры приложений тензорной алгебры в пространствах с квадратичной метрикой.

§ 10. Уравнение гиперплоскости в пространстве с квадратичной метрикой

1. Мы будем здесь рассматривать аффинное квадратично-метрическое пространство, т. е. аффинное пространство $\mathfrak{A}$, соответствующее линейному пространству L с квадратичной метрикой (см. § 2, п. 5). Пусть в $\mathfrak{A}$ задана система аффинных координат с любым началом и произвольным базисом $e_1, \ldots, e_n$. Пусть в этой системе координат дано уравнение какой-нибудь гиперплоскости

$$A_1 x^1 + \ldots + A_n x^n + C = 0$$

или, коротко,

$$\sum A_k x^k + C = 0. \tag{1}$$

При переходе к новому базису (с сохранением начала координат) мы имеем

$$x^k = \sum P_{k'}^k x^{k'}.$$

Отсюда

$$\sum A_k x^k + C = \sum A_k P_{k'}^k x^{k'} + C = \sum A_{k'} x^{k'} + C, \tag{2}$$

где положено

$$A_{k'} = \sum A_k P_{k'}^k. \tag{3}$$

Последнее выражение в цепочке равенств (2) представляет собой левую часть уравнения той же гиперплоскости в новой системе координат. Из (2) и (3) следует, что с левой частью уравнения гиперплоскости инвариантно сопоставлен вектор

$$n=\{A_1, \ldots, A_n\}$$

с ковариантными координатами $A_1, \ldots, A_n$, то есть

$$n=A_1e^1+\ldots+A_ne^n,$$

где $e^1, \ldots, e^n$ — базис, взаимный с данным базисом $e_1, \ldots, e_n$. Что касается текущих координат $x^1, \ldots, x^n$ произвольной точки плоскости, то они по своему определению являются контравариантными, поскольку представляют собой координаты радиус-вектора этой точки в данном базисе:

$$x=x^1e_1+\ldots+x^ne_n.$$

Согласно сказанному левая часть уравнения гиперплоскости может быть написана в инвариантном виде с помощью скалярного произведения

$$(n, x)+C=0. \tag{4}$$

2. Если $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ — какая-нибудь фиксированная точка гиперплоскости и x_0 — ее радиус-вектор, то $C=-(n, x_0)$, и уравнение (4) принимает вид

$$(n, x-x_0)=0 \tag{5}$$

или в развернутой форме

$$A_1(x^1-x_0^1)+\ldots+A_n(x^n-x_0^n)=0.$$

Из (5) следует, что вектор n ортогонален к любому вектору $x-x_0$, лежащему в гиперплоскости. Таким образом, вектор n есть нормаль к гиперплоскости, заданной уравнением (1).

Контравариантные координаты нормали, т. е. координаты вектора n в данном базисе $e_1, \ldots, e_n$, даются формулами

$$A^i=\sum g^{ik}A_k, \tag{6}$$

где g^{ik} — метрический тензор.

3. З а д а ч а. В двумерном пространстве в некоторой системе координат дана метрическая форма

$$\|x\|^2=2(x^1)^2+2x^1x^2+(x^2)^2,$$

прямая (одномерная плоскость) $3x^1+4x^2+10=0$ и точка $A(1, 1)$.

Найти основание перпендикуляра, опущенного на данную прямую из точки A в данной метрике.

Решение. Имеем матрицу метрической формы: $G=\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. Отсюда $G^{-1}=\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$, следовательно, $g^{11}=1$, $g^{12}=g^{21}=-1$, $g^{22}=2$. Из уравнения прямой находим ее нормаль $n=\{3, 4\}$ в базисе e^1, e^2. Чтобы получить координаты нормали в данном базисе e_1, e_2, применим формулы (6)

$$A^1=g^{11}A_1+g^{12}A_2=-1, \qquad A^2=g^{21}A_1+g^{22}A_2=5.$$

Отсюда получаем (в данной системе координат) уравнение перпендикуляра к заданной прямой, проходящего через $A(1, 1)$:

$$\frac{x^1-1}{-1}=\frac{x^2-1}{5}.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением прямой MN, найдем точку $B(2, -4)$ — искомое основание перпендикуляра.

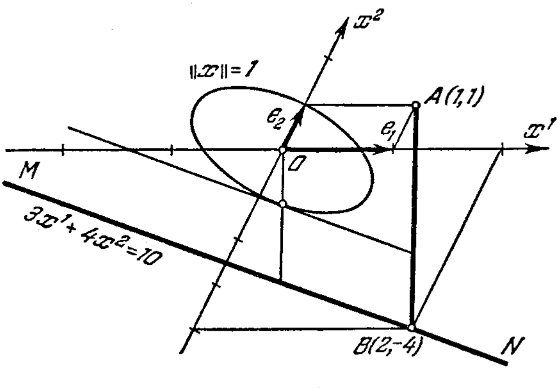


Рис. 56.

Если на плоскости (x^1, x^2) построен эллипс $\|x\|=1$ (единичная окружность в заданной метрике), то направления прямой MN и перпендикуляра AB являются сопряженными относительно этого эллипса вследствие пп. 9, 10 § 7 (рис. 56).

Задача. В пятимерном псевдоевклидовом пространстве с положительным индексом $k=3$ дана гиперплоскость x^1+

$+x^2+x^3+x^4+x^5=1$ и точка $A(1, 1, 1, 1, 1)$. Найти основание перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из точки A. Известно, что система координат определена ортонормированным базисом, первые три вектора которого единичные.

Решение. Из уравнения гиперплоскости находим ее нормаль $n=\{1, 1, 1, 1, 1\}$ в базисе $e^1, \ldots, e^5$. Отсюда $n = \{1, 1, 1, -1, -1\}$ в базисе $e_1, \ldots, e_5$ (см. § 9, п. 18); таким образом, имеем уравнения перпендикуляра

$$\frac{x^1-1}{1}=\frac{x^2-1}{1}=\frac{x^3-1}{1}=\frac{x^4-1}{-1}=\frac{x^5-1}{-1}.$$

Решая их совместно с уравнением данной гиперплоскости, найдем искомую точку: $x^1=-3$, $x^2=-3$, $x^3=-3$, $x^4=5$, $x^5=5$.

§ 11. Евклидово пространство. Ортогональные матрицы. Ортогональная группа

1. Определение. *Евклидовым линейным пространством* называется n-мерное линейное пространство с квадратичной метрикой при условии, что его метрическая квадратичная форма $g(x, x)$ положительно определена.

Евклидовым называют также n-мерное аффинное пространство, если соответствующее ему линейное пространство является евклидовым.

В дальнейшем мы будем считать, что имеем дело именно с таким пространством. Тем самым мы сможем рассматривать и векторы и точки.

Евклидово n-мерное пространство будем обозначать E_n. Для нормы вектора будем пользоваться символом модуля: $|x|$.

2. В евклидовом пространстве имеет место неравенство Коши — Буняковского

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)\cdot(y, y),$$

поэтому

$$\left|\frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}}\right| \leqslant 1,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы x, y коллинеарны (линейно зависимы).

Пользуясь этим обстоятельством, можно ввести угол между векторами. Именно, если x, y — ненулевые векторы, то углом между ними назовем число φ, определяемое формулой

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x|\cdot|y|}, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Заметим, что $\varphi = 0$ тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны и одинаково направлены, а $\varphi = \pi$ означает, что векторы направлены противоположно.

Используя угол, можно записать скалярное произведение так, как это делается в элементарной векторной алгебре:

$$(x, y) = |x|\cdot|y|\cdot\cos\varphi.$$

3. В ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеем

$$|x|^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2,$$
$$(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2 + \ldots + x^ny^n.$$

Таким образом, известные формулы аналитической геометрии для длины вектора и скалярного произведения непосредственно переносятся в многомерный случай.

4. Для произвольного единичного вектора e можно ввести углы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, которые он образует с векторами ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$. Косинусы этих углов $\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n$ называются направляющими косинусами вектора e (в данном базисе). Нетрудно сообразить, что

$$e = e_1\cos\alpha_1 + e_2\cos\alpha_2 + \ldots + e_n\cos\alpha_n$$

и что

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1$$

в полной аналогии с хорошо известными соотношениями элементарной аналитической геометрии.

5. По определению n-мерное евклидово пространство является квадратично-метрическим пространством с положительным индексом $k = n$. В пространстве E_n каждый ортонормированный базис состоит только из единичных векторов (мнимоединичных нет). Если $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный ортонормированный базис в E_n, то новый базис

$$e_{k'} = \sum P^k_{k'} e_k \tag{1}$$

будет также ортонормированным в том и только в том случае, когда матрица $P = \| P^k_{k'} \|$ удовлетворяет условию k-ортогональности при $k = n$ (см. § 6, равенство (2)). Но при $k = n$

матрица, обозначенная в § 1 символом E_k, превращается в единичную матрицу E. Отсюда заключаем: в евклидовом пространстве преобразование (1) ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ дает снова ортонормированный базис $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ тогда и только тогда, когда

$$PP^* = E. \tag{2}$$

6. Определение. Всякая $n \times n$-матрица, удовлетворяющая условию (2), называется *ортогональной*.

7. Согласно § 6 ортогональные $n \times n$-матрицы составляют подгруппу в группе всех невырожденных $n \times n$-матриц.

Ее называют ортогональной группой $n \times n$-матриц. Далее она обозначается буквой O.

8. Множество всех ортонормированных базисов в данном евклидовом пространстве E_n представляет собой не что иное, как класс базисов по ортогональной группе, порожденный каким-нибудь одним ортонормированным базисом.

Если дано линейное пространство L_n без метрики, то все базисы в L_n расслаиваются на классы относительно группы O. Каждый из этих классов можно считать состоящим из ортонормированных базисов, если в L_n ввести некоторую вполне определенную евклидову метрику, отвечающую именно этому классу. Евклидовы пространства, в которые превращается L_n заданием в нем таких метрик, будучи различными, метрически изоморфны между собой. Их геометрии алгебраически тождественны в том смысле, что имеют предметом своего рассмотрения инварианты одной и той же группы O.

В § 7 аналогичные вещи были подробно изложены для двумерного случая.

9. Вследствие равенства (2) $(\operatorname{Det} P)^2 = 1$. Отсюда для каждой ортогональной матрицы

$$\operatorname{Det} P = \pm 1.$$

Таким образом, ортогональную группу можно рассматривать в качестве подгруппы в группе матриц с единичным модулем определителя (как и все k-ортогональные группы, что уже отмечалось раньше).

Матрицы $P \in O$, для которых $\operatorname{Det} P = +1$, составляют подгруппу O^+ группы O.

Матрицам из O^+ соответствует преобразование ортонормированных базисов с сохранением ориентации, что в некоторой мере аналогично повороту (двумерного) базиса на евклидовой плоскости (см. § 7). Такие преобразования базисов в пространствах любой размерности принято называть вращением (вокруг неподвижного начала координат). В связи с этим группу O^+ часто называют группой вращений (см. также §§ 7, 8 гл. IX).

10. Преобразованию ортонормированного базиса в E_n по формулам (1) п. 5 соответствует преобразование координат

$$x^{i'} = \sum Q^{i'}_i x^i \tag{3}$$

с матрицей $Q = \| Q^{i'}_i \| = (P^*)^{-1}$. Вследствие равенства (2) имеем

$$Q = P.$$

Таким образом, в евклидовом пространстве переходу от одного ортонормированного базиса к другому по формулам (1) с ортогональной матрицей P соответствует преобразование координат с той же самой ортогональной матрицей: $Q = P$.

11. Преобразование вида (3) переменных $x^1, \ldots, x^n$ в переменные $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ называется ортогональным, если ортогональна его матрица. Ортогональные преобразования переменных можно охарактеризовать чисто алгебраически, без обращения к ортонормированным базисам в E_n. Именно, это те и только те преобразования вида (3), для которых имеет место тождество

$$(x^{1'})^2 + \ldots + (x^{n'})^2 \equiv (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

12. В пространстве E_n в ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ метрическая форма имеет вид

$$|x|^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

Отсюда, если G — матрица этой формы, E — единичная матрица, то

$$G^{-1} = G = E.$$

Таким образом, $g_{ii} = 1$, $g_{ik} = 0$ $(i \neq k)$ и точно так же $g^{ii} = 1$, $g^{ik} = 0$ $(i \neq k)$. Поэтому и на основании формул (9) § 9

$$e^k = e_k,$$

т. е. если данный базис является ортонормированным в E_n, то взаимный ему базис совпадает с ним. Вместе с тем для любого тензора имеет место совпадение ковариантных, контравариантных и смешанных координат с одинаковыми индексами; например,

$$a^{ik} = \sum g^{i\alpha} g^{k\beta} a_{\alpha\beta} = a_{ik}.$$

В частности, для любого вектора

$$x^k = x_k$$

(см. также п. 18 § 9). В связи со сказанным, если по характеру задач, относящихся к евклидову пространству, оказывается возможным ограничиться ортонормированными базисами, то валентности тензоров не различают и все индексы у векторов и тензоров пишут внизу (как, например, в теории упругости).

13. Укажем некоторую специальную запись любой ортогональной матрицы. Представим себе, что имеется таблица углов, которые векторы нового ортонормированного базиса образуют с векторами старого ортонормированного базиса:

	e_1	e_2	...	e_n
$e_{1'}$	α_1	β_1	...	γ_1
$e_{2'}$	α_2	β_2	...	γ_2
...	...	...	...	...
$e_{n'}$	α_n	β_n	...	γ_n

Здесь использован условный алфавит: α, β, ..., γ. Тогда, согласно п. 4, имеем соотношения

$$\left.\begin{array}{l} e_{1'} = e_1 \cos\alpha_1 + e_2 \cos\beta_1 + \ldots + e_n \cos\gamma_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_{n'} = e_1 \cos\alpha_n + e_2 \cos\beta_n + \ldots + e_n \cos\gamma_n. \end{array}\right\}$$

Это есть подробная запись формул (1) с помощью направляющих косинусов новых базисных векторов. Вместе с тем выписана и матрица P. Таким образом, любую ортогональную матрицу с помощью направляющих косинусов можно записать в виде

$$P=\begin{Vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \ldots & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \ldots & \cos\gamma_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos\alpha_n & \cos\beta_n & \ldots & \cos\gamma_n \end{Vmatrix}.$$

В связи с такой записью отметим следующее характеристическое свойство ортогональных матриц (присущее им и только им). Именно, в случае ортогональной матрицы сумма квадратов элементов одного столбца или одной строки равна единице (вследствие нормировки базисов); сумма произведений соответствующих элементов двух столбцов или двух строк равна нулю (вследствие ортогональности каждого из базисов).

14. Так как $P^{-1}=P^*$, то

$$P^{-1}=\begin{Vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \ldots & \cos\alpha_n \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \ldots & \cos\beta_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \ldots & \cos\gamma_n \end{Vmatrix}.$$

15. Из предыдущих двух пунктов и вследствие равенства $Q=P$ имеем формулы преобразования координат

$$\left.\begin{aligned} x_{1'} &= x_1\cos\alpha_1+x_2\cos\beta_1+\ldots+x_n\cos\gamma_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n'} &= x_1\cos\alpha_n+x_2\cos\beta_n+\ldots+x_n\cos\gamma_n. \end{aligned}\right\}$$

Обратные формулы

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_{1'}\cos\alpha_1+x_{2'}\cos\alpha_2+\ldots+x_{n'}\cos\alpha_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_{1'}\cos\gamma_1+x_{2'}\cos\gamma_2+\ldots+x_{n'}\cos\gamma_n \end{aligned}\right\}$$

получаются из условия $Q^{-1}=Q^*$ (или $Q^{-1}=P^{-1}$).

§ 12. Нормальное уравнение гиперплоскости в евклидовом пространстве

1. Пусть в E_n дана система координат с произвольным базисом $e_1, \ldots, e_n$ и в этой системе задано уравнение гиперплоскости

$$A_1x^1 + \ldots + A_nx^n + C = 0, \tag{1}$$

здесь $n = A_1e^1 + \ldots + A_ne^n$ — нормаль гиперплоскости, $e^1, \ldots$ $\ldots, e^n$ — взаимный базис (см. § 10).

Если в качестве n берется единичная нормаль n_0, а свободный член отрицателен (либо нуль), то уравнение (1) при таких условиях называется нормальным. Положив в этом случае свободный член $C = -p\,(p \geqslant 0)$, напишем нормальное уравнение в виде

$$(n_0,\ x) - p = 0, \tag{2}$$

где $x = x^1e_1 + \ldots + x^ne_n$ — радиус-вектор текущей точки гиперплоскости.

Чтобы привести общее уравнение (1) к нормальному виду, достаточно умножить его на нормирующий множитель

$$m = \pm \frac{1}{|n|},$$

выбрав знак с учетом условия $mC < 0$; тогда $p = -mC > 0$ (если $C = 0$, можно условиться брать m со знаком плюс). Очевидно, что $n_0 = mn$ есть единичный вектор.

Обозначим через φ угол между n_0 и x; из (2)

$$p = (n_0,\ x) = |x| \cos\varphi. \tag{3}$$

Как в элементарной аналитической геометрии, так и в многомерном евклидовом пространстве такая величина называется проекцией вектора x на нормаль с положительным направлением по вектору n_0. Вместе с тем, нетрудно сообразить, что p является расстоянием от начала координат до гиперплоскости; в самом деле, из (3)

$$p \leqslant |x|$$

и $p = |x|$, если $\cos\varphi = 1$ $(\varphi = 0)$. Таким образом, p есть длина самого короткого из радиус-векторов, имеющих концы на данной гиперплоскости. Частный случай двумерной плоскости в трехмерном пространстве показан на рис. 57.

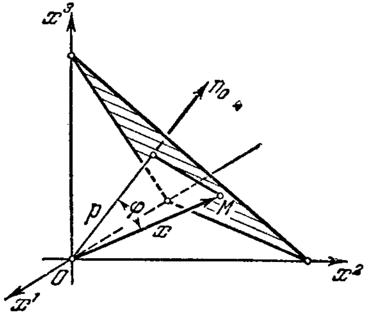


Рис. 57.

Если x^* — радиус-вектор некоторой точки M^*, не лежащей на гиперплоскости, то число

$$\delta = (n_0,\ x^*) - p \tag{4}$$

представляет собой расстояние от M^* до данной гиперплоскости, взятое с некоторым знаком (со знаком минус, если M^* и начало координат O лежат по одну сторону от гиперплоскости, со знаком плюс, если M^* и O лежат от нее по разные стороны).

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим текущую точку M гиперплоскости; если x — ее радиус-вектор, то из (3) и (4)

$$\delta = (n_0,\ x^*) - (n_0,\ x) = -(n_0,\ x - x^*) = (n_0,\ \overline{M^* M}),$$

следовательно, $|\delta| \leqslant |\overline{M^* M}|$, поэтому $|\delta|$ есть длина самого короткого из векторов $\overline{M^* M}$ (см. рис. 58, на котором размерность пространства равна трем).

2. В частном случае, когда базис $e_1, \ldots, e_n$ ортонормирован, взаимный ему базис совпадает с ним, и все рассмотренные соотношения получают полное сходство с хорошо известными фактами из элементарной аналитической геометрии. В этом случае

$$m = \frac{\pm 1}{\sqrt{A_1^2 + \ldots + A_n^2}},$$

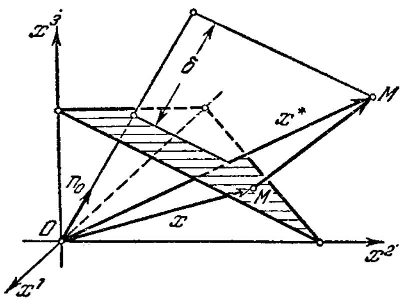


Рис. 58.

а нормальное уравнение может быть написано в виде

$$x_1 \cos\alpha + x_2 \cos\beta + \ldots + x_n \cos\gamma - p = 0, \tag{5}$$

где $\cos\alpha,\ \cos\beta, \ldots, \cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора n_0.

В произвольном (косом) базисе форма записи (5) нормального уравнения не имеет смысла. Но принципиальная сторона задачи о приведении общего уравнения к нормальному виду и задачи о расстоянии от точки до гиперплоскости не усложняется. Нужно только иметь в виду, что нормирующий множитель следует вычислять по общей формуле

$$m = \frac{\pm 1}{\sqrt{\sum g^{ik} A_i A_k}} \tag{6}$$

(см. § 9, п. 9).

3. З а д а ч а. На евклидовой плоскости дана прямая $6x^1 + 8x^2 - 5 = 0$ и точка $M^*(2, 1)$. Найти расстояние от данной точки до данной прямой. Метрический тензор известен: $g_{11} = 2$, $g_{12} = g_{21} = 1$, $g_{22} = 1$ (в заданной системе координат).

Р е ш е н и е. Прежде всего проверим, что указанный метрический тензор определяет евклидову метрику. Имеем: $2(x^1)^2 + 2x^1x^2 + (x^2)^2 = (x^1)^2 + (x^1 + x^2)^2 \geqslant 0$, причем знак равенства здесь достигается только в случае $x^1 = x^2 = 0$. Значит, метрический тензор действительно евклидов.

Обращая матрицу G, найдем: $g^{11} = 1$, $g^{12} = g^{21} = -1$, $g^{22} = 2$. Далее $A_1 = 6$, $A_2 = 8$. Отсюда, согласно (6),

$$\sum g^{ik} A_i A_k = 68, \qquad m = 1/2\sqrt{17}.$$

Таким образом, $\delta = 15/2\sqrt{17}$.

§ 13. Объем параллелепипеда в евклидовом пространстве. Дискриминантный тензор. Векторное произведение

1. Пусть метрика пространства E_n определена заданием в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$ метрической формы

$$|x|^2 = \sum g_{ik} x^i x^k.$$

Положим $g = \operatorname{Det} \|g_{ik}\|$. Так как в E_n метрическая форма положительно определена, то $g > 0$.

Рассмотрим в E_n произвольный ориентированный параллелепипед П, построенный на векторах $x_1, \ldots, x_n$. Согласно § 5 гл. VI мы можем определить ориентированный объем V параллелепипеда П, полагая

$$V = c\sqrt{g}\, D(x_1, \ldots, x_n); \tag{1}$$

здесь c — некоторая постоянная, общая для всех параллелепипедов. Выбор постоянной c означает выбор единицы объема. То обстоятельство, что в формуле (1) использован дискриминант метрической формы, поможет нам связать единицу объема с единицей длины. Именно, в качестве единицы мы возьмем объем n-мерного куба с единичной стороной, иначе говоря, — объем параллелепипеда, построенного на векторах ортонормированного базиса. Пусть $e_1^0, \ldots, e_n^0$ — какой-нибудь ортонормированный базис, g_0 — определитель метрической формы в базисе $e_1^0, \ldots, e_n^0$. Очевидно, $g_0 = 1$.

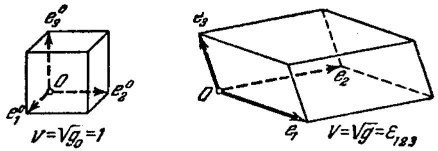


Рис. 59.

С другой стороны, матрица, составленная из координат базисных векторов по этому же базису, является единичной; в базисе $e_1^0, \ldots$ $\ldots, e_n^0$ имеем $D(e_1^0, \ldots, e_n^0) = 1$. Наконец, по нашему условию объем параллелепипеда, построенного на векторах $e_1^0, \ldots, e_n^0$, равен единице. В силу всех этих обстоятельств из формулы (1) находим $c = 1$. Таким образом, при нашем выборе единицы объема

$$V = \sqrt{g}\, D(x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Отсюда следует, что объем параллелепипеда, построенного на базисных векторах $e_1, \ldots, e_n$, дается формулой

$$V = \sqrt{g}. \tag{3}$$

2. Так как в ортонормированном базисе $g = 1$, то для ортонормированных базисов формула (2) приобретает более простой вид

$$V = D(x_1, \ldots, x_n).$$

3. Соответственно формуле (2) и согласно § 5 гл. VI имеем дискриминантный тензор евклидова пространства в любом базисе $e_1, \ldots, e_n$

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \sqrt{g}\, \delta_{i_1 \ldots i_n}. \tag{4}$$

Так как дискриминантный тензор кососимметричен по всем индексам, то система равенств (4) равносильна одному равенству: $\varepsilon_{12\ldots n}=\sqrt{g}$ (поскольку $\delta_{12\ldots n}=1$). При $n=3$ см. рис. 59. В ортонормированных базисах

$$\varepsilon_{i_1\ldots i_n}=\delta_{i_1\ldots i_n}.$$

4. Всякое линейное подпространство L_k размерности k, лежащее в E_n, само является евклидовым k-мерным пространством. В самом деле, для L_k определено скалярное произведение любой пары векторов, поскольку оно определено вообще во всем пространстве E_n; метрическая форма $|x|^2$ положительно определена в L_k, поскольку $|x|^2>0$ для любого $x\in E_n$, $x\neq\theta$.

5. В силу сказанного в L_k определен объем любого параллелепипеда (k-мерный объем). Если в L_k дана ориентация (заданием какого-нибудь базиса $a_1,\ldots,a_k$), то в L_k определен также ориентированный объем ориентированных параллелепипедов.

6. Легко получить формулу, которая выражает k-мерный объем параллелепипеда, построенного на произвольной системе независимых векторов $a_1,\ldots,a_k$ в E_n. С этой целью примем $a_1,\ldots,a_k$ в качестве базиса в линейной оболочке L_k этих векторов. Метрический тензор подпространства L_k в базисе $a_1,\ldots,a_k$ имеет координаты $\gamma_{ij}=(a_i,\ a_j)$. Отсюда и вследствие формулы (3)

$$V^2=\mathrm{Det}\,\|\gamma_{ij}\|=\begin{vmatrix}(a_1,\ a_1) & (a_1,\ a_2) & \ldots & (a_1,\ a_k)\\ (a_2,\ a_1) & (a_2,\ a_2) & \ldots & (a_2,\ a_k)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ (a_k,\ a_1) & (a_k,\ a_2) & \ldots & (a_k,\ a_k)\end{vmatrix}.$$

Таким образом, квадрат искомого k-мерного объема дается определителем Грама векторов $a_1,\ldots,a_k$.

7. В заключение параграфа укажем одно применение дискриминантного тензора. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве векторное произведение $z=[x\times y]$ вектора $x=x^1e_1+x^2e_2+x^3e_3$ на вектор $y=y^1e_1+y^2e_2+y^3e_3$. Оказывается, что ковариантные координаты векторного произведения $z=z_1e^1+z_2e^2+z_3e^3$ даются следующей простой формулой:

$$z_i=\sum\varepsilon_{i\alpha\beta}x^\alpha y^\beta. \tag{5}$$

Из (5) сразу же получается формула, которая дает контравариантные координаты векторного произведения, т. е.

его координаты в данном базисе e_1, e_2, e_3:

$$z^i = \sum g^{ik} \varepsilon_{k\alpha\beta} x^\alpha y^\beta. \qquad (6)$$

Подчеркнем, что формулы (5) и (6) позволяют вычислять векторное произведение в любом (вообще говоря, не ортонормированном) базисе.

Для доказательства формулы (5) заметим прежде всего, что обе ее части являются одновалентными ковариантными осевыми тензорами (левая часть есть осевой тензор ввиду определения векторного произведения, поскольку оно меняет знак при смене ориентации базиса; правая — ввиду участия дискриминантного тензора, поскольку он является осевым). Равенства тензорных величин инвариантны, поэтому достаточно проверить (5) в каком-нибудь специально выбранном базисе. Если x и y зависимы, то формула (5), очевидно, верна, так как левая и правая ее части в этом случае равны нулю. Пусть x и y независимы. Возьмем базис с первыми двумя векторами $e_1 = x$, $e_2 = y$. В качестве e_3 возьмем единичный вектор, ортогональный векторам e_1, e_2 (рис. 60). Тогда векторное произведение $z = Se_3$, где S — площадь параллелограмма (e_1, e_2) (рис. 61).

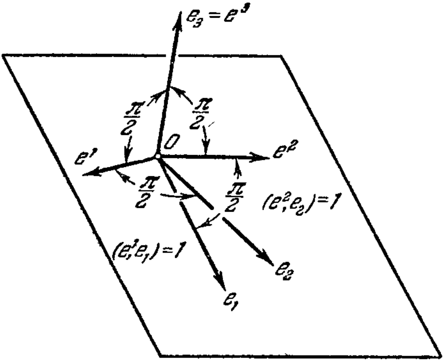


Рис. 60.

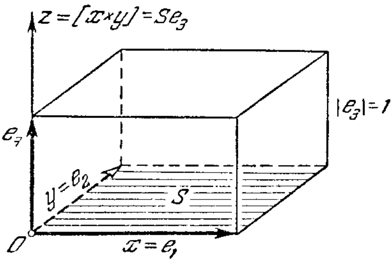


Рис. 61.

Из определения взаимных базисов следует, что в данном случае $e^3 = e_3$. Поэтому $z = Se^3$; значит, слева в (5) мы имеем

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = S.$$

Так как $x = e_1 = \{1,\ 0,\ 0\}$, $y = e_2 = \{0,\ 1,\ 0\}$, то

$$\sum \varepsilon_{i\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = \varepsilon_{i12}.$$

Поэтому справа в (5) имеем при $i = 1,\ 2,\ 3$ числа

$$\varepsilon_{112} = 0, \quad \varepsilon_{212} = 0, \quad \varepsilon_{312} = \varepsilon_{123} = \sqrt{g}.$$

Но $\sqrt{g}$ есть объем параллелепипеда $(e_1,\ e_2,\ e_3)$. А так как вектор e_3 единичный и ортогональный к e_1 и e_2, то этот объем равен площади S. Таким образом, $\sqrt{g} = S$, и формула (5) доказана.

ГЛАВА IX. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Сопряженное преобразование

1. Рассмотрим в n-мерном (действительном) евклидовом пространстве E_n линейное преобразование $y = Ax$.

Определение. Линейное преобразование $y = \overset{*}{A}x$ называется *сопряженным* данному преобразованию A, если для любых x и z из E_n имеет место следующее равенство скалярных произведений:

$$(Ax, z) = (x, \overset{*}{A}z). \tag{1}$$

2. Теорема. *По данному преобразованию A сопряженное преобразование $\overset{*}{A}$ определяется всегда и однозначно.*

Доказательство. Для данного вектора z будем искать вектор f так, чтобы соблюдалось равенство

$$(Ax, z) = (x, f) \tag{2}$$

при любом $x \in E_n$. Найдя такой вектор f, положим $\overset{*}{A}z = f$. Нужно доказать, что f существует, определяется однозначно и линейно зависит от z. С этой целью введем базис $e_1, \ldots, e_n$ и взаимный ему базис $e^1, \ldots, e^n$. Положим $x = e^k$; тогда, если искомый вектор f существует, то

$$(Ae^k, z) = (e^k, f). \tag{3}$$

Скалярное произведение (e^k, f) равно координате f^k вектора f в базисе $e_1, \ldots, e_n$, поэтому из (3) находим $f^k = (Ae^k, z)$; значит, искомым вектором f может быть только вектор

$$\overset{*}{A}z = \sum (Ae^k, z)\, e_k. \tag{4}$$

Покажем, что если $f = \overset{*}{A}z$ дается формулой (4), то условие (2) соблюдается для любого $x \in E_n$. Разложим x по взаимному базису: $x = x_1 e^1 + \ldots + x_n e^n$; подставив это разложение в левую часть равенства (2), получим

$$(Ax,\ z) = \sum x_k (Ae^k,\ z) = \sum x_k f^k = (x,\ f) = (x,\ \overset{*}{A} z).$$

Здесь использовано выражение для скалярного произведения двух векторов, один из которых разложен по данному базису, а другой — по взаимному.

Проведенные выкладки дают формулу (4) для вектора $\overset{*}{A} z$ и показывают, что другого значения для $\overset{*}{A} z$ быть не может, так что существование $\overset{*}{A} z$ и его единственность установлены. Линейность преобразования $\overset{*}{A} z$ вытекает из формулы (4) и линейности скалярного произведения по аргументу z. Теорема доказана.

3. Выше в седьмой главе было доказано, что линейному преобразованию A соответствует смешанный тензор A^i_k. В пространстве без метрики верхний и нижний индексы тензора никак не связаны между собой. Сейчас мы рассматриваем пространство с квадратичной метрикой и можем поднимать и опускать индексы любого тензора согласно § 9 восьмой главы. Операции подъема и спуска индексов неоднократно используются ниже. Поэтому мы должны принять соглашение о том, какой из индексов тензора A^i_k считать первым, а какой — вторым.

Условимся, например, что верхний индекс тензора линейного преобразования является первым, и наряду с символом A^i_k будем писать $A^{i\cdot}_{\cdot k}$ (считая $A^{i\cdot}_{\cdot k} = A^i_k$).

Спустив верхний индекс, мы получим ковариантные координаты тензора преобразования

$$A_{ik} = \sum g_{i\alpha} A^{\alpha\cdot}_{\cdot k}.$$

Подняв нижний индекс, получим контравариантные координаты тензора преобразования A

$$A^{ik} = \sum g^{\beta k} A^{i\cdot}_{\cdot\beta}.$$

4. Пусть в произвольном базисе $e_1, \ldots, e_n$ дана матрица $A = \| A^i_k \| = \| A^{i\cdot}_{\cdot k} \|$ преобразования $y = Ax$. Найдем в этом же базисе матрицу сопряженного преобразования $\overset{*}{A}$, которую мы обозначим $\left\| \overset{*}{A}{}^i_k \right\| = \left\| \overset{*}{A}{}^{i\cdot}_{\cdot k} \right\|$. Для этого рассмотрим скалярное произведение

$$(Ax, z) = \sum_{\alpha, j, k} g_{\alpha k} A^{\alpha\cdot}_{\cdot j} x^j z^k.$$

Кроме того, рассмотрим другое скалярное произведение

$$(x, \overset{*}{A}z) = \sum_{\alpha, j, k} g_{\alpha j} x^j \overset{*}{A}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot k} z^k.$$

Мы получили две билинейные формы, которые должны быть равны тождественно. Это возможно лишь тогда, когда совпадают все их коэффициенты:

$$\sum_\alpha g_{\alpha j} \overset{*}{A}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot k} = \sum_\alpha g_{\alpha k} A^{\alpha\cdot}_{\cdot j}. \tag{5}$$

Свертывая обе части равенства (5) с контравариантным метрическим тензором g^{ij} и используя формулу (3) § 9 гл. VIII, получаем искомые выражения элементов матрицы преобразования $\overset{*}{A}$:

$$\overset{*}{A}{}^{i\cdot}_{\cdot k} = \sum g_{\alpha k} g^{\beta i} A^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}. \tag{6}$$

Вместе с тем это есть выражение тензора сопряженного преобразования через тензор данного преобразования.

Формулу (6) можно записать короче:

$$\overset{*}{A}{}^{i\cdot}_{\cdot k} = A_{k\cdot}^{\cdot i}.$$

5. Наиболее простой вид связи между данным и сопряженным преобразованием получается в ковариантных координатах. Именно, из (5) имеем

$$\overset{*}{A}_{jk} = A_{kj}.$$

Таким образом, *ковариантные координаты тензора сопряженного преобразования равны ковариантным координатам тензора данного преобразования с транспонированными индексами.*

Сопряженное преобразование является очень важным понятием; оно часто встречается в различных разделах математики и ее приложений. Поэтому понятие сопряженного преобразования положено в основу проведенной ниже классификации.

6. Выделим те преобразования, которые наиболее просто связаны со своими сопряженными преобразованиями:

1) $\overset{*}{A} = A$ — самосопряженные преобразования;

2) $\overset{*}{A} = -A$ — кососопряженные или косые преобразования;

3) $\overset{*}{A} = A^{-1}$ — эти преобразования, как мы покажем дальше, совпадают с изометрическими.

В дальнейшем будет доказано, что любое линейное преобразование в евклидовом пространстве сводится к произведению самосопряженных и изометричных преобразований; в связи с этим самосопряженные и изометричные преобразования мы исследуем особенно подробно.

Косые преобразования играют важную роль в механике. Мы разберем геометрический смысл косого преобразования в трехмерном случае (§ 6).

§ 2. Лемма о характеристических корнях симметричной матрицы

1. Пусть $A = \| A_{ik} \|$ — действительная матрица, $p(\lambda) = \operatorname{Det}(A - \lambda E)$ — ее характеристический многочлен. Справедлива

Лемма. *Если действительная матрица A симметрична, то все корни ее характеристического многочлена действительны.*

2. Доказательство. Пусть λ — произвольный корень многочлена $p(\lambda)$. Тогда, во-первых, система

$$\sum_k (A_{ik} - \lambda \delta_{ik}) x_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

имеет ненулевое решение $(x_1, \ldots, x_n)$; во-вторых, число $\bar{\lambda}$ тоже является корнем $p(\lambda)$, так как коэффициенты многочлена действительные (здесь $\bar{\lambda}$ — комплексное число, сопряженное числу λ; аналогичный смысл верхняя черта имеет и дальше). Докажем, что числа $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ образуют решение (очевидно, нетривиальное) системы

$$\sum_k (A_{ik} - \bar{\lambda} \delta_{ik}) \bar{x}_k = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

В самом деле, согласно правилам действий над комплексными числами, имеем

$$\sum_k (A_{ik}-\bar{\lambda}\delta_{ik})\,\bar{x}_k=\sum_k (\overline{A}_{ik}-\bar{\lambda}\bar{\delta}_{ik})\,\bar{x}_k=\overline{\sum_k (A_{ik}-\lambda\delta_{ik})\,x_k}=0.$$

Таким образом,

$$\sum_k A_{ik}x_k=\lambda x_i, \qquad \sum_k A_{ik}\bar{x}_k=\bar{\lambda}\bar{x}_i.$$

Первое из этих равенств умножим на $\bar{x}_i$, второе на x_i и просуммируем по i:

$$\sum_{i,\,k} A_{ik}\bar{x}_i x_k=\lambda\sum x_i\bar{x}_i=\lambda\sum |x_i|^2;$$

$$\sum_{i,\,k} A_{ik}\bar{x}_k x_i=\bar{\lambda}\sum \bar{x}_i x_i=\bar{\lambda}\sum |x_i|^2.$$

Матрица A_{ik} симметрична, поэтому

$$\sum_{i,\,k} A_{ik}\bar{x}_i x_k=\sum_{i,\,k} A_{ki}\bar{x}_i x_k=\sum_{i,\,k} A_{ik}\bar{x}_k x_i,$$

и, значит, $\bar{\lambda}\sum |x_i|^2=\lambda\sum |x_i|^2$.

Но решение $(x_1, \ldots, x_n)$ не нулевое, т. е. $\sum |x_i|^2\neq 0$. Следовательно, $\bar{\lambda}=\lambda$. Таким образом, λ — действительное число. Лемма доказана.

3. Самосопряженные преобразования

1. Самосопряженное преобразование A характеризуется условием $\overset{*}{A}=A$.

Вследствие равенства (5) § 1 матрица $\| A^{j}_{\cdot k} \|$ самосопряженного преобразования, данная в произвольном базисе, характеризуется соотношением

$$\sum g_{j\alpha}A^{\alpha}_{\cdot k}=\sum g_{k\alpha}A^{\alpha}_{\cdot j}. \tag{1}$$

Отсюда

$$A_{jk}=A_{kj}. \tag{2}$$

Таким образом, отличительным признаком самосопряженного преобразования является симметрия матрицы ковариантных координат его тензора.

2. Вследствие (1) матрица самосопряженного и только такого преобразования симметрична в ортонормированном базисе: $A_k^i = A_i^k$. Иначе говоря, в ортонормированном базисе условие самосопряженности преобразования выражается матричным равенством $A^* = A$, где A — матрица преобразования, а звездочка — символ транспонирования.

3. Лемма 1. *Все корни характеристического многочлена самосопряженного преобразования действительны.*

Доказательство. Мы знаем, что характеристические корни преобразования инвариантны относительно изменения базиса. Перейдем к ортонормированному базису. Тогда матрица преобразования станет симметричной, и утверждение леммы 1 последует из результатов предыдущего параграфа.

Лемма 2. *Пусть e — собственный вектор самосопряженного преобразования A, подпространство L_e — ортогональное дополнение линейной оболочки вектора e. Тогда L_e является инвариантным подпространством для A.*

Доказательство. Пусть $x \in L_e$. Это значит, что $(x, e) = 0$. Вследствие самосопряженности $(Ax, e) = (x, Ae)$. Воспользуемся тем, что e — собственный вектор.

Имеем

$$(Ax, e) = (x, Ae) = (x, \lambda e) = \lambda (x, e) = 0.$$

Иначе говоря, $Ax \in L_e$; лемма 2 доказана.

Теорема. *Для всякого самосопряженного преобразования найдется хотя бы один ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов.*

Доказательство проведем по индукции. В одномерном случае всякий ненулевой вектор является собственным, поэтому для $n = 1$ теорема справедлива. Пусть $n > 1$ — любое натуральное число. Предположим, что теорема справедлива для всякого самосопряженного преобразования в E_{n-1}.

Пусть A — самосопряженное преобразование в E_n. Так как все корни $P(\lambda)$ действительны, то найдется хотя бы один собственный вектор e. Построим ортогональное дополнение L_e линейной оболочки вектора e. Подпространство L_e имеет размерность $n - 1$ и является инвариантным подпространством относительно преобразования A. Поэтому A можно рассматривать не на всем E_n, а только на L_e, где A, очевидно, тоже является самосопряженным. По предположению индукции, в L_e найдется ортонормированный базис $e_2, \ldots, e_n$, состоящий из собственных векторов. Добавим к нему единичный вектор e_1, коллинеарный собственному вектору e. Вектор e_1 ортогонален ко всем векторам $e_2, \ldots, e_n$, поэтому в результате мы получим искомый базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Теорема доказана.

Следствие. *Всякое самосопряженное преобразование в некотором ортонормированном базисе приводится к диагональному виду.*

Как мы знаем, матрица A в этом базисе записывается так:

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — совокупность всех корней характеристического многочлена

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n); \tag{4}$$

при этом собственное значение λ_k соответствует собственному вектору e_k (базисному вектору с тем же номером k).

4. Лемма 3. *Собственные векторы, соответствующие различным по числовому значению характеристическим корням, ортогональны друг другу.*

Доказательство. Пусть

$$Ax = \lambda_1 x, \qquad Ay = \lambda_2 y,$$

где $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Первое равенство скалярно умножим на y, второе — на x и вычтем одно из другого:

$$(Ax, y) - (Ay, x) = \lambda_1 (x, y) - \lambda_2 (y, x) = (\lambda_1 - \lambda_2)(x, y).$$

Вследствие самосопряженности

$$(Ax, y) - (Ay, x) = (Ax, y) - (y, Ax) = 0,$$

отсюда $(x, y) = 0$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если λ — корень кратности m характеристического многочлена самосопряженного преобразования A, то* $\operatorname{Rang}(A - \lambda E) = n - m$, *так что корню λ соответствует m линейно независимых собственных векторов.*

Доказательство. Согласно п. 3 существует базис, в котором матрица преобразования A имеет диагональный вид (3). В этом же базисе характеристическая матрица $A-\lambda E$ имеет вид

$$A-\lambda E=\begin{Vmatrix} \lambda_1-\lambda & & & 0 \\ & \lambda_2-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n-\lambda \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Пусть, например, λ_1 является корнем кратности m характеристического многочлена (4), то есть $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m$, $\lambda_{m+1}\neq\lambda_1, \ldots, \lambda_n\neq\lambda_1$. Тогда в матрице (5) первые m диагональных элементов обращаются в нуль, а остальные диагональные элементы не равны нулю, так что

$$\operatorname{Rang}(A-\lambda_1 E)=n-m. \tag{6}$$

Согласно § 2 гл. VII равенство (6) справедливо в любом базисе. Согласно § 6 гл. VII корню λ_1 соответствует m независимых собственных векторов. Лемма 4 доказана.

5. Для построения ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов самосопряженного преобразования, прежде всего нужно найти корни характеристического многочлена $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Все они вещественны, но могут быть кратными. Отметим, какие из них имеют одинаковые значения. Пусть, например, λ_1 имеет кратность m:

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=\lambda',$$

λ_{m+1} имеет кратность k:

$$\lambda_{m+1}=\ldots=\lambda_{m+k}=\lambda''$$

и т. д. Корню λ' соответствует m линейно независимых собственных векторов $e_1, \ldots, e_m$, координаты которых получаются из однородной линейной системы уравнений с матрицей $A-\lambda' E$. Линейную оболочку векторов $e_1, \ldots, e_m$ обозначим L'_m. Подпространство L'_m инвариантно, и преобразование действует в нем как подобие с коэффициентом λ'. Поэтому *каждый* вектор из L'_m является собственным. Выберем в L'_m произвольный ортонормированный базис $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_m$. Он может быть получен путем ортогонализации системы векторов $e_1, \ldots, e_m$ или из каких-либо других соображений.

Далее находим собственные векторы $e_{m+1}, \ldots, e_{m+k}$, соответствующие корню λ''; обозначим через L''_k их линейную оболочку. Подпространство L''_k является инвариантным, так же как и L'_m. Выберем в L''_k произвольный ортонормированный базис $\tilde{e}_{m+1}, \ldots, \tilde{e}_{m+k}$. Векторы $\tilde{e}_{m+1}, \ldots, \tilde{e}_{m+k}$ являются собственными векторами преобразования, соответствующими корню λ''. По лемме 3 каждый из этих векторов ортогонален любому вектору из L'_m (иначе говоря, $L'_m \perp L''_k$).

Следовательно, векторы $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_m, \tilde{e}_{m+1}, \ldots, \tilde{e}_{m+k}$ вместе образуют ортонормированную систему.

Затем переходим к следующему корню, строим инвариантное подпространство соответствующей размерности и ортонормированный базис в нем. Продолжая этот процесс, после конечного числа операций получим искомый базис.

Пример 1. В трехмерном пространстве дан ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 и в нем задано преобразование

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 - 4x_3, \\ y_2 &= 2x_1 - 2x_2 - 2x_3, \\ y_3 &= -4x_1 - 2x_2 + x_3; \end{aligned}\right\}$$

где ставить индексы у координат — сверху или снизу, безразлично, поскольку базис ортонормированный (см. гл. VIII, § 11, п. 12).

Матрица этого преобразования симметрична:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

В ортонормированном базисе симметричность матрицы служит признаком самосопряженного преобразования.

Построим ортонормированный базис из собственных векторов. Пишем систему

$$\sum_j (A_{kj} - \lambda\delta_{kj})\, x_j = 0.$$

В данном случае она имеет вид

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)\,x_1 + {} & 2x_2 - {} & 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + {} & (-2-\lambda)\,x_2 - {} & 2x_3 = 0, \\ -4x_1 - {} & 2x_2 + {} & (1-\lambda)\,x_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Составляем характеристический многочлен

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda^3-27\lambda-54).$$

Его корни $\lambda_1=6$, $\lambda_2=\lambda_3=-3$.

Подставляя $\lambda_1=6$ в систему (7), находим решение (вектор):

$$e_1=\{2,\ 1,\ -2\}.$$

Затем подставляем $\lambda_2=\lambda_3=-3$. Получается система ранга один с двумя независимыми решениями. Эти решения нетрудно выбрать так, чтобы они давали ортогональные векторы:

$$e_2=\{1,\ 2,\ 2\},\ e_3=\{2,\ -2,\ 1\}.$$

Нормируя все найденные собственные векторы, получим искомый базис:

$$\tilde{e}_1=\{{}^2/_3,\quad {}^1/_3,\ -{}^2/_3\},$$
$$\tilde{e}_2=\{{}^1/_3,\quad {}^2/_3,\quad {}^2/_3\},$$
$$\tilde{e}_3=\{{}^2/_3,\ -{}^2/_3,\quad {}^1/_3\}.$$

Матрица $\tilde{A}$ преобразования A в новом базисе выписывается сразу без вычислений: она имеет диагональный вид; по диагонали стоят собственные значения, идущие в том же порядке, в каком идут в базисе соответствующие им векторы:

$$\tilde{A}=\begin{Vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Пример 2. Размерность $n=2$, базис e_1, e_2 произвольный. В таком случае должна быть задана его метрическая характеристика, то есть определяющие числа метрического тензора. Пусть

$$g_{11}=(e_1,\ e_1)=1,\qquad g_{12}=(e_1,\ e_2)=1,$$
$$g_{21}=(e_2,\ e_1)=1,\qquad g_{22}=(e_2,\ e_2)=4.$$

Базис «косой». Поэтому валентности существенны и нужно следить за правильной расстановкой индексов. Пусть дано самосопряженное линейное преобразование $y = Ax$:

$$\left.\begin{aligned} y^1 &= x^1 + 4x^2, \\ y^2 &= x^1 + x^2. \end{aligned}\right\}$$

Требуется привести его к ортонормированному базису из собственных векторов.

Прежде всего мы должны проверить, действительно ли соблюдается условие самосопряженности. Именно, мы должны убедиться, что матрица

$$A = \begin{Vmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

станет симметричной (см. (2)) после того, как будут спущены индексы с помощью метрического тензора. Иначе говоря, тензор

$$A_{ik} = \sum g_{i\alpha} A_k^\alpha$$

должен быть симметричным.

Фактически достаточно сравнить две компоненты этого тензора: A_{12} и A_{21}. Вычисляем их:

$$A_{12} = \sum_{\alpha=1}^{2} g_{1\alpha} A_2^\alpha = g_{11} A_2^1 + g_{12} A_2^2 = 5,$$

$$A_{12} = \sum_{\alpha=1}^{2} g_{2\alpha} A_1^\alpha = g_{21} A_1^1 + g_{22} A_1^2 = 5.$$

Таким образом, $A_{12} = A_{21}$. Самосопряженность данного преобразования установлена, и можно применять общую теорию.

Система уравнений $\sum (A_j^k - \lambda \delta_j^k) x^j = 0$ распишется так:

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)\, x^1 + \qquad 4x^2 &= 0, \\ x^1 + (1-\lambda)\, x^2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Характеристический многочлен

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

При $\lambda=\lambda_1$ получаем $x^1=2$, $x^2=-1$ и тем самым собственный вектор $l_1=\{2, -1\}$. При $\lambda=\lambda_2$ имеем собственный вектор $l_2=\{2, 1\}$.

Эти векторы ортогональны в заданной метрике согласно лемме 3.

Вычислим нормы этих векторов:

$$\|l_1\|^2=\sum g_{\alpha\beta}l_1^\alpha l_1^\beta=4, \qquad \|l_1\|=2;$$

$$\|l_2\|^2=\sum g_{\alpha\beta}l_2^\alpha l_2^\beta=12, \quad \|l_2\|=2\sqrt{3}.$$

Разделив векторы l_1 и l_2 на их нормы, получим искомый базис

$$\tilde{e}_1=\{1, -{}^1/_2\}, \qquad \tilde{e}_2=\{{}^1/\sqrt{3}, \quad {}^1/_2\sqrt{3}\}.$$

В этом базисе рассматриваемое преобразование имеет матрицу

$$\tilde{A}=\begin{Vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{Vmatrix}.$$

В многомерном случае аналогичная задача требует гораздо бо̀льших вычислений.

§ 4. Приведение квадратичной формы к каноническому виду в ортонормированном базисе

1. Мы знаем, что каждую квадратичную форму можно привести к каноническому виду в некотором базисе.

Теперь задача ставится с дополнительным ограничением: решение нужно провести, не выходя из класса ортонормированных базисов.

Пусть в ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ задана квадратичная форма

$$f(x, x)=\sum a_{ij}x_ix_j.$$

Введем вспомогательное линейное преобразование $y=Ax$, которое в исходном базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет такую же матрицу, как квадратичная форма, то есть

$$A_j^i=a_{ij}.$$

В силу ортонормированности базиса имеем $A_j^i=A_{ij}$ (см. § 9 гл. VIII). Кроме того, $a_{ij}=a_{ji}$. Значит, преобразование

$y = Ax$ будет самосопряженным, поэтому можно найти базис $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$, состоящий из собственных векторов этого преобразования.

При переходе к базису $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ матрица преобразования $y = Ax$ примет вид

$$\tilde{A} = QAQ^{-1},$$

а матрица квадратичной формы

$$A' = PAP^*.$$

Но старый и новый базисы ортонормированные, поэтому матрица P ортогональна; следовательно,

$$P = Q, \qquad P^* = P^{-1} = Q^{-1}.$$

Отсюда следует, что и в новом базисе матрицы квадратичной формы и вспомогательного линейного преобразования совпадают: $A' = \tilde{A}$.

В базисе $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ матрица преобразования A имеет диагональный вид

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{Vmatrix},$$

поэтому квадратичная форма запишется в каноническом виде

$$f(x, x) = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \ldots + \lambda_n \tilde{x}_n^2.$$

Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — характеристические корни преобразования A, соответствующие его собственным векторам $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$.

Вывод. С каждой квадратичной формой, заданной в ортонормированном базисе, естественно сопоставляется самосопряженное преобразование. Приведение этого преобразования к ортонормированному базису автоматически вызывает приведение квадратичной формы к каноническому виду.

2. Пример. В ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства дана квадратичная форма

$$\begin{aligned} f(x, x) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - \\ - \quad 2x_2^2 - 4x_2x_3 + \\ + \ x_3^2. \end{aligned}$$

Требуется привести ее к каноническому виду также в ортонормированном базисе.

Решение. Матрица квадратичной формы

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

В предыдущем параграфе был рассмотрен пример самосопряженного преобразования именно с такой матрицей; поэтому мы можем воспользоваться готовым результатом и записать ответ:

$$f(x, x)=6\tilde{x}_1^2-3\tilde{x}_2^2-3\tilde{x}_3^2$$

в ортонормированном базисе

$$\tilde{e}_1=\{2/3,\ 1/3,\ -2/3\},$$
$$\tilde{e}_2=\{1/3,\ 2/3,\ 2/3\},$$
$$\tilde{e}_3=\{2/3,\ -2/3,\ 1/3\}.$$

§ 5. Совместное приведение к каноническому виду двух квадратичных форм

1. Пусть в линейном пространстве (без метрики) фиксирован произвольный базис $e_1, \ldots, e_n$ и в нем даны две квадратичные формы:

$$f(x, x)=\sum a_{ik}x^i x^k, \qquad g(x, x)=\sum g_{ik}x^i x^k.$$

Ставится вопрос, можно ли найти базис, в котором обе квадратичные формы примут канонический вид.

Теорема. *Если хотя бы одна из двух квадратичных форм положительно определенная, то найдется базис, в котором обе формы получат канонический вид.*

Доказательство. Пусть положительно определенной является форма $g(x, x)$. Введем в линейном пространстве евклидову метрику, приняв форму $g(x, x)$ в качестве метрической. Если в полученном евклидовом пространстве мы возьмем произвольный ортонормированный базис, то метрическая форма $g(x, x)$ получит нормальный вид. Затем перейдем к другому ортонормированному базису так, чтобы форма $f(x, x)$ привелась к каноническому виду. При этом нормальный вид метрической формы, очевидно, не нарушится. Теорема доказана.

2. При практическом совместном приведении двух квадратичных форм к каноническому виду нет необходимости поиски нужного базиса разбивать на два этапа, как это сделано в доказательстве теоремы.

Согласно § 4 квадратичную форму можно привести к каноническому виду, оставаясь в классе ортонормированных базисов. Такое приведение осуществляется с помощью некоторого самосопряженного преобразования. Факт самосопряженности преобразования не зависит от выбора базиса. Поэтому поступим следующим образом.

Примем $g(x, x)$ за метрическую форму и по коэффициентам формы $f(x, x)$ будем искать в данном базисе вспомогательное самосопряженное преобразование $y = Ax$. Его ковариантный тензор A_{ij} должен быть симметричным и должен определяться тензорным равенством $A_{ij} = a_{ij}$, которое справедливо в любом базисе. Теперь для нахождения матрицы преобразования A нужно только поднять индекс тензора A_{ij} с помощью метрического тензора:

$$A^{k}_{\cdot j} = \sum A_{\alpha j} g^{k\alpha} = \sum g^{k\alpha} a_{\alpha j}. \tag{1}$$

Все величины в правой части этого равенства даны, поэтому дело свелось к нахождению собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и ортонормированного базиса из соответствующих собственных векторов $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ самосопряженного преобразования с известной матрицей $\| A^{k}_{\cdot j} \|$; см. п. 5 § 3.

3. Можно сделать дальнейшие упрощения. Оказывается, что для нахождения векторов $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ и собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ нет необходимости подсчитывать $A^k_j = A^{k}_{\cdot j}$.

В самом деле, учитывая (1), мы имеем

$$a_{kj} - \lambda g_{kj} = \sum g_{k\alpha} \left(A^{\alpha}_{j} - \lambda \delta^{\alpha}_{j} \right); \tag{2}$$

поэтому система уравнений

$$\sum \left(A^{k}_{j} - \lambda \delta^{k}_{j} \right) x^{j} = 0 \tag{3}$$

при любом λ эквивалентна системе

$$\sum (a_{kj} - \lambda g_{kj}) x^{j} = 0. \tag{4}$$

Именно, вследствие (1) и (2) имеют место равенства

$$\sum_j (a_{kj} - \lambda g_{kj})\, x^j = \sum_\alpha g_{k\alpha} \sum_j \left(A_j^\alpha - \lambda \delta_j^\alpha\right) x^j,$$

$$\sum_j \left(A_j^k - \lambda \delta_j^k\right) x^j = \sum_\alpha g^{k\alpha} \sum_j (a_{\alpha j} - \lambda g_{\alpha j})\, x^j,$$

из которых, очевидно, вытекает эквивалентность систем (3) и (4).

Таким образом, дело сводится к решению системы (4). При этом вместо характеристического многочлена $p(\lambda)$ приходится рассматривать многочлен

$$q(\lambda) = \operatorname{Det}(a_{kj} - \lambda g_{kj}).$$

Но он имеет в точности те же корни (с учетом кратности), что и характеристический многочлен

$$p(\lambda) = \operatorname{Det}\left(A_j^k - \lambda \delta_j^k\right).$$

Действительно, вследствие (2)

$$q(\lambda) = g \cdot p(\lambda)$$

при любом λ, где $g = \operatorname{Det} G \neq 0$. Таким образом, $q(\lambda)$ отличается от $p(\lambda)$ только множителем, который не включает λ. Следует заметить, что $q(\lambda)$ и система (4) пишутся сразу по данным квадратичным формам.

4. Подведем итоги. Итак, пусть в произвольном базисе $e_1, \ldots, e_n$ даны две квадратичные формы:

$$f(x, x) = \sum a_{ij} x^i x^j, \qquad g(x, x) = \sum g_{ij} x^i x^j,$$

причем $g(x, x)$ — положительно определенная. Для совместного их приведения к каноническому виду решаем характеристическое уравнение

$$q(\lambda) = \operatorname{Det}(a_{kj} - \lambda g_{kj}) = 0.$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — его корни (все они действительны).

Эти корни поочередно подставляем вместо λ в систему (4) и для каждого корня находим решения $\{x^j\}$ этой системы, причем если кратность корня λ равна m, то найдется m линейно независимых решений (см. лемму 4 из § 3). Эти решения нужно выбирать так, чтобы они образовывали ортонормированную систему в метрике $g(x, x)$.

Тогда все найденные решения дадут матрицу координат векторов искомого базиса $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$. Если нумерация правильна, т. е. вектор $\tilde{e}_k$ отвечает корню λ_k, то в базисе $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ данные квадратичные формы примут вид

$$f = \sum \lambda_i (\tilde{x}^i)^2, \qquad g = \sum (\tilde{x}^i)^2.$$

5. Пример. $n=2$; даны формы

$$f(x,\ x) = 2(x^1)^2 + 10x^1x^2 + 8(x^2)^2,$$
$$g(x,\ x) = (x^1)^2 + 2x^1x^2 + 4(x^2)^2.$$

Привести их совместно к каноническому виду.

Легко проверить, что $g(x, x)$ — положительно определенная форма; это видно, например, из равенства $g(x, x) = (x^1 + x^2)^2 + 3(x^2)^2$. Совместное приведение возможно; его можно проводить по изложенному рецепту.

Выпишем матрицы квадратичных форм

$$F = \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{Vmatrix}, \qquad G = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}$$

и составим характеристический многочлен

$$q(\lambda) = \operatorname{Det}(F - \lambda G) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5-\lambda \\ 5-\lambda & 8-4\lambda \end{vmatrix}.$$

Его корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Система (4) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} (2-\lambda)x^1 + (5-\lambda)x^2 = 0, \\ (5-\lambda)x^1 + (8-4\lambda)x^2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

При $\lambda = \lambda_1 = -1$ находим решение $x^1 = 2$, $x^2 = -1$ и пишем его в виде вектора $l_1 = \{2, -1\}$; при $\lambda = \lambda_2 = 3$ находим решение $l_2 = \{2, 1\}$. Векторы l_1 и l_2 ортогональны в метрике g, потому что они являются собственными векторами вспомогательного оператора, самосопряженного в метрике g, и соответствуют разным собственным значениям. Базис, в котором даны формы, не ортогональный в метрике g. Поэтому ортогональность векторов l_1 и l_2 сразу не видна. Но для контроля вычислений читатель может убедиться, что $(l_1, l_2) = g(l_1, l_2) = 0$.

Подсчитываем в метрике g нормы векторов l_1 и l_2:

$$\| l_1 \| = \sqrt{g(l_1,\ l_1)} = 2, \qquad \| l_2 \| = \sqrt{g(l_2,\ l_2)} = \sqrt{12}.$$

Нормируем базис:

$$\tilde{e}_1 = \{1,\ -1/2\}, \quad \tilde{e}_2 = \{2/\sqrt{12},\ 1/\sqrt{12}\}.$$

В базисе $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ квадратичные формы имеют вид

$$f = -(\tilde{x}^1)^2 + 3(\tilde{x}^2)^2,$$

$$g = (\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^2)^2.$$

Замечание. Векторы l_1 и l_2 тоже образуют базис, в котором обе формы имеют канонический вид, но с другими коэффициентами при квадратах. Нормировка векторов l_1 и l_2 в метрике g нужна для того, чтобы можно было выписать приведенные квадратичные формы без дополнительного вычисления их коэффициентов, используя найденные ранее корни характеристического уравнения.

§ 6. Кососопряженные преобразования

1. Напомним, что линейное преобразование $z = Ay$ в евклидовом пространстве называется кососопряженным или косым, если $\overset{*}{A} = -A$.

Расписав это соотношение в каком-нибудь базисе, получим

$$\overset{*}{A}{}^{j\cdot}_{\cdot k} = -A^{j\cdot}_{\cdot k}.$$

Поэтому условие того, что A является кососопряженным, в координатах (в произвольном базисе) записывается так:

$$\sum g_{i\alpha} A^{\alpha\cdot}_{\cdot k} = -\sum g_{k\alpha} A^{\alpha\cdot}_{\cdot i}$$

или

$$A_{ik} = -A_{ki}.$$

В ортонормированном базисе валентности тензоров равноправны, и матрица косого преобразования тоже будет кососимметричной.

Заметим, что линейное преобразование всегда можно записать так, чтобы оно определялось ковариантными координатами. Для этого нужно аргумент y представить в данном базисе:

$$y = y^1 e_1 + y^2 e_2 + \ldots + y^n e_n,$$

а функцию z разложить по взаимному базису

$$z = z_1 e^1 + z_2 e^2 + \ldots + z_n e^n.$$

Тогда преобразование $z = Ay$ записывается в виде

$$z_i = \sum A_{ik} y^k,$$

где A_{ik} — ковариантный тензор преобразования A.

2. Докажем, что в трехмерном случае косое преобразование $z = Ay$ можно представить в виде векторного умножения фиксированного вектора a на вектор y.

Теорема. *Если $z = Ay$ — кососопряженное преобразование в трехмерном евклидовом пространстве, то существует единственный вектор a такой, что*

$$z = [a \times y].$$

Замечание. Так как преобразование Ay инвариантно относительно изменения базиса, то в равенстве $Ay = [a \times y]$ вектор a не инвариантный, а аксиальный (одновалентный аксиальный тензор).

Доказательство теоремы. Мы знаем, что

$$z_i = \sum A_{ik} y^k.$$

С другой стороны, если $z = [a \times y]$, то

$$z_i = \sum \varepsilon_{i\alpha k} a^\alpha y^k,$$

где $\varepsilon_{i\alpha k}$ — дискриминантный тензор.

Для того чтобы доказать теорему, нужно обеспечить следующие равенства:

$$\sum \varepsilon_{i\alpha k} a^\alpha = A_{ik},$$

где A_{ik} — данный тензор, $A_{ki} = -A_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3)$, $a = \{a^1, a^2, a^3\}$ — искомый вектор. Для трех координат вектора a получилась система девяти линейных уравнений. Нужно доказать ее совместность, используя косую симметрию данного тензора A_{ik} и специальный вид левой части. Система уравнений записана в виде тензорного равенства, поэтому можно проверять равенство в любых координатах, и за счет специального выбора координат упростить задачу. Для этого воспользуемся следующим соображением.

Определитель кососимметричной матрицы нечетного порядка всегда равен нулю. (В трехмерном случае, который мы рассматриваем, это свойство очевидно.) Поэтому билинейная форма

$$f(u, v) = \sum A_{ik} u^i v^k,$$

соответствующая тензору A_{ik}, является вырожденной, и ее нулевое подпространство имеет размерность не меньше единицы.

Выберем *ортонормированный* базис e_1, e_2, e_3 так, чтобы вектор e_3 находился в *нулевом подпространстве* билинейной формы (в правом или в левом — безразлично).

Тогда матрица A_{ik} упростится следующим образом:

$$A_{ik} = \begin{Vmatrix} 0 & A_{12} & 0 \\ -A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Основная компонента дискриминантного тензора $\varepsilon_{123} = 1$, потому что базис ортонормированный. Отсюда, как легко подсчитать,

$$\left\| \sum \varepsilon_{i\alpha k} a^\alpha \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & -a^3 & a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ -a^2 & a^1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Теперь очевидно, что для совпадения матриц $\| A_{ik} \|$ и $\left\| \sum \varepsilon_{i\alpha k} a^\alpha \right\|$ нужно положить

$$a = \{a^1, a^2, a^3\} = \{0, 0, -A_{12}\}.$$

Никакой другой вектор не пригоден. Теорема доказана.

3. Механическая интерпретация. Фиксируем в трехмерном евклидовом пространстве точку O и проведем через нее прямую, коллинеарную вектору a. Примем эту прямую за ось вращения. Найдем распределение линейных скоростей точек твердого тела, вращающегося вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью $\omega = |a|$. Линейная скорость v зависит только от положения, которое движущаяся точка занимает в данный момент времени. Это положение характеризуется радиус-вектором $\overline{OM} = y$ (движущаяся точка тела проходит геометрическую точку M в пространстве). Скорость v ортогональна плоскости, в которой лежат векторы a и y. Численная величина линейной скорости $|v|$ равна

произведению угловой скорости $|a|$ на расстояние точки от оси вращения, а это произведение совпадает с площадью параллелограмма, построенного на векторах a и y (рис. 62). Поэтому при надлежащем выборе ориентации базиса скорость любой точки вращающегося тела выражается формулой $v=[a\times y]$.

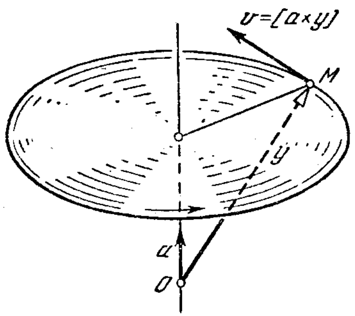


Рис. 62.

Таким образом, всякое косое преобразование Ay в E_3 можно интерпретировать как распределение скоростей равномерно вращающегося твердого тела: точка с радиус-вектором y имеет мгновенную линейную скорость $v=Ay$; вектор a угловой скорости (и тем самым ось вращения) находятся согласно п. 2.

§ 7. Изометричные преобразования

1. Определение. Линейное преобразование I называется изометричным или изометрическим, если оно сохраняет норму любого вектора:

$$\|Ix\|=\|x\|. \tag{1}$$

В дальнейшем будем считать, что речь идет о линейных преобразованиях в евклидовых пространствах.

2. Из определения вытекает, что если изометричное преобразование существует, то оно невырождено, поскольку вырожденное преобразование должно какой-нибудь ненулевой вектор обратить в нулевой. Поэтому изометричное преобразование $z=Iy$ имеет обратное преобразование $y=I^{-1}z$, которое тоже является изометричным.

Замечание. Для обратимости изометричного преобразования существенно считать, что пространство конечномерно.

3. Теорема. *Если I — изометричное преобразование, то $(Ix, Iy)=(x, y)$ для любой пары векторов x, y.*

Следствие. *Поскольку изометричное преобразование сохраняет нормы и скалярные произведения, то оно со-*

храняет также угол между любыми двумя векторами, т. е. угол между ними равен углу между их образами.

Доказательство теоремы. Подставим в формулу (1) сумму $x+y$ вместо вектора x и возведем обе части в квадрат:

$$\| I(x+y) \|^2 = \| x+y \|^2$$

или

$$(I(x+y),\ I(x+y)) = (x+y,\ x+y).$$

Используя линейность преобразования I, получим

$$(Ix,\ Ix) + 2(Ix,\ Iy) + (Iy,\ Iy) = (x,\ x) + 2(x,\ y) + (y,\ y).$$

Но здесь $(Ix,\ Ix) = \| Ix \|^2 = (x,\ x)$, $(Iy,\ Iy) = \| Iy \|^2 = (y,\ y)$, поэтому

$$(Ix,\ Iy) = (x,\ y). \tag{2}$$

Теорема доказана.

4. В дальнейшем будем считать, что рассматриваемое евклидово пространство является n-мерным и будем обозначать его через E_n.

В формуле (2) положим $Iy = z$. Тогда $y = I^{-1}z$; отсюда

$$(Ix,\ z) = (x,\ I^{-1}z). \tag{2'}$$

Когда вектор y пробегает все пространство E_n, вектор z тоже пробегает все E_n вследствие невырожденности I. Таким образом, равенство (2′) соблюдается для любых векторов x, z из E_n. Это значит, что

$$I^{-1} = \overset{*}{I}. \tag{3}$$

Замечание. Нетрудно проверить, что три условия (1), (2) и (3) эквивалентны, т. е. каждое из них влечет два других.

5. Соотношение (3) можно переписать так:

$$\overset{*}{I} I = I \overset{*}{I} = E,$$

где E — тождественное преобразование. Отсюда следует, что матрица преобразования I является ортогональной в ортонормированном базисе. Поэтому изометричные преобразования — это те и только те, которые в ортонормированном базисе имеют ортогональные матрицы.

6. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис; пусть

$$\left.\begin{array}{l} Ie_1 = I_{11}e_1 + I_{21}e_2 + \ldots + I_{n1}e_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Ie_n = I_{1n}e_1 + I_{2n}e_2 + \ldots + I_{nn}e_n. \end{array}\right\}$$

Векторы $Ie_1, \ldots, Ie_n$ тоже образуют ортонормированный базис, так как изометричное преобразование переводит единичные векторы в единичные, а ортогональные в ортогональные.

Согласно предыдущему матрица преобразования $\|I_{ik}\|$ ортогональна.

Таким образом, всякому изометричному преобразованию можно поставить в соответствие ортогональную матрицу, и всякой ортогональной матрице — изометричное преобразование. Для любой пары ортонормированных базисов существует единственное изометричное преобразование, переводящее один из данных базисов в другой.

7. Отметим некоторые свойства изометричных преобразований:

1) Если преобразование I имеет собственный вектор e, т. е. если $Ie = \lambda e$, $e \neq \theta$, то $\lambda = \pm 1$ (это сразу вытекает из сохранения нормы вектора).

2) $\operatorname{Det} I = \pm 1$. В самом деле, определитель ортогональной матрицы всегда равен ± 1, а $\operatorname{Det} I$ — инвариант; поэтому для доказательства этого свойства достаточно рассмотреть преобразование I в ортонормированном базисе.

Если $\operatorname{Det} I = +1$, то базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $Ie_1, \ldots, Ie_n$ одинаково ориентированы, и мы имеем преобразование, аналогичное движению твердого тела.

Если $\operatorname{Det} I = -1$, то базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $Ie_1, \ldots, Ie_n$ имеют различные ориентации, и мы имеем преобразование типа зеркального отражения.

3) Если e — собственный вектор, L_e — ортогональное дополнение линейной оболочки вектора e, то L_e — инвариантное подпространство.

Доказательство. Пусть $x \in L_e$, тогда $(Ix, Ie) = (x, e) = 0$. С другой стороны, $(Ix, Ie) = \lambda(Ix, e)$, так что $(Ix, e) = 0$, то есть $Ix \in L_e$.

8. Рассмотрим примеры. Будем считать, что матрицы преобразований выписываются в ортонормированных базисах. Ортогональность матриц (а следовательно, изометричность приведенных ниже преобразований) устанавливается несложной проверкой, которую мы предоставляем читателю.

1) Тождественное преобразование является изометричным.

2) Зеркальное отражение n-мерного пространства относительно гиперплоскости $x_1 = 0$ переводит произвольный вектор $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$ в вектор $Ix = -x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$. Матрица этого преобразования имеет вид

$$I = \begin{Vmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Подпространство $x_1 = 0$ является инвариантным, индуцированное в нем преобразование — тождественным.

3) $n = 1$. В одномерном пространстве изометричное преобразование либо тождественно: $Ix = x$, либо является зеркальным отражением: $Ix = -x$.

Действительно, в одномерном случае матрица I состоит из единственного элемента I_{11}; учитывая второе свойство предыдущего пункта, находим $I_{11} = \operatorname{Det} \| I_{11} \| = \pm 1$.

4) $n = 2$. Поворот плоскости на угол θ является изометричным преобразованием (см. § 7 гл. VIII).

5) $n = 3$. Поворот пространства на угол θ вокруг оси x_3 задается матрицей

$$I = \begin{Vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Вектор e_3 является собственным, подпространства $L(e_3)$, $L(e_1, e_2)$ — инвариантными.

6) Многомерным обобщением предыдущего примера является поворот n-мерного пространства вокруг $(n-2)$-мерного подпространства $L(e_3, \ldots, e_n)$:

$$I = \begin{Vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & & & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Подпространство $L(e_3, \ldots, e_n)$ остается неподвижным, в нем индуцируется тождественное преобразование.

7) $n=4$. Преобразование с матрицей

$$I=\begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{Vmatrix}$$

можно рассматривать как одновременный поворот пространства E_4 в двух взаимно ортогональных направлениях: на угол α вокруг плоскости $L(e_3, e_4)$, на угол β вокруг плоскости $L(e_1, e_2)$.

Плоскости $L(e_1, e_2)$ и $L(e_3, e_4)$ являются инвариантными подпространствами. Если углы α, β не кратны π, то преобразование I не имеет собственных векторов, так как его характеристический многочлен

$$p(\lambda)=(\lambda^2-2\lambda\cos\alpha+1)(\lambda^2-2\lambda\cos\beta+1)$$

имеет лишь комплексные корни.

9. Чтобы лучше почувствовать специфику изометричных преобразований в пространствах, размерность которых больше трех, сравним последний пример с поворотом трехмерного пространства.

Будем считать, что пространства вращаются равномерно, а матрицы в примерах 5) и 7) п. 8 характеризуют поворот за единицу времени. Тогда поворот за время t в трехмерном случае задается матрицей

$$I(t)=\begin{Vmatrix} \cos\theta t & -\sin\theta t & 0 \\ \sin\theta t & \cos\theta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

а в четырехмерном — матрицей:

$$\tilde{I}(t)=\begin{Vmatrix} \cos\alpha t & -\sin\alpha t & 0 & 0 \\ \sin\alpha t & \cos\alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta t & -\sin\beta t \\ 0 & 0 & \sin\beta t & \cos\beta t \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, что в трехмерном случае все точки оси вращения неподвижны, а остальные точки пространства описывают окружности, у которых центры лежат на оси вращения; плоскости этих окружностей перпендикулярны к оси вращения. Каждая точка совершает полный оборот за одно и то же время $T=2\pi/\theta$.

В четырехмерном случае картина иная. Неподвижной точкой является только начало координат. Точки инвариантных плоскостей $L(e_1, e_2)$ и $L(e_3, e_4)$ движутся по окружностям с центром в начале координат, но периоды обращения вокруг начала координат в этих двух плоскостях различны: в плоскости $L(e_1, e_2)$ период $T_1=2\pi/\alpha$, в плоскости $L(e_3, e_4)$ период $T_2=2\pi/\beta$. Если углы α и β несоизмеримы, то каждая точка пространства, не принадлежащая ни одной из этих двух плоскостей, совершает движение по некоторой незамкнутой траектории, не имеющей самопересечений, и никогда не возвращается в исходное положение. Действительно, для того чтобы точка вернулась в исходное положение, необходимо и достаточно, чтобы ее проекции на плоскости $L(e_1, e_2)$ и $L(e_3, e_4)$ одновременно вернулись в свои исходные положения, что невозможно вследствие несоизмеримости периодов T_1 и T_2.

Если углы α и β соизмеримы, то периоды T_1 и T_2 также соизмеримы, и в этом случае траектории всех точек замкнуты, но они не будут, вообще говоря, окружностями. В этом случае период обращения точек, не принадлежащих плоскостям $L(e_1, e_2)$ и $L(e_3, e_4)$, равен наименьшему общему кратному периодов T_1 и T_2.

§ 8. Канонический вид изометричного преобразования

1. Теорема. *Для каждого изометричного преобразования I в n-мерном евклидовом пространстве E_n существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором матрица преобразования имеет следующий канонический вид:*

$$I=\begin{Vmatrix} \pm 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & I_{\theta_1} & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & I_{\theta_k} \end{Vmatrix}. \qquad (1)$$

Через I_θ здесь обозначена матрица поворота двумерной плоскости на угол θ:

$$I_\theta = \begin{Vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}.$$

Знак $\pm$ перед первым диагональным элементом матрицы (1) *совпадает со знаком определителя преобразования. Клетки I_{θ_i} могут отсутствовать вовсе (см. первые три примера* п. 4 *предыдущего параграфа) или же заполнять всю диагональ (см. пример* 7) *из* п. 4 § 7).

Доказательство теоремы см. ниже п. 8 этого параграфа.

2. Выясним геометрический смысл сформулированной теоремы. Нетрудно проверить, что матрицу (1) можно представить в виде произведения

$$I = \begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & I_{\theta_k} \end{Vmatrix} \cdots \begin{Vmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & I_{\theta_1} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \pm 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (2)$$

Формула (2) показывает, что преобразование I сводится к следующему.

Если $\operatorname{Det} I = -1$, то сначала совершается зеркальное отражение относительно гиперплоскости, которая в базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет уравнение $x_1 = 0$ (если $\operatorname{Det} I = +1$, то отражения не происходит).

Затем линейная оболочка первых $n-2k$ базисных векторов $L(e_1, \ldots, e_{n-2k})$ остается неподвижной, а все пространство последовательно поворачивается на углы $\theta_1, \ldots, \theta_k$ вокруг $(n-2)$-мерных подпространств $L(e_1, \ldots, e_{n-2k}, e_{n-2k+3}, \ldots, e_n), \ldots, L(e_1, \ldots, e_{n-2})$. Все двумерные плоскости $L(e_{n-2k+1}, e_{n-2k+2}), \ldots, L(e_{n-1}, e_n)$, в направлениях которых происходят эти повороты, ортогональны между собой и ортогональны подпространству $L(e_1, \ldots, e_{n-2k})$.

3. Следствия из теоремы п. 1. 1) Пусть изометричное преобразование I имеет $\operatorname{Det} I = -1$. Тогда у него существует собственный вектор, а при четном n — по крайней мере два независимых собственных вектора.

2) В двумерном евклидовом пространстве возможны лишь три вида изометричных преобразований:

а) тождественное;

б) зеркальное отражение относительно некоторого одномерного подпространства;

в) поворот на угол $\theta (0 < \theta < 2\pi)$.

3) В трехмерном евклидовом пространстве возможны лишь следующие четыре вида изометричных преобразований:

а) тождественное;

б) зеркальное отражение относительно некоторого двумерного подпространства;

в) поворот на угол θ $(0 < \theta < 2\pi)$ вокруг некоторого одномерного подпространства;

г) произведение зеркального отражения относительно некоторого двумерного подпространства на поворот вокруг его ортогонального дополнения.

4. Переходим к доказательству теоремы, сформулированной в п. 1. Сначала (в пп. 5—7) установим вспомогательные предложения, которые имеют также и самостоятельный интерес.

5. Лемма 1. *В действительном линейном пространстве L для любого линейного преобразования существует либо одномерное инвариантное подпространство, либо двумерное инвариантное подпространство, причем такое, что индуцированное в нем преобразование имеет положительный детерминант.*

Доказательство. Если характеристический многочлен $p(\lambda)$ имеет действительный корень λ_1, то, согласно § 6 гл. VII, этому корню соответствует собственный вектор, линейная оболочка которого является инвариантным подпространством.

Пусть $p(\lambda)$ не имеет действительных корней. Тогда преобразование A не имеет ни одного собственного вектора.

В произвольном базисе $e_1, \ldots, e_n$ запишем соотношение $(A - \lambda E)x = \theta$, подставив в качестве λ комплексный корень $\alpha + i\beta$ характеристического многочлена $p(\lambda)$. Получится однородная система линейных уравнений с неизвестными $x^1, \ldots, x^n$ и с комплексными коэффициентами, которую в матричной форме можно записать так:

$$\left(A - (\alpha + i\beta) E\right) \begin{Vmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Определитель системы (3) равен нулю:

$$\operatorname{Det}(A-(\alpha+i\beta)E)=p(\alpha+i\beta)=0,$$

поэтому система (3) имеет нетривиальное решение $(x^1, \ldots, x^n)$. Выделим у него действительную и мнимую части

$$\begin{Vmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} y^1+iz^1 \\ \vdots \\ y^n+iz^n \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{Vmatrix}+i\begin{Vmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{Vmatrix} \tag{4}$$

и рассмотрим векторы

$$y=y^1e_1+\ldots+y^ne_n\in L,$$
$$z=z^1e_1+\ldots+z^ne_n\in L.$$

Теми же символами y и z будем обозначать элементы $(y^1, \ldots, y^n)$ и $(z^1, \ldots, z^n)$ координатного пространства K_n. Подставив решение (4) в систему (3), получим

$$\begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}=(A-(\alpha+i\beta)E)(y+iz)=(Ay-\alpha y+\beta z)+ \\ +i(Az-\alpha z-\beta y),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} Ay&=\alpha y-\beta z, \\ Az&=\beta y+\alpha z. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Равенства (5) получены алгебраически как соотношения между элементами координатного пространства K_n. Геометрически формулы (5) выражают действие преобразования A на векторы y, $z\in L$, записанные в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Но преобразование не зависит от выбора базиса, поэтому (5) можно рассматривать как инвариантные векторные равенства в пространстве L.

Покажем, что векторы y и z линейно независимы. Прежде всего, $z\neq\theta$, так как в противном случае первое из равенств (5) означало бы наличие в L собственного вектора y $(Ay=\alpha y)$. Поэтому, если между y и z существует линейная зависимость, то

$$y=\gamma z. \tag{6}$$

Подставив (6) во второе из уравнений (5), получим $Az=(\alpha+\beta\gamma)z$, что также противоречит отсутствию собственных векторов преобразования A.

Итак, y и z линейно независимы, их линейная оболочка $L(y, z)$ двумерна.

Формулы (5) показывают, что $L(y, z)$ является инвариантным подпространством преобразования A, и позволяют найти определитель преобразования, индуцированного в $L(y, z)$. Этот определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 > 0,$$

поскольку β заведомо отлично от нуля (иначе корень $\lambda = \alpha + i\beta$ был бы действительным). Лемма 1 доказана.

6. Лемма 2. *Пусть в евклидовом пространстве E_n задано изометричное преобразование I, и пусть подпространство E' инвариантно относительно I. Тогда ортогональное дополнение E'' подпространства E' также является инвариантным подпространством.*

Доказательство. Лемма 2 следует из того, что изометричное преобразование невырождено и сохраняет ортогональность векторов. Действительно, если $x \in E'$, $y \in E''$, то $(x, y) = 0$ и $(Ix, Iy) = 0$. Когда вектор x пробегает все подпространство E', его образ Ix также пробегает все E' (см. п. 2 § 4 гл. VII); значит, вектор Iy ортогонален подпространству E' и потому входит в E''. Вектор y из E'' можно взять произвольно. Таким образом, $I(E'') \subset E''$.

7. Лемма 3. *В двумерном евклидовом пространстве всякое изометричное преобразование I с положительным определителем представляет собой поворот на некоторый угол θ.*

Доказательство. Возьмем ортонормированный базис e_1, e_2. Пусть вектор Ie_1 образует угол θ с вектором e_1. Так как длина Ie_1 равна длине e_1, то Ie_1 получается из e_1 поворотом на угол θ. Вектор Ie_2 ортогонален Ie_1, и ориентация нового базиса Ie_1, Ie_2 такая же, как у исходного (поскольку $\operatorname{Det} I > 0$); следовательно, Ie_2 получается из e_2 поворотом на такой же угол θ. Преобразование I сохраняет длины всех векторов и углы между любыми двумя векторами, поэтому все векторы поворачиваются на один и тот же угол θ. В частности, при θ, кратном 2π, преобразование является тождественным.

8. Доказательство теоремы. Леммы 1 и 2 позволяют разложить пространство E_n в прямую сумму одномерных и двумерных инвариантных подпространств. Именно, по лемме 1 существует инвариантное подпространство $E_{(1)}$; по лемме 2 его ортогональное дополнение $\tilde{E}$ также инвариантно, к нему можно снова применить лемму 1 и т. д. В результате получим

$$E = E_{(1)} \oplus E_{(2)} \oplus \ldots \oplus E_{(p)}, \tag{7}$$

где $p = n - k$ (k — число двумерных подпространств в сумме (7)).

Будем считать, что в правой части формулы (7) сначала выписаны одномерные подпространства, в которых преобразование I имеет собственные значения $+1$, затем одномерные подпространства, в которых собственные значения равны -1, и, наконец, двумерные подпространства, в которых собственных значений нет (а определитель индуцированного преобразования положителен в соответствии с леммой 1). Преобразования, индуцированные в двумерных подпространствах, входящих в сумму (7), представляют собой повороты на некоторые углы $\theta_1, \ldots, \theta_k$ вследствие леммы 3. В каждом из подпространств $E_{(1)}, \ldots, E_{(p)}$ выберем ортонормированный базис. Их объединение даст ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства E_n, поскольку все $E_{(j)}$ попарно ортогональны. В базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрица преобразования примет вид

$$I = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & I_{\theta_1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & I_{\theta_k} \end{matrix} \right\|. \tag{8}$$

Заметив, что

$$I_\pi = \left\| \begin{matrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\|, \tag{9}$$

мы можем четное число минус единиц, стоящих на диагонали матрицы (8), заменить вдвое меньшим числом клеток вида (9).

Геометрически это означает, что произведение двух зеркальных отражений плоскости относительно взаимно перпендикулярных прямых равно повороту плоскости на угол π.

Если число минус единиц нечетно, то одна из них не войдет в клетки вида (9), и ее можно переставить в начало диагонали, изменив нумерацию базисных векторов.

В результате матрица I примет вид (1) (число k, вообще говоря, изменится по сравнению с формулой (8) за счет появления новых клеток вида (9)). Теорема доказана.

§ 9. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой

1. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве движение твердого тела с одной закрепленной точкой O. Примем точку O за начало координат с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3.

Пусть произвольная точка тела в начальный момент времени занимала положение M, а за время t переместилась в точку M_t. Положим

$$\overline{OM}=x, \qquad \overline{OM_t}=y$$

и обозначим через $I(t)$ преобразование, которое вектору x ставит в соответствие вектор y:

$$y=I(t)\,x.$$

Твердое тело понимается как абсолютно недеформируемое. Геометрически это означает, что каждый прямолинейный отрезок, образованный точками тела, в процессе движения переходит в прямолинейный отрезок такой же длины.

Поэтому можно построить переменный ортонормированный базис e_{1t}, e_{2t}, e_{3t}, движущийся вместе с телом, в котором координаты вектора $\overline{OM_t}$ сохраняют постоянные числовые значения.

Переход от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_{1t}, e_{2t}, e_{3t} при каждом фиксированном t задается некоторой ортогональной матрицей. Из сказанного следует, что преобразование $I(t)$ линейно и изометрично при каждом t. В базисе e_1, e_2, e_3 это преобразование запишется так:

$$y_k=\sum I_{k\alpha}(t)\,x_\alpha.$$

Предположим, что определяющие числа $I_{k\alpha}(t)$ являются дифференцируемыми функциями времени t.

Найдем распределение линейных скоростей v точек тела в произвольный момент времени t. Иначе говоря, мы хотим найти v для каждой точки M_t, т. е. v как функцию от y. Для каждой точки имеем

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 = \frac{dy}{dt}.$$

Таким образом,

$$v_k = \sum_{\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} I_{k\alpha}(t) \right\} x_{\alpha}.$$

Символически это можно записать так:

$$v = I'_t x,$$

где I'_t — линейное преобразование, матрица которого получается дифференцированием элементов матрицы I по аргументу t. Заметив, что

$$x = I^{-1} y = \overset{*}{I} y,$$

получим искомую функцию в виде линейного преобразования

$$v = I'_t \overset{*}{I} y.$$

2. Преобразование $A = I'_t \overset{*}{I}$ исследуем более внимательно. Найдем сопряженное ему преобразование $\overset{*}{A}$. Воспользуемся тем, что в ортонормированном базисе для перехода к сопряженному преобразованию достаточно транспонировать матрицу, а транспонирование произведения двух матриц осуществляется по известной формуле: $(I'_t\, I^*)^* = (I^*)^*\, (I'_t)^*$. Двукратное транспонирование приводит к исходной матрице, а дифференцирование элементов матрицы по t, очевидно, перестановочно с операцией транспонирования. Поэтому имеем матричные равенства

$$A^* = (I'_t I^*)^* = I (I^*)'_t. \tag{1}$$

С другой стороны, имеем равенство $I(t) \cdot \overset{*}{I}(t) = E$ для преобразований и вместе с тем равенство

$$I(t) \cdot I^*(t) = E \tag{2}$$

для их матриц, которые соблюдаются тождественно по t. Можно доказать, что произведение матриц дифференцируется по такому же правилу, как и произведение функций, поэтому из (2) имеем:

$$(II^*)'_t = I'_t I^* + I(\dot{I}^*)'_t = E'_t = 0. \tag{3}$$

Из (1) и (3) следует, что

$$A + \overset{*}{A} = 0.$$

Тем самым мы установили, что линейное преобразование

$$v = Ay$$

является кососопряженным ($\overset{*}{A} = -A$).

В § 6 было показано, что постоянное кососопряженное преобразование дает мгновенное распределение скоростей тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг некоторой неподвижной оси, и может быть представлено формулой

$$v = [a \times y].$$

В рассматриваемом случае преобразование A и вектор a зависят от времени.

Вывод. Когда твердое тело движется, имея одну закрепленную точку O, то в каждый момент времени поле мгновенных линейных скоростей его точек такое же, как если бы тело вращалось вокруг некоторой оси с постоянной угловой скоростью, но эта ось и угловая скорость зависят от выбора момента времени.

В связи с этим вместо слов «движение тела с неподвижной точкой» в механике часто употребляется термин «вращение тела вокруг неподвижной точки».

Вектор $a = a(t)$ называется угловой скоростью мгновенного вращения тела. Прямая, проходящая через точку O в направлении вектора $a(t)$, называется осью мгновенного вращения тела.

Изменение оси мгновенного вращения со временем можно наглядно проследить, наблюдая за вертящимся волчком.

§ 10. Кривизна и кручение пространственной кривой

1. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве дана кривая S. Для наглядности будем считать, что S — траектория точки M, которая движется с единичной скоростью, то есть за единицу времени проходит по S дугу, длина которой равна единице. При таком условии потраченное время численно совпадает с длиной пройденного пути. Эту длину мы обозначим через s и будем рассматривать как независимый аргумент.

Вектор мгновенной скорости точки M обозначим через t. Он направлен по касательной к кривой S в сторону движения и является единичным, то есть

$$(t,\ t) = 1. \tag{1}$$

Если линия не прямая, то вектор t меняет свое направление в пространстве. Поэтому точка M испытывает ускорение, равное производной от вектора скорости, т. е. равное t'_s.

Можно доказать, что скалярное произведение векторов дифференцируется по такому же правилу, как произведение функций. Дифференцируя равенство (1) по s, находим, что ускорение ортогонально скорости:

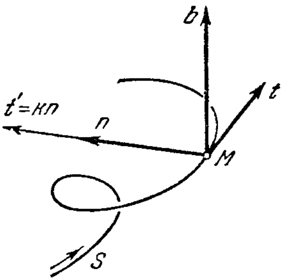


Рис. 63.

$$(t,\ t)'_s = 2\,(t,\ t'_s) = 0.$$

Положим $k(s) = |t'_s|$ и, считая, что $k(s) \neq 0$, введем единичный вектор n, по направлению совпадающий с t'_s (рис. 63). Тогда

$$t'_s = kn. \tag{2}$$

Величина k носит название кривизны кривой в данной точке M. По определению $k \geqslant 0$. Вектор n называется вектором главной нормали, а плоскость, проходящая через точку M параллельно векторам t и n, называется соприкасающейся плоскостью кривой S в точке M.

Построим единичный вектор $b = [t \times n]$. Он перпендикулярен к соприкасающейся плоскости и носит название вектора бинормали в точке M (рис. 63).

Тройка единичных векторов t, n, b при каждом значении аргумента s образует ортонормированный базис, естественным образом связанный с геометрическими свойствами кривой в окрестности точки M. Базис t, n, b называется триэдром Френе.

2. Векторы триэдра Френе будем откладывать в пространстве от фиксированной точки O. Тогда при изменении аргумента s триэдр Френе вращается вокруг точки O как твердое тело.

Вектор скорости мгновенного вращения триэдра Френе называется вектором Дарбу. Обозначим его через $d = d(s)$. Для произвольного вектора u, твердо связанного с триэдром Френе, согласно результатам предыдущего параграфа имеем

$$u'_s = [d \times u]. \tag{3}$$

В частности,

$$t'_s = [d \times t]. \tag{4}$$

Посмотрим, как расположен вектор Дарбу по отношению к триэдру Френе. Введем обозначение $\sigma = (d, t)$, и из формулы (4) найдем проекции вектора d на направления n и b.

Для этого в равенство (4) подставим разложение

$$d = \sigma t + \lambda n + \mu b$$

с неопределенными коэффициентами λ, μ. Учитывая, что $t'_s = kn$, получаем

$$kn = \sigma[t \times t] + \lambda[n \times t] + \mu[b \times t] = -\lambda b + \mu n,$$

откуда $\lambda = 0$, $\mu = k$. Итак,

$$d = \sigma t + kb \tag{5}$$

(рис. 64).

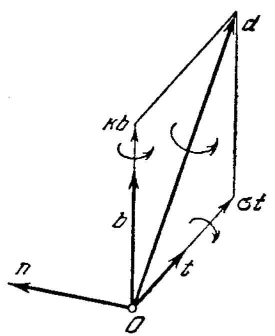


Рис. 64.

Функция $\sigma = \sigma(s)$ называется кручением кривой S. Подставив выражение (5) в равенство (3), получим

$$u'_s = \sigma[t \times u] + k[b \times u]. \tag{6}$$

Формула (6) показывает, что мгновенное вращение триэдра Френе раскладывается на сумму двух вращательных движений — вокруг касательной и вокруг бинормали. Первая из этих компонент вращения имеет угловую скорость, равную кручению кривой, а вторая — угловую скорость, равную кривизне кривой. Угловая скорость суммарного вращения триэдра равна $|d| = \sqrt{k^2 + \sigma^2}$.

3. Подставляя в формулу (6) вместо u векторы n и b, найдем разложения их производных по базису t, n, b. Вместе с соотношением (2) эти разложения образуют так называемые формулы Френе

$$\left.\begin{aligned} t'_s &= \quad kn, \\ n'_s &= -kt \quad + \sigma b, \\ b'_s &= \quad -\sigma n, \end{aligned}\right\}$$

имеющие важное значение в теории кривых.

§ 11. Разложение произвольного линейного преобразования в произведение самосопряженного и изометричного преобразований

1. Цель этого параграфа — любое линейное преобразование в евклидовом пространстве представить в виде суперпозиции самосопряженного преобразования и изометричного преобразования.

2. Определение. Самосопряженное преобразование A называется *неотрицательным*, если $(Ax, x) \geqslant 0$ при любом x.

Лемма 1. *Если самосопряженное преобразование неотрицательно, то все корни его характеристического многочлена неотрицательны.*

Замечание. То, что преобразование самосопряженное, здесь очень существенно: в этом случае мы заведомо знаем, что все характеристические корни действительны.

Доказательство леммы 1. Пусть λ — характеристический корень, x — соответствующий ему собственный вектор. Тогда $Ax = \lambda x$ и

$$(Ax, x) = \lambda (x, x) = \lambda \| x \|^2 \geqslant 0,$$

так как $(Ax, x) \geqslant 0$. Отсюда $\lambda \geqslant 0$.

Лемма 2. *Если A — неотрицательное самосопряженное преобразование, то найдется неотрицательное самосопряженное преобразование B такое, что $A = BB$.*

Замечание. Преобразование B называют квадратным корнем из преобразования A.

Доказательство леммы 2. Вследствие самосопряженности преобразования A найдется ортонормированный базис, в котором матрица A имеет диагональный вид:

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{Vmatrix}.$$

По лемме 1 все $\lambda_i \geqslant 0$, поэтому $\sqrt{\lambda_i}$ — действительные неотрицательные числа.

В том же базисе определим преобразование B матрицей

$$B = \begin{Vmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{Vmatrix}.$$

Базис ортонормированный, матрица B диагональная, поэтому преобразование B самосопряженное ($\overset{*}{B} = B$). Из формулы для B ясно, что для матриц имеем соотношение $BB = A$, поэтому такое же соотношение справедливо и для преобразований. Запишем $y = Bx$ в координатах:

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{\lambda_1}\, x_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = \qquad\qquad \sqrt{\lambda_n}\, x_n. \end{cases}$$

Отсюда

$$(Bx, x) = (y, x) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n =$$
$$= \sqrt{\lambda_1}\, x_1^2 + \ldots + \sqrt{\lambda_n}\, x_n^2 \geqslant 0,$$

так что преобразование Bx неотрицательно. Лемма 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим скалярное произведение (Ax, x). Если эта квадратичная форма положительно определенная, то преобразование A называется положительно определенным или положительным. В этом случае A невырожденно, и все его характеристические корни положительны. Из доказательства леммы 2 видно, что квадратный корень из положительного преобразования также является положительным преобразованием.

3. В этом параграфе для обозначения сопряженного преобразования мы будем ставить звездочку не сверху, а сбоку, как при обозначении транспонирования матрицы, то есть обозначать символом A^* преобразование, сопряженное A. Такая символика будет удобнее для выкладок, но при этом нужно помнить, что если той же буквой A обозначена матрица преобразования A, то транспонированная матрица A^* будет матрицей сопряженного преобразования A^*, вообще говоря, лишь в ортонормированном базисе.

Ниже нам понадобятся тождества, справедливые как для матриц, так и для преобразований:

1) $(AB)^* = B^*A^*$,
2) $(A^*)^* = A$,
3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
4) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Сначала нужно проверить справедливость этих формул для матриц (см. §§ 2, 3 гл. II), а затем рассмотреть преобразования в ортонормированном базисе. В таком базисе перечисленные формулы для преобразований сразу следуют из матричных равенств.

4. Теорема. *В n-мерном евклидовом пространстве E_n для любого невырожденного линейного преобразования A существует самосопряженное преобразование B и изометричное преобразование I такие, что*

$$A = IB. \tag{1}$$

Замечание. Аналогично существуют самосопряженное преобразование B_1 и изометричное I_1 такие, что $A = B_1 I_1$.

Доказательство теоремы. Рассмотрим преобразование A^*A. Оно является самосопряженным:

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A.$$

Оно является невырожденным, так как A по условию невырожденное. Кроме того, преобразование A^*A является положительно определенным:

$$(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) = \| Ax \|^2 > 0,$$

если $x \neq \theta$. По лемме 2 можно извлечь квадратный корень из преобразования A^*A:

$$\sqrt{A^*A} = B, \qquad A^*A = BB,$$

где B — положительно определенное самосопряженное преобразование. Поэтому

$$A = (A^*)^{-1}BB.$$

Положив

$$I = (A^*)^{-1}B,$$

получаем для A следующее представление:

$$A = IB.$$

Остается доказать, что I — изометричное преобразование. Для этого вычислим I^*, используя самосопряженность B:

$$I^* = B^*((A^*)^{-1})^* = BA^{-1}.$$

Далее имеем

$$I^*I = BA^{-1}(A^*)^{-1}B = B(A^*A)^{-1}B.$$

По построению преобразования B

$$(A^*A)^{-1} = (BB)^{-1} = B^{-1}B^{-1},$$

так что

$$I^*I = BB^{-1}B^{-1}B = E,$$

откуда и вытекает изометричность преобразования I. Теорема доказана.

5. Самосопряженное преобразование B в разложении (1) будем называть существенной частью преобразования A.

§ 12. Приложения к теории упругости. Тензор деформаций и тензор напряжений

1. Рассмотрим сплошную упругую среду. Зафиксируем в ней точку O и выделим некоторый объем, содержащий эту точку. Предположим, что в отсутствие внешних сил этот объем представляет собой шар U с центром O, а под воздействием внешних сил он деформируется и смещается. Однако, отвлекаясь от параллельного перемещения в пространстве, мы можем считать, что точка O остается неподвижной. Произвольная точка M в шаре U характеризуется вектором $x = \overline{OM}$. Пусть в результате деформации точка M переходит в положение M'. Положим $\overline{OM'} = y$. Эксперименты показывают, что

$$y = Cx + r(x), \tag{1}$$

где C — линейное невырожденное преобразование с положительным определителем, а вектор $r = r(x)$ при малом x представляет собой бесконечно малую высшего порядка, то есть

$$\lim_{|x| \to 0} \frac{|r(x)|}{|x|} = 0. \tag{2}$$

Если шар U мал, то вектором r можно пренебречь, и тогда вместо преобразования (1) можно рассматривать линейное преобразование

$$y = Cx. \tag{3}$$

Замечание. Если соблюдается условие (2), то линейное преобразование (3) называется *дифференциалом* нелинейного преобразования (1).

Линейное преобразование C при данной деформации упругой среды зависит, вообще говоря, от выбора точки O.

2. По теореме, доказанной в предыдущем параграфе, линейное преобразование C можно разложить на два сомножителя:

$$C = I\tilde{C},$$

где $\tilde{C}$ — самосопряженное преобразование (существенная часть C), I — изометричное преобразование, причем $\operatorname{Det} I = +1$.

Преобразование $\tilde{C}$ характеризует деформацию упругой среды вблизи точки O. Оно представляет собой сжатие по

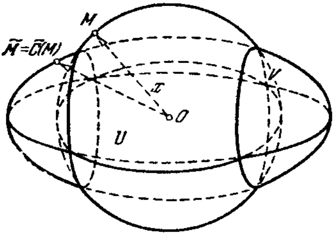


Рис. 65.

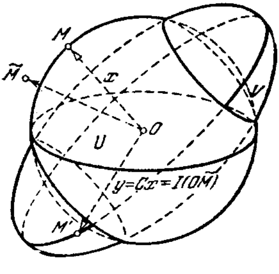


Рис. 66.

трем взаимно перпендикулярным направлениям и потому переводит шар U в некоторый эллипсоид V (рис. 65).

Преобразование I характеризует поворот эллипсоида V как твердого тела вокруг точки O (рис. 66).

В большинстве реально встречающихся случаев эллипсоид V мало отличается от шара U. Так, например, в металлах при нагрузках, не выводящих за пределы упругих деформаций, полуоси эллипсоида V отличаются от радиуса шара U обычно только на доли процента. Поэтому преобразование $\tilde{C}$ близко к единичному преобразованию E, и его представляют в виде суммы

$$\tilde{C} = E + B.$$

Здесь B (как нетрудно доказать) — тоже самосопряженное преобразование.

Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис. Запишем в нем матрицу $B = \| b_{ij} \|$.

Дважды ковариантный тензор b_{ij} называется тензором деформаций.

Величина $\theta = \sum_{i=1}^{3} b_{ii}$ (след оператора B) называется коэффициентом изменения объема. Это название связано с тем,

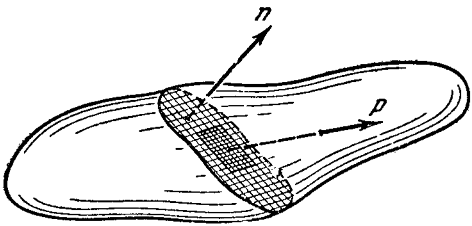


Рис. 67.

что собственные значения оператора B малы и отношение объема эллипсоида V к объему шара U приближенно равно $1 + \theta$ (с точностью до величины порядка квадрата собственных значений оператора B).

3. При деформации упругого тела в нем возникают напряжения. Проведем через точку O плоскость, ориентированную единичной нормалью n, и рассмотрим малые части упругой среды, примыкающие к этой плоскости вблизи точки O. Фактическое взаимодействие этих частей заменим приложенными к ним силами.

Сила воздействия одной части упругого тела на другую, отнесенная к единице площади сечения, называется напряжением в данной точке O при данной ориентации n и обозначается p (рис. 67). Зависимость напряжения p от направления n в данной точке O с высокой точностью выражается формулой вида

$$p = F(n),$$

где $F=\|f_{ij}\|$ — некоторое линейное преобразование, зависящее, вообще говоря, от выбора точки O.

Тензор f_{ij} называется тензором напряжений.

4. Если упругое тело однородно и изотропно, то есть имеет одинаковые механические свойства во всех точках и по всем направлениям, а деформации достаточно малы, то связь между тензором деформаций и тензором напряжений дается законом Гука

$$F=\lambda\theta E+2\mu B$$

или в координатах

$$f_{ik}=\lambda\theta\delta_{ik}+2\mu b_{ik}.$$

Здесь λ и μ — константы, характеризующие механические свойства упругой среды, θ — коэффициент изменения объема (см. выше, п. 2).

ГЛАВА X. ПОЛИВЕКТОРЫ И ВНЕШНИЕ ФОРМЫ

§ 1. Альтернация

1. Пусть $a, b, c, \ldots$ — произвольные векторы данного линейного пространства L. Мы будем рассматривать произведения векторов из L, понимая эти произведения как контравариантные тензоры, то есть как элементы линейных пространств T_0^2, T_0^3 и т. д.; само L при этом есть T_0^1 (см. главу V). Таким образом, например, $a \in T_0^1$, $ab \in T_0^2$, $abc \in T_0^3$ и т. д.

Назовем альтернацией произведения векторов действие, которое, будучи обозначено квадратной скобкой, определяется следующими равенствами:

$$[a] = a,$$

$$[ab] = \frac{1}{2!}(ab - ba),$$

$$[abc] = \frac{1}{3!}(abc + bca + cab - bac - acb - cba).$$

Для любого числа произвольных векторов $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_m \in L$ полагаем

$$[a_1 a_2 \ldots a_m] = \frac{1}{m!}\left(\sum_1 a_1 a_2 \ldots a_m - \sum_2 a_1 a_2 \ldots a_m\right),$$

где $\sum\limits_1$ означает сумму всех произведений, которые получаются из произведения $a_1 a_2 \ldots a_m$ при четных перестановках индексов $1, 2, \ldots, m$; $\sum\limits_2$ имеет аналогичный смысл соответственно нечетным перестановкам. Иначе можно написать

$$[a_1 a_2 \ldots a_m] = \frac{1}{m!}\sum \delta^{j_1 j_2 \ldots j_m}_{1\, 2 \ldots m} a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_m}, \qquad (1)$$

где сумма справа берется по всем индексам $j_1, j_2, \ldots, j_m$, каждый из которых независимо от остальных пробегает все значения от 1 до m; $\delta^{j_1 j_2 \ldots j_m}_{1\, 2 \ldots m} = +1$, если $j_1\, j_2 \ldots j_m$ есть четная перестановка набора чисел $1, 2, \ldots, m$; $\delta^{j_1 j_2 \ldots j_m}_{1\,2\,\ldots\,m} = -1$, если $j_1 j_2 \ldots j_m$ есть нечетная перестановка набора $1, 2, \ldots, m$; $\delta^{j_1 j_2 \ldots j_m}_{1\,2\,\ldots\,m} = 0$, если среди значений $j_1, j_2, \ldots, j_m$ имеется пара одинаковых.

2. Альтернация произведений векторов обладает следующими свойствами:

1) Линейность по любому сомножителю; например (по первому сомножителю),

$$[(\alpha a_1' + \beta a_1'') a_2 \ldots a_m] = \alpha [a_1' a_2 \ldots a_m] + \beta [a_1'' a_2 \ldots a_m].$$

2) Косая симметрия по любой паре сомножителей; например (по первой паре),

$$[a_1 a_2 a_3 \ldots a_m] = -[a_2 a_1 a_3 \ldots a_m].$$

Эти свойства легко усматриваются из определения альтернации; доказывать их мы не будем.

3. Если среди векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ имеется пара одинаковых, то $[a_1 a_2 \ldots a_m] = 0$; символом 0 здесь обозначен нулевой тензор пространства T^m_0. Утверждение ясно, так как при обмене местами одинаковых векторов альтернация $[a_1 a_2 \ldots a_m]$ не меняется, но в то же время меняет знак.

4. Если векторы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ линейно зависимы, то $[a_1 a_2 \ldots a_m] = 0$. В самом деле, предполагая для простоты, что $a_1, \ldots, a_k$ является максимальной независимой подсистемой системы векторов $a_1, \ldots, a_m$, имеем $a_{k+1} = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k$. Но отсюда по свойству линейности и вследствие п. 3 получаем

$$[a_1 \ldots a_m] = \alpha_1 [a_1 \ldots a_k a_1 \ldots a_m] + \ldots + \alpha_k [a_1 \ldots a_k a_k \ldots a_m] = \\ = \alpha_1 \cdot 0 + \ldots + \alpha_k \cdot 0 = 0.$$

5. Будем далее предполагать, что данное пространство L является n-мерным.

6. Тогда, если $m > n$, то $[a_1 a_2 \ldots a_m] = 0$ (утверждение непосредственно следует из п. 4).

7. Пусть x — произвольный тензор из T^k_0. Согласно определению T^k_0 тензор x представляет собой сумму произведений некоторых векторов пространства L, содержащую k векторных сомножителей в каждом своем слагаемом. Напишем соответственно

$$x = a_1^{(1)} a_2^{(1)} \ldots a_k^{(1)} + \ldots + a_1^{(N)} a_2^{(N)} \ldots a_k^{(N)}, \tag{2}$$

где $a_i^{(j)} \in L$. Назовем альтернацией тензора x ($x \in T_0^k$) тензор той же валентности, который, будучи обозначен через $[x]$ ($[x] \in T_0^k$), определяется равенством

$$[x] = [a_1^{(1)} a_2^{(1)} \ldots a_k^{(1)}] + \ldots + [a_1^{(N)} a_2^{(N)} \ldots a_k^{(N)}]. \tag{3}$$

8. Альтернация тензора не зависит от способа записи в виде (2). Иначе говоря, если $x' = x$, то $[x'] = [x]$. В самом деле, пусть

$$x' = b_1^{(1)} b_2^{(1)} \ldots b_k^{(1)} + \ldots + b_1^{(M)} b_2^{(M)} \ldots b_k^{(M)}; \tag{4}$$

тогда по нашему определению

$$[x'] = [b_1^{(1)} b_2^{(1)} \ldots b_k^{(1)}] + \ldots + [b_1^{(M)} b_2^{(M)} \ldots b_k^{(M)}]. \tag{5}$$

Допустим, что $x' = x$. Это означает, что сумма (2) сводится к сумме (4) с помощью допустимых замен (см. гл. V). Но вследствие линейного свойства альтернации, каждой допустимой замене в сумме (2) отвечает точно такая же допустимая замена в сумме (3). Поэтому сумма (3) сведется к сумме (5) с помощью таких же допустимых замен, какие приводят сумму (2) к сумме (4). Таким образом, $[x'] = [x]$.

9. Имеет место тождество

$$[[a_1 a_2 \ldots a_m]] = [a_1 a_2 \ldots a_m], \tag{6}$$

то есть повторная альтернация произведения векторов совпадает с первоначальной.

Убедимся в справедливости тождества (6) сначала в двух простейших случаях $m = 1$ и $m = 2$. Здесь это тождество очевидно:

$$[[a_1]] = [a_1],$$

$$[[a_1 a_2]] = \frac{1}{2!}([a_1 a_2] - [a_2 a_1]) =$$
$$= \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2!}(a_1 a_2 - a_2 a_1) - \frac{1}{2!}(a_2 a_1 - a_1 a_2)\right) =$$
$$= \frac{1}{2!}(a_1 a_2 - a_2 a_1) = [a_1 a_2]$$

В общем случае имеем, согласно (1) и (3),

$$[[a_1 a_2 \ldots a_m]] = \frac{1}{m!} \sum \delta_{1 \; \ldots \; m}^{j_1 \ldots j_m} [a_{j_1} \ldots a_{j_m}]. \tag{7}$$

Но легко видеть, что в сумме, написанной здесь справа, все слагаемые одинаковы и каждое из них равно $[a_1 a_2 \ldots a_m]$.

В самом деле, ввиду косой симметрии по любой паре верхних индексов величины $\delta^{j_1 \dots j_m}_{1 \dots m}$ и ввиду косой симметрии по любой паре индексов альтернации $[a_{j_1} \dots a_{j_m}]$ мы можем в каждом слагаемом суммы (7) обменять местами любую пару индексов в наборе $j_1 \dots j_m$; слагаемое при этом не изменится. Значит, во всех слагаемых, не меняя их, можно привести индексы к натуральному расположению. Так как $\delta^{1\,2 \dots m}_{1\,2 \dots m} = 1$, то каждое слагаемое сведется к $[a_1 a_2 \dots a_m]$. Поскольку число всех слагаемых в сумме (7) равно $m!$, то из (7) вытекает (6).

З а м е ч а н и е. Теперь ясно, почему при определении альтернации выгодно брать не просто алгебраическую сумму произведений векторов, а эту сумму, деленную на $m!$.

10. Вследствие тождества (6) имеем для любого тензора $x \in T^k_0$

$$[[x]] = [x].$$

11. Если $k > n$, то для любого $x \in T^k_0$ имеем $[x] = 0$ (см. п. 6).

12. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис в L. Тогда, как мы знаем, всевозможные произведения $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}$ составляют базис в T^k_0 и для любого тензора $x \in T^k_0$ имеет место разложение

$$x = \sum x^{i_1 i_2 \dots i_k} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}.$$

Отсюда получаем выражение альтернации тензора x в данном (произвольном) базисе

$$[x] = \sum x^{i_1 i_2 \dots i_k} [e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}]. \tag{8}$$

13. Мы будем дальше употреблять символ $\delta^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}$, понимая его следующим образом. Будем считать, что индексы $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k$ принимают любые значения из набора $1, 2, \dots, n$ (где n — размерность пространства L); число всех нижних индексов (или верхних), то есть число k может быть любым. Если все численные значения $i_1, \dots, i_k$ различны, то $\delta^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k} = +1$ в том случае, когда $j_1 \dots j_k$ есть четная перестановка набора чисел $i_1, \dots, i_k$; $\delta^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k} = -1$, если $j_1 \dots j_k$ есть нечетная перестановка набора $i_1, \dots, i_k$; во всех остальных случаях $\delta_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k}=0$. Таким образом, $\delta_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k}=0$, если среди численных значений $i_1, \ldots, i_k$ (или $j_1, \ldots, j_k$) имеется пара одинаковых или если среди численных значений $j_1, \ldots, j_k$ есть такое, какого нет среди $i_1, \ldots, i_k$ (и наоборот). В частности, $\delta_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k}=0$ в случае $k>n$.

Согласно высказанному определению множество чисел $\delta_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k}$ обладает косой симметрией как по верхним, так и по нижним индексам. Иначе говоря, при обмене местами двух верхних индексов или двух нижних индексов $\delta_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k}$ меняет знак.

14. Легко убедиться, что из формулы (1) следует равенство

$$[e_{i_1} \ldots e_{i_k}]=\frac{1}{k!}\sum \delta_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k} e_{j_1} \ldots e_{j_k}, \tag{9}$$

где индексы $i_1, \ldots, i_k$ фиксированы, а сумма справа берется по всем значениям индексов $j_1, \ldots, j_k$ из набора $1, 2, \ldots, n$. Тем самым правая часть (9) есть разложение тензора $[e_{i_1} \ldots e_{i_k}]$ по базису в пространстве T_0^k; числа $\frac{1}{k!}\delta_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k}$ (при фиксированных $i_1, \ldots, i_k$) являются координатами этого тензора.

15. Перепишем формулу (8) с помощью формулы (9):

$$[x]=\sum\left(\frac{1}{k!}\sum \delta_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k} x^{i_1 \ldots i_k}\right) e_{j_1} \ldots e_{j_k}.$$

Введем обозначение

$$x^{[j_1 \ldots j_k]}=\frac{1}{k!}\sum \delta_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k} x^{i_1 \ldots i_k}. \tag{10}$$

Иначе говоря, мы полагаем

$$x^{[i]}=x^i,$$
$$x^{[ij]}=\frac{1}{2!}(x^{ij}-x^{ji}),$$
$$x^{[ijk]}=\frac{1}{3!}(x^{ijk}+x^{jki}+x^{kij}-x^{jik}-x^{ikj}-x^{kji}) \text{ и т. д.}$$

Согласно (10) получаем

$$[x]=\sum x^{[j_1 \ldots j_k]} e_{j_1} \ldots e_{j_k}. \tag{11}$$

Операция, которая определена равенством (10), называется альтернацией координат тензора x; ее называют также альтернацией индексов $j_1, \ldots, j_k$. С ней мы уже встречались в гл. V.

Сравнивая (8) и (11), мы видим, что для получения альтернации тензора x можно поступить любым из двух способов:

1) либо в разложении тензора x заменить все произведения базисных векторов $e_{i_1} \ldots e_{i_k}$ их альтернациями $[e_{i_1} \ldots e_{i_k}]$, оставив прежние коэффициенты $x^{i_1 \ldots i_k}$;

2) либо коэффициенты $x^{i_1 \ldots i_k}$ заменить соответствующими альтернациями $x^{[i_1 \ldots i_k]}$, оставив без изменений произведения базисных векторов $e_{i_1} \ldots e_{i_k}$. Равносильность этих двух операций мы покажем ради наглядности еще раз в частном случае $k=2$. Если $x=\sum x^{ij}e_ie_j$, то

$$[x]=\sum x^{ij}[e_ie_j]=\sum x^{ij}\frac{1}{2!}(e_ie_j-e_je_i)=$$
$$=\frac{1}{2!}\sum x^{ij}e_ie_j-\frac{1}{2!}\sum x^{ij}e_je_i=$$
$$=\frac{1}{2!}\sum x^{ij}e_ie_j-\frac{1}{2!}\sum x^{ji}e_ie_j=\sum x^{[ij]}e_ie_j.$$

16. Равенство (11) является разложением тензора $[x]$ по базису в T_0^k. Следовательно, альтернации $x^{[j_1 \ldots j_k]}$ координат тензора x суть координаты его альтернации $[x]$.

17. Из (10) следует, что альтернации $x^{[j_1 \ldots j_k]}$ координат произвольного тензора $x \in T_0^k$ обладают косой симметрией по любой паре индексов.

18. Определение. Тензор x ($x \in T_0^k$) назовем *косым*, если $[x]=x$.

Из этого определения и из п. 16 следует, что для координат косого тензора имеют место равенства

$$x^{j_1 \ldots j_k}=x^{[j_1 \ldots j_k]}. \tag{12}$$

Таким образом, координаты косого тензора обладают косой симметрией по любой паре индексов. Обратно, если координаты $x^{i_1 \ldots i_k}$ какого-нибудь тензора $x \in T_0^k$ обладают косой симметрией, то из (10) получим (12) (точно такими же рассуждениями, какими было доказано тождество (6) в п. 9); отсюда $[x]=x$.

Таким образом, определение косого тензора x посредством условия $[x]=x$ равносильно определению по свойству косой симметрии его координат (см. гл. V, § 8).

Замечание. Так как для любого тензора x из T_0^1 имеет место равенство $[x]=x$, то все одновалентные тензоры следует относить к числу косых.

§ 2. Поливекторы. Внешнее произведение

1. Рассмотрим множество $\mathcal{G}$, элементами которого являются все контравариантные косые тензоры всевозможных валентностей (в том числе одновалентные), заданные над n-мерным линейным пространством L.

Определение. Внешним (или альтернированным) произведением косых тензоров x, y, $x \in T_0^k$, $y \in T_0^l$, называют тензор пространства T_0^{k+l}, который обозначается символом $x \wedge y$ и выражается формулой

$$x \wedge y = \frac{(k+l)!}{k!\,l!}[xy]. \tag{1}$$

Квадратными скобками обозначена альтернация обычного произведения тензоров xy.

В частном случае двух произвольных контравариантных векторов x, $y \in L$ имеем

$$x \wedge y = xy - yx.$$

2. Альтернация всегда дает косой тензор, поэтому внешнее умножение не выводит из множества $\mathcal{G}$. Нетрудно проверить, что совокупность косых тензоров данной валентности m образует подпространство в T_0^m, которое мы обозначим G^m; таким образом, сложение тензоров и умножение их на числа также не выводят за пределы множества $\mathcal{G}$.

Ненулевые тензоры, входящие в $\mathcal{G}$, считаются равными элементами этого множества тогда и только тогда, когда они принадлежат одному пространству T_0^m и равны как элементы T_0^m. Кроме того, в $\mathcal{G}$ входят нулевые элементы пространств T_0^m при всех натуральных m. Нулевые тензоры всех валентностей считаются равными элементами множества $\mathcal{G}$; будем обозначать их символом 0.

Очевидно, что

$$x \wedge 0 = 0$$

для любого $x \in \mathscr{G}$. Согласно п. 6 § 1 имеем $x \wedge y = 0$, если $x \in T_0^k$, $y \in T_0^l$, $k + l > n$.

3. Множество $\mathscr{G}$ с указанным выше равенством элементов и определенными в нем операциями внешнего умножения, умножения на число, а также сложения тензоров одинаковых валентностей будем называть алгеброй Грассмана над пространством L[1]).

Контравариантные k-валентные косые тензоры, рассматриваемые как элементы алгебры Грассмана, называются контравариантными k-векторами или контравариантными поливекторами. Число k называют порядком поливектора. Элемент 0 называется нулевым поливектором. Порядку нулевого поливектора можно приписать любое натуральное значение. Все поливекторы порядка $k > n$ равны нулевому. Таким образом, все ненулевые поливекторы принадлежат пространствам T_0^1, T_0^2, ..., T_0^n.

4. Простейшие свойства внешнего умножения.

1) $(\alpha x) \wedge y = x \wedge (\alpha y) = \alpha (x \wedge y)$ для любого числа α и любых x, $y \in \mathscr{G}$, поскольку числовой множитель можно выносить как за знак обычного умножения тензоров, так и за знак альтернации.

---

[1]) Высказанное здесь определение алгебры Грассмана недостаточно. Дело в том, что в множествах, называемых алгебрами, операция сложения определена для любых элементов. Поэтому в рассматриваемом множестве $\mathscr{G}$, помимо указанных нами операций, следовало бы определить сложение тензоров разных валентностей. Это делается путем построения формальных сумм элементов из разных пространств T_0^m. Кроме того, в $\mathscr{G}$ обычно включают тензоры нулевой валентности, то есть скаляры (инварианты). В результате $\mathscr{G}$ становится линейным пространством размерности 2^n, изоморфным прямой сумме подпространств G^m:

$$\mathscr{G} = G^0 \oplus G^1 \oplus \ldots \oplus G^n,$$

где через G^0 обозначена совокупность тензоров нулевой валентности. Мы не проводим подробно эту конструкцию, поскольку нам не придется пользоваться сложением тензоров разных валентностей. Отметим еще, что множество $\mathscr{G}$ часто называют алгеброй Грассмана над пространством L^*, сопряженным данному пространству L, в связи с тем, что элементы множества $\mathscr{G}$ можно отождествить с полилинейными формами, аргументами которых являются векторы пространства L^*. Общее определение алгебры Грассмана читатель может найти в книге: Р. Бишоп и Р. Криттенден, Геометрия многообразий, «Мир», 1967.

2) $(x+y)\wedge z = x\wedge z + y\wedge z$, так как и обычное умножение и альтернация произведения тензоров распределительны относительно сложения.

3) Внешнее умножение кососоммутативно. Именно

$$x\wedge y = (-1)^{kl} y\wedge x, \tag{2}$$

если $x\in T_0^k$, $y\in T_0^l$.

Доказательство. В координатной записи имеем

$$x = \sum x^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \dots e_{i_k},$$
$$y = \sum y^{j_1 \dots j_l} e_{j_1} \dots e_{j_l},$$

откуда

$$x\wedge y = \frac{(k+l)!}{k!\,l!} \sum x^{i_1 \dots i_k} y^{j_1 \dots j_l} [e_{i_1} \dots e_{i_k} e_{j_1} \dots e_{j_l}]. \tag{3}$$

Аналогично

$$y\wedge x = \frac{(k+l)!}{k!\,l!} \sum x^{i_1 \dots i_k} y^{j_1 \dots j_l} [e_{j_1} \dots e_{j_l} e_{i_1} \dots e_{i_k}]. \tag{4}$$

Здесь $e_1, \dots, e_n$ — базис в L, индексы $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l$ меняются от 1 до n независимо друг от друга, суммирование ведется по всем этим индексам, квадратные скобки, как и выше, обозначают альтернацию. Для того чтобы перевести перестановку индексов $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ в перестановку $(j_1, \dots, j_l, i_1, \dots, i_k)$, нужно совершить kl транспозиций соседних индексов. Поэтому и в силу определения альтернации каждое слагаемое суммы (4) отличается от соответствующего слагаемого суммы (3) множителем $(-1)^{kl}$, откуда следует (2).

Следствие. *Если x — поливектор нечетного порядка, то $x\wedge x = 0$.*

4) Внешнее произведение ассоциативно, т. е. для любых поливекторов $x, y, z \in \mathfrak{G}$:

$$(x\wedge y)\wedge z = x\wedge (y\wedge z).$$

Для доказательства этого тождества нам придется сделать ряд предварительных заключений.

5. Рассмотрим два произвольных набора базисных векторов: $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ и $e_{j_1}, \dots, e_{j_l}$. Возьмем их альтернации; мы получаем два поливектора

$$[e_{i_1} \ldots e_{i_k}] = \frac{1}{k!} \sum \delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{i_1 \ldots i_k} e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_k},$$

$$[e_{j_1} \ldots e_{j_l}] = \frac{1}{l!} \sum \delta^{\beta_1 \ldots \beta_l}_{j_1 \ldots j_l} e_{\beta_1} \ldots e_{\beta_l}.$$

Перемножим их согласно обычному правилу перемножения тензоров и проальтернируем полученное произведение:

$$[[e_{i_1} \ldots e_{i_k}]\,[e_{j_1} \ldots e_{j_l}]] = \\ = \frac{1}{k!\,l!} \sum \delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{i_1 \ldots i_k} \delta^{\beta_1 \ldots \beta_l}_{j_1 \ldots j_l} [e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_k} e_{\beta_1} \ldots e_{\beta_l}]. \qquad (5)$$

Допустим сначала, что среди индексов $i_1, \ldots, i_k$, а также среди индексов $j_1, \ldots, j_l$ нет одинаковых. Тогда в сумме (5) достаточно рассмотреть лишь те слагаемые, где $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ есть перестановка набора индексов $i_1, \ldots, i_k$, а $\beta_1 \ldots \beta_l$ есть перестановка $j_1, \ldots, j_l$ (остальные слагаемые равны нулю). Но очевидно, что все такие слагаемые одинаковы, причем для любого из них имеем

$$\delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{i_1 \ldots i_k} \delta^{\beta_1 \ldots \beta_l}_{j_1 \ldots j_l} [e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_k} e_{\beta_1} \ldots e_{\beta_l}] = \\ = \delta^{i_1 \ldots i_k}_{i_1 \ldots i_k} \delta^{j_1 \ldots j_l}_{j_1 \ldots j_l} [e_{i_1} \ldots e_{i_k} e_{j_1} \ldots e_{j_l}] = \\ = [e_{i_1} \ldots e_{i_k} e_{j_1} \ldots e_{j_l}].$$

Очевидно также, что общее число этих слагаемых равно $k!\,l!$. Следовательно,

$$[[e_{i_1} \ldots e_{i_k}][e_{j_1} \ldots e_{j_l}]] = [e_{i_1} \ldots e_{i_k} e_{j_1} \ldots e_{j_l}]. \qquad (6)$$

Теперь ясно, что равенство (6) справедливо вообще, так как при наличии одинаковых индексов среди $i_1, \ldots, i_k$ или среди $j_1, \ldots, j_l$ обе его части равны нулевому поливектору.

6. Из (6) сразу следует свойство ассоциативности для внешнего произведения базисных векторов. Именно, мы имеем

$$e_i \wedge e_j = 2!\,[e_i e_j].$$

Далее,

$$(e_i \wedge e_j) \wedge e_k = \frac{3!}{2!\,1!} [e_i \wedge e_j,\ e_k] = 3!\,[[e_i e_j]\,e_k] = \\ = 3!\,[e_i e_j e_k].$$

Аналогично

$$e_i \wedge (e_j \wedge e_k) = 3!\,[e_i\,[e_j e_k]] = 3!\,[e_i e_j e_k].$$

Таким образом, $(e_i \wedge e_j) \wedge e_k = e_i \wedge (e_j \wedge e_k)$. Тем самым определяется $e_i \wedge e_j \wedge e_k = (e_i \wedge e_j) \wedge e_k = e_i \wedge (e_j \wedge e_k)$. Отсюда и по индукции (с использованием (6)) получаем

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_m} = m!\,[e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_m}]. \tag{7}$$

Написанное здесь слева внешнее произведение многих базисных векторов может быть определено, как обычно в таких случаях, путем любого последовательного сочетания сомножителей. Из (6), (7) и (1) следует также, что

$$(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}) \wedge (e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \ldots \wedge e_{j_l}) = \\ = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \wedge e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \ldots \wedge e_{j_l}. \tag{8}$$

7. Пусть x — произвольный поливектор из T_0^k:

$$x = \sum x^{i_1 \ldots i_k} e_{i_1} \ldots e_{i_k}. \tag{9}$$

Согласно определению поливектора мы имеем $x = [x]$ и, следовательно, можем написать

$$x = \sum x^{i_1 \ldots i_k} [e_{i_1} \ldots e_{i_k}].$$

Отсюда и вследствие (7)

$$x = \frac{1}{k!} \sum x^{i_1 \ldots i_k} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}. \tag{10}$$

Здесь суммирование идет по всем индексам, и каждый из них, независимо от других, принимает значения $1, 2, \ldots, n$. Те слагаемые этой суммы, где имеется хотя бы одна пара одинаковых индексов, равны нулю. Рассмотрим все слагаемые, отвечающие всевозможным перестановкам какого-нибудь одного набора различных индексов. Таких слагаемых для данного набора индексов имеется $k!$, и все они равны друг другу. Поэтому вместо (10) можно написать

$$x = {}^*\!\sum x^{i_1 \ldots i_k} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}, \tag{11}$$

где сигма со звездочкой впереди есть знак суммирования по всем наборам индексов $i_1, \ldots, i_k$ при условии $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

8. Как мы знаем, все поливекторы данного порядка k образуют в пространстве T_0^k подпространство, обозначенное выше через G_k. Из выражения (11) вытекает важный вывод: внешние произведения $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ базисных векторов пространства L, отвечающие всевозможным наборам индексов $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, составляют базис в подпространстве G_k.

В самом деле, согласно (11) каждый поливектор $x \in G_k$ разлагается по внешним произведениям $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ $(i_1 < \ldots < i_k)$. С другой стороны, легко убедиться, что эти внешние произведения линейно независимы в G_k. Именно, допустим, что существуют числа $x^{i_1 \ldots i_k}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, для которых формула (11) дает $x = 0$. Определим $x^{i_1 \ldots i_k}$ для любых порядков расположения индексов $i_1, \ldots, i_k$ по условию косой симметрии; иначе говоря, мы положим $x^{2\,1\,3 \ldots k} = -x^{1\,2\,3 \ldots k}$ и т. д. Тогда вместо разложения (11) можно написать эквивалентное ему разложение (9), где суммирование идет по всем индексам, а коэффициенты $x^{i_1 \ldots i_k}$ являются координатами тензора x. Мы имеем $x = 0$; следовательно, $x^{i_1 \ldots i_k} = 0$ как координаты нулевого тензора. Тем самым линейная независимость внешних произведений

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \qquad (i_1 < i_2 < \ldots < i_k)$$

доказана.

9. Следствие. *Размерность подпространства* G_k *равна* C_n^k.

В самом деле, число всех внешних произведений $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, равно числу сочетаний из n элементов по k, что и есть C_n^k.

10. Вернемся к вопросу об ассоциативном свойстве внешнего произведения любых поливекторов. Доказательство этого свойства вытекает из тождества (8). Чтобы упростить запись доказательства, введем обозначение

$$e_{i_1 \ldots i_k} = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}.$$

Тогда тождество (8) примет вид

$$e_{i_1 \ldots i_k} \wedge e_{j_1 \ldots j_l} = e_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l}. \tag{12}$$

Рассмотрим любые поливекторы $x \in T_0^k$, $y \in T_0^l$. Мы можем написать их в виде

$$x = {}^*\sum x^{i_1 \ldots i_k} e_{i_1 \ldots i_k}, \qquad y = {}^*\sum y^{j_1 \ldots j_l} e_{j_1 \ldots e_{j_l}}.$$

Отсюда и вследствие (12)

$$x \wedge y = {}^*\sum x^{i_1 \ldots i_k} y^{j_1 \ldots j_l} e_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l}. \tag{13}$$

Здесь сигма со звездочкой впереди есть знак суммирования по всем наборам индексов $i_1, \ldots, i_k$ и $j_1, \ldots, j_l$ при условии

$i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_l$, однако в общем наборе $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l$ эти индексы могут и не быть расположенными в порядке возрастания.

Пусть $z \in T_0^m$ — еще один поливектор:

$$z = *\sum z^{s_1 \ldots s_m} e_{s_1 \ldots s_m}. \tag{14}$$

Из (13) и (14), снова применяя (12), находим

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \wedge z &= *\sum x^{i_1 \ldots i_k} y^{j_1 \ldots j_l} z^{s_1 \ldots s_m} e_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l} \wedge e_{s_1 \ldots s_m} = \\ &= *\sum x^{i_1 \ldots i_k} y^{j_1 \ldots j_l} z^{s_1 \ldots s_m} e_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l s_1 \ldots s_m}. \end{aligned} \tag{15}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}x \wedge (y \wedge z) &= *\sum x^{i_1 \ldots i_k} y^{j_1 \ldots j_l} z^{s_1 \ldots s_m} e_{i_1 \ldots i_k} \wedge e_{j_1 \ldots j_l s_1 \ldots s_m} = \\ &= *\sum x^{i_1 \ldots i_k} y^{j_1 \ldots j_l} z^{s_1 \ldots s_m} e_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l s_1 \ldots s_m}. \end{aligned} \tag{16}$$

В формулах (15) и (16) символ $*\sum$ употребляется в таком же смысле, как в формуле (13). Сравнивая (15) и (16), получаем: $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$, и ассоциативное свойство доказано.

11. Теперь обычным образом определяется внешнее произведение любого числа любых контравариантных поливекторов: $x \wedge y \wedge z \wedge \ldots \wedge w$. Например,

$$\begin{aligned}x \wedge y \wedge z \wedge t &= ((x \wedge y) \wedge z) \wedge t = \\ &= (x \wedge y) \wedge (z \wedge t) = x \wedge (y \wedge (z \wedge t)).\end{aligned}$$

§ 3. Бивекторы

1. Бивектором пространства L называется поливектор второго порядка. Здесь, как и раньше, речь идет о контравариантных поливекторах. Таким образом, говоря сейчас о бивекторах, мы имеем в виду поливекторы из T_0^2.

2. Бивектор p называется простым, если он равен внешнему произведению двух векторов:

$$p = a_1 \wedge a_2, \tag{1}$$

где $a_1, a_2 \in L$. Если a_1, a_2 линейно зависимы, то $p = 0$. Если a_1, a_2 независимы, то $p \neq 0$. В самом деле, в случае независимости векторов a_1, a_2 их можно дополнить до базиса $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Но тогда внешние произведения $a_i \wedge a_j$, $i < j$, составляют базис в подпространстве бивекторов над L

(см. п. 8 § 2). Следовательно, ни одно из этих внешних произведений, в том числе $a_1 \wedge a_2$, не может быть нулевым бивектором.

Таким образом, простой бивектор (1) равен нулю тогда и только тогда, когда векторы a_1, a_2 линейно зависимы.

3. Допустим, что $p \neq 0$ и, следовательно, a_1, a_2 независимы. При этом условии векторы a_1, a_2 определяют в пространстве L двумерное подпространство L_2, представляющее собой их линейную оболочку: $L_2 = L(a_1, a_2)$. Пусть b_1, b_2 — любые два вектора из L_2. Вследствие независимости a_1, a_2 мы имеем

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2, \\ b_2 &= \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где α_{ij} — числовые коэффициенты. Рассмотрим бивектор

$$q = b_1 \wedge b_2. \tag{3}$$

Из (2) и (3) получаем по правилам внешнего умножения

$$q = b_1 \wedge b_2 = (\alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2) \wedge (\alpha_{21}a_1 \wedge \alpha_{22}a_2) =$$
$$= \alpha_{11}\alpha_{22}(a_1 \wedge a_2) + \alpha_{12}\alpha_{21}(a_2 \wedge a_1) = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})(a_1 \wedge a_2).$$

Таким образом,

$$q = Dp, \qquad D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

т. е. бивектор q пропорционален бивектору p, и множитель пропорциональности $D = \operatorname{Det} \| \alpha_{ij} \|$.

Обратно, допустим, что $q = b_1 \wedge b_2 = \lambda p$, где λ — некоторое число ($\lambda \neq 0$). В таком случае $b_1, b_2 \in L_2$, т. е. имеют место равенства (2); при этом $\lambda = D$ из (4).

Докажем это утверждение.

Для доказательства рассмотрим три произвольных вектора c_1, c_2, c_3. Если они зависимы, то

$$c_1 \wedge c_2 \wedge c_3 = 0 \tag{α}$$

(см. п. 4 § 1 и равенство (7) § 2). Если c_1, c_2, c_3 независимы, то $c_1 \wedge c_2 \wedge c_3 \neq 0$. В самом деле, независимые векторы c_1, c_2, c_3 можно дополнить до базиса $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$. Но тогда все внешние произведения вида $c_{i_1} \wedge c_{i_2} \wedge c_{i_3}$, $i_1 < i_2 < i_3$, составят базис в G_3. Следовательно, все они отличны от нуля. Таким образом, равенство (α) необходимо и достаточно для зависимости векторов c_1, c_2, c_3. Пусть теперь

$$b_1 \wedge b_2 = \lambda (a_1 \wedge a_2),$$

где $\lambda \neq 0$, $a_1 \wedge a_2 \neq 0$. Умножим обе части этого равенства внешним образом на b_1. Мы получим слева $b_1 \wedge b_1 \wedge b_2 = 0$; следовательно,

$$b_1 \wedge a_1 \wedge a_2 = 0.$$

Отсюда, согласно сказанному выше о произвольных векторах c_1, c_2, c_3, заключаем, что b_1, a_1, a_2 зависимы. Значит, $b_1 \in L_2 = L(a_1, a_2)$. Аналогично $b_2 \in L_2 = L(a_1, a_2)$. После этого ясно, что $\lambda = D$.

4. Итак, если $a_1 \wedge a_2 \neq 0$, то

$$b_1 \wedge b_2 = \lambda (a_1 \wedge a_2), \qquad \lambda \neq 0, \tag{5}$$

в том и только в том случае, когда b_1, b_2 независимы и b_1, $b_2 \in L_2 = L(a_1, a_2)$. При этом $\lambda = \operatorname{Det} \| \alpha_{ij} \|$, где $\| \alpha_{ij} \|$ есть матрица, составленная из координат векторов b_1, b_2 по базису a_1, a_2.

5. В частности,

$$b_1 \wedge b_2 = a_1 \wedge a_2$$

в том и только в том случае, когда b_1, $b_2 \in L_2 = L(a_1, a_2)$ и

$$\operatorname{Det} \| \alpha_{ij} \| = 1.$$

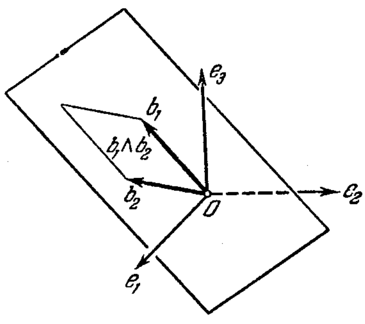


Рис. 68.

6. Подпространство $L_2 = L(a_1, a_2)$ называется подпространством бивектора $a_1 \wedge a_2$. Говорят, что бивектор $a_1 \wedge a_2$ лежит в подпространстве L_2. Говорят также, что $a_1 \wedge a_2$ есть направляющий бивектор этого подпространства (подобно тому как обычный вектор, лежащий на прямой, называют направляющим вектором этой прямой).

7. Предположим, что линейное пространство L снабжено евклидовой метрикой. Ради наглядности будем представлять себе ненулевой бивектор $b_1 \wedge b_2$ в виде ориентированного параллелограмма, построенного на упорядоченной паре векторов b_1, b_2 (рис. 68). Площадь этого параллелограмма будем называть площадью бивектора $b_1 \wedge b_2$. Бивектор, площадь которого равна единице, назовем единичным.

Пусть теперь $a_1 \wedge a_2$ — единичный бивектор. Тогда $\operatorname{Det}\|\alpha_{ij}\| = \pm\sigma$, где σ — площадь бивектора $b_1 \wedge b_2$, и соотношение (5) принимает вид

$$b_1 \wedge b_2 = \pm\sigma(a_1 \wedge a_2). \tag{6}$$

Знаки $\pm$ здесь соответствуют случаям, когда бивектор $b_1 \wedge b_2$ ориентирован в L_2 одинаково с бивектором $a_1 \wedge a_2$ или противоположно ему.

Если считать, что само подпространство L_2 ориентировано упорядоченной парой векторов a_1, a_2, то вместо (6) можно написать

$$b_1 \wedge b_2 = S(a_1 \wedge a_2), \tag{7}$$

где $S = \operatorname{Det}\|\alpha_{ij}\|$ есть ориентированная площадь бивектора $b_1 \wedge b_2$.

8. Итак, простые бивекторы, лежащие в L_2, изображаются в виде ориентированных параллелограммов подпространства L_2. Согласно (6) (или (7)) параллелограммы равной площади и одинаково ориентированные в L_2 изображают один и тот же бивектор (рис. 69).

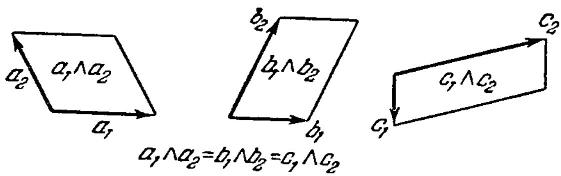


Рис. 69.

9. Считая L евклидовым пространством, возьмем в L ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$. Рассмотрим произвольные векторы $b_1, b_2 \in L$. Имеем

$$b_1 = x_1^1 e_1 + x_1^2 e_2 + \ldots + x_1^n e_n,$$
$$b_2 = x_2^1 e_1 + x_2^2 e_2 + \ldots + x_2^n e_n.$$

Выберем какую-нибудь пару различных базисных векторов e_i, e_j, предполагая $i < j$. Они определяют некоторую двумерную координатную плоскость; обозначим ее через E_{ij} (точнее следовало бы говорить, что E_{ij} есть двумерное подпространство, именно $L(e_i, e_j)$). Будем считать, что плоскость ориентирована бивектором $e_i \wedge e_j$, $i < j$. Назовем проекцией бивектора $b_1 \wedge b_2$ на E_{ij} бивектор

$$(x_1^i e_i + x_1^j e_j) \wedge (x_2^i e_i + x_2^j e_j) = S^{ij} e_i \wedge e_j,$$

где $S^{ij} = x_1^i x_2^j - x_1^j x_2^i$ есть ориентированная площадь параллелограмма, построенного в E_{ij} на векторах $x_1^i e_i + x_1^j e_j$ и

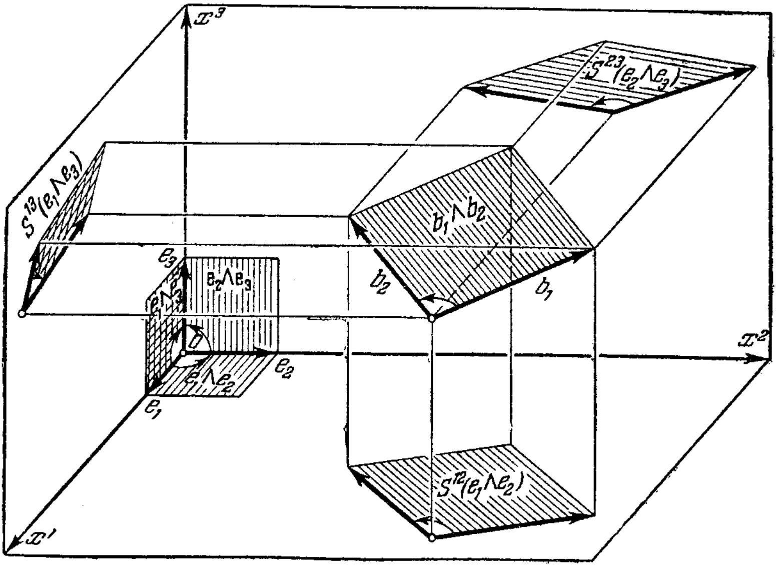


Рис. 70.

$x_2^i e_i + x_2^j e_j$, то есть на проекциях векторов b_1 и b_2. Вместе с тем по правилам внешнего умножения находим

$$b_1 \wedge b_2 = * \sum S^{ij} e_i \wedge e_j, \tag{8}$$

где, как и раньше, звездочка означает суммирование при условии $i < j$.

Из (8) заключаем, что в ортонормированном базисе координатами простого бивектора $b_1 \wedge b_2$ являются ориентированные площади S^{ij} его проекций на двумерные координатные плоскости E_{ij}, $i < j$ (см. рис. 70, где $n = 3$).

10. В трехмерном случае базис состоит из трех векторов e_1, e_2, e_3 и сумма (8) также имеет три слагаемых:

$$b_1 \wedge b_2 = S^{12}(e_1 \wedge e_2) + S^{13}(e_1 \wedge e_3) + S^{23}(e_2 \wedge e_3).$$

Поэтому с каждым бивектором $b_1 \wedge b_2$ трехмерного евклидова пространства L можно сопоставить вектор c из того же пространства L, приняв

$$c = S^{23}e_1 - S^{13}e_2 + S^{12}e_3.$$

Вектор c определен бивектором $b_1 \wedge b_2$ инвариантно относительно переходов к другим ортонормированным базисам с той же ориентацией, какую имеет базис e_1, e_2, e_3. Легко понять, что вектор c есть векторное произведение b_1 на b_2 (рис. 71):

$$c = [b_1 \times b_2].$$

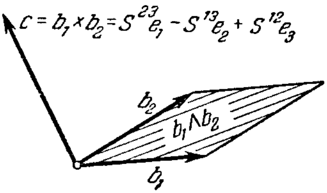


Рис. 71.

11. Обратимся к произвольным бивекторам (не обязательно простым) в n-мерном линейном пространстве L; наличия евклидовой метрики в L мы пока предполагать не будем. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — какой-нибудь базис в L. Тогда $e_1 \wedge e_2, \ldots, e_{n-1} \wedge e_n$ составляют базис в пространстве бивекторов над L. Для любого бивектора u имеем разложение

$$\begin{aligned} u = {*}\sum u^{ij} e_i \wedge e_j = \\ = u^{12}e_1 \wedge e_2 + u^{13}e_1 \wedge e_3 + \ldots + u^{1n}e_1 \wedge e_n + \\ + u^{23}e_2 \wedge e_3 + \ldots + u^{2n}e_2 \wedge e_n + \ldots \\ \ldots + u^{n-1\,n}e_{n-1} \wedge e_n. \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, любой бивектор разлагается в сумму простых бивекторов.

12. Вследствие соотношений $e_i \wedge e_j = e_ie_j - e_je_i$ равенство (9) можно заменить разложением u по базису в T_0^2:

$$\begin{aligned} u = \sum u^{ij} e_i e_j = \\ = 0 \cdot e_1e_1 + u^{12}e_1e_2 + \ldots + u^{1n}e_1e_n + \\ + u^{21}e_2e_1 + 0 \cdot e_2e_2 + \ldots + u^{2n}e_2e_n + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + u^{n1}e_ne_1 + \ldots + u^{n-1\,n}e_{n-1}e_n + 0 \cdot e_ne_n. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь при $i > j$ положено $u^{ij} = -u^{ji}$; на диагонали расположены нулевые компоненты (с коэффициентами $u^{ii} = 0$).

13. Ранг матрицы $\| u^{ij} \|$, составленной из коэффициентов разложения (10), т. е. из координат бивектора u по базису $e_i e_j$, называется *рангом бивектора* u. Мы будем обозначать ранг через r ($r = \text{Rang} \| u^{ij} \|$).

14. Ранг бивектора u является также рангом билинейной формы $u(\xi, \eta) = \sum u^{ij} \xi_i \eta_j$ с ковариантными аргументами $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\xi, \eta \in L^*$. Эта форма, будучи полной сверткой, есть инвариант и потому ее ранг инвариантен. Отсюда следует инвариантность ранга бивектора, т. е. независимость ранга от выбора базиса $e_1, \ldots$ $\ldots, e_n \in L$.

15. Рассмотрим линейный оператор U, который произвольному вектору ξ из L^* ставит в соответствие его правую свертку с бивектором u:

$$x = U\xi = (u, \xi) \in L.$$

Запишем преобразование U в координатах:

$$x^i = \sum u^{ij} \xi_j, \tag{11}$$

где x^i — координаты вектора x по любому базису $e_1, \ldots, e_n$ пространства L, ξ_j — координаты ξ по взаимному базису $e^1, \ldots, e^n$ пространства L^*. Матрица преобразования U совпадает с матрицей $\| u^{ij} \|$ бивектора u. Поэтому ранг преобразования U (определяемый как ранг его матрицы) совпадает с рангом бивектора u ($\text{Rang}\, U = r$).

Пусть $L_r = U(L^*)$ — образ всего пространства L^*. Согласно § 3 гл. VII L_r является подпространством размерности r в пространстве L. Подпространство L_r будем называть ранговым подпространством бивектора u.

Предположим, что базисные векторы $e_1, \ldots, e_r$ выбраны в L_r. Тогда они образуют базис в L_r и каждый вектор $x = U\xi$ раскладывается по векторам $e_1, \ldots, e_r$. Иначе говоря, в этом случае имеем

$$x^{r+1} = \ldots = x^n = 0. \tag{12}$$

Равенства (12) соблюдаются при любом $\xi \in L^*$, поэтому из (11) и (12) имеем $u^{ij} = 0$, если $i \geqslant r$. Отсюда $u^{ij} = 0$, если $j \geqslant r$, поскольку $u^{ij} = -u^{ji}$. Итак, если базис $e_1, \ldots, e_n$

таков, что $e_1, \ldots, e_r \in L_r$, то матрица координат бивектора u по базису $e_i e_j \in T_0^2$ (то есть матрица коэффициентов разложения (10)) имеет вид

$$\left\| \begin{array}{c:c} \Delta_r & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array} \right\|, \tag{$*$}$$

где через Δ_r обозначена квадратная клетка $r \times r$; остальные места матрицы $(*)$ заняты нулями. Очевидно, что $D_r = \operatorname{Det} \Delta_r \neq 0$, иначе ранг бивектора u был бы меньше r.

16. Пусть L_0^* — нулевое подпространство билинейной формы $u(\xi, \eta)$ (размерность L_0^* равна $n - r$). Из п. 15 следует, что если $x \in L_r$, $\xi \in L_0^*$, то

$$(x, \xi) = 0; \tag{$**$}$$

если $(**)$ соблюдается для любого $\xi \in L_0^*$, то $x \in L_r$; если $(**)$ соблюдается для любого $x \in L_r$, то $\xi \in L_0^*$. Таким образом, если свертку рассматривать как аналог скалярного произведения, то L_r и L_0^* аналогичны подпространству и его ортогональному дополнению. (Конечно, нужно иметь в виду, что L_r и L_0^* находятся в разных пространствах.)

Чтобы убедиться в справедливости сказанного, достаточно заметить, что L_0^* есть ядро преобразования U, и что если векторы $e_1, \ldots, e_r$ выбраны в L_r, то векторы $e^{r+1}, \ldots, e^n$ взаимного базиса окажутся в L_0^* (см. (11) с учетом $(*)$) и составят в нем базис.

17. Теорема 1. *Ранг любого бивектора есть четное число.*

Доказательство. Если бы число r было нечетным, то мы имели бы $D_r = 0$, так как всякий кососимметричный определитель нечетного порядка равен нулю. (Чтобы убедиться в справедливости последнего утверждения, достаточно умножить на (-1) каждую строку кососимметричного определителя, а затем его транспонировать.)

18. Теорема 2. *В трехмерном пространстве всякий бивектор простой.*

Доказательство. Если L трехмерно, то, согласно предыдущей теореме, для любого бивектора u над L возможны лишь два случая: $r = 0$ и $r = 2$. В первом случае u — нулевой бивектор, и, следовательно, можно написать $u = a \wedge a$, где a — любой вектор из L. Во втором случае ранговое подпространство L_r бивектора u двумерно. Поэтому, если мы возьмем в L базис e_1, e_2, e_3 при условии $e_1, e_2 \in L_r$, то разложение (10) примет вид

$$u = u^{12} e_1 \wedge e_2.$$

Теорема доказана.

19. Теорема 3. *В пространстве любой размерности каждый ненулевой бивектор u может быть представлен в виде суммы простых бивекторов, число которых равно половине ранга r бивектора u:*

$$u = p_1 \wedge q_1 + \ldots + p_k \wedge q_k, \qquad 2k = r, \tag{13}$$

причем векторы $p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k$ линейно независимы.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если разложение вида (13) имеет место, то независимость векторов $p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k$ обязательна. В самом деле, допустим, что эти векторы зависимы. Тогда их линейная оболочка $\tilde{L}$ имеет размерность $s < r$ и векторы $p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k$ могут быть разложены по базису $e_1, \ldots, e_s \in \tilde{L}$. Подставляя их разложения в (13), мы получим для u разложение вида (10) по базису e_{ij} в T_0^2 над $\tilde{L}$, т. е. при $i, j = 1, 2, \ldots, s < r$. Но в таком случае ранг u окажется меньше r, вопреки условию. Заметим еще, что в силу аналогичных соображений число простых бивекторов в сумме вида (13) меньше $\frac{1}{2} r$ быть не может.

Возможность разложения (13) докажем по индукции. Ясно, что для любого бивектора u ранга $= 2$ разложение вида (13) существует; именно $u = p \wedge q$, где p, q — некоторые независимые векторы, лежащие в двумерном ранговом подпространстве. Предположим, что возможность разложения (13) установлена для всех бивекторов ранга $2, 4, \ldots, r-2$; тогда покажем, что такое разложение возможно и для бивектора ранга r. Тем самым доказательство будет завершено.

Пусть базис $e_1, \ldots, e_n$ в L выбран при условии $e_1, \ldots, e_r \in L_r$; соответственно имеем

$$\begin{aligned} u = u^{12} e_1 \wedge e_2 + u^{13} e_1 \wedge e_3 + \ldots + u^{1r} e_1 \wedge e_r + {} \\ + u^{23} e_2 \wedge e_3 + \ldots + u^{2r} e_2 \wedge e_r + \ldots \\ \ldots + u^{r-1\, r} e_{r-1} \wedge e_r. \end{aligned}$$

Положим $e_1 = p_1$, $u^{12}e_2 + u^{13}e_3 + \ldots + u^{1r}e_r = q_1$. Отсюда и из предыдущего разложения находим, что ранг бивектора $u - p_1 \wedge q_1$ не больше числа векторов в наборе $e_2, e_3, \ldots, e_r$, т. е. не больше $r-1$. Но ранг любого бивектора — четное число. Следовательно, ранг бивектора $u - p_1 \wedge q_1$ не больше $r-2$. Поэтому и по предположению индукции существуют векторы $p_2, q_2, \ldots, p_k, q_k$, где $2k \leqslant r$ (т. е. число пар p_i, q_i не больше половины числа $r-2$), такие, что $u - p_1 \wedge q_1 = p_2 \wedge q_2 + \ldots + p_k \wedge q_k$. Отсюда получаем разложение (13). При этом $2k = r$, так как в действительности $2k < r$ невозможно вследствие замечания, сделанного в начале доказательства. Теорема доказана.

20. Если в линейном n-мерном пространстве L задана евклидова метрика, то можно считать, что L^* совпадает с L; при этом под сверткой (x, ξ) двух элементов x, ξ из L следует понимать их скалярное произведение. Отсюда и на основании рассуждений п. 16 заключаем: для бивектора в евклидовом пространстве L как ранговое подпространство L_r, так и нулевое подпространство L_0 определены в самом L (по понятным соображениям мы пишем теперь L_0 без звездочки). Подпространства L_0 и L_r являются ортогональными дополнениями друг друга.

21. Пусть $y = Ax$ — линейное преобразование, заданное в евклидовом n-мерном пространстве L. В координатной записи имеем $y_i = \sum A_{is}x^s$, где x^s — контравариантные координаты вектора x, y_i — ковариантные координаты вектора y; при этом A_{is} суть ковариантные координаты тензора данного линейного преобразования. Этот тензор мы будем обозначать также через A, а само преобразование напишем в виде $y = (A, x)$. Круглые скобки здесь обозначают правую свертку тензора A с вектором x. Мы называем линейное преобразование косым, если $A_{is} = -A_{si}$ (см. гл. IX).

Определения и теоремы, изложенные выше для контравариантных бивекторов, непосредственно переносятся на ковариантные бивекторы (косые двухвалентные ковариантные тензоры). В случае косого преобразования тензор A есть ковариантный бивектор, ранг которого равен рангу этого преобразования. Отсюда и согласно п. 19 имеем предложение:

Пусть $y = Ax$ — косое линейное преобразование в евклидовом пространстве L; если ранг его равен r, то в пространстве L найдутся независимые векторы $p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k$, где $k=\frac{1}{2}r$, такие, что данное преобразование представится в виде

$$y=(p_1 \wedge q_1, x)+\ldots+(p_k \wedge q_k, x).$$

Здесь $(p_i \wedge q_i, x)$ — правая свертка бивектора $p_i \wedge q_i$ с вектором x:

$$(p_i \wedge q_i, x)=p_i(q_i, x)-q_i(p_i, x);$$

(q_i, x) и (p_i, x) — скалярные произведения.

22. В частности, если L — трехмерное евклидово пространство, $y=Ax$ — произвольное косое преобразование ненулевого ранга, заданное в L, то найдутся независимые векторы p, q такие, что $y=(p \wedge q, x)$. Полагая $a=-[p \times q]$, получим $y=[a \times x]$. В самом деле, $[a \times x]=[x \times [p \times q]]=$ $=p(q, x)-q(p, x)=(p \wedge q, x)$. Таким образом, в трехмерном евклидовом пространстве всякое косое преобразование представляется в виде векторного произведения (в том числе преобразование нулевого ранга — при $a=\theta$). Этот результат уже был установлен раньше в гл. IX.

23. В заключение параграфа мы приведем еще одно предложение, известное под названием леммы Картана:

Пусть в линейном пространстве L *даны две системы векторов:* $p_1, \ldots, p_k$ *и* $q_1, \ldots, q_k$, *причем система* $p_1, \ldots, p_k$ *линейно независима. Пусть*

$$p_1 \wedge q_1+\ldots+p_k \wedge q_k=0. \tag{14}$$

Тогда векторы $q_1, \ldots, q_k$ *линейно выражаются через* $p_1, \ldots, p_k$ *соотношениями*

$$q_i=\sum \alpha_{is}p_s \tag{15}$$

с симметричной $k \times k$*-матрицей* $\|\alpha_{is}\|$, *то есть* $\alpha_{is}=\alpha_{si}$. *Обратно, если имеют место равенства* (15) *и матрица* $\|\alpha_{is}\|$ *симметрична, то имеет место также* (14).

Доказательство. 1) Сначала докажем второе (обратное) утверждение. Пусть соотношения (15) даны и $\alpha_{is}=\alpha_{si}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \wedge q_i=\sum_{i,\,s=1}^{k} \alpha_{is}p_i \wedge p_s=*\sum(\alpha_{is}-\alpha_{si})p_i \wedge p_s=0,$$

то есть (14) соблюдено.

2) Пусть теперь дано (14). Дополним систему векторов $p_1, \ldots, p_k$ до базиса $p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}, \ldots, p_n$ в L. Тогда можно написать разложения

$$q_i = \sum_{s=1}^{k} \alpha_{is} p_s + \alpha_{i\,k+1} p_{k+1} + \ldots + \alpha_{in} p_n. \tag{16}$$

Отсюда и вследствие (14)

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \wedge q_i =* \sum_{i,\,s=1}^{k} (\alpha_{is} - \alpha_{si}) p_i \wedge p_s + \\ + \sum_{i=1}^{k} (\alpha_{i\,k+1} p_i \wedge p_{k+1} + \ldots + \alpha_{in} p_i \wedge p_n) = 0. \tag{17}$$

Но внешние произведения $p_i \wedge p_s$, $i < s$, образуют базис в подпространстве бивекторов над L. Поэтому и вследствие (17) $\alpha_{is} = \alpha_{si}$, если $i, s = 1, 2, \ldots, k$, кроме того, $\alpha_{is} = 0$ при $s > k$. Таким образом, соотношения (16) сводятся к соотношениям вида (15) и матрица α_{is} симметрична. Все доказано.

§ 4. Простые поливекторы

1. Простым контравариантным поливектором в пространстве L называется внешнее произведение нескольких векторов, взятых в L:

$$p = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_k.$$

Число k называется порядком поливектора p. Говорят также, что p есть k-вектор в L.

2. Мы сообщим сейчас ряд предложений о простых поливекторах любого порядка, которые естественным образом обобщают предложения о простых бивекторах, изложенные в пп. 2—9 § 3. Доказательства этих предложений, подробно изложенные нами для частного случая $k=2$, тривиально переносятся на общий случай.

1) $p = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $a_1, \ldots, a_k$ линейно зависимы.

2) Пусть $a_1, \ldots, a_k$ независимы; соответственно $p \neq 0$. Тогда векторы $a_1, \ldots, a_k$ определяют k-мерное линейное подпространство L_k в L, именно свою линейную оболочку: $L_k = L(a_1, \ldots, a_k)$. Говорят, что L_k есть линейное подпростран-

ство поливектора p или что поливектор p лежит в L_k. Говорят также, что p есть направляющий поливектор подпространства L_k.

Возьмем в L_k произвольные векторы $b_1, \ldots, b_k$. Имеем

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = \alpha_{11}a_1 + \ldots + \alpha_{1k}a_k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_k = \alpha_{k1}a_1 + \ldots + \alpha_{kk}a_k, \end{array}\right\} \tag{1}$$

где α_{ij} — числовые коэффициенты. Пользуясь распределительным свойством внешнего умножения и его косой симметрией, легко доказать, что

$$q = b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k = \operatorname{Det} \|\alpha_{ij}\| (a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_k). \tag{2}$$

В самом деле, при почленном перемножении правых частей (1) нужно учитывать только те слагаемые $\alpha_{1i_1} \ldots \alpha_{ki_k} a_{i_1} \wedge \ldots \wedge a_{i_k}$, где индексы $i_1, \ldots, i_k$ все разные (остальные слагаемые равны нулю). Но для написанного (произвольного) слагаемого имеем

$$\alpha_{1i_1} \ldots \alpha_{ki_k} a_{i_1} \wedge \ldots \wedge a_{i_k} = \delta_{i_1 \ldots i_k} \alpha_{1i_1} \ldots \alpha_{ki_k} a_1 \wedge \ldots \wedge a_k.$$

Поэтому

$$b_1 \wedge \ldots \wedge b_k = \left(\sum \delta_{i_1 \ldots i_k} \alpha_{1i_1} \ldots \alpha_{ki_k}\right) a_1 \wedge \ldots \wedge a_k = \\ = \operatorname{Det} \|\alpha_{ij}\| a_1 \wedge \ldots \wedge a_k.$$

В последнем равенстве мы воспользовались формулой (1) из § 3 гл. II (строго говоря, упомянутая формула дает определитель транспонированной матрицы $\|\alpha_{ij}\|$, поскольку здесь ведется суммирование по вторым индексам элементов α_{ij}, а не по первым, как в § 3 гл. II).

Подчеркнем еще раз, что множитель $\operatorname{Det} \|\alpha_{ij}\|$ получается вследствие линейности произведения по каждому аргументу и косой симметрии произведения по каждой паре аргументов. В дальнейшем мы будем неоднократно проводить аналогичные вычисления, не останавливаясь так подробно на деталях.

Таким образом, $q = Dp$, т. е. поливектор q пропорционален поливектору p, и множитель пропорциональности $D = \operatorname{Det} \|\alpha_{ij}\|$.

Обратно, если $q = b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k = \lambda p$, где λ — некоторое число, $\lambda \neq 0$, то $b_1, \ldots, b_k$ независимы и принадлежат

L_k, т. е. имеют место равенства (1); при этом $\lambda = D = \mathrm{Det}\,\|\alpha_{ij}\|$.

3) В частности,

$$b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_k$$

в том и только в том случае, когда $b_1, \ldots, b_k \in L_k = L(a_1, \ldots, a_k)$ и $\mathrm{Det}\,\|\alpha_{ij}\| = 1$.

3. Предположим, что линейное пространство L снабжено евклидовой метрикой. Пусть $b_1, \ldots, b_k \in L_k = L(a_1, \ldots, a_k)$. Будем представлять себе ненулевой поливектор $b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k$ в виде ориентированного k-мерного параллелепипеда в L_k, построенного на упорядоченном наборе векторов $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Объем (k-мерный) этого параллелепипеда будем

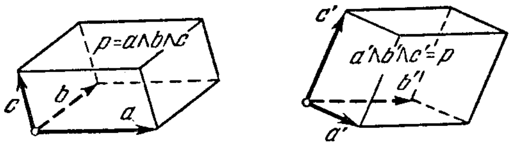


Рис. 72.

называть объемом поливектора $b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k$. Поливектор, объем которого равен единице, назовем единичным. Объем произвольного простого поливектора вычисляется согласно п. 6 § 13 гл. VIII.

Допустим, что исходный поливектор $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_k$ единичный и что подпространство $L_k = L(a_1, \ldots, a_k)$ ориентировано упорядоченным набором векторов $a_1, \ldots, a_k$. Тогда $\mathrm{Det}\,\|\alpha_{ij}\| = V$, где V — ориентированный k-мерный объем поливектора $b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k$. Равенство (2) теперь может быть написано в виде

$$b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k = V \cdot a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_k. \tag{3}$$

4. Итак, простые поливекторы порядка k, лежащие в L_k, изображаются в виде ориентированных параллелепипедов подпространства L_k. Согласно (3) параллелепипеды равного объема и одинаково ориентированные в L_k изображают один и тот же поливектор (при $k = 3$ см. рис. 72).

5. Возьмем в L ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$. Рассмотрим набор произвольных векторов $b_1, \ldots, b_k \in L$. Имеем

$$b_1 = \sum x_1^i e_i, \quad \ldots, \quad b_k = \sum x_k^i e_i. \tag{4}$$

Выберем какие-нибудь базисные векторы $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$, считая $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Они определяют k-мерную координатную плоскость; обозначим ее через $E_{i_1 \ldots i_k}$ (точнее следует сказать, что $E_{i_1 \ldots i_k}$ есть линейная оболочка векторов $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$). Будем считать, что плоскость $E_{i_1 \ldots i_k}$ ориентирована поливектором $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$. Рассмотрим любой вектор b_j из набора $b_1, \ldots, b_k$; обозначим через $\tilde{b}_j$ проекцию вектора b_j на плоскость $E_{i_1 \ldots i_k}$:

$$\tilde{b}_j = x_j^{i_1} e_{i_1} + x_j^{i_2} e_{i_2} + \ldots + x_j^{i_k} e_{i_k}.$$

Назовем проекцией поливектора $b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k$ на k-мерную плоскость $E_{i_1 \ldots i_k}$ поливектор $\tilde{b}_1 \wedge \tilde{b}_2 \wedge \ldots \wedge \tilde{b}_k$. Согласно (3)

$$\tilde{b}_1 \wedge \tilde{b}_2 \wedge \ldots \wedge \tilde{b}_k = V^{i_1 i_2 \ldots i_k} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots e_{i_k}.$$

Здесь $V^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — ориентированный k-мерный объем параллелепипеда, построенного в $E_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ на векторах $\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_k$, т. е. на проекциях векторов $b_1, \ldots, b_k$. Вместе с тем для самого поливектора $b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k$ по правилам внешнего умножения находим

$$b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k = * \sum V^{i_1 i_2 \ldots i_k} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}, \tag{5}$$

где, как обычно, звездочка означает суммирование при условии $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

Из (5) заключаем, что в ортонормированном базисе координатами простого поливектора $b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k$ являются ориентированные k-мерные объемы $V^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ его проекций на k-мерные координатные плоскости $E_{i_1 i_2 \ldots i_k}$:

$$V^{i_1 i_2 \ldots i_k} = \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & x_1^{i_2} & \ldots & x_1^{i_k} \\ x_2^{i_1} & x_2^{i_2} & \ldots & x_2^{i_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_k^{i_1} & x_k^{i_2} & \ldots & x_k^{i_k} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

6. В предыдущем пункте речь шла о проекциях и объемах. Однако алгебраические выкладки, приводящие к формулам (5)—(6), от метрики не зависят. Поэтому, если в линейном пространстве L в каком-либо базисе $e_1, \ldots, e_n$ заданы векторы (4), то для поливектора $b_1 \wedge \ldots \wedge b_k$ справедлива формула (5) с коэффициентами (6).

§ 5. Векторное произведение

1. С помощью простых поливекторов можно естественно распространить понятие векторного произведения на случай любого числа k векторных сомножителей в евклидовом пространстве E_n любой размерности $n\,(n > k)$.

Сначала вспомним, что в E_3 координаты векторного произведения $z = [x \times y]$ в произвольном базисе выражаются так:

$$z^i = \sum g^{i\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha y^\beta = \sum \varepsilon_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot i}x^\alpha y^\beta.$$

Здесь g^{ij} — контравариантный метрический тензор, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — ковариантный дискриминантный тензор, $\varepsilon_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\gamma}$ — смешанные координаты дискриминантного тензора, получающиеся путем подъема последнего индекса (см. §§ 9 и 13 гл. VIII).

Пусть теперь $x_1, \ldots, x_k$ — какие-нибудь векторы в E_n, заданные в числе $k < n$, $\{x_i^j\}$ — координаты вектора x_i в произвольном базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства E_n. Построим тензор z согласно следующей формуле:

$$\begin{aligned} z^{i_1 \ldots i_{n-k}} &= \sum \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \cdot \ldots \cdot}^{\cdot \ldots \cdot\, i_1 \ldots i_{n-k}} x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k} = \\ &= \sum g^{i_1\beta_1} \ldots g^{i_{n-k}\beta_{n-k}} \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \beta_1 \ldots \beta_{n-k}} x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь, как обычно, $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$ — дискриминантный тензор, g^{ij} — метрический тензор пространства E_n. Дискриминантный тензор является осевым и обладает косой симметрией по всем индексам. Поэтому z — аксиальный поливектор, то есть осевой кососимметричный тензор (валентности $n-k$). Согласно общим правилам (см. § 9 гл. VIII) мы можем записать его в ковариантных координатах. Получим более простую формулу

$$z_{i_1 \ldots i_{n-k}} = \sum \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_n i_1 \ldots i_{n-k}} x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}. \tag{2}$$

Поливектор z порядка $n-k$, определяемый формулой (2), назовем *векторным произведением* векторов $x_1, \ldots, x_k$, взятых в данном порядке, и будем обозначать символом $[x_1 \times \ldots \times x_k]$.

Иначе говоря,

$$z = [x_1 \times \ldots \times x_k] = \sum z^{i_1 \ldots i_{n-k}} e_{i_1} \ldots e_{i_{n-k}}. \qquad (3)$$

Покажем, что по своим свойствам поливектор z представляет собой многомерный аналог обычного векторного произведения.

2. Свойства векторного произведения (их доказательство см. ниже, п. 3).

1) Векторное произведение линейно по каждому своему сомножителю. Например, для первого сомножителя имеем

$$[(\alpha x_1' + \beta x_1'') \times x_2 \times \ldots \times x_k] = \\ = \alpha [x_1' \times x_2 \times \ldots \times x_k] + \beta [x_1'' \times x_2 \times \ldots \times x_k].$$

2) Векторное произведение кососимметрично по любой паре сомножителей. Например, для первой пары сомножителей имеем

$$[x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_k] = -[x_2 \times x_1 \times \ldots \times x_k].$$

3) $[x_1 \times \ldots \times x_k] = 0$ тогда и только тогда, когда сомножители линейно зависимы.

4) Векторное произведение есть *простой* поливектор. Точнее, существуют векторы $y_1, \ldots, y_{n-k} \in E_n$ такие, что

$$[x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_k] = y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_{n-k}.$$

5) Если векторы $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы, то векторы $y_1, \ldots, y_{n-k}$ тоже линейно независимы; тем самым вполне определены подпространства $L_k = L(x_1, \ldots, x_k)$ и $L_{n-k} = L(y_1, \ldots, y_{n-k})$. Эти подпространства L_k и L_{n-k} являются *ортогональными дополнениями* друг друга.

6) Если векторы $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы, то ориентации $x_1, \ldots, x_k$ в L_k и $y_1, \ldots, y_{n-k}$ в L_{n-k} таковы, что объединенная система векторов $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}$ одинаково ориентирована с базисом $e_1, \ldots, e_n$ (т. е. с тем базисом в E_n, по которому даны координаты в исходных равенствах (1)).

7) $(n-k)$-мерный объем поливектора $z = y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_{n-k}$ *численно равен* k-мерному объему параллелепипеда, построенного на векторах $x_1, \ldots, x_k$.

3. Доказательство. Свойства 1) и 2) непосредственно вытекают из равенства (2). Докажем теперь свойство 3). Из свойств 1) и 2) следует, что $z = 0$, если $x_1, \ldots, x_k$ линейно зависимы.

Пусть теперь $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы. В линейной оболочке $L_k = L(x_1, \ldots, x_k)$ выберем какой-нибудь ортонормированный базис $a_1, \ldots, a_k$, одинаково ориентированный с системой векторов $x_1, \ldots, x_k$, и дополним его до ортонормированного базиса $a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n$ во всем пространстве E_n, ориентированного так же, как исходный базис $e_1, \ldots, e_n$. Имеем разложения вида

$$x_i = \alpha_{i1}a_1 + \ldots + \alpha_{ik}a_k,$$

причем $\operatorname{Det}\|\alpha_{ij}\| = V$, где $V > 0$ есть k-мерный объем параллелепипеда, построенного в L_k на векторах $x_1, \ldots, x_k$. Вследствие линейности и косой симметрии векторного произведения получаем

$$[x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_k] = \operatorname{Det}\|\alpha_{ij}\|[a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_k] = \\ = V[a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_k].$$

Отсюда и из (1)

$$z^{i_1 \ldots i_{n-k}} = V \sum g^{i_1\beta_1} \ldots g^{i_{n-k}\beta_{n-k}} \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \beta_1 \ldots \beta_{n-k}} a_1^{\alpha_1} \ldots a_k^{\alpha_k}. \quad (4)$$

Тензорное равенство (4) справедливо в любом базисе, ориентированном так же, как $e_1, \ldots, e_n$. В частности, в *ортонормированном* базисе $a_1, \ldots, a_n$ имеем $g^{i\beta} = \delta^{i\beta}$, $a_i^\alpha = \delta_i^\alpha$, так что в этом базисе

$$z^{i_1 \ldots i_{n-k}} = V\varepsilon_{1 \ldots k i_1 \ldots i_{n-k}}.$$

Отсюда следует, что поливектор z имеет при $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k}$ единственную ненулевую координату, именно

$$z^{k+1 \ldots n} = V\varepsilon_{1 \ldots k\, k+1 \ldots n} = V. \quad (5)$$

Из (5) видно, что в случае линейно независимых сомножителей $[x_1 \times \ldots \times x_k] \neq 0$. Тем самым свойство 3) доказано.

Докажем теперь свойства 4) — 7). Заметим, что может существовать не более одного простого поливектора, обладающего свойствами 5) — 7) из п. 2 (так как эти свойства задают подпространство, объем и ориентацию поливектора). Построим простой поливектор u, равный векторному произведению z и обладающий свойствами 5) — 7). Положим

$$u = (Va_{k+1}) \wedge a_{k+2} \wedge \ldots \wedge a_n.$$

По формуле (5) § 4 находим, что

$$u^{k+1 \ldots n} = V \quad (6)$$

и что остальные координаты $u^{i_1 \ldots i_{n-k}}$ при условии $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-1}$ равны нулю. Сравнивая (5) и (6), получаем

$$u = z.$$

Поэтому, полагая

$$y_1 = Va_{k+1}, \quad y_2 = a_{k+2}, \ \ldots, \ y_{n-k} = a_n,$$

мы увидим, что все свойства 4) — 7) п. 2 соблюдаются.

4. Понятие векторного произведения помогает в произвольном (в частности, косоугольном) базисе решать следующие геометрические задачи:

а) В евклидовом (векторном) пространстве E_n дано подпространство L_k. Найти его ортогональное дополнение L_{n-k}.

б) В евклидовом (точечном) пространстве E_n дана точка A и k-мерная плоскость Π_k, не проходящая через A. Провести через точку A плоскость Π_{n-k} размерности $n-k$, ортогональную Π_k.

в) В условиях задачи б) опустить из точки A перпендикуляр на Π_k (то есть найти прямую, ортогональную Π_k, проходящую через точку A и пересекающую Π_k).

г) В условиях задачи б) найти кратчайшее расстояние от точки A до плоскости Π_k.

д) В пространстве E_n даны скрещивающиеся плоскости Π_k и Π_l. Построить их общий перпендикуляр.

е) В условиях задачи д) найти кратчайшее расстояние между Π_k и Π_l.

Не останавливаясь на деталях, рассмотрим схемы решения перечисленных задач.

Для решения задачи а) достаточно взять какой-нибудь базис $x_1, \ldots, x_k$ в L_k и построить подпространство L_{n-k} поливектора $[x_1 \times \ldots \times x_k]$. О вычислениях, которые для этого нужно проделать, см. ниже, пп. 5—6.

Задача б), очевидно, сводится к задаче а).

Пусть Π_{n-k} — плоскость, полученная в результате решения задачи б). Нетрудно установить (например, с помощью теоремы 5 § 7 гл. III), что Π_{n-k} пересекается с Π_k, и доказать, что точка их пересечения единственна. Обозначим эту точку через B. Тогда прямая AB будет искомым перпендикуляром в задаче в), а длина отрезка AB — искомым расстоянием в задаче г).

Решение задачи д) представляет собой многомерное обобщение построения общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым в E_3.

Именно, рассмотрим направляющие подпространства L_k и L_l плоскостей Π_k и Π_l соответственно. Построим их сумму $L' = L_k + L_l$ и ее ортогональное дополнение $\hat{L}$. Нахождение последнего сводится к решению задачи а). Пусть пересечение $L_k \cap L_l$ имеет размерность m. Тогда размерность $\hat{L}$ равна $p = n - (k + l - m)$.

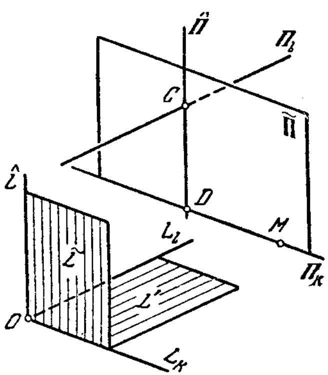


Рис. 73.

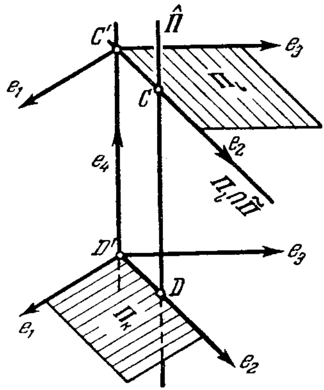


Рис. 74.

Через произвольную точку M плоскости Π_k проведем плоскость $\tilde{\Pi}$ в направлении подпространства $\tilde{L} = L_k \oplus \hat{L}$ (рис. 73). Размерность $\tilde{\Pi}$ равна $k + p = n + m - l$. В силу построения $\hat{L}$ пересечение $\tilde{L} \cap L_l$ совпадает с пересечением $L_k \cap L_l$ и потому имеет размерность m. Применяя теорему 5 § 7 гл. III, находим, что плоскость $\tilde{\Pi}$ пересекается с плоскостью Π_l. Пусть C — какая-нибудь точка их пересечения. Можно показать, что при $m \geqslant 1$ точка C не единственна в отличие от хорошо известного трехмерного случая.

Проведем через точку C плоскость $\hat{\Pi}$ в направлении подпространства $\hat{L}$. Отметим, что $\hat{\Pi}$ зависит от выбора точки C в плоскости $\Pi_l \cap \tilde{\Pi}$ (см. рис. 74, где $n = 4$, $\Pi_k = L_k = L(e_1, e_2)$, Π_l проходит в направлении $L(e_2, e_3)$, $\hat{\Pi}$ одномерна). Рассматривая Π_k и $\hat{\Pi}$ как плоскости в $(k + p)$-мерном аффинном пространстве $\tilde{\Pi}$ и еще раз применяя теорему 5 из § 7 гл. III, установим, что Π_k и $\hat{\Pi}$ пересекаются в некоторой точке D (рис. 73—74). Прямая CD пересекает Π_k и Π_l. Она содержится в $\hat{\Pi}$, так что ее направляющий вектор принадлежит $\hat{L}$ и потому ортогонален всем векторам из L_k и L_l. Таким образом, прямая CD является искомым общим перпендикуляром к Π_k и Π_l (вообще говоря, не единственным). Предоставляем читателю доказать, что длина отрезка CD является кратчайшим расстоянием между Π_k и Π_l, так что попутно получается решение задачи е).

Обратим внимание на то, что отыскание подпространств, плоскостей и точек, о которых выше шла речь, сводится к решению некоторых систем линейных уравнений.

5. Вернемся к задаче а). Предположим, что L_k задано как линейная оболочка независимых векторов $x_1, \ldots, x_k$, разложенных по некоторому базису $e_1, \ldots, e_n$:

$$x_i = \sum x_i^j e_j.$$

Согласно пп. 1—2 имеем

$$z = [x_1 \times \ldots \times x_k] = y_1 \wedge \ldots \wedge y_{n-k} = \\ = \sum z^{i_1 \ldots i_{n-k}} e_{i_1} \ldots e_{i_{n-k}},$$

где $z^{i_1 \ldots i_{n-k}}$ определяются формулой (1), векторы $y_1, \ldots, y_{n-k}$ образуют базис в искомом подпространстве L_{n-k}. Запишем разложения векторов $y_1, \ldots, y_{n-k}$ по базису $e_1, \ldots, e_n$:

$$y_i = \sum y_i^j e_j$$

с неизвестными нам коэффициентами $\{y_i^j\}$, и составим матрицу

$$Y = \left\| \begin{array}{ccc:c} y_1^1 & \ldots & y_1^{n-k} & \ldots\ y_1^n \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{n-k}^1 & \ldots & y_{n-k}^{n-k} & \ldots\ y_{n-k}^n \end{array} \right\|. \tag{7}$$

Аналогично п. 5 § 4 можно доказать, что каждая из координат $z^{i_1 \ldots i_{n-k}}$ поливектора z равна определителю порядка $n-k$, образованному столбцами матрицы Y с номерами $i_1, \ldots i_{n-k}$. Поэтому, хотя мы и не знаем числовых значений элементов матрицы Y, но нам известны числовые значения всех ее миноров порядка $(n-k)$. Для простоты дальнейших обозначений предположим, что левый (отмеченный) минор матрицы (7) является базисным, то есть, что

$$\Delta = z^{1\ldots n-k} \neq 0.$$

Вектор $u = \sum u^i e_i$ принадлежит L_{n-k} тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Rang} \left\| \begin{array}{cccccc} u^1 & \ldots & u^{n-k} & \ldots & u^n \\ y_1^1 & \ldots & y_1^{n-k} & \ldots & y_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n-k}^1 & \ldots & y_{n-k}^{n-k} & \ldots & y_{n-k}^n \end{array} \right\| = n - k. \qquad (8)$$

Составим минор порядка $(n-k+1)$ матрицы (8), образованный столбцами с номерами $1, \ldots, n-k, l$, где $n-k < l \leqslant n$. Такой минор заведомо равен нулю. Разложив его по первой строке, мы получим для координат вектора u линейное уравнение; полагая $l = n-k+1, \ldots, n$, получим однородную систему уравнений

$$Au = 0, \qquad (9)$$

имеющую $k \times n$-матрицу вида

$$A = \left\| \begin{array}{cc} \ldots & \\ \ldots & \\ \ldots & \\ \ldots & \end{array} \underbrace{\begin{array}{ccc} \Delta & & 0 \\ & \Delta & \\ 0 & & \ddots \\ & & \Delta \end{array}}_{k} \right\|.$$

Важно, что все ненулевые элементы матрицы A суть некоторые из координат $z^{i_1 \ldots i_{n-k}}$ поливектора z. Любой вектор $u \in L_{n-k}$ удовлетворяет системе (9). Но $\operatorname{Rang} A = k$, поэтому векторы из L_{n-k} образуют всю совокупность решений системы (9). Итак, система (9) определяет искомое подпространство и дает тем самым решение задачи а).

Разумеется, задачи а) — е) можно решать по-другому, например, используя § 4 гл. VIII.

6. Пусть теперь $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в E_n. Тогда имеют место следующие равенства:

$$[e_{i_1} \times e_{i_2} \times \ldots \times e_{i_k}] = e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \ldots \wedge e_{j_{n-k}}, \qquad (10)$$

где объединенный набор индексов $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k})$ является четной перестановкой натурального набора $(1, 2, \ldots, n)$. Чтобы убедиться в справедливости равенств (10), достаточно заметить, что простой поливектор $e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \ldots \wedge e_{j_{n-k}}$ по отношению к векторному произведению $[e_{i_1} \times e_{i_2} \times \ldots \times e_{i_k}]$ обладает свойствами 4) — 7) п. 2. Но такими свойствами может обладать только один поливектор.

Формулы (10) дают таблицу умножения базисных векторов $e_1, \ldots, e_n$ и позволяют вычислить векторное произведение любых векторов путем почленного перемножения их разложений по базису $e_1, \ldots, e_n$. С их помощью можно в некоторых случаях находить сомножители $y_1, \ldots, y_{n-k}$, входящие в выражение $z = y_1 \wedge \ldots \wedge y_{n-k}$ непосредственно, минуя решение системы (9). Вместе с тем получается другой путь решения задачи а).

Пример. В четырехмерном евклидовом пространстве в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3, e_4 даны векторы $x_1 = 2e_1 + e_2 + e_3$, $x_2 = e_1 + e_4$. Найти направляющий бивектор ортогонального дополнения линейной оболочки $L(x_1, x_2)$.

Решение. В качестве искомого бивектора можно взять векторное произведение $[x_1 \times x_2]$. Перемножая векторы x_1, x_2 почленно и пользуясь формулами (10), найдем

$$
\begin{aligned}
&[x_1 \times x_2] = [(2e_1 + e_2 + e_3) \times (e_1 + e_4)] = \\
&= [e_2 \times e_1] + [e_3 \times e_1] + 2[e_1 \times e_4] + [e_2 \times e_4] + [e_3 \times e_4] = \\
&= e_4 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 + 2e_2 \wedge e_3 + e_3 \wedge e_1 + e_1 \wedge e_2 = \\
&= e_1 \wedge e_2 - 2e_3 \wedge e_2 - e_4 \wedge e_2 - \\
&- e_1 \wedge e_3 + 2e_3 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_3 = (e_1 - 2e_3 - e_4) \wedge (e_2 - e_3).
\end{aligned}
$$

Таким образом, ортогональным дополнением для $L(x_1, x_2)$ является $L(y_1, y_2)$, где $y_1 = e_1 - 2e_3 - e_4$, $y_2 = e_2 - e_3$.

§ 6. Внешние формы и действия над ними

1. Пусть L — линейное n-мерное пространство, $x_1, \ldots, x_k$ — набор произвольных векторов из L, $\omega(x_1, \ldots, x_k)$ — полилинейная форма с векторными аргументами $x_1, \ldots, x_k$.

Назовем альтернацией формы $\omega(x_1, \ldots, x_k)$ полилинейную форму, которую будем обозначать через $\langle \omega(x_1, \ldots, x_k) \rangle$ и определять равенством

$$\langle\omega(x_1, \ldots, x_k)\rangle = \frac{1}{k!}\sum \delta^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{1\ 2\ \ldots\ k}\, \omega\left(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}\right), \quad (1)$$

где суммирование по каждому из индексов $j_1, \ldots, j_k$ идет от 1 до k. В частности, для линейной формы $\omega(x)$ имеем

$$\langle\omega(x)\rangle = \omega(x); \quad (2)$$

для билинейной формы $\omega(x, y)$

$$\langle\omega(x, y)\rangle = \frac{1}{2!}(\omega(x, y) - \omega(y, x));$$

для формы трех аргументов

$$\langle\omega(x, y, z)\rangle = \frac{1}{3!}(\omega(x, y, z) + \omega(y, z, x) + \omega(z, x, y) - \omega(y, x, z) - \omega(x, z, y) - \omega(z, y, x)).$$

Из формулы (1) ясно, что

1) $\langle\omega\rangle$ действительно является полилинейной формой, то есть обладает свойством линейности по каждому аргументу; например, по первому аргументу

$$\langle\omega(\alpha x_1' + \beta x_1'', x_2, \ldots, x_k)\rangle = \alpha\langle\omega(x_1', x_2, \ldots, x_k)\rangle + \beta\langle\omega(x_1'', x_2, \ldots, x_k)\rangle.$$

2) $\langle\omega(x_1, \ldots, x_k)\rangle$ обладает косой симметрией по любой паре своих аргументов; например, по первой паре

$$\langle\omega(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)\rangle = -\langle\omega(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_k)\rangle.$$

2. Форму ω будем называть косой, если $\langle\omega\rangle = \omega$.

Согласно равенству (2) каждая линейная форма, то есть форма одного аргумента, должна быть отнесена к числу косых.

Из определения альтернации следует, что косая форма обладает косой симметрией по любой паре своих аргументов.

Обратно, если полилинейная форма ω обладает косой симметрией по любой паре своих аргументов, то она является косой в смысле данного выше определения, то есть $\langle\omega\rangle = \omega$. Доказательство предоставляем читателю.

3. Пусть $\omega(x_1, \ldots, x_k)$ — косая форма. Если векторы $x_1, \ldots, x_k$ линейно зависимы, то соответствующее им значение формы ω равно нулю.

Утверждение следует из свойств линейности по каждому аргументу и косой симметрии по каждой паре аргументов.

4. Если число аргументов косой формы ω превышает размерность пространства ($k > n$), то ω тождественно равна нулю.

Утверждение является следствием п. 3.

5. Важно понять, что косая форма $\omega(x_1, \ldots, x_k)$ является функцией простого поливектора $p = x_1 \wedge \ldots \wedge x_k$. Иначе говоря, значение ω не изменится, если векторы $x_1, \ldots, x_k$ мы заменим другими векторами $y_1, \ldots, y_k$ при условии

$$y_1 \wedge \ldots \wedge y_k = x_1 \wedge \ldots \wedge x_k.$$

Докажем это утверждение. Вследствие пп. 3, 4 достаточно рассмотреть случай, когда $x_1, \ldots, x_k$ независимы. Тогда равенство $y_1 \wedge \ldots \wedge y_k = x_1 \wedge \ldots \wedge x_k$ равносильно тому, что имеют место разложения

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1k}x_k, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_k = \alpha_{k1}x_1 + \ldots + \alpha_{kk}x_k, \end{array}\right\} \tag{3}$$

где $\mathrm{Det}\,\|\alpha_{ij}\| = 1$ (см. п. 2 § 4). Из равенств (3), а также из свойств линейности и косой симметрии формы ω имеем

$$\omega(y_1, \ldots, y_k) = \mathrm{Det}\,\|\alpha_{ij}\|\,\omega(x_1, \ldots, x_k) = \omega(x_1, \ldots, x_k).$$

Этим наше утверждение доказано.

6. Согласно п. 5 областью определения косой формы $\omega(x_1, \ldots, x_k) = \omega(p)$ является множество всех простых поливекторов порядка k.

Определение. Косая форма как функция поливектора называется *внешней формой*. Порядок k аргумента p условно называется *степенью* внешней формы $\omega(p)$.

Говорят также, что $\omega(p)$ есть k-форма. Для обозначения k-формы часто употребляется символ $\omega^k(p)$.

7. Внешние формы данной степени k образуют линейное подпространство в пространстве всех полилинейных форм с аргументами $x_1, \ldots, x_k$.

В самом деле, внешние формы одной и той же степени можно складывать и умножать на числа, и в результате будут получаться внешние формы той же степени (поскольку линейная комбинация косых форм от $x_1, \ldots, x_k$ есть косая форма от этих же аргументов, что очевидно).

8. Определим внешнее произведение двух внешних форм любых степеней.

Внешним произведением формы $\omega^k(p)$, $p = x_1 \wedge \ldots \wedge x_k$, на форму $\omega^l(q)$, $q = (x_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_{k+l})$ называется внешняя форма степени $k+l$, которая обозначается $\omega^k(p) \wedge \omega^l(q)$ и определяется следующим равенством:

$$\omega^k(p) \wedge \omega^l(q) = \frac{(k+l)!}{k!\,l!} \langle \omega^k(x_1, \ldots, x_k)\, \omega^l(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) \rangle,$$

где $\langle \omega^k(x_1, \ldots, x_k)\, \omega^l(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) \rangle$ есть альтернация полилинейной формы степени $k+l$, получаемой обычным умножением ω^k на ω^l.

Докажем, что $\omega^k(p) \wedge \omega^l(q)$ *есть внешняя форма степени $k+l$ от поливектора $p \wedge q$*:

$$\omega^k(p) \wedge \omega^l(q) = \omega^{k+l}(p \wedge q).$$

Доказательство. То, что $\omega^k(p) \wedge \omega^l(q)$ есть косая форма степени $k+l$, непосредственно следует из определения альтернации. Далее имеем

$$\omega^k(p) \wedge \omega^l(q) = \omega^{k+l}(x_1, \ldots, x_{k+l}) = \omega^{k+l}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k+l}).$$

Но согласно пп. 10, 11 § 2

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \wedge x_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_{k+l} =$$
$$= (x_1 \wedge \ldots \wedge x_k) \wedge (x_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_{k+l}) = p \wedge q,$$

что и требуется.

9. Ниже мы докажем, что внешнее произведение внешних форм обладает следующими свойствами:

1) $(\alpha\omega^k) \wedge \omega^l = \omega^k \wedge (\alpha\omega^l) = \alpha(\omega^k \wedge \omega^l)$ для любого числа α и любых внешних форм ω^k и ω^l.

2) $(\omega_1^k + \omega_2^k) \wedge \omega^l = \omega_1^k \wedge \omega^l + \omega_2^k \wedge \omega^l$ для любых внешних форм ω_1^k, ω_2^k, ω^l.

3) Внешнее умножение внешних форм кососкоммутативно, именно

$$\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl}\, \omega^l \wedge \omega^k$$

для любых ω^k, ω^l. Отсюда следует, в частности, что при $\omega^l = \omega^k$ будет $\omega^k \wedge \omega^k = 0$ при любом нечетном k.

4) Внешнее умножение внешних форм ассоциативно:

$$(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m)$$

для любых ω^k, ω^l, ω^m.

10. Таким образом, для внешних форм получается полный аналог с алгеброй Грассмана[1]), которая была определена нами по отношению к контравариантным поливекторам, то есть поливекторам в L.

Однако мы покажем в следующем параграфе, что здесь имеется не только аналогия, а в точности алгебра Грассмана, но только ковариантных поливекторов, то есть поливекторов в пространстве L^*, сопряженном данному пространству L. Тем самым будут доказаны свойства, перечисленные в п. 9.

§ 7. Внешние формы и ковариантные поливекторы

1. Пусть дана полилинейная форма

$$\omega(x_1, \ldots, x_k) = \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}, \tag{1}$$

где x_j^α — координаты вектора x_j по какому-нибудь базису $e_1, \ldots, e_n$ в L. Мы знаем, что с каждой такой формой инвариантно и взаимно однозначно сопоставляется ее тензор:

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \ldots e^{i_k}, \tag{2}$$

где $e^1, \ldots, e^n$ — базис в L^*, взаимный с базисом $e_1, \ldots, e_n$ в L (см. § 7 гл. V).

Численное значение полилинейной формы (1) на конкретно взятых векторах $x_1, \ldots, x_k$ есть полная свертка тензора (2) с этими векторами, причем вектор x_1 свертывается с e^{i_1}, вектор x_2 свертывается с e^{i_2} и т. д.

Вспомним теперь, что каждый вектор сопряженного пространства L^* является линейной формой от векторного аргумента из L. Кроме того, значение этой линейной формы на данном векторе x из L и есть как раз свертка вектора x с тем вектором из L^*, который изображает эту форму.

В данном случае для вектора $x_j = x_j^1 e_1 + \ldots + x_j^n e_n$ вследствие взаимности базисов $e_1, \ldots, e_n$ и $e^1, \ldots, e^n$ имеем

$$e^i(x_j) = x_j^1 e^i(e_1) + \ldots + x_j^i e^i(e_i) + \ldots + x_j^n e^i(e_n) = x_j^i. \tag{3}$$

Теперь вместо (1) мы можем написать

$$\omega(x_1, \ldots, x_k) = \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1}(x_1) \ldots e^{i_k}(x_k). \tag{4}$$

---

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 394.

Формула (4) показывает, что произвольная полилинейная форма $\omega(x^1, \ldots, x^k)$ разлагается в сумму произведений независимых форм $e^1(x), \ldots, e^n(x)$ совершенно так же, как тензор ω этой формы разлагается в сумму произведений одновалентных тензоров $e^1, \ldots, e^n$. Этим выражается уже давно известный нам изоморфизм между полилинейными формами и их тензорами, благодаря которому все, что говорилось о поливекторах, можно непосредственно перенести на внешние формы.

При этом, однако, нужно иметь в виду два обстоятельства:

1) В §§ 1—4 мы имели дело с контравариантными поливекторами. Сейчас мы имеем дело с полилинейными формами, которым отвечают ковариантные тензоры. Таким образом, мы прежде всего должны определить ковариантные поливекторы. Это определение следует сделать по абсолютной аналогии с определением контравариантных поливекторов, то есть ковариантным поливектором называть косой ковариантный тензор, а косой тензор определить как совпадающий со своей альтернацией.

2) Альтернация форм определена нами без непосредственной аналогии с альтернацией тензоров, почему в § 5 и был введен символ $\langle\ \rangle$ вместо $[\ ]$. Поэтому нам нужно доказать следующее утверждение.

Если $\omega(x_1, \ldots, x_k)$ — *произвольная полилинейная форма* (1), ω — *ее тензор* (2), *то тензор альтернации этой формы равен альтернации ее тензора* (*то есть форма* $\langle\omega(x_1, \ldots, x_k)\rangle$ *имеет тензор* $[\omega]$).

Докажем это. Альтернация формы определена в § 5 с помощью перестановок аргументов $x_1, \ldots, x_k$, именно

$$\langle\omega(x_1, \ldots, x_k)\rangle = \frac{1}{k!}\sum \delta_{1\ \ldots\ k}^{j_1 \ldots j_k}\omega(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}).$$

Отсюда и из (4) имеем

$$\langle\omega(x_1, \ldots, x_k)\rangle = \frac{1}{k!}\sum \omega_{i_1 \ldots i_k}\delta_{1\ \ldots\ k}^{j_1 \ldots j_k}e^{i_1}(x_{j_1}) \ldots e^{i_k}(x_{j_k}). \quad (5)$$

В равенстве (5) индексы $i_1, \ldots, i_k$ принимают всевозможные значения от 1 до n, индексы $j_1, \ldots, j_k$ образуют всевозможные перестановки чисел $1, \ldots, k$.

С другой стороны, по определению альтернации тензора и вследствие формул (8) и (9) § 1 имеем

$$[\omega] = \sum \omega_{i_1 \ldots i_k}[e^{i_1} \ldots e^{i_k}] = \frac{1}{k!}\sum \omega_{i_1 \ldots i_k}\delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}^{i_1 \ldots i_k}e^{\alpha_1} \ldots e^{\alpha_k}. \quad (6)$$

В последней сумме все индексы $i_1, \ldots, i_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ независимо друг от друга пробегают значения $1, \ldots, n$.

Нужно доказать, что формула (6) дает тензор полилинейной формы (5). Мы знаем, что (6) является тензором полилинейной формы

$$\frac{1}{k!}\sum \omega_{i_1 \ldots i_k}\delta^{i_1 \ldots i_k}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} e^{\alpha_1}(x_1) \ldots e^{\alpha_k}(x_k). \tag{7}$$

Поэтому нужно установить совпадение полилинейных форм (5) и (7). Очевидно, для этого достаточно проверить равенство

$$\sum \delta^{j_1 \ldots j_k}_{1 \ldots k} e^{i_1}(x_{j_1}) \ldots e^{i_k}(x_{j_k}) = \sum \delta^{i_1 \ldots i_k}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} e^{\alpha_1}(x_1) \ldots e^{\alpha_k}(x_k), \tag{8}$$

при любых фиксированных значениях индексов $i_1, \ldots, i_k$, считая, что они все различны (иначе (8) дает $0=0$). В правой части (8) отличны от нуля лишь те слагаемые, для которых индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ образуют какую-нибудь перестановку номеров $i_1, \ldots, i_k$. Поэтому в правой и левой частях (8) одинаковое количество $k!$ ненулевых слагаемых. Между ними имеется естественное взаимно однозначное соответствие.

Именно, пусть $j_1 \ldots j_k$ — какая-нибудь произвольно выбранная перестановка номеров $1, \ldots, k$. Тогда, переставляя в соответствующем слагаемом левой части (8) формы $e^{i_1}(x_{j_1}), \ldots$ $\ldots, e^{i_k}(x_{j_k})$, получим новый порядок их расположения:

$$e^{i_1}(x_{j_1}) \ldots e^{i_k}(x_{j_k}) = e^{\alpha_1}(x_1) \ldots e^{\alpha_k}(x_k). \tag{9}$$

Ему соответствует вполне определенное слагаемое правой части (8). Это соответствие взаимно однозначно, поскольку разные перестановки $(j_1 \ldots j_k)$ дадут в (9) разные перестановки $(\alpha_1 \ldots \alpha_k)$.

Остается только заметить, что коэффициенты при соответствующих слагаемых слева и справа в (8) равны между собой. Но действительно, переходя от левой части тождества (9) к его правой части, мы переставляем сомножители $e^{i_1}(x_{j_1}), \ldots, e^{i_k}(x_{j_k})$ так, чтобы они расположились в порядке возрастания номеров их аргументов; эта же перестановка сомножителей переводит индексы $(i_1, \ldots, i_k)$ в индексы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Значит,

$$\delta^{j_1 \ldots j_k}_{1 \ldots k} = \delta^{i_1 \ldots i_k}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}, \tag{10}$$

так как, согласно сказанному, подстановки, которые стоят в (10) слева и справа, имеют одну и ту же четность. Таким образом, установлена справедливость равенства (8), откуда следует, что $[\omega]$ является тензором формы $\langle \omega(x_1, \ldots, x_k)\rangle$.

2. Теперь больше нет смысла сохранять символ $\langle\ \rangle$, и в дальнейшем альтернацию полилинейной формы мы будем обозначать квадратными скобками, так же как и альтернацию тензора, то есть считать, что

$$[\omega(x_1, \ldots, x_k)] = \langle \omega(x_1, \ldots, x_k) \rangle. \tag{11}$$

3. После изложенного мы можем непосредственно перенести на формы основные результаты и соотношения, установленные в §§ 1—4 для поливекторов.

1) Пусть имеются линейные формы (каждая от одного аргумента) $u_1(x_1), u_2(x_2), \ldots, u_k(x_k)$. Альтернацию их произведения можно записать в виде

$$[u_1(x_1)\, u_2(x_2) \ldots u_k(x_k)] = \frac{1}{k!}\sum \delta^{i_1 \ldots i_k}_{1 \ldots k}\, u_{i_1}(x_1) \ldots u_{i_k}(x_k). \tag{12}$$

Обратим внимание читателя на то, что в формуле (12) аргументы $x_1, \ldots, x_k$ во всех слагаемых расположены в натуральном порядке.

В частности, для базисных форм $e^1, \ldots, e^n$, взятых в любом числе k и при любом их расположении, имеем

$$[e^{i_1}(x_1) \ldots e^{i_k}(x_k)] = \frac{1}{k!}\sum \delta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} e^{j_1}(x_1) \ldots e^{j_k}(x_k). \tag{13}$$

2) Если $\omega(x_1, \ldots, x_k)$ — любая форма, записанная в виде (4), то

$$[\omega(x_1, \ldots, x_k)] = \sum \omega_{i_1 \ldots i_k}[e^{i_1}(x_1) \ldots e^{i_k}(x_k)] =$$
$$= \sum \omega_{[i_1 \ldots i_k]} e^{i_1}(x_1) \ldots e^{i_k}(x_k).$$

В связи с этим см. п. 15 § 1.

3) Косые формы могут быть охарактеризованы условием

$$\omega_{i_1 \ldots i_k} = \omega_{[i_1 \ldots i_k]},$$

то есть условием косой симметрии их коэффициентов по любой паре индексов (см. § 1, п. 18).

4) Внешнее произведение нескольких базисных форм $e^1(x), \ldots, e^n(x)$, взятых в любом числе и в любом порядке,

может быть выражено формулой

$$e^{i_1}(x_1) \wedge e^{i_2}(x_2) \wedge \ldots \wedge e^{i_k}(x_k) = \\ = k! \, [e^{i_1}(x_1) \, e^{i_2}(x_2) \ldots e^{i_k}(x_k)]. \quad (14)$$

Формула (14) доказывается аналогично формуле (7) § 2, поскольку мы можем понимать альтернацию в смысле формулы (13) (которая имеет такое же строение, как и (9) из § 1).

4. Из формул (14), (13) и (3) получаем

$$e^{i_1}(x_1) \wedge e^{i_2}(x_2) \wedge \ldots \wedge e^{i_k}(x_k) = \\ = \sum \delta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} x_1^{j_1} \ldots x_k^{j_k} = V^{i_1 \ldots i_k}. \quad (15)$$

Здесь

$$V^{i_1 \ldots i_k} = \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \ldots & x_1^{i_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_k^{i_1} & \ldots & x_k^{i_k} \end{vmatrix}$$

— минор порядка k матрицы

$$X = \begin{Vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_k^1 & \ldots & x_k^n \end{Vmatrix},$$

составленной из координат векторов $x_1, \ldots, x_k$. Индексы $i_1, \ldots, i_k$ указывают номера столбцов матрицы X, участвующих в миноре $V^{i_1 \ldots i_k}$. Следует оговориться, что слово «минор» мы здесь употребляем в условном смысле, поскольку не предполагается, что индексы $i_1, \ldots, i_k$ идут в порядке возрастания.

Формула (15) дает численные значения одночленных внешних форм, представляющих собой внешние произведения базисных форм $e^1(x), \ldots, e^n(x)$. Эти одночленные формы, как всякие внешние формы, являются функциями простого поливектора, в данном случае поливектора $p = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_k$. Числа $V^{i_1 \ldots i_k}$ совпадают с координатами простого поливектора p (см. § 4, пп. 5, 6). Если в пространстве L введена евклидова метрика и базис $e_1, \ldots, e_n$ ортонормированный, то $V^{i_1 \ldots i_k}$ при $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ суть ориентированные объемы проекций поливектора p на координатные плоскости (см. § 4, п. 5).

5. Произвольная внешняя форма $\omega^k(p)$, $p = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_k$, может быть выражена следующим образом через базисные формы (аналогично п. 7 § 2):

$$\omega^k(p) = *\sum \omega_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1}(x_1) \wedge \ldots \wedge e^{i_k}(x_k). \tag{16}$$

Напомним, что звездочка означает суммирование при условии $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

Из (15) и (16) имеем

$$\omega^k(p) = *\sum \omega_{i_1 \ldots i_k} V^{i_1 \ldots i_k}. \tag{16a}$$

6. Поскольку значение линейной формы e^i на произвольном векторе $x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n$ равно координате x^i, то символом x^i обозначают линейную форму $e^i(x) = x^i$ и вместо (16) пишут

$$\omega^k(p) = *\sum \omega_{i_1 \ldots i_k} x^{i_1} \wedge x^{i_2} \wedge \ldots \wedge x^{i_k}. \tag{17}$$

7. Для внешней формы второй степени (или, как иногда говорят, внешней квадратичной формы) разложение (16) в трехмерном пространстве имеет вид

$$\omega = \omega_{12} e^1(x_1) \wedge e^2(x_2) + \omega_{23} e^2(x_1) \wedge e^3(x_2) + \\ + \omega_{13} e^1(x_1) \wedge e^3(x_2). \tag{18}$$

Наряду с этим, учитывая п. 6, можно писать также

$$\omega = \omega_{12} x^1 \wedge x^2 + \omega_{23} x^2 \wedge x^3 + \omega_{13} x^1 \wedge x^3. \tag{19}$$

Записи (18) и (19) выражают одно и то же в разных способах обозначения. Запись вида (17) или (19) условная и может вызвать недоразумения. Поэтому, употребляя ее, нужно помнить, что x^1, $x^2, \ldots$ не являются координатами векторов, а обозначают линейные формы; например:

$$x^1 \wedge x^2 = e^1(x_1) \wedge e^2(x_2) = \begin{vmatrix} e^1(x_1) & e^2(x_1) \\ e^1(x_2) & e^2(x_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix}.$$

Для исчерпывающего разъяснения возьмем числовые данные. Пусть

$$x_1 = x_1^1 e_1 + x_1^2 e_2 + x_1^3 e_3 = 2e_1 + 3e_2 + x_1^3 e_3,$$
$$x_2 = x_2^1 e_1 + x_2^2 e_2 + x_2^3 e_3 = -1e_1 + 5e_2 + x_2^3 e_3.$$

Тогда

$$x^1 \wedge x^2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 13.$$

Здесь найдено числовое значение формы $x^1 \wedge x^2 = e^1 \wedge e^2$ на конкретной паре векторов. Но нужно, конечно, помнить, что сама форма $e^1 \wedge e^2$ как элемент алгебры Грассмана не есть число.

8. В интегральном исчислении и в теории дифференциальных уравнений используются внешние формы, аргументами которых являются дифференциалы переменных. Тогда в выражениях вида (17), (19) вместо $x^1, \ldots, x^n$ пишут соответственно $dx^1, \ldots, dx^n$. Так, например, часто встречается внешняя форма вида (19) в записи

$$\omega = P\ dx^1 \wedge dx^2 + Q\ dx^2 \wedge dx^3 + R\ dx^3 \wedge dx^1,$$

где коэффициенты $P = \omega_{12}$, $Q = \omega_{23}$, $R = -\omega_{13}$ сами являются функциями аргументов x^1, x^2, x^3.

9. Запись внешней формы в виде (17) удобна в тех случаях, когда приходится переходить к новому базису и даны выражения старых координат через новые:

$$\left.\begin{array}{l} x^1 = P^1_{1'} x^{1'} + \ldots + P^1_{n'} x^{n'}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^n = P^n_{1'} x^{1'} + \ldots + P^n_{n'} x^{n'}. \end{array}\right\} \tag{20}$$

Тогда имеет место следующее равенство:

$$x^{i_1} \wedge x^{i_2} \wedge \ldots \wedge x^{i_k} = *\sum D^{i_1 \ldots i_k}_{j'_1 \ldots j'_k} x^{j'_1} \wedge x^{j'_2} \wedge \ldots \wedge x^{j'_k}, \tag{21}$$

где $D^{i_1 \ldots i_k}_{j'_1 \ldots j'_k}$ — минор матрицы $\begin{Vmatrix} P^1_{1'} & \ldots & P^1_{n'} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ P^n_{1'} & \ldots & P^n_{n'} \end{Vmatrix}$, стоящий на пересечении строк с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов с номерами $j'_1, \ldots, j'_k$ $(j'_1 < j'_2 < \ldots < j'_k)$.

Доказательство формулы (21) проводится путем почленного перемножения линейных форм $x^{i_1}, \ldots, x^{i_k}$, которые следует рассматривать как линейные комбинации форм $x^{j'_1}, \ldots, x^{j'_n}$ согласно равенствам (20). При этом получаем

$$x^{i_1} \wedge x^{i_2} \wedge \ldots \wedge x^{i_k} = \left(\sum P^{i_1}_{i'_1} x^{i'_1}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum P^{i_k}_{i'_k} x^{i'_k}\right) =$$

$$= {}^*\sum_{j'_1 \ldots j'_k} \left(\sum_{i'_1 \ldots i'_k} P^{i_1}_{i'_1} \ldots P^{i_k}_{i'_k} \delta^{i'_1 \ldots i'_k}_{j'_1 \ldots j'_k}\right) x^{j'_1} \wedge \ldots \wedge x^{j'_k} =$$

$$= {}^*\sum D^{i_1 \ldots i_k}_{j'_1 \ldots j'_k} x^{j'_1} \wedge \ldots \wedge x^{j'_k}.$$

Замечание. Формула (21) может быть написана сразу же на основании пп. 5, 6 § 4. Достаточно в формуле (5) указанного параграфа в качестве векторов $b_1, \ldots, b_k$ взять формы $x^{i_1}, \ldots, x^{i_k}$, а в качестве векторов $e_1, \ldots, e_n$ взять формы $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$.

10. В заключение параграфа сформулируем три важные теоремы о внешних формах, которые получаются из определений и результатов § 3 заменой L на L^*.

Теорема 1. *Ранг r всякой внешней формы второй степени есть четное число, не превышающее размерности пространства* ($r = 2m \leqslant n$).

Теорема 2. *Если $\omega^2(x \wedge y)$ — внешняя форма второй степени ранга $r = 2m$, то найдется система независимых линейных форм $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ такая, что*

$$\omega^2(x \wedge y) = p_1(x) \wedge q_1(y) + \ldots + p_m(x) \wedge q_m(y).$$

Теорема 3 (Лемма Картана для внешних форм). *Пусть $p_1(x), \ldots, p_s(x), q_1(x), \ldots, q_s(x)$ — линейные формы, причем $p_1(s), \ldots, p_s(x)$ независимы. Для того чтобы*

$$p_1(x) \wedge q_1(y) + \ldots + p_s(x) \wedge q_s(y) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали разложения вида

$$q_i(x) = \alpha_{i1} p_1(x) + \ldots + \alpha_{is} p_s(x),$$

где $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ (α_{ij} — числовые коэффициенты).

§ 8. Внешние формы в трехмерном евклидовом пространстве

1. В качестве геометрической иллюстрации материала двух предыдущих параграфов рассмотрим внешние формы в трехмерном евклидовом пространстве E_3 и покажем, что они тесно связаны с известными операциями элементарной векторной алгебры. Будем считать, что e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис, a, b, p, q — зафиксированные векторы, x, y, z — переменные векторы, пробегающие все E_3. Координаты векторов будем обозначать нижними индексами, так как расположение индексов не имеет значения в силу ортонормированности базиса (в таком базисе контравариантные координаты векторов равны ковариантным, см. гл. VIII).

Согласно п. 4 § 6 нам нужно рассмотреть k-формы лишь при $k=1, 2, 3$.

2. Напомним (см. гл. VIII), что всякая линейная форма в евклидовом пространстве может быть представлена в виде скалярного произведения постоянного вектора a на переменный вектор x, и каждый вектор $a \in E_3$ определяет линейную форму (a, x), которую мы сейчас обозначим $\omega_a^1(x)$:

$$\omega_a^1(x)=(a, x)=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3. \tag{1}$$

Формула (1) устанавливает линейный изоморфизм между пространством E_3, рассматриваемым как множество векторов a, и пространством линейных форм.

Полагая $a=e_i$, мы получим базисные линейные формы $\omega_{e_i}^1$, которые будем сокращенно обозначать ω_i^1:

$$\omega_i^1(x)=(e_i, x)=x_i, \qquad i=1, 2, 3. \tag{2}$$

Формулу (1) можно рассматривать как разложение формы ω_a^1 по базису (2) и переписать в виде

$$\omega_a^1=a_1\omega_1^1+a_2\omega_2^1+a_3\omega_3^1. \tag{3}$$

3. Рассмотрим смешанное произведение (a, x, y), в котором первый сомножитель зафиксирован, а два других меняются. Оно линейно по каждому из аргументов и кососимметрично по x и y ($(a, y, x)=-(a, x, y)$), так что представляет собой 2-форму, которую мы обозначим $\omega_a^2(x\wedge y)$. Из элементарного курса аналитической геометрии известно, что числовое значение $\omega_a^2(x\wedge y)$ равно произведению площади S бивектора

$x \wedge y$ на длину $|a|$ вектора a и на косинус угла α между заданным вектором a и стандартно ориентированной нормалью бивектора $x \wedge y$ (рис. 75). Таким образом,

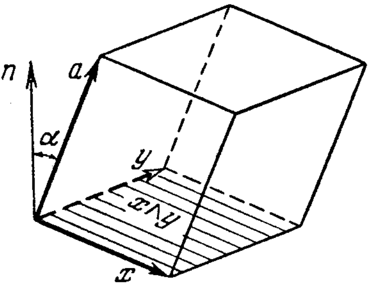


Рис. 75.

$$\omega_a^2(x \wedge y) = (a, x, y) = \\ = S\,|a|\cos\alpha. \quad (4)$$

Обозначим через X матрицу, составленную из координат векторов x, y:

$$X = \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \right\|$$

и положим

$$V_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}, \\ i, j = 1, 2, 3, \; i \neq j. \quad (5)$$

Тогда по известной формуле для смешанного произведения имеем

$$\omega_a^2(x \wedge y) = a_1 V_{23} + a_2 V_{31} + a_3 V_{12}. \quad (6)$$

Мы знаем (см. § 7, формулы (16) — (19)), что произвольная 2-форма $\omega^2(x \wedge y)$ в E_3 имеет вид

$$\omega^2(x \wedge y) = \omega_{12} V_{12} + \omega_{13} V_{13} + \omega_{23} V_{23}. \quad (7)$$

Возьмем вектор a с координатами

$$a_1 = \omega_{23}, \qquad a_2 = -\omega_{13}, \qquad a_3 = \omega_{12}. \quad (8)$$

Тогда правые части формул (7) и (6) совпадут.

Вывод. Любая внешняя форма второй степени в трехмерном евклидовом пространстве может быть представлена в виде смешанного произведения (a, x, y) при надлежащем выборе зафиксированного вектора a, который однозначно определяется формулами (8).

4. Полагая $a = e_i$, получим 2-форму $\omega_{e_i}^2$, которую сокращенно обозначим ω_i^2 $(i = 1, 2, 3)$. Используя формулы (2), (5), (6) и учитывая пп. 5—7 § 7, можем написать:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^2(x \wedge y) &= V_{23} = -V_{32} = \omega_2^1(x) \wedge \omega_3^1(y), \\ \omega_2^2(x \wedge y) &= V_{31} = -V_{13} = \omega_3^1(x) \wedge \omega_1^1(y), \\ \omega_3^2(x \wedge y) &= V_{12} = -V_{21} = \omega_1^1(x) \wedge \omega_2^1(y). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Численное значение каждой из 2-форм (9) равно площади проекции бивектора $x \wedge y$ на соответствующую из координатных плоскостей. Геометрически ясно, что должно быть именно так. Например, произведение площади бивектора $x \wedge y$ на косинус угла γ между базисным вектором e_3 и нормалью бивектора $x \wedge y$ равно площади проекции бивектора $x \wedge y$ на координатную плоскость E_{12}, натянутую на векторы e_1 и e_2 (см. рис. 76). Длина вектора, участвующая в формуле (4), в данном случае равна единице ($a = e_3$).

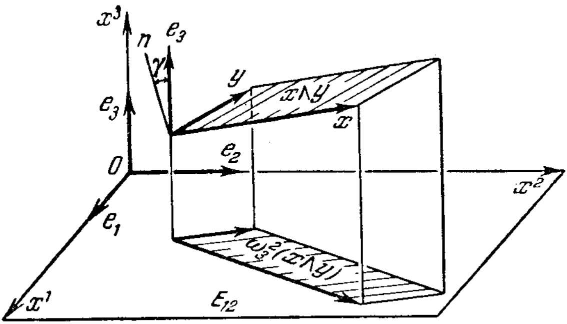


Рис. 76.

Используя (9), разложение (6) можно переписать так:

$$\omega_a^2 = a_1\omega_1^2 + a_2\omega_2^2 + a_3\omega_3^2 =$$
$$= a_1\omega_2^1 \wedge \omega_3^1 + a_2\omega_3^1 \wedge \omega_1^1 + a_3\omega_1^1 \wedge \omega_2^1. \qquad (10)$$

Формула (10) устанавливает линейный изоморфизм между множеством векторов a и пространством 2-форм с аргументами из E_3. Именно, сложению форм ω_a^2 и ω_b^2 соответствует сложение векторов

$$\omega_a^2 + \omega_b^2 = \omega_{a+b}^2,$$

умножению формы на число отвечает умножение вектора на число

$$\lambda\omega_a^2 = \omega_{\lambda a}^2.$$

5. Смешанное произведение трех переменных векторов (x, y, z) представляет собой внешнюю форму третьей степени, которую мы обозначим ω_1^3:

$$\omega_1^3(x \wedge y \wedge z) = (x, y, z).$$

Ее значение на поливекторе $x \wedge y \wedge z$ равно ориентированному объему V этого поливектора. Поскольку пространство внешних форм третьей степени одномерно ($k = n$, см. в связи с этим гл. V, § 8), то мы имеем

$$\omega^3(x, y, z) = \lambda\omega_1^3(x \wedge y \wedge z) = \lambda(x, y, z),$$

то есть произвольная внешняя форма третьей степени пропорциональна смешанному произведению ее аргументов и однозначно определяется числовым множителем λ.

6. Покажем, что внешнему умножению линейных форм соответствует векторное умножение векторов. Именно, справедлива следующая формула:

$$\omega_a^1(x) \wedge \omega_b^1(y) = \omega_{[a \times b]}^2(x \wedge y), \tag{11}$$

где $[a \times b]$, как обычно, обозначает векторное произведение.

Доказательство. Пользуясь свойствами внешнего умножения, перечисленными в п. 9 § 6, находим

$$\omega_a^1 \wedge \omega_b^1 = (a_1\omega_1^1 + a_2\omega_2^1 + a_3\omega_3^1) \wedge (b_1\omega_1^1 + b_2\omega_2^1 + b_3\omega_3^1) =$$
$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \omega_2^1 \wedge \omega_3^1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \omega_3^1 \wedge \omega_1^1 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \omega_1^1 \wedge \omega_2^1. \tag{12}$$

Сравнивая (12) и (10), получаем (11).

Обратим внимание на то, что выкладка (12) с алгебраической точки зрения совпадает с выводом формулы векторного произведения через координаты сомножителей, хорошо известным из элементарного курса аналитической геометрии.

7. Формула (11) позволяет дать другое доказательство того, что произвольная 2-форма $\omega^2(x \wedge y)$ в E_3 представляется в виде смешанного произведения (a, x, y).

Именно, по теореме 2 из п. 10 § 7 найдутся две линейные формы, которые, согласно п. 2 этого параграфа, можно записать в виде ω_p^1 и ω_q^1, такие, что

$$\omega^2(x \wedge y) = \omega_p^1(x) \wedge \omega_q^1(y). \tag{13}$$

Полагая $a = [p \times q]$, из (13), (11) и (4) получаем

$$\omega^2(x \wedge y) = \omega_a^2(x \wedge y) = (a, x, y).$$

8. Внешнему умножению линейной формы на 2-форму соответствует скалярное умножение векторов, именно

$$\omega_a^1(x) \wedge \omega_b^2(y \wedge z) = (a,\ b)\,\omega_1^3(x \wedge y \wedge z) = \\ = (a,\ b)(x,\ y,\ z). \tag{14}$$

В самом деле, согласно (3) и (10) имеем разложения

$$\left.\begin{aligned} \omega_a^1 &= a_1\omega_1^1 + a_2\omega_2^1 + a_3\omega_3^1, \\ \omega_b^2 &= b_1\omega_2^1 \wedge \omega_3^1 + b_2\omega_3^1 \wedge \omega_1^1 + b_3\omega_1^1 \wedge \omega_2^1. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Перемножаем почленно выражения (15) и, используя свойства внешнего умножения, находим

$$\omega_a^1 \wedge \omega_b^2 = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(\omega_1^1 \wedge \omega_2^1 \wedge \omega_3^1). \tag{16}$$

Аналогично формуле (15) § 7 можно показать, что значение 3-формы $\omega_1^1 \wedge \omega_2^1 \wedge \omega_3^1$ на поливекторе $x \wedge y \wedge z$ равно определителю, составленному из координат векторов x, y, z, то есть

$$\omega_1^1 \wedge \omega_2^1 \wedge \omega_3^1 = \omega_1^3. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует (14).

ГЛАВА XI. ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Общее уравнение гиперповерхности второго порядка

1. Пусть дано действительное n-мерное аффинное пространство $\mathfrak{A}_n$ и в нем система аффинных координат с началом O и базисом $e_1, \ldots, e_n$.

Гиперповерхностью второго порядка в $\mathfrak{A}_n$ называется геометрическое место точек $M \in \mathfrak{A}_n$, у которых радиус-вектор $x = \overline{OM}$ удовлетворяет уравнению

$$a(x, x) + 2b(x) + c = 0, \tag{1}$$

где $a(x, x)$ — квадратичная форма, $b(x)$ — линейная форма, c — постоянная. Формы $a(x, x)$ и $b(x)$ предполагаются инвариантными относительно изменения базиса.

2. Если положить $x = \overline{OM} = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, то уравнение (1) получит координатную запись:

$$\sum a_{ik} x_i x_k + 2 \sum b_i x_i + c = 0. \tag{2}$$

Здесь $x_1, \ldots, x_n$ — координаты точки M. Их называют текущими координатами, считая M любой точкой. Квадратичная форма $a(x, x) = \sum a_{ij} x_i x_j$ называется группой старших членов уравнения (1) или (2). Линейная форма

$$2b(x) = 2 \sum b_i x_i$$

называется группой членов первой степени. Постоянная c называется свободным членом уравнения.

Замечание. Всюду в пределах этой главы мы будем помечать координаты нижними индексами, так как пользоваться тензорной алгеброй не придется.

3. Может случиться, что в действительном $\mathfrak{A}_n$ для некоторого уравнения вида (2) нет ни одной удовлетворяющей ему точки. Все-таки и про такое уравнение говорят, что оно есть уравнение гиперповерхности второго порядка. Иногда при этом гиперповерхность называют мнимой (или нулевой).

Например, говорят, что уравнение $x^2+y^2+z^2+1=0$ есть уравнение мнимой сферы (в евклидовом пространстве с системой декартовых прямоугольных координат x, y, z). Разумеется, за такими словами не содержится определенного геометрического смысла, пока мы остаемся в действительном пространстве. Но единообразие терминологии удобно по формально-алгебраическим соображениям. Дело в том, что предметом теории, которой посвящена эта глава, по существу являются не столько гиперповерхности, сколько сами уравнения. В теории этих уравнений невыгодно какие-либо случаи исключать из рассмотрения, во-первых, потому, что заранее не ясно, определяет ли уравнение какое-нибудь непустое множество точек или нет; во-вторых, даже в том случае, когда оно определяет пустое множество, его левая часть может иметь какой-либо механический или физический смысл.

4. Можно доказать, что в комплексном аффинном пространстве всякое уравнение вида (2) определяет непустое множество точек. Однако мы ограничиваемся действительным $\mathfrak{A}_n$. Лишь в некоторых случаях мы будем говорить о комплексных точках (например, если совместное решение уравнений прямой и гиперповерхности приводит к комплексным значениям искомых координат).

5. Уравнение (2) с буквенными коэффициентами называется общим уравнением гиперповерхности второго порядка. Оно содержит $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ членов. Число это при сколько-нибудь значительных n весьма велико. Поэтому непосредственное исследование гиперповерхности по ее уравнению, написанному в произвольной системе координат, оказывается затруднительным.

Далее будут указаны приемы, которые позволяют общее уравнение (2) привести к некоторым специальным видам, когда уравнение является неполным и называется каноническим.

§ 2. Изменение левой части уравнения при переносе начала координат

1. Всю левую часть уравнения гиперповерхности второго порядка обозначим символом $2F$, рассматривая F как функцию текущих координат:

$$2F(x_1, \ldots, x_n)=\sum a_{ik}x_ix_k+2\sum b_ix_i+c.$$

Согласно § 2 гл. III при переносе начала координаты меняются по формуле $x_i = \tilde{x}_i + x_i^0$, где (x_i) — старые координаты произвольной точки, $(\tilde{x}_i)$ — ее новые координаты, (x_i^0) — координаты нового начала в старой системе координат.

Подставим эти выражения в функцию F и перегруппируем слагаемые, собрав члены со вторыми и с первыми степенями новых координат. При этом существенно используем симметричность матрицы квадратичной формы ($a_{ik} = a_{ki}$):

$$2F(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{ik}(\tilde{x}_i + x_i^0)(\tilde{x}_k + x_k^0) + 2\sum b_i(\tilde{x}_i + x_i^0) + c =$$
$$= \sum a_{ik}\tilde{x}_i\tilde{x}_k + 2\sum_i \left(\sum_k a_{ik}x_k^0 + b_i\right)\tilde{x}_i +$$
$$+ \left(\sum a_{ik}x_i^0 x_k^0 + 2\sum b_i x_i^0 + c\right).$$

Если функцию F в новых координатах запишем по старому стандарту:

$$2F = \sum \tilde{a}_{ik}\tilde{x}_i\tilde{x}_k + 2\sum \tilde{b}_i\tilde{x}_i + c,$$

то

$$\tilde{a}_{ik} = a_{ik}, \qquad \text{(I)}$$

$$\tilde{b}_i = \left(\sum_k a_{ik}x_k^0\right) + b_i, \qquad \text{(II)}$$

$$\tilde{c} = \sum a_{ik}x_i^0 x_k^0 + 2\sum b_i x_i^0 + c. \qquad \text{(III)}$$

2. Величина $\tilde{c}$ представляет собой левую часть первоначального уравнения, в которую вместо координат текущей точки подставлены координаты нового начала:

$$\tilde{c} = 2F(x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

Обратим внимание на то, что формулу (II) можно записать иначе:

$$\tilde{b}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

Здесь частная производная функции F по аргументу x_i подсчитана по координатам нового начала $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

3. Для более компактной записи формул (I) — (III) введем матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \ldots & b_n & c \end{Vmatrix}.$$

Матрицу B и другие матрицы порядка $n+1$ будем выделять специальным шрифтом.

Соотношение (I) в матричной форме запишется так:

$$\tilde{A} = A. \tag{Ia}$$

Функцию F с помощью искусственного приема удобно записать в виде квадратичной формы. Для этой цели введем дополнительную координату x_{n+1}, употребляя ее как условный символ и всюду считая, что $x_{n+1} = 1$.

Кроме того, будем считать, что $b_i = a_{i\,n+1} = a_{n+1\,i}$, $c = a_{n+1\,n+1}$.

Тогда формулы $x_k = \tilde{x}_k + x_k^0$ можно записать в виде следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1 + \qquad\qquad + x_1^0\,\tilde{x}_{n+1}, \\ x_2 &= \qquad \tilde{x}_2 + \qquad + x_2^0\,\tilde{x}_{n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \qquad\qquad\quad \tilde{x}_n + x_n^0\,\tilde{x}_{n+1}, \\ x_{n+1} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \tilde{x}_{n+1}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Последнее равенство показывает, что $\tilde{x}_{n+1} = 1$, так же как x_{n+1}.

За счет введения дополнительной координаты все формулы преобразования координат становятся однородными (без свободных членов). Кроме того, сама левая часть уравнения (2) § 1 становится однородной. Именно, в новых обозначениях, можно написать

$$2F = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k + 2\sum_{i=1}^{n} a_{i\,n+1}x_i x_{n+1} + a_{n+1\,n+1}\,x_{n+1}\,x_{n+1} = \sum_{i,\,k=1}^{n+1} a_{ik}x_i x_k.$$

Получилась квадратичная форма с матрицей B.

Матрица преобразования (1) выражает старые координаты через новые и согласно стандарту должна обозначаться P^*:

$$\mathsf{P}^* = \begin{Vmatrix} 1 & & & 0 & x_1^0 \\ & 1 & & & x_2^0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & x_n^0 \\ & & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Рассматривая функцию F как квадратичную форму аргументов $x_1, \ldots, x_{n+1}$, мы можем применить известную формулу для преобразования матрицы квадратичной формы. В результате получим матричное равенство

$$\tilde{\mathsf{B}} = \mathsf{PBP}^*, \tag{2}$$

которое охватывает все формулы (I) — (III).

Матричная формула (2) позволяет сформулировать важную теорему.

Теорема 1. *Определитель матрицы* B *и ее ранг являются инвариантами относительно переноса начала координат, то есть*

$$\operatorname{Det} \tilde{\mathsf{B}} = \operatorname{Det} \mathsf{B}, \qquad \operatorname{Rang} \tilde{\mathsf{B}} = \operatorname{Rang} \mathsf{B}.$$

Доказательство. Непосредственно видно, что $\operatorname{Det} \mathsf{P}^* = \operatorname{Det} \mathsf{P} = 1$, поэтому теорема вытекает из формулы (2).

Замечание. Что касается матрицы A, то при переносе начала координат она сама является инвариантом, то есть все ее элементы сохраняются.

§ 3. Изменение левой части уравнения при изменении ортонормированного базиса

1. Чтобы не усложнять вычислений, будем в дальнейшем считать, что мы находимся в евклидовом пространстве (точечном) и пользуемся ортонормированными базисами.

Допустим, что мы делаем переход от одного ортонормированного базиса к другому:

$$\left.\begin{array}{l} e_1' = l_{11} e_1 + \ldots + l_{n1} e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n' = l_{1n} e_1 + \ldots + l_{nn} e_n. \end{array}\right\}$$

Ортогональная матрица $l = \| l_{ij} \|$ записана так, что возрастание первого индекса идет по строке.

Координаты точек преобразуются по формулам

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = l_{11} x_1' + \ldots + l_{1n} x_n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = l_{n1} x_1' + \ldots + l_{nn} x_n'. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Матрица

$$I^* = \begin{Vmatrix} l_{11} & \dots & l_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ l_{n1} & \dots & l_{nn} \end{Vmatrix}$$

также является ортогональной.

Формулы (1) — однородные (не содержат свободных членов), так как начало координат сохраняется на месте.

2. Перейдем в левой части уравнения (2) § 1 к новым координатам по формулам (1). Имеем

$$2F(x_1, \dots, x_n) = \sum a'_{ik}x'_i x'_k + 2\sum b'_i x'_i + c',$$

где штрихами обозначены новые коэффициенты. Вследствие однородности формул (1) группы членов разных степеней преобразуются автономно. В частности, свободный член сохраняется без изменения:

$$c' = c.$$

Аналогично

$$\sum a'_{ik}x'_i x'_k = \sum a_{ik}x_i x_k.$$

Отсюда в матричной записи получим

$$A' = IAI^*.$$

Вследствие ортогональности матрицы I ее транспонированная матрица равна обратной: $I^* = I^{-1}$; поэтому

$$A' = IAI^{-1}.$$

Из этого матричного равенства аналогично п. 4 § 2 гл. VII получается

Теорема 1. *При переходе от одного ортонормированного базиса к другому левая часть уравнения имеет инварианты* Det A, Rang A *и характеристический многочлен* $p(\lambda)$ *матрицы* A.

Замечание 1. Многочлен $p(\lambda)$ содержит Det A в качестве одного из коэффициентов, поэтому инвариантность Det A вытекает из инвариантности $p(\lambda)$.

Замечание 2. Если напишем $p(\lambda)$ подробно

$$p(\lambda) = (-1)^n \{\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n p_n\},$$

то увидим, что $p_1, p_2, \dots, p_n$ инвариантны; то есть при переходе к новому ортонормированному базису сохраняются суммы главных миноров первого порядка матрицы A, суммы главных миноров второго порядка и т. д. Таким образом,

$$\operatorname{Rang} A' = \operatorname{Rang} A,$$
$$p_1' = p_1, \ldots, p_{n-1}' = p_{n-1}, \quad \operatorname{Det} A' = \operatorname{Det} A.$$

3. Найдем закон преобразования матрицы B. Снова введем обозначения $b_i = a_{i\,n+1}$, $c = a_{n+1\,n+1}$. Тогда

$$2F = \sum_{i,\,k=1}^{n+1} a_{ik} x_i x_k,$$

где $x_{n+1} = 1$. Припишем к формулам (1) еще одно равенство и полученные формулы сокращенно запишем так:

$$\left.\begin{aligned} &(1), \\ x_{n+1} &= x_{n+1}'. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Матрица формул преобразования (2) имеет вид

$$\mathsf{I}^* = \begin{vmatrix} I_{11} & \ldots & I_{1n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ I_{n1} & \ldots & I_{nn} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно сообразить, что

$$\mathsf{I}^* = \mathsf{I}^{-1}.$$

Действительно, последнее из соотношений (2) обращается тривиально: нужно только поменять местами левую и правую части. Что касается формул (1), то их обращению соответствует транспонирование матрицы I^*.

Таким образом искомая формула преобразования матрицы B квадратичной формы $2F$ имеет вид:

$$\mathsf{B}' = \mathsf{IBI}^* \quad \text{или} \quad \mathsf{B}' = \mathsf{IBI}^{-1}. \qquad (3)$$

Из формулы (3) получается

Теорема 2. *При переходе от одного ортонормированного базиса к другому определитель и ранг матрицы* B *инвариантны:*

$$\operatorname{Det} \mathsf{B}' = \operatorname{Det} \mathsf{B}, \qquad \operatorname{Rang} \mathsf{B}' = \operatorname{Rang} \mathsf{B}.$$

4. Из формулы (Ia) § 2, теоремы 1 § 2 и теорем 1—2 § 3 вытекает

Следствие. *При общем преобразовании координат, состоящем из переноса начала и перехода от старого ортонормированного базиса к новому ортонормированному базису, инвариантами являются*

$$\operatorname{Det} \mathbf{B}, \quad \operatorname{Rang} \mathbf{B}, \quad \operatorname{Det} A, \quad \operatorname{Rang} A$$

и характеристический многочлен $p(\lambda)$ *матрицы* A.

§ 4. Центр гиперповерхности второго порядка

1. Центром гиперповерхности второго порядка обычно называют такую точку пространства $\mathfrak{A}_n$, относительно которой все точки гиперповерхности расположены симметрично парами. Таким образом, когда говорят о центре, то подразумевают центр симметрии (рис. 77).

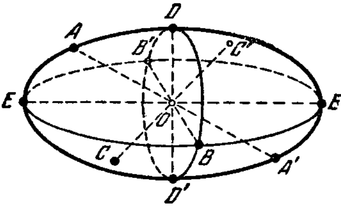


Рис. 77.

К сожалению, в действительном пространстве это определение теряет силу в тех случаях, когда для уравнения гиперповерхности нет ни одной удовлетворяющей ему точки. Однако и в таких случаях могут быть точки, которые целесообразно считать центрами по алгебраическим соображениям. Например, центром мнимой сферы $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ является начало координат. Поэтому мы предпочтем определить понятие центра гиперповерхности второго порядка иным способом.

2. Рассмотрим неполное уравнение

$$\sum a_{ik} x_i x_k + c = 0. \tag{1}$$

Если точка $(x_1, \ldots, x_n)$ лежит на гиперповерхности (1), то и симметричная ей точка $(-x_1, \ldots, -x_n)$ тоже лежит на гиперповерхности (1).

Следовательно, если существуют точки, удовлетворяющие уравнению (1), то начало координат является центром симметрии гиперповерхности (1).

Исходя из этого, мы дадим следующее формально-алгебраическое определение центра.

Центром произвольной гиперповерхности второго порядка будем называть такую точку, что если поместить в нее начало координат, то уравнение гиперповерхности примет неполный вид (1). Таким образом, мы объявляем центром всякую точку, относительно которой левая часть уравнения обладает центральной симметрией (не меняется при замене $x_1, \ldots, x_n$ на $-x_1, \ldots, -x_n$).

3. Пусть дано общее уравнение второй степени:

$$\sum a_{ik}x_ix_k + 2\sum b_ix_i + c = 0.$$

Мы хотим выяснить, существует ли центр, и найти его. Перенесем начало координат в точку $\tilde{O}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$; получим уравнение

$$\sum a_{ik}\tilde{x}_i\tilde{x}_k + 2\sum \tilde{b}_i\tilde{x}_i + \tilde{c} = 0.$$

Новое начало будет центром в том и только в том случае, когда

$$\tilde{b}_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Равенства (2) с учетом равенств (II) § 2 дают так называемые уравнения центра (уравнения, определяющие центр)

$$\sum a_{ik}x_k^0 + b_i = 0.$$

В подробной записи уравнения центра выглядят так:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1^0 + \ldots + a_{1n}x_n^0 = -b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1^0 + \ldots + a_{nn}x_n^0 = -b_n. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Матрица системы (3) совпадает с матрицей A.

Если $\operatorname{Det} A \neq 0$, то система (3) имеет единственное решение. Тогда гиперповерхность имеет единственный центр. Такая гиперповерхность называется ***центральной.***

Если $\operatorname{Det} A = 0$, то система (3) либо несовместна, и тогда центра нет (как, например, у параболы), либо совместна, и тогда центров бесконечно много (как у круглого цилиндра или пары параллельных плоскостей).

4. Само определение центра подсказывает первый шаг упрощения уравнения: нужно перенести начало координат в центр.

5. Введем два символа:

$$\delta = \operatorname{Det} A, \qquad \Delta = \operatorname{Det} \mathbf{B}.$$

Признаком центральной поверхности является неравенство $\delta \neq 0$.

§ 5. Приведение к каноническому виду общего уравнения гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве

1. Гиперповерхности второго порядка распределяются на несколько классов, для которых получаются разные простейшие, как говорят, канонические формы уравнений.

2. В теоретическом изложении мы не будем стремиться к экономии операций и начнем с поворота системы координат. При практических вычислениях, если поверхность центральная, то лучше в качестве первого этапа перенести начало координат в центр.

3. Будем рассматривать гиперповерхность в евклидовом пространстве и пользоваться только ортонормированными базисами. Пусть дано общее уравнение $2F(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Прежде всего рассмотрим самосопряженное преобразование с матрицей A, которая является матрицей квадратичной формы — группы старших членов. Все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического многочлена этого преобразования действительны, и существует ортонормированный базис из собственных векторов $e'_1, \ldots, e'_n$, причем вектору e'_k соответствует собственное значение λ_k, $k = 1, \ldots, n$ (см. гл. IX, § 3).

Перейдем к этому базису, сохраняя пока прежнее начало координат. Тогда группа старших членов примет канонический вид

$$\sum a_{ik} x_i x_k = \lambda_1 (x'_1)^2 + \ldots + \lambda_n (x'_n)^2,$$

а левая часть уравнения гиперповерхности упростится так:

$$2F = \lambda_1 (x'_1)^2 + \ldots + \lambda_n (x'_n)^2 + 2b'_1 x'_1 + \ldots + 2b'_n x'_n + c.$$

Коэффициенты членов первой степени изменились; поэтому они помечены штрихами. Свободный член c остался без изменений.

4. Дальше нужно рассмотреть несколько случаев.

1) Все характеристические корни отличны от нуля:

$$\lambda_1 \neq 0, \ \ldots, \ \lambda_n \neq 0.$$

Тогда нужно выделить полные квадраты:

$$\lambda_k (x'_k)^2 + 2b_k x'_k = \lambda_k \left(x'_k + \frac{b'_k}{\lambda_k}\right)^2 - \frac{(b'_k)^2}{\lambda_k}.$$

Затем сделаем перенос начала координат по формулам

$$x'_k = \tilde{x}_k - \frac{b'_k}{\lambda_k}.$$

После этого членов первой степени не будет, поэтому новое начало координат является центром поверхности. Получим

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \ldots + \lambda_n \tilde{x}_n^2 = H, \tag{I}$$

где

$$H = -c + \sum \frac{1}{\lambda_k} (b'_k)^2.$$

Уравнение (I) относится к числу канонических.

2) $\lambda_1 \neq 0, \ \ldots, \ \lambda_r \neq 0, \ \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$; r — ранг квадратичной формы старших членов; $r \leqslant n-1$.

Здесь обстановка несколько усложняется, и чтобы избежать слишком больших вычислений преобразование формы старших членов нужно провести с некоторым расчетом.

Прежде всего найдем собственные векторы, отвечающие $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Как нам известно, их можно выбрать так, чтобы они образовали ортонормированную систему $e'_1, \ldots, e'_r$ (см. § 3 гл. IX). Остальные базисные векторы определим позже.

Пусть мы имеем первоначальное уравнение в исходных координатах

$$\sum a_{ik} x_i x_k + 2 \sum b_i x_i + c = 0.$$

Его линейная часть однозначно определяется заданием вектора

$$b = \{b_1, b_2, \ \ldots, \ b_n\}.$$

Разложим вектор b на две составляющие, одна из которых лежит в линейной оболочке $e'_1, \ldots, e'_r$, а другая ортогональна к указанной линейной оболочке:

$$b = \beta_1 e'_1 + \ldots + \beta_r e'_r - p.$$

Для этого нужно положить

$$\beta_1 = (b, e_1'), \ldots, \beta_r = (b, e_r'), \ p = -b + \sum_{i=1}^{r} \beta_i e_i'.$$

Так построенный вектор p ортогонален подпространству $L(e_1', \ldots, e_r')$.

Если $p \neq \theta$, то e_n' мы направим по вектору p. Тогда

$$p = \mu e_n',$$

где μ — числовой коэффициент.

Вектор e_n' берется единичным. Его можно направить так, что будет $\mu = |p|$, или так, что будет $\mu = -|p|$.

Векторы $e_{r+1}', \ldots, e_{n-1}'$ возьмем таким образом, чтобы они образовали вместе с ранее построенными векторами ортонормированную систему: $e_1', e_2', \ldots, e_r', e_{r+1}', \ldots, e_{n-1}', e_n'$.

В остальном выбор векторов $e_{r+1}', \ldots, e_{n-1}'$ произволен.

Если $p = \theta$, то векторы $e_{r+1}', \ldots, e_n'$ возьмем как угодно, лишь бы система $e_1', \ldots, e_n'$ была ортонормированной. Заметим, что и в этом случае соблюдается равенство

$$p = \mu e_n',$$

но только $\mu = |p| = 0$.

Итак,

$$b = \beta_1 e_1' + \ldots + \beta_r e_r' - \mu e_n'. \tag{1}$$

Группы членов второй степени, первой степени и нулевой при переходе к новому базису преобразуются автономно.

Группа старших членов в новом базисе примет вид

$$\sum a_{ik} x_i x_k = \lambda_1 (x_1')^2 + \ldots + \lambda_r (x_r')^2.$$

Группу членов первой степени естественно записать в виде скалярного произведения

$$\sum b_k x_k = (b, x).$$

Вследствие равенства (1)

$$(b, x) = (\beta_1 e_1' + \ldots + \beta_r e_r' - \mu e_n', x) = \beta_1 x_1' + \ldots + \beta_r x_r' - \mu x_n',$$

так как в ортонормированном базисе скалярное произведение любого вектора на базисный равно соответствующей координате: $(e'_i, x) = x'_i$. Таким образом, после перехода к новому базису получается

$$2F = \lambda_1 (x'_1)^2 + \ldots + \lambda_r (x'_r)^2 + \\ + 2\beta_1 x'_1 + \ldots + 2\beta_r x'_r - 2\mu x'_n + c = 0.$$

Свободный член c остался прежним.

Далее выделяем полные квадраты при $k = 1, \ldots, r$:

$$\lambda_k (x'_k)^2 + 2\beta_k x'_k = \lambda_k \left(x'_k + \frac{\beta_k}{\lambda_k}\right)^2 - \frac{1}{\lambda_k} \beta_k^2.$$

Затем делаем перенос начала (только в направлении координатных осей с номерами $1, \ldots, r$):

$$\begin{array}{ll} x'_1 = \tilde{x}_1 - \dfrac{\beta_1}{\lambda_1}, & x'_{r+1} = \tilde{x}_{r+1}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x'_r = \tilde{x}_r - \dfrac{\beta_r}{\lambda_r}, & x'_n = \tilde{x}_n. \end{array}$$

После этого уравнение принимает вид

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \ldots + \lambda_r \tilde{x}_r^2 - 2\mu \tilde{x}_n = H.$$

Если, $\mu = 0$, то получим уравнение

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \ldots + \lambda_r \tilde{x}_r^2 = H, \qquad (*)$$

которое относится к числу канонических. Если $\mu \neq 0$, то напишем

$$2\mu \tilde{x}_n + H = 2\mu \left(\tilde{x}_n + \frac{H}{2\mu}\right).$$

Сделаем дополнительный перенос начала координат по направлению оси $\tilde{x}_n$ на величину $-\frac{H}{2\mu}$. Обозначений координат менять не будем, чтобы не осложнять запись.

Уравнение примет вид

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \ldots + \lambda_r \tilde{x}_r^2 - 2\mu x_n = 0. \qquad (**)$$

И это уравнение является каноническим.

Никаких других случаев, кроме рассмотренных выше, быть не может. Остается только навести порядок: составить каталог и расклассифицировать гиперповерхности второго порядка.

§ 6. Классификация гиперповерхностей второго порядка в евклидовом пространстве

1. На основании упрощения уравнений, проведенного выше, естественно выделяются следующие классы гиперповерхностей:

I) $\delta = \operatorname{Det} A \neq 0$. Это значит, что ни одно λ_i не равно нулю. Сюда попадают все случаи, помеченные номером (I), и только они. Имеем каноническое уравнение

$$\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = H. \tag{I}$$

Здесь и в дальнейшем мы пишем текущие координаты без дополнительных пометок.

II) $\delta = \operatorname{Det} A = 0$, $\mu \neq 0$, $r = \operatorname{Rang} A = n - 1$. Имеем соответствующее каноническое уравнение

$$\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1}^2 - 2\mu x_n = 0 \tag{II}$$

(оно получается из (**) § 5 при $r = n - 1$).

I′) $\delta = 0$, $\mu = 0$. (Так как $\delta = 0$, то $r < n$.) В этот класс входят поверхности с каноническими уравнениями вида (*) § 5, то есть

$$\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 = H, \tag{I′}$$

где $1 \leqslant r \leqslant n - 1$.

II′) $\delta = 0$, $\mu \neq 0$, $r < n - 1$. Сюда попадают поверхности с каноническими уравнениями вида (**) § 5 при $r < n - 1$, то есть

$$\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 - 2\mu x_n = 0. \tag{II′}$$

Здесь $1 \leqslant r \leqslant n - 2$.

Указанные классы исчерпывают все возможности. Случаи, когда уравнение имеет вид (I) или (II), являются основными. Случаи (I′) и (II′) повторяют основные случаи, но только в подпространстве меньшей размерности.

2. Запишем матрицы A и B для основных случаев.

Случай I.

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{Vmatrix}, \qquad \mathsf{B} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ 0 & & & -H \end{Vmatrix}.$$

Случай II.

$$A=\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ & & & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_{n-1} & & \\ & & & 0 & -\mu \\ & & & -\mu & 0 \end{Vmatrix}.$$

Определение. Гиперповерхность второго порядка называется *невырожденной*, если невырождена матрица $\mathbf{B}$, то есть если

$$\Delta = \operatorname{Det} \mathbf{B} \neq 0.$$

Очевидно, невырожденными являются поверхности (I) при условии, что $H \neq 0$, а также все поверхности (II).

3. Согласно п. 4 § 3, величины $\delta = \operatorname{Det} A$, $\Delta = \operatorname{Det} \mathbf{B}$, $r = \operatorname{Rang} A$, $\operatorname{Rang} \mathbf{B}$ и характеристический многочлен $p(\lambda)$ матрицы A являются инвариантами левой части уравнения в классе ортонормированных координатных систем. Все эти величины могут быть найдены по левой части общего уравнения гиперповерхности, заданной в любых ортонормированных координатах. Кроме того, мы знаем уравнения центра в любых координатах.

Поэтому, не переходя к каноническому уравнению, мы можем определить, является гиперповерхность центральной или нет, является она вырожденной или нет, найти множество всех центров и вычислить все корни λ_j характеристического многочлена матрицы A.

Кроме того, для гиперповерхности типа (I) можно определить H. В самом деле, из п. 2 имеем

$$-H\lambda_1 \ldots \lambda_n = \Delta.$$

При этом $\lambda_1 \ldots \lambda_n = \delta \neq 0$. Отсюда

$$H = -\frac{\Delta}{\delta}.$$

Для гиперповерхности типа (II) имеем

$$-\mu^2\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1} = \Delta.$$

Но произведение $\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}$, взятое со знаком минус, равно в случае $\lambda_n = 0$ коэффициенту p_{n-1} характеристического многочлена $p(\lambda)$. При этом следует считать, что характеристический многочлен написан так, как указано в замечании 2 п. 2 § 3. Отсюда находим

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{p_{n-1}}}. \qquad (1)$$

Подкоренное выражение в формуле (1) положительно, поскольку существование и действительность μ установлены предыдущими исследованиями.

4. Для невырожденных гиперповерхностей случая I имеем

$$\operatorname{Rang} A = n, \qquad \operatorname{Rang} \mathrm{B} = n+1. \qquad (2)$$

Из первого равенства (2) и теоремы Кронекера — Капелли, примененной к системе уравнений центра, заключаем, что все они являются центральными.

Рассмотрим их подробнее.

5. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и H — числа одного знака, то гиперповерхность (I) называется $(n-1)$-*мерным эллипсоидом.* Его уравнение можно переписать так:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1. \qquad (3)$$

Величины a_i называются полуосями эллипсоида $(a_i > 0)$. Нетрудно проверить, что эллипсоид расположен в параллелепипеде, определяемом неравенствами $|x_i| \leqslant a_i$, $i = 1, \ldots, n$. (При $n = 3$ см. рис. 78, при $n = 2$ см. рис. 79.) Обратим внимание на то, что k-мерный эллипсоид при $k = 1$ представляет собой эллипс (рис. 79), при $k = 0$ — пару точек $x_1 = \pm a_1$ (рис. 80).

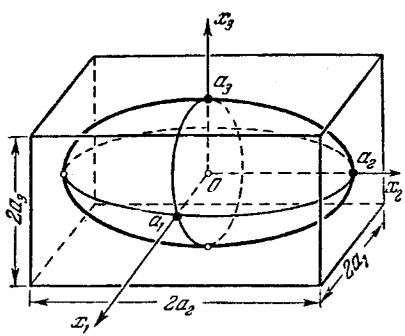


Рис. 78.

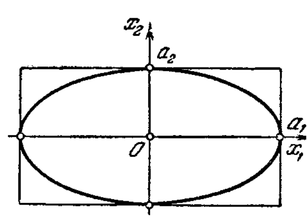


Рис. 79.

Трудно наглядно изобразить на рисунке эллипсоид (3) при $n > 3$. Однако сопоставление рис. 80, 79 и 78 поможет читателю представить себе, как усложняется k-мерный эллипсоид с ростом его размерности k.

Если $a_1 = \ldots = a_n = R$, то эллипсоид (3) называют $(n-1)$-мерной *сферой* радиуса R.

6. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ одного знака, H — другого знака, то поверхность (I) называется *мнимым эллипсоидом*. В действительном пространстве он не имеет точек.

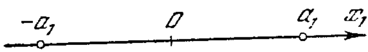


Рис. 80.

7. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ разных знаков и $H \neq 0$, то поверхность (I) называется *гиперболоидом*. В этом случае, разделив обе части уравнения (I) на H, можно привести его к виду

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{b_1^2} - \ldots - \frac{x_n^2}{b_{n-k}^2} = 1. \tag{4}$$

Величины $a_1, \ldots, a_k$ называются *действительными полуосями*, $b_1, \ldots, b_{n-k}$ — *мнимыми полуосями* гиперболоида (4) ($a_i > 0$, $b_i > 0$). В зависимости от сигнатуры левой части уравнения (4) гиперболоиды имеют разное геометрическое строение. В элементарном курсе аналитической геометрии для исследования формы поверхностей рассматривают их сечения различными плоскостями (см., например, рис. 82, 83). Сейчас мы применим такой же прием для того, чтобы составить представление о строении разных гиперболоидов. Рассмотрим частные случаи, начиная со знакомых объектов в пространствах малых размерностей:

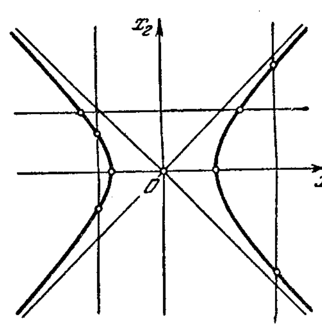


Рис. 81.

1) При $n = 2$ уравнение (4) принимает вид $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{b_1^2} = 1$ и задает гиперболу (рис. 81).

2) При $n=3$ имеются две возможности: двуполостный гиперболоид (рис. 82):

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{b_1^2}-\frac{x_3^2}{b_2^2}=1 \tag{5}$$

и однополостный гиперболоид (рис. 83):

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{b_1^2}=1.$$

3) $n=4$. Здесь нужно рассмотреть три случая:

а) Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{b_1^2}-\frac{x_3^2}{b_2^2}-\frac{x_4^2}{b_3^2}=1 \tag{6}$$

аналогично гиперболе и гиперболоиду (5) состоит из двух отдельных частей, расположенных в полупространствах $x_1 \geqslant a_1$

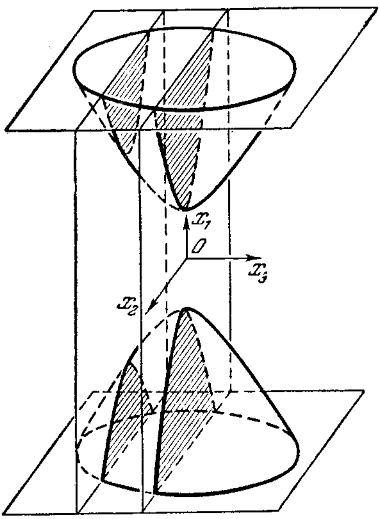


Рис. 82.

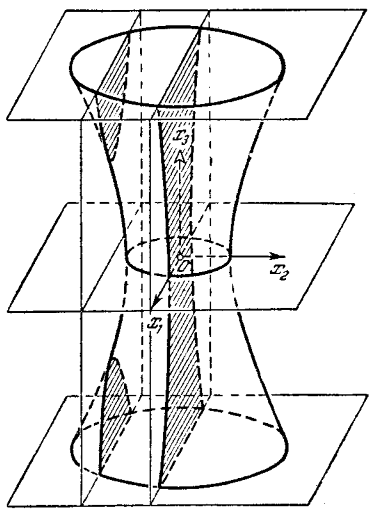


Рис. 83.

и $x_1 \leqslant -a_1$. С гиперплоскостями вида $x_1=\text{const}$ при $|x_1|>a_1$ он пересекается по эллипсоидам, полуоси которых увеличиваются с ростом $|x_1|$. С остальными гиперплоскостями вида $x_i=\text{const}$ $(i=2,\ 3,\ 4)$ гиперболоид (6) пересекается по двуполостным гиперболоидам вида (5).

б) Уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{b_1^2}-\frac{x_4^2}{b_2^2}=1$$

задает новый вид гиперболоида, который характеризуется тем, что с каждой из гиперплоскостей вида $x_i=\text{const}$ он пересекается либо по некоторому гиперболоиду (однополостному или двуполостному) либо по некоторому конусу. (Понятие конуса введено в § 12 гл. IV; подробнее о конусах второго порядка см. ниже, п. 9.) Нужно иметь в виду, что типичным сечением здесь является гиперболоид. Конусы появляются лишь в отдельных гиперплоскостях ($|x_1|=a_1$, $|x_2|=a_2$); их можно рассматривать как вырожденные гиперболоиды. В трехмерном пространстве нет аналогичной поверхности, а для пространств более высокой размерности это наиболее типичный случай.

в) Гиперболоид, аналогичный однополостному:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}-\frac{x_4^2}{b_1^2}=1.$$

Со всеми гиперплоскостями $x_4=\text{const}$ он пересекается по двумерным эллипсоидам, полуоси которых увеличиваются с ростом $|x_4|$; с остальными гиперплоскостями $x_i=\text{const}$ он пересекается по гиперболоидам (однополостным или двуполостным), которые вырождаются в конусы, если $x_i=\pm a_i$.

Наглядно изобразить на чертеже гиперболоиды в четырехмерном пространстве затруднительно. Однако можно представить их себе по аналогии со случаями меньших размерностей, показанными на рис. 81 — 83. При этом нужно учесть, что сечения гиперплоскостями имеют вид поверхностей, изображенных на рис. 78, 82, 83 и 25 (см. также рис. 77 и 88).

В общем случае имеем такие возможности:

а) $n\geqslant 2$, $k=1$ — двуполостный гиперболоид, состоящий из двух частей, расположенных в полупространствах $x_1\geqslant a_1$ и $x_1\leqslant -a_1$. Гиперплоскости $x_1=\text{const}$ ($|x_1|>a_1$) пересекают его по $(n-2)$-мерным эллипсоидам, остальные гиперплоскости $x_i=\text{const}$ ($i=2, \ldots, n$) — по двуполостным гиперболоидам.

б) $n\geqslant 4$, число положительных, а также число отрицательных членов в левой части уравнения (5) не меньше двух.

Такой гиперболоид с каждой из гиперплоскостей $x_i = \text{const}$ пересекается по некоторому гиперболоиду меньшей размерности (быть может, вырождающемуся в конус).

в) $n \geqslant 3$, $k = n - 1$ — гиперболоид, аналогичный однополостному. Все гиперплоскости $x_n = \text{const}$ пересекают его по $(n-2)$-мерным эллипсоидам, остальные гиперплоскости $x_i = \text{const}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ — по гиперболоидам или конусам.

Нетрудно доказать (например, индукцией по размерности пространства), что все гиперболоиды, за исключением двуполостных, содержат прямолинейные образующие.

Обратим еще внимание на то, что каждая k-мерная плоскость вида $x_{k+1} = c_{k+1}, \ldots, x_n = c_n$ $(c_i = \text{const})$ пересекает гиперболоид (4) по $(k-1)$-мерному эллипсоиду, а среди $(n-k)$-мерных плоскостей вида $x_1 = c_1, \ldots, x_k = c_k$ $(c_i = \text{const})$ имеются такие, которые пересекают гиперболоид (4) по $(n-k-1)$-мерным эллипсоидам. Можно доказать, что на гиперболоиде (4) имеются r-мерные эллипсоиды всевозможных размерностей $r \leqslant \max(k-1, n-k-1)$ и нет эллипсоидов более высокой размерности. При $n = 2$, 3 это видно из сопоставления рис. 79—83. Рассматривать общий случай мы не будем.

Если в пространстве, кроме данной евклидовой метрики, ввести другую квадратичную метрику со знакопеременной квадратичной формой, то роль сфер в ней будут выполнять гиперболоиды. В связи с этим двуполостный гиперболоид в четырехмерном пространстве имеет важное значение в теории относительности.

8. Все поверхности с каноническими уравнениями вида (II) являются невырожденными и называются *параболоидами.*

Любой из параболоидов не имеет ни одного центра: по теореме Кронекера — Капелли система уравнений центра в случае параболоидов несовместна, так как ранг основной матрицы A равен $n-1$, а ранг расширенной матрицы равен n (см. матрицы A и $\mathbf{B}$, подробно написанные в п. 2).

Различных видов параболоидов много из-за разных сочетаний знаков λ_i. Их можно исследовать по образцу предыдущего пункта.

9. Рассмотрим теперь вырожденные поверхности, то есть те, для которых $\Delta = \operatorname{Det} \mathbf{B} = 0$.

Их удобно разбить на три группы.

1) Случай (I) при условии, что $H=0$. Тогда $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} \mathbf{B} = n$, и гиперповерхность является центральной. Уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = 0. \qquad (7)$$

Мы знаем, что однородное уравнение второй степени задает *конус* (см. § 12 гл. IV). Если все λ_i одного знака, то конус называется *мнимым*. (Следует иметь в виду, что у него есть одна действительная точка — его центр.)

Если λ_i разных знаков, то конус называют *действительным* в том смысле, что у него есть действительные точки, помимо центра. Изменением нумерации координат и сменой знака левой части уравнения (7) можно добиться, чтобы было $\lambda_1 > 0$, $\lambda_n < 0$, и число отрицательных членов не превышало числа положительных. Тогда уравнение (7) приведется к виду

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{b_1^2} - \ldots - \frac{x_n^2}{b_{n-k}^2} = 0, \qquad (8)$$

где $k \geqslant \frac{n}{2}$. Гиперплоскость $x_n = \text{const} \neq 0$ пересекает конус (8) по $(n-2)$-мерному эллипсоиду, если $k = n-1$, или по гиперболоиду, если $k < n-1$ (последнее возможно лишь при $n \geqslant 4$). Нетрудно проверить, что конус (8) состоит из всевозможных прямых, проходящих через начало координат и через точки поверхности, по которой он пересекается с гиперплоскостью $x_n = \text{const} \neq 0$.

2) Рассмотрим уравнение (I′). Пусть E^* — подпространство размерности r, натянутое на базисные векторы $e_1, \ldots, e_r$. В этом подпространстве уравнение (I′) определяет гиперповерхность типа (I), которую мы обозначим S.

В случае любой размерности уравнение (I′) определяет гиперповерхность, которую называют *цилиндром*. Объясним положение дел подробнее.

Обозначим E^{**} ортогональное дополнение подпространства E^* ($E^{**} = L(e_{r+1}, \ldots, e_n)$). Возьмем произвольный вектор a из E^{**} и сдвинем гиперповерхность (I′) на вектор a. Тогда у каждой ее точки изменятся лишь те координаты, которые не входят в уравнение (I′), то есть $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Поэтому точки, получающиеся при любом таком смещении, тоже удовлетворяют уравнению (I′). Таким образом, гиперповерхность (I′) получается путем параллельного перенесения гиперповерхности S по всевозможным направлениям в подпространстве E^{**}. Эта конструкция есть многомерное обобщение того, как цилиндр $x^2+y^2=1$ в E_3 получается в результате параллельного переноса окружности вдоль оси z (рис. 84). Роль прямолинейных образующих на цилиндре (I′) выполняют $(n-r)$-мерные плоскости, параллельные E^{**}.

Все цилиндры (I′) имеют бесконечно много центров. Нетрудно проверить, что совокупность всех центров совпадает с подпространством E^{**}.

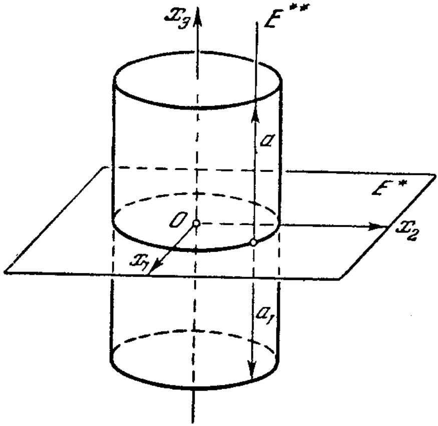


Рис. 84.

3) Уравнения вида (II′) определяют поверхности, называемые *параболическими цилиндрами*. Обозначим $(r+1)$-мерное подпространство, натянутое на векторы $e_1, \ldots, e_r, e_n$, через E', его ортогональное дополнение — через E''. В подпространстве E' уравнение (II′) определяет параболоид, который мы аналогично предыдущему обозначим через S. Гиперповерхность (II′) образована путем параллельного перенесения параболоида S на всевозможные векторы подпространства E''. Параболические цилиндры не имеют центров.

§ 7. Аффинные преобразования

1. Допустим, что в аффинном пространстве $\mathfrak{A}_n$ введена некоторая система аффинных координат и рассматривается преобразование произвольной точки $M(x_1, \ldots, x_n)$ в точку $M'(x_1', \ldots, x_n')$, заданное следующими формулами:

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Будем предполагать, что $n \times n$-матрица $A = \|a_{ij}\|$ невырождена, то есть $\operatorname{Det} A \neq 0$.

Такое преобразование пространства $\mathfrak{A}_n$ называется *аффинным.*

Вследствие невырожденности матрицы A аффинное преобразование является взаимно однозначным.

Легко проверить, что если две формулы вида (1) отличаются хотя бы одним коэффициентом, то аффинные преобразования, которые они задают в какой-либо системе аффинных координат, различны (в смысле п. 1 § 2 гл. VI).

2. Определение класса аффинных преобразований инвариантно относительно выбора аффинных координат.

В самом деле, если мы перейдем к другим аффинным координатам, то старые координаты точки M и ее образа M' выразятся через новые координаты формулами первой степени, а все соотношения, с которыми придется иметь дело, однозначно обратимы. Поэтому при переходе к другим аффинным координатам мы не выйдем из класса однозначно обратимых формул вида (1).

3. Пусть в аффинном пространстве имеется геометрическая фигура $\mathscr{A}$, задаваемая некоторым уравнением вида

$$F(x) = 0, \tag{2}$$

где символом x обозначены координаты текущей точки. Пусть задано аффинное преобразование, которое мы символически обозначим

$$x' = \varphi(x). \tag{3}$$

Найдем уравнение образа $\mathscr{A}'$ фигуры $\mathscr{A}$. Из (3) находим, что $x = \varphi^{-1}(x')$. Подставив это выражение в (2), получим уравнение

$$F(\varphi^{-1}(x')) = 0, \tag{4}$$

которому удовлетворяют все точки фигуры $\mathscr{A}'$. Ввиду взаимной однозначности преобразавания (3) никаких лишних точек не получится (точки не принадлежащие $\mathscr{A}'$, уравнению (4) не удовлетворяют).

Систему координат в пространстве мы не меняем, поэтому для координат текущей точки удобно сохранить прежний символ x (а не x', как в (4)). Окончательно для $\mathscr{A}'$ получаем уравнение

$$F(\varphi^{-1}(x)) = 0.$$

Замечание. Фактически использована лишь взаимная однозначность преобразования (3). Поэтому мы воспользуемся результатами этого пункта в гл. XII при рассмотрении преобразований более общих, чем аффинные.

4. Аффинные преобразования сохраняют степень алгебраического уравнения; именно, если координаты точки M удовлетворяют алгебраическому уравнению k-й степени, то координаты точки M' удовлетворяют уравнению такой же степени.

Доказательство. Так как формулы (1) первой степени, то ни один член уравнения не может повысить свою степень в результате преобразования. Понизиться степень тоже не может, так так в противном случае произошло бы повышение степени при обратном преобразовании.

Следствие. *При аффинном преобразовании гиперплоскость преобразуется в гиперплоскость.*

5. Теорема 1. *При аффинном преобразовании всякая плоскость размерности k переходит в плоскость той же размерности.*

Доказательство. Пусть k-мерная плоскость Π_k задается линейной системой ранга $n-k$, содержащей $n-k$ уравнений. Запишем эту систему в матричной форме

$$Sx = s,$$

где S есть $(n-k)\times n$-матрица, s обозначает матрицу-столбец свободных членов. Аффинное преобразование (1) также запишем в матричной форме:

$$x' = Ax + b.$$

Используя п. 2, находим матричное уравнение образа Π'_k плоскости Π_k:

$$SA^{-1}x = \tilde{s}, \tag{5}$$

где $\tilde{s} = s + SA^{-1}b$ — новый столбец свободных членов. Система (5) тоже содержит $n-k$ уравнений относительно координат текущей точки x. Согласно п. 3 § 4 гл. II и вследствие невырожденности A имеем

$$\operatorname{Rang} SA^{-1} = \operatorname{Rang} S = n-k.$$

Значит, система (5) совместна и определяет плоскость той же размерности k, что и требовалось установить.

6. Очевидно, что аффинные преобразования сохраняют параллельность гиперплоскостей. В самом деле, если до преобразования две гиперплоскости не имели пересечения, то и их образы не будут пересекаться вследствие взаимной однозначности преобразования; отсюда следует параллельность их образов (см. § 6 гл. III).

7. Справедливо более общее утверждение:

Аффинное преобразование сохраняет параллельность плоскостей любых размерностей.

Доказательство предоставляем читателю.

8. Теорема 2. *Аффинное преобразование в n-мерном аффинном пространстве $\mathfrak{A}_n$ определяется однозначно, если в качестве прообразов задана произвольная упорядоченная система точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$ в числе $n+1$, находящихся в общем положении, а в качестве их образов — произвольная аналогичная система $N_0, N_1, \ldots, N_n$.*

Доказательство. Введем в $\mathfrak{A}_n$ аффинную систему координат, приняв M_0 за начало, векторы $\overline{M_0M_1}, \ldots, \overline{M_0M_n}$ за базис. (Эти векторы независимы, поскольку точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ находятся в общем положении; см. п. 5 § 3 гл. III.) Искомое аффинное преобразование задается в этих координатах формулами вида (1), в которых столбец свободных членов состоит из координат точки N_0, а столбец коэффициентов при x_i состоит из координат вектора $\overline{N_0N_i}$. Условие $\operatorname{Det} A \neq 0$ выполняется вследствие того, что точки N_j находятся в общем положении. Таким образом, искомое преобразование существует и единственно.

9. Рассмотрим два преобразования:

1) Линейное преобразование

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{x}_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{x}_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

2) Параллельный перенос

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = \tilde{x}_1 + b_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x'_n = \tilde{x}_n + b_n. \end{array}\right\} \qquad (7)$$

При параллельном переносе все точки одновременно сдвигаются на один и тот же вектор $\{b_1, \ldots, b_n\}$.

Всякое преобразование вида (1) есть суперпозиция преобразований (6) и (7) и обратно.

Поэтому всякое аффинное преобразование есть суперпозиция линейного преобразования (6) при условии его невырожденности и параллельного переноса (7).

10. Пусть теперь рассматривается евклидово пространство. Вследствие предыдущего пункта и § 11 гл. IX всякое аффинное преобразование представляется как суперпозиция самосопряженного преобразования, изометрического преобразования и параллельного переноса.

Об изометрическом преобразовании (коротко — об изометрии) можно говорить в несколько более широком плане, чем в гл. IX. Именно, рассматривать его не как линейное преобразование, а как преобразование вида (1), сохраняющее расстояние между точками. Тогда и линейное изометрическое преобразование, и параллельный перенос являются изометриями, и их суперпозиция является изометрией. Поэтому аффинное преобразование представляет собой произведение сжатий по n ортогональным направлениям и некоторой изометрии.

11. Важно отметить, что всевозможные аффинные преобразования пространства $\mathfrak{A}_n$ образуют группу. Ее называют аффинной группой пространства $\mathfrak{A}_n$.

Согласно § 2 гл. VI для доказательства этого достаточно проверить, что:

1) аффинное преобразование обратимо и обратное к нему преобразование тоже является аффинным;

2) произведение двух аффинных преобразований снова является аффинным преобразованием.

Оба свойства с очевидностью следуют из п. 1.

12. Определение. Две фигуры $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}'$ в аффинном пространстве называются *аффинно эквивалентными*, если одна из них является образом другой при некотором аффинном преобразовании.

Так как аффинные преобразования составляют группу, то имеют место следующие свойства аффинной эквивалентности фигур:

1) если $\mathscr{A}$ эквивалентна $\mathscr{A}'$, то $\mathscr{A}'$ эквивалентна $\mathscr{A}$;

2) если $\mathscr{A}$ эквивалентна $\mathscr{A}'$, $\mathscr{A}'$ эквивалентна $\mathscr{A}''$, то $\mathscr{A}$ эквивалентна $\mathscr{A}''$;

3) каждая фигура эквивалентна сама себе.

Пример. На двумерной евклидовой плоскости каждый эллипс аффинно эквивалентен единичной окружности.

Предоставляем читателю самостоятельно доказать, что в пространстве $\mathfrak{A}_n$ любые две плоскости одинаковой размерности k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ аффинно эквивалентны.

§ 8. Аффинная классификация гиперповерхностей второго порядка

1. Мы установим, что в аффинном пространстве $\mathfrak{A}_n$ все гиперповерхности второго порядка распределяются в конечное число классов, так что в каждом классе все поверхности аффинно эквивалентны друг другу. Такое распределение на классы называется аффинной классификацией гиперповерхностей второго порядка. (Говорят также, что это есть классификация относительно аффинной группы.)

2. Возьмем произвольную гиперповерхность второго порядка. Приведем ее уравнение к каноническому виду. Алгебраически это значит, что мы преобразуем левую часть уравнения по некоторым формулам вида (1) § 7. Если эти формулы мы рассматриваем не как формулы преобразования координат, а как аффинное преобразование, то полученное каноническое уравнение дает некоторую гиперповерхность, аффинно эквивалентную исходной. Если дополнительно сделать еще одно аффинное преобразование, заключающееся в сжатии по направлениям координатных осей, то все не равные нулю коэффициенты в каком бы то ни было каноническом уравнении можно свести к $+1$ или -1.

Поэтому в случаях (I) и (I′) § 6 при $H \neq 0$ мы получим

$$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_r^2 = 1 \qquad (1 \leqslant r \leqslant n); \tag{1}$$

в случаях (I) и (I′) § 6 при $H = 0$ получим

$$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_r^2 = 0 \qquad (1 \leqslant r \leqslant n); \tag{2}$$

в случаях (II) и (II′) получим

$$\pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_r^2 - 2x_n = 0 \qquad (1 \leqslant r \leqslant n-1). \tag{3}$$

Поверхности, задаваемые различными уравнениями вида (1), (2) и (3), нельзя перевести друг в друга аффинным преобразованием вследствие закона инерции квадратичных форм. Различными здесь следует считать уравнения, которые нельзя перевести друг в друга умножением на (-1) и изменением нумерации координат.

Таким образом, мы получили искомые классы аффинно эквивалентных гиперповерхностей, каждый из которых имеет своего представителя среди уравнений (1), (2), (3).

§ 9. Пересечение прямой с гиперповерхностью второго порядка. Асимптотические направления

1. Пусть даны: гиперповерхность

$$2F = \sum a_{ik}x_i x_k + 2\sum b_k x_k + c = 0 \tag{1}$$

и произвольная точка M_0 с координатами $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Через точку M_0 в направлении некоторого вектора $l = \{l_1, \ldots, l_n\}$ проведем прямую.

Будем искать точки пересечения прямой и гиперповерхности (1).

Координаты текущей точки M на указанной прямой даются уравнениями

$$x_k = x_k^0 + \tau l_k, \qquad -\infty < \tau < +\infty. \tag{2}$$

Для нахождения точек пересечения нужно решить совместно уравнения (1) и (2). Подставляя (2) в (1), получим

$$\tau^2 \sum a_{ik}l_i l_k + 2\tau \left(\sum a_{ik}x_i^0 l_k + \sum b_k l_k\right) + 2F(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0. \tag{3}$$

Нужно исследовать уравнение (3).

2. Если $\sum a_{ik}l_i l_k \neq 0$, то уравнение (3) является квадратным. В этом случае имеются две точки пересечения, причем это могут быть две разные действительные точки, две разные комплексно сопряженные точки, и, наконец, они могут быть слившимися. В последнем случае говорят, что прямая имеет с поверхностью кратную точку пересечения.

П р и м е р. На евклидовой плоскости окружность $x^2 + y^2 = 1$ и прямая $x = -2$ не имеют действительных точек пересечения (рис. 85). Несложный подсчет дает координаты комплексно сопряженных точек их пересечения $\left(-2, \pm i\sqrt{3}\right)$.

Для того чтобы увидеть эти точки, рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = 1$ на двумерной комплексной плоскости. Возьмем в качестве модели двумерной комплексной плоскости четырехмерное действительное пространство (см. § 11 гл. I). Положим

$$x = u + i\xi, \qquad y = v + i\eta. \tag{4}$$

Подставив эти выражения в уравнение окружности и выделив действительную и мнимую части, получим

$$\left.\begin{aligned} u^2 + v^2 - \xi^2 - \eta^2 = 1, \\ u\xi + v\eta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Система (5) показывает, что окружность $x^2 + y^2 = 1$, рассматриваемая на двумерной комплексной плоскости (4), изображается в четырехмерном пространстве переменных (u, v, ξ, η) в виде пересечения гиперболоида и конуса.

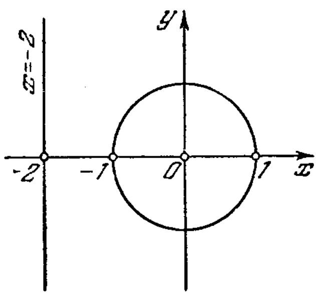


Рис. 85.

Прямая $x = -2$ изображается в пространстве переменных (u, v, ξ, η) в виде двумерной плоскости

$$u = -2, \qquad \xi = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим в четырехмерном пространстве трехмерное подпространство $\xi = 0$. Плоскость (6) целиком содержится в нем, а окружность (5) пересекается с этим подпространством по фигуре

$$\left.\begin{aligned} u^2 + v^2 - \eta^2 = 1, \\ \eta v = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

состоящей из обычной окружности

$$u^2 + v^2 = 1, \qquad \eta = 0$$

(именно ее мы и видим на действительной евклидовой плоскости) и гиперболы

$$u^2 - \eta^2 = 1, \qquad v = 0$$

(рис. 86). Плоскость (6) и фигура (7) пересекаются в тех самых точках $u = -2$, $v = 0$, $\eta = \pm\sqrt{3}$, о которых шла речь выше.

3. Если

$$\sum a_{ik} l_i l_k = 0, \tag{8}$$

то в качестве (3) мы будем иметь либо уравнение первой степени, либо противоречивое равенство, либо тождество. В первом из этих трех случаев говорят, что прямая пересекает гиперповерхность один раз в конечной точке и другой раз на бесконечности. Во втором случае говорят, что прямая имеет с гиперповерхностью двукратное пересечение на бесконечности. В третьем случае прямая целиком лежит на гиперповерхности. Во всех трех случаях говорят, что прямая имеет асимптотическое направление относительно данной гиперповерхности. Асимптотическое направление дается вектором $l = \{l_1, \ldots, l_n\}$ при условии (8).

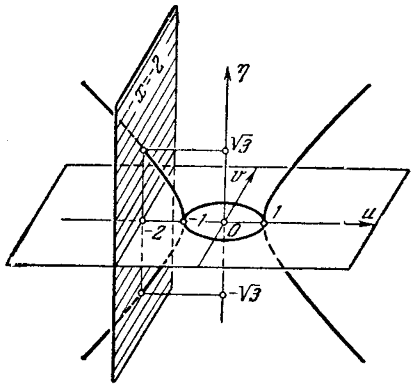


Рис. 86.

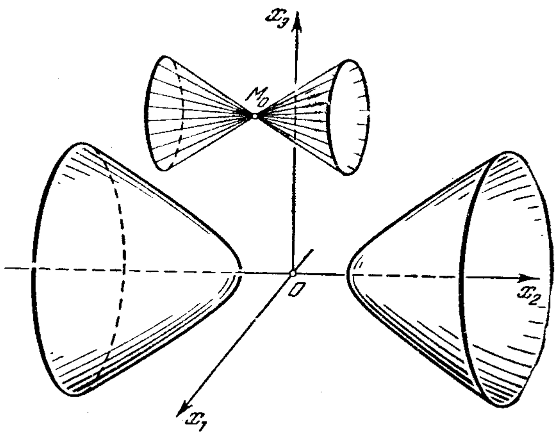


Рис. 87.

Все прямые, имеющие асимптотические направления и проходящие через одну точку, образуют конус (рис. 87). Из (8) и (2) получаем уравнение конуса асимптотических направлений, вершина которого находится в точке M_0:

$$\sum a_{ik}(x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0) = 0.$$

Из уравнений центра следует, что если точка M_0 находится в центре гиперповерхности, а вектор l имеет асимптотическое направление, то уравнение (3) принимает вид

$$0 \cdot \tau^2 + 0 \cdot \tau + 2F(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0.$$

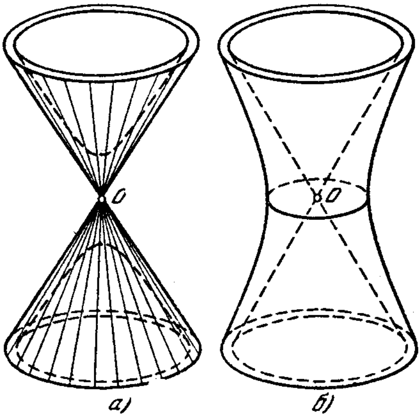


Рис. 88.

Тогда, если $F(x_1^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$, то прямые, образующие этот конус, не встречают гиперповерхность ни в одной конечной точке. Такие прямые можно назвать асимптотами, а конус — асимптотическим.

Примерами могут служить асимптотические конусы гиперболоидов в трехмерном пространстве (рис. 88) и асимптоты гиперболы при $n = 2$.

§ 10. Сопряженные направления

1. Предположим, что вектор l имеет неасимптотическое направление. Тогда любая прямая, проходящая в направлении вектора l, пересекает гиперповерхность в двух точках M_1 и M_2. Пусть M_0 — середина хорды M_1M_2. Определение середины отрезка в случае действительного аффинного пространства см. в п. 3 § 8 гл. III. Если M_1, M_2 — комплексно сопряженные точки, то середину M_0 хорды M_1M_2 следует понимать как точку, координаты которой являются средними арифметическими координат концов. Точка M_0 является действительной также и в этом случае.

Рассмотрим все прямые, параллельные вектору l, и на каждой из них найдем середину хорды M_1M_2. Оказывается, что геометрическое место этих середин является гиперплоскостью.

Докажем это. Имеем

$$\overline{M_0M_1}=\tau_1 l, \qquad \overline{M_0M_2}=\tau_2 l, \tag{1}$$

где $\tau_2=-\tau_1$. Если M_1 и M_2 — действительные точки, то равенство $\tau_2=-\tau_1$ усматривается с геометрической очевидностью. Если M_1, M_2 — комплексно сопряженные точки, то вместо каждого из векторных равенств (1) можно написать n координатных равенств. Из них легко последует, что и в этом случае $\tau_2=-\tau_1$.

Таким образом,

$$\tau_1+\tau_2=0. \tag{2}$$

Вернемся к уравнению (3) § 9. Так как прямая имеет неасимптотическое направление, коэффициент при квадрате неизвестной отличен от нуля. По теореме Виета и вследствие (2) коэффициент при первой степени неизвестной в уравнении (3) § 9 должен обратиться в нуль. Поэтому

$$\sum a_{ik}x_i^0 l_k+\sum b_k l_k=0. \tag{3}$$

Для того чтобы получить уравнение для всех середин, нужно считать, что M_0 — любая середина, и рассматривать ее координаты как текущие координаты $(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда из (3) имеем

$$\sum a_{ik}l_k x_i+\sum b_k l_k=0. \tag{4}$$

Положим

$$N_i=\sum a_{ik}l_k,\ D=\sum b_k l_k.$$

Тогда соотношение (4) примет вид

$$N_1x_1+\ldots+N_nx_n+D=0. \tag{5}$$

Легко доказать, что среди чисел N_i есть отличные от нуля.

В самом деле, допустим, что

$$N_i=\sum a_{ik}l_k=0 \tag{6}$$

при всех $i=1, \ldots, n$. Умножая равенства (6) на l_i и складывая, получим

$$\sum a_{ik} l_i l_k = 0,$$

вопреки предположению, сделанному в начале параграфа.

Поскольку среди чисел $N_1, \ldots, N_n$ есть отличные от нуля, соотношение (5) является уравнением гиперплоскости.

2. Гиперплоскость (5) называется *диаметральной гиперплоскостью, сопряженной направлению l относительно данной гиперповерхности.*

Она делит пополам каждую хорду, параллельную l.

3. Числа $N_1, \ldots, N_n$ образуют координаты некоторого вектора $N = \{N_1, \ldots, N_n\}$.

Будем считать, что координаты в пространстве ортонормированные. Тогда вектор N ортогонален к диаметральной

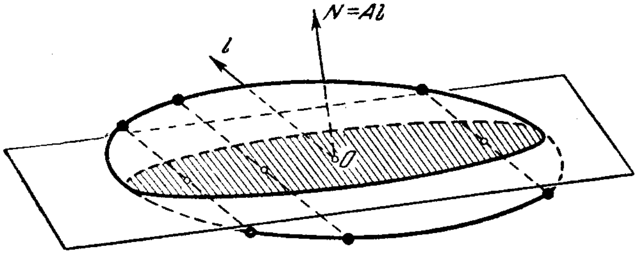


Рис. 89.

гиперплоскости (5), то есть является ее нормальным вектором.

Соотношения

$$N_i = \sum a_{ik} l_k \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

можно рассматривать как линейное преобразование

$$N = Al,$$

переводящее вектор l в вектор N (рис. 89).

Это как раз и есть то самосопряженное линейное преобразование, которым мы занимались, когда исследовали общее уравнение гиперповерхности второго порядка.

4. Мы знаем, что в процессе приведения уравнения гиперповерхности к каноническому виду нужно направить координатные оси по собственным векторам преобразования A.

Теперь легко понять по геометрическим соображениям, почему именно эти направления выгодны для упрощения уравнения гиперповерхности.

Допустим для простоты, что мы рассматриваем собственное направление, которое не является асимптотическим. Тогда сопряженная ему диаметральная гиперплоскость существует и перпендикулярна этому направлению. Поэтому она является плоскостью симметрии данной гиперповерхности.

Отсюда, по крайней мере в случае невырожденной центральной гиперповерхности, ясно, что, приводя ее к каноническому виду, мы принимаем в качестве координатных плоскостей ортогональную систему ее плоскостей симметрии.

ГЛАВА XII. ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ 1. Однородные координаты в аффинном пространстве. Бесконечно удаленные точки

1. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство $\mathfrak{A}_n$. Пусть в нем задана система аффинных координат с началом O и базисом $e_1, \ldots, e_n$, и пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координаты произвольной точки M.

Мы введем сейчас в $\mathfrak{A}_n$ так называемые однородные координаты.

Будем говорить, что $\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}$ ($\xi_{n+1} \neq 0$) являются однородными координатами точки $M(x_1, \ldots, x_n)$, если

$$\frac{\xi_1}{\xi_{n+1}} = x_1, \quad \ldots, \quad \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}} = x_n. \tag{1}$$

Ясно, что точка M числами $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1})$ определена. Будем писать $M(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$. Ясно также, что со своей стороны точка M не вполне определяет свои однородные координаты. В самом деле, если мы умножим все однородные координаты на одно и то же не равное нулю число, то при этом точка не изменится. Иначе говоря, набор чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ и набор чисел $(\lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_{n+1})$ при $\lambda \neq 0$ определяют одну и ту же точку.

2. Согласно предыдущему однородные координаты произвольно взятой точки зависят от выбора аффинной системы координат, то есть от выбора начала O и базиса $e_1, \ldots, e_n$. Перейдем к новому началу и к новому базису. Тогда аффинные (неоднородные) координаты изменятся по формулам вида

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= Q_{11}x_1 + \ldots + Q_{1n}x_n + Q_{1\,n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= Q_{n1}x_1 + \ldots + Q_{nn}x_n + Q_{n\,n+1}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где свободные члены $Q_{1\,n+1}, \ldots, Q_{n\,n+1}$ являются новыми координатами старого начала O; матрица $\| Q_{ij} \|$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ известным нам образом определяется по старому и новому базису (см. § 5 гл. II). Формулы (2), как мы видим, вообще говоря, не однородны.

Из (1) и (2) получим соответствующие формулы преобразования однородных координат:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1' &= Q_{11}\xi_1 + \ldots + Q_{1n}\xi_n + Q_{1\,n+1}\xi_{n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n' &= Q_{n1}\xi_1 + \ldots + Q_{nn}\xi_n + Q_{n\,n+1}\xi_{n+1}, \\ \xi_{n+1}' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \xi_{n+1}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где последнее равенство $\xi_{n+1}' = \xi_{n+1}$ принято по нашему желанию. С равным успехом можно было бы написать

$$\left.\begin{aligned} \lambda\xi_1' &= Q_{11}\xi_1 + \ldots + Q_{1n}\xi_n + Q_{1\,n+1}\xi_{n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda\xi_n' &= Q_{n1}\xi_1 + \ldots + Q_{nn}\xi_n + Q_{n\,n+1}\xi_{n+1}, \\ \lambda\xi_{n+1}' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \xi_{n+1}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где λ — любое число, не равное нулю.

Мы видим, что формулы преобразования однородных координат сами являются однородными, то есть не имеют свободных членов.

3. Рассмотрим произвольную гиперплоскость в $\mathfrak{A}_n$:

$$A_1x_1 + \ldots + A_nx_n + A_{n+1} = 0.$$

Переходя к однородным координатам, получаем уравнение

$$A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n + A_{n+1}\xi_{n+1} = 0. \tag{5}$$

Таким образом, в однородных координатах гиперплоскость определяется однородным уравнением первой степени. Соответственно плоскость любой размерности k определяется системой линейных однородных уравнений ранга $r = n - k$.

4. Рассмотрим в $\mathfrak{A}_n$ произвольную гиперповерхность второго порядка:

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} A_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} A_{i\,n+1}x_i + A_{n+1\,n+1} = 0.$$

Переходя к однородным координатам, получим

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} A_{ij}\xi_i\xi_j + 2\sum_{i=1}^{n} A_{i\,n+1}\xi_i\xi_{n+1} + A_{n+1\,n+1}\xi_{n+1}^2 = 0 \tag{6}$$

или

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n+1} A_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta = 0.$$

Мы опять получили однородное уравнение. Уже здесь видно удобство употребления однородных координат, поскольку уравнение гиперповерхности второго порядка записалось более компактно, так что его левая часть стала квадратичной формой. По существу, мы уже употребляли однородные координаты в § 2 предыдущей главы и получили от них некоторую помощь.

5. Пополним аффинное пространство $\mathfrak{A}_n$ новыми элементами, которые будем называть *бесконечно удаленными точками.* Мы не будем давать им никаких наглядных описаний, а будем только считать, что бесконечно удаленная точка есть объект, определяемый однородными координатами $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1})$ при условии, что

$$\xi_{n+1} = 0, \tag{7}$$

а среди чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ хотя бы одно отлично от нуля. При этом будем считать, что наборы $(\lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_n, 0)$ при всех $\lambda \neq 0$ задают одну и ту же бесконечно удаленную точку; непропорциональные наборы определяют разные точки.

Будем говорить, что некоторая бесконечно удаленная точка принадлежит данной гиперплоскости или данной гиперповерхности второго порядка и т. д., если ее координаты удовлетворяют соответственно уравнению этой гиперплоскости или этой гиперповерхности и т. д. При изменении исходной аффинной системы координат будем считать, что координаты произвольно выбранной бесконечно удаленной точки изменяются по формулам (3) или (4), где последняя строчка есть тождество $0 = 0$.

6. Мы будем считать, что *каждое* однородное линейное уравнение в координатах $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$, то есть каждое уравнение вида (5), определяет некоторую гиперплоскость. К числу таких уравнений относится и уравнение (7). Соответственно этому считается, что все бесконечно удаленные точки составляют гиперплоскость. Ее называют бесконечно удаленной.

7. Возьмем в $\mathfrak{A}_n$ две параллельные гиперплоскости

$$A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n + A'_{n+1}\xi_{n+1} = 0$$

и

$$A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n + A''_{n+1}\xi_{n+1} = 0.$$

Пересечение каждой из них с бесконечно удаленной гиперплоскостью дается одной и той же системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n &= 0, \\ \xi_{n+1} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Отсюда следует, что параллельные гиперплоскости имеют общие бесконечно удаленные точки. Поскольку система (8) имеет ранг $r = 2$, то множество всех бесконечно удаленных точек, общих для двух параллельных гиперплоскостей, следует считать (бесконечно удаленной) плоскостью размерности $n - 2$.

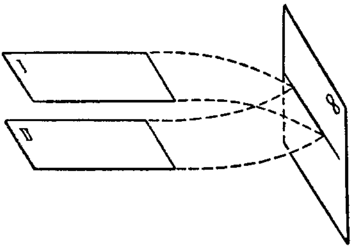


Рис. 90.

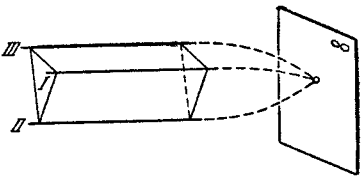


Рис. 91.

(См. рис. 90; здесь и в дальнейшем мы будем пользоваться условным изображением бесконечно удаленных элементов и пересечения геометрических фигур в бесконечно удаленных точках.)

8. Считая, что каждая однородная система линейных уравнений ранга $r = n - k$ задает в однородных координатах некоторую плоскость размерности k, можно установить аналогично предыдущему пункту, что две параллельные плоскости одинаковой размерности k пересекаются на бесконечности по бесконечно удаленной плоскости размерности $k - 1$. В частности, любые две параллельные прямые пересекаются в одной бесконечно удаленной точке (рис. 91).

9. Аффинное пространство $\mathfrak{A}_n$, указанным способом пополненное бесконечно удаленными элементами, называется n-мерным проективным пространством. Однако точнее следовало бы говорить, что это одна из конкретных моделей n-мерного проективного пространства, общее понятие которого излагается в следующем параграфе.

§ 2. Понятие проективного пространства

1. Рассмотрим множество каких-либо объектов, природа или внешний вид которых для нас безразличны. Мы будем только предполагать, что каждый из этих объектов однозначно задается упорядоченной системой чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$. Эти объекты будем называть точками и обозначать обычным образом, например $M(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$.

Множество будем называть n-мерным проективным пространством и обозначать через P_n, если соблюдены следующие два условия:

А) Любой упорядоченный набор чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ определяет некоторую точку $M(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$, если хотя бы одно из чисел $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ не равно нулю. Набор, состоящий из одних нулей, никакой точки не определяет.

Б) Если λ — любое число, не равное нулю ($\lambda \neq 0$), то два пропорциональных набора $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ и $(\lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_{n+1})$ определяют в P_n одну и ту же точку. Непропорциональные наборы определяют различные точки в P_n.

Числа $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называют *однородными координатами* точки M в P_n.

Важное замечание. Мы рассматриваем сказанное сейчас как определение n-мерного проективного пространства. Однако обычно в определение проективного пространства включают описание некоторых специальных подмножеств, называемых k-мерными плоскостями ($k = 0, 1, \ldots, n$) с соблюдением у системы этих подмножеств определенных свойств. Эти свойства выражаются аксиомами проективного пространства. В одном и том же множестве точек подмножества такого рода (плоскости) можно назначить по-разному, или, как принято говорить, на одном и том же множестве можно задавать разные проективные структуры. Мы позволяем себе ограничить определение проективного пространства всего лишь двумя аксиомами А) и Б), потому что в дальнейшем мы введем системы подмножеств, называемых плоскостями, по одному совершенно определенному стандарту (с помощью систем линейных уравнений), от которого никогда не будем отступать.

Замечание. Аксиомы проективного пространства мы не приводим. Аксиоматическое определение проективного пространства гораздо сложнее, чем знакомое нашему читателю аксиоматическое определение линейного пространства, данное в § 1 гл. I.

2. Сразу же обратим внимание читателя на то, что проективное пространство не является векторным, поскольку в нем не будут определены линейные операции.

3. Проективное пространство называется действительным, если для его точек $M(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ допускаются только действительные значения координат $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$. Если же в качестве ξ_k берутся также и комплексные числа, то проективное пространство называется комплексным.

4. Пусть даны соотношения

$$\left.\begin{array}{l} \lambda\xi_1' = Q_{11}\xi_1 + \ldots + Q_{1\,n+1}\xi_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda\xi_{n+1}' = Q_{n+1\,1}\xi_1 + \ldots + Q_{n+1\,n+1}\xi_{n+1} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

при условии, что $(n+1)\times(n+1)$-матрица $Q = \|Q_{ij}\|$ невырождена и $\lambda \neq 0$.

Тогда по произвольно заданному набору чисел $(\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_{n+1})$ определяется новый набор чисел $(\lambda\xi_1', \ldots, \lambda\xi_{n+1}')$. При этом, если среди чисел ξ_k есть хотя бы одно, отличное от нуля, то и среди чисел ξ_k' также найдется отличное от нуля вследствие невырожденности матрицы Q.

Будем считать, что числа $(\xi_1', \ldots, \xi_{n+1}')$ являются новыми координатами точки, которая раньше была определена координатами $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$. При этом по отношению к новым наборам чисел ξ' требования А) и Б) соблюдены, в чем легко убедиться. Формулы (1) при любом задании матрицы Q будем рассматривать как формулы преобразования координат. О геометрическом смысле этих преобразований пока задумываться не будем (он будет рассмотрен ниже, в следующем параграфе).

Таким образом, наряду с исходными координатами $\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_{n+1}$ мы вводим множество других координатных систем. Мы будем называть их *проективными системами координат* в P_n. Каждая новая система определяется заданием матрицы Q.

Исходные координаты $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ не имеют никакого преимущественного положения среди других координатных систем, вводимых формулами (1). В самом деле, формулы (1) можно обратить, и тогда старые координаты будут выражены через новые формулами такого же вида. Кроме того, если мы по формулам вида (1) с матрицей Q перейдем от координат $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ к координатам $\xi'_1, \ldots, \xi'_{n+1}$, а затем по аналогичным формулам с матрицей $\tilde{Q}$ перейдем от координат $\xi'_1, \ldots, \xi'_{n+1}$ к координатам $\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_{n+1}$, то $\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_{n+1}$ будут выражаться через $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ по формулам вида (1) с матрицей $\tilde{Q}Q$. Коротко говоря, равноправие всех указанных координатных систем является следствием того обстоятельства, что преобразования вида (1) составляют группу (известную нам группу линейных преобразований переменных).

5. Формулы вида (1) можно рассматривать с иной точки зрения. Можно считать, что система координат не изменяется, а сама точка $M(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ преобразуется в точку $M'(\xi'_1, \ldots, \xi'_{n+1})$. Формулы (1), рассматриваемые с этой точки зрения, задают некоторое взаимно однозначное преобразование проективного пространства. Всякое преобразование такого вида в пространстве P_n называется *проективным преобразованием*. Все проективные преобразования пространства P_n (то есть отвечающие всевозможным невырожденным матрицам Q) составляют группу. Ее называют *проективной группой* пространства P_n.

6. Ошибочно было бы думать, что проективная группа пространства P_n изоморфна группе невырожденных $(n+1)\times\times(n+1)$-матриц. Дело в том, что формулы вида (1) с матрицами Q и αQ (α — любое число, не равное нулю) определяют одно и то же проективное преобразование. В частности, при $Q = \alpha E$, $\alpha \neq 0$, независимо от α получаем тождественное проективное преобразование, которое оставляет все точки на своих местах.

7. Предметом проективной геометрии, т. е. теории проективных пространств, являются объекты, свойства и величины, инвариантные относительно проективной группы. Рассмотрим некоторые инварианты проективной группы.

8. Назовем гиперплоскостью в проективном пространстве P_n любое множество точек, которое определяется в некоторой заданной системе координат каким-либо однородным уравнением первой степени

$$A_1\xi_1 + \ldots + A_{n+1}\xi_{n+1} = 0. \tag{2}$$

Преобразуем уравнение (2) соответственно проективному преобразованию (1) (см. п. 5). Обращая (1), найдем

$$\xi_i = \lambda \sum_{j=1}^{n+1} P_{ji} \xi'_j. \tag{3}$$

Подставляя это выражение в (2), получим

$$A'_1 \xi'_1 + \ldots + A'_{n+1} \xi'_{n+1} = 0, \tag{4}$$

где через $(\xi'_1, \ldots, \xi'_{n+1})$ обозначены текущие координаты точки в той же самой координатной системе, в которой задана гиперплоскость (2), а коэффициенты A'_k выражаются формулой

$$A'_k = \lambda \sum_{l=1}^{n+1} P_{kl} A_l. \tag{5}$$

Поскольку среди A_l есть отличные от нуля, $\lambda \neq 0$ и матрица P невырождена, то и среди A'_k есть отличные от нуля. Поэтому (4) не тождество. Следовательно, (4) есть уравнение первой степени. Обратно, если в уравнение (4) подставим (1), то, учитывая (5), получим уравнение (2). Мы видим, что точки, удовлетворяющие уравнению (2), переходят в точки, удовлетворяющие уравнению (4), и обратно. Поэтому образы точек гиперплоскости (2) заполняют всю гиперплоскость (4).

Вывод. При проективном преобразовании любая гиперплоскость переходит в гиперплоскость.

Таким образом, множество всех гиперплоскостей в P_n есть объект, инвариантный относительно проективной группы. Поэтому гиперплоскости относятся к предмету проективной геометрии.

Замечание. Переход от уравнения (2) к уравнению (4) можно рассматривать с иной точки зрения, именно как переход к уравнению той же самой гиперплоскости в другой системе проективных координат. Отсюда видно, что уравнение гиперплоскости во всех проективных системах координат является линейным и однородным. Легко понять, что вообще проективная инвариантность класса объектов равносильна инвариантности класса уравнений этих объектов относительно перехода от одной проективной системы координат к другой.

9. Назовем k-мерной (проективной) плоскостью в P_n любое множество точек, которое определяется в некоторой заданной системе координат какой-либо однородной линейной системой уравнений ранга $r = n - k$:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{1\,n+1}\xi_{n+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}\xi_1 + \ldots + a_{r\,n+1}\xi_{n+1} = 0. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Обозначим прямоугольную матрицу системы (6) через A. Преобразуя систему (6) по формулам (3), получим систему

$$\left.\begin{array}{l} a'_{11}\xi'_1 + \ldots + a'_{1\,n+1}\xi'_{n+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{r1}\xi'_1 + \ldots + a'_{r\,n+1}\xi'_{n+1} = 0. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Пусть A' — матрица системы (7). Аналогично п. 9 § 5 гл. III имеем из (6) и (3)

$$A' = \lambda A P^*. \tag{8}$$

Из (8) следует, что $\operatorname{Rang} A' = \operatorname{Rang} A$, поэтому система (7) задает плоскость той же размерности k.

Из этих выкладок видно, что при проективном преобразовании k-мерная плоскость переходит в k-мерную плоскость. Таким образом, множество всех k-мерных плоскостей в P_n есть объект, инвариантный относительно проективной группы. Поэтому k-мерные плоскости относятся к предмету проективной геометрии.

10. Две плоскости в проективном пространстве называются скрещивающимися, если они не имеют общих точек.

Рассмотрим в P_n плоскости Π_k и Π_l размерностей k и l, заданные системами однородных линейных уравнений; объединим все их уравнения в одну систему. Если объединенная система имеет только тривиальное решение, то Π_k и Π_l скрещиваются, так как набор $(0, \ldots, 0)$ не определяет никакой точки. В противном случае плоскости пересекаются. Отсюда нетрудно подсчитать, что две плоскости в P_n могут скрещиваться лишь при условии, что сумма их размерностей меньше размерности пространства:

$$k + l < n.$$

Из п. 9 и из взаимной однозначности проективных преобразований следует, что при проективных преобразованиях пересекающиеся плоскости переходят в пересекающиеся, а скрещивающиеся переходят в скрещивающиеся.

Замечание. При пополнении аффинного пространства $\mathfrak{A}_n$ бесконечно удаленными точками не исключено, что плоскости, скрещивающиеся в $\mathfrak{A}_n$, могут превратиться в пересекающиеся плоскости пополненного пространства (о скрещивающихся плоскостях в $\mathfrak{A}_n$ см. выше, § 7 гл. III).

11. Назовем гиперповерхностью второго порядка в проективном пространстве P_n любое множество точек, которое определяется в некоторой проективной системе координат каким-либо однородным уравнением второй степени

$$\sum_{i,\, j=1}^{n+1} a_{ij}\xi_i\xi_j = 0.$$

Аналогично предыдущему можно показать, что множество всех гиперповерхностей второго порядка в P_n есть объект, инвариантный относительно проективной группы. Поэтому гиперповерхности второго порядка относятся к предмету проективной геометрии.

12. Проективная геометрия изучает такие свойства гиперплоскостей, k-мерных плоскостей, гиперповерхностей второго порядка и т. п., которые инвариантны при любых проективных преобразованиях. К числу таких свойств относится, например, размерность плоскости.

13. Одномерная проективная плоскость называется *проективной прямой*.

Рассмотрим произвольную прямую в P_n. Она определяется линейной однородной системой уравнений ранга $n-1$ относительно $n+1$ переменных. Следовательно, в данном случае фундаментальная система решений состоит из двух независимых решений. Обозначим их $(u_1, \ldots, u_{n+1})$, $(v_1, \ldots, v_{n+1})$. Им отвечают две точки U, V на прямой. Пусть M $(\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_{n+1})$ — произвольная точка этой прямой. Поскольку любое решение линейно выражается через фундаментальное, то имеем

$$\xi_i = \mu u_i + \nu v_i, \qquad i = 1, \ldots, n+1, \tag{9}$$

где μ, ν — некоторые числа (не равные одновременно нулю).

Формула (9) выражает тот геометрический факт, что прямая однозначно определяется любыми двумя своими точками и что через две произвольные точки $U, V \in P_n$ можно провести прямую.

Числа μ, ν можно рассматривать как однородные координаты точки M на данной прямой. Вместе с тем заключаем, что прямая в проективном пространстве сама является одномерным проективным пространством.

Ограничиваясь случаем действительного пространства P_n, положим

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}, \qquad \mu c = \cos\alpha, \qquad \nu c = \sin\alpha.$$

Тогда из (9) имеем

$$c\xi_i = u_i \cos\alpha + v_i \sin\alpha, \tag{10}$$

где $c\xi_i$ — координаты той же самой точки M. Изменяя α в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, мы получим всевозможные точки на данной прямой. При этом ввиду периодичности

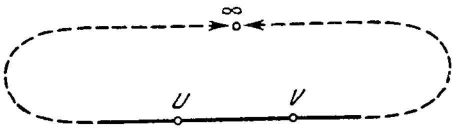


Рис. 92.

синуса и косинуса каждая точка M повторится бесконечно много раз. Формула (10) показывает, что наглядной моделью действительной проективной прямой может служить простая замкнутая кривая, например обычная окружность. В самом деле, при изменении α от 0 до π точка M один раз пробегает всю проективную прямую и возвращается в исходное положение. Отметим, что при пополнении аффинного пространства бесконечно удаленными точками каждая прямая пополняется одной точкой, которая и делает ее замкнутой линией (рис. 92).

Аналогичное представление действительной двумерной проективной плоскости в виде сферы оказывается ошибочным. В связи с этим см. п. 13 следующего параграфа.

14. В случае k-мерной проективной плоскости вместо формулы (9) получаем

$$\xi_i = \mu_1 u_i^{(1)} + \mu_2 u_i^{(2)} + \ldots + \mu_{k+1} u_i^{(k+1)}, \tag{11}$$

где $\{u_i^{(1)}\}, \{u_i^{(2)}\}, \ldots, \{u_i^{(k+1)}\}$ — фундаментальная система решений линейной системы уравнений вида (6), $\mu_1, \ldots, \mu_{k+1}$ — числа, среди которых есть отличные от нуля. Их можно рассматривать в качестве однородных координат точки k-мерной плоскости.

Отсюда ясно, что k-мерная плоскость в P_n сама является k-мерным проективным пространством (действительным или комплексным в зависимости от того, действительно или комплексно P_n).

15. Вернемся к рассмотрению произвольной прямой (9) в проективном пространстве P_n. Вместе с точками U, V рассмотрим еще две точки на этой же прямой: точку M с координатами

$$\xi_i = \mu u_i + \nu v_i \tag{12}$$

и точку N с координатами

$$\eta_i = \tilde{\mu} u_i + \tilde{\nu} v_i, \tag{13}$$

считая, что они отличны от точек U, V. Число

$$g = \frac{\nu}{\mu} : \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\mu}}$$

называется сложным или двойным отношением, в котором упорядоченная пара точек M, N делит упорядоченную пару точек U, V.

Для обозначения g употребляется символ $(UVMN)$. Таким образом,

$$(UVMN) = \frac{\nu}{\mu} : \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\mu}}. \tag{14}$$

Заметим, что каждое из простых отношений $\frac{\nu}{\mu}$ и $\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\mu}}$ не определяется точками U, V, M и U, V, N. Это ясно, поскольку однородные координаты любой из этих точек можно умножить на произвольное не равное нулю число.

Однако двойное отношение имеет вполне определенное численное значение, зависящее только от задания на прямой упорядоченных пар точек U, V и M, N.

В самом деле, если координаты точек U, V, M, N умножим соответственно на четыре любых множителя $\neq 0$, то дроби ν/μ и $\tilde{\nu}/\tilde{\mu}$ умножатся на один и тот же множитель, который в выражении (14) сократится.

Более того, двойное отношение не меняется при переходе к любой новой системе проективных координат пространства. Это утверждение равносильно тому, что двойное отношение инвариантно относительно любых проективных преобразований; доказательство см. в п. 16.

Рассмотрим подробнее геометрический смысл двойного отношения. Возьмем на обычной прямой четыре различные точки U, V, M, N. Будем считать, что на этой прямой введена аффинная координата x, принимающая в указанных точках соответственно значения x_1, x_2, x_3, x_4 (рис. 93).

Рис. 93.

Перейдем к однородным координатам (ξ, η) по формуле $x = \xi/\eta$, $\eta \neq 0$. Полагая $\eta = 1$, будем иметь следующие однородные координаты рассматриваемых точек:

$$U(x_1, 1), \quad V(x_2, 1), \quad M(x_3, 1), \quad N(x_4, 1).$$

Тогда формулы (12) и (13) примут вид

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \mu x_1 + \nu x_2, \\ 1 &= \mu \quad + \nu, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_4 &= \tilde{\mu} x_1 + \tilde{\nu} x_2, \\ 1 &= \tilde{\mu} \quad + \tilde{\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Из систем (15) найдем μ, ν, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\nu}$ и, подставив их в (14), получим

$$(UVMN) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4}. \tag{16}$$

Из элементарной аналитической геометрии известно, что дроби в правой части формулы (16) суть отношения λ и $\tilde{\lambda}$, в которых точки M и N соответственно делят отрезок UV:

$$\lambda = \frac{UM}{MV} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{UN}{NV} = \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4}. \tag{17}$$

Таким образом,

$$(UVMN) = \lambda : \tilde{\lambda} = \frac{UM}{MV} : \frac{UN}{NV}$$

для любых четырех различных точек на аффинной прямой.

16. Двойное отношение двух пар точек является величиной, инвариантной относительно проективной группы.

Для доказательства рассмотрим произвольное проективное преобразование. По формулам (3) имеем

$$\xi_i = \lambda \sum P_{ji} \xi'_j, \quad u_i = \lambda \sum P_{ji} u'_j, \quad v_i = \lambda \sum P_{ji} v'_j. \tag{18}$$

Вследствие невырожденности матрицы $\|P_{ij}\|$ из (18) и (12) получаем

$$\xi'_i = \mu u'_i + \nu v'_i, \tag{19}$$

где u'_i, v'_i, ξ'_i суть координаты точек U', V' и M', которые являются образами точек U, V и M соответственно. Аналогично получаем координаты образа N' точки N

$$\eta'_i = \tilde{\mu} u'_i + \tilde{\nu} v'_i. \tag{20}$$

Из (19) и (20) находим

$$(U'V'M'N') = \frac{\nu}{\mu} : \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\mu}} = (UVMN),$$

что и требовалось установить.

17. В конце предыдущего параграфа мы указывали, что пополненное бесконечно удаленными элементами аффинное пространство $\mathfrak{A}_n$ является моделью общего понятия n-мерного проективного пространства. Нужно заметить при этом, что если мы рассматриваем пополненное аффинное пространство как проективное и допускаем в нем любые преобразования вида (1) § 2, то мы должны не обращать внимания на особое положение бесконечно удаленных элементов и считать, что они равноправны с обычными, поскольку с помощью проективного преобразования любую бесконечно удаленную точку можно перевести в обычную. К тому же в определении проективного пространства не делается выделения каких-либо объектов в качестве бесконечно удаленных.

Поэтому множество бесконечно удаленных точек в пополненном аффинном пространстве не является объектом, инвариантным относительно проективной группы. Следовательно, понятие о бесконечно удаленных точках не относится к предмету проективной геометрии.

18. С помощью преобразования координат в P_n можно добиться того, чтобы любая наперед заданная гиперплоскость получила уравнение $\xi_{n+1}=0$, и можно условиться считать ее бесконечно удаленной. Указание того, какая именно гиперплоскость принята в качестве бесконечно удаленной, можно рассматривать как возвращение от проективного пространства к аффинному.

19. Если в аффинном пространстве введены однородные координаты, то, как нетрудно проверить, любое аффинное преобразование задается формулами вида (4) § 1 и любое преобразование вида (4) § 1 с невырожденной матрицей коэффициентов является аффинным. Если сравнить формулы (4) § 1 с формулами (1) настоящего параграфа, то будет ясно, что аффинные преобразования пространства $\mathfrak{A}_n$ можно считать частным случаем проективных преобразований в пополненном аффинном пространстве, то есть в P_n. Именно, аффинными можно считать все преобразования вида (1), которые сохраняют бесконечно удаленные точки в качестве бесконечно удаленных.

В самом деле, если из условия $\xi_{n+1}=0$ обязательно получается $\xi'_{n+1}=0$, то проективное преобразование должно иметь вид (3) § 1. Если мы интересуемся лишь точками самого пространства $\mathfrak{A}_n$, то $\xi_{n+1}\neq 0$, и из (3) § 1 получаем формулы (2) § 1, выражающие аффинное преобразование.

Важное следствие. Группа всех аффинных преобразований в $\mathfrak{A}_n$ является подгруппой в проективной группе пространства P_n.

Замечание. Для этой формулировки весьма существенно, что мы условились аффинными считать некоторые специальные проективные преобразования. Таким образом, мы включили аффинные преобразования в число проективных.

Из-за того, что запас проективных преобразований богаче запаса аффинных преобразований, проективная группа имеет меньше инвариантов, чем аффинная: каждый инвариант проективной группы является инвариантом аффинной группы, но обратное неверно. Например, каждое из отношений (17) является аффинным инвариантом, но не является инвариантом проективным (последнее без всяких вычислений вытекает из п. 3 § 5).

С другой стороны, проективная геометрия по сравнению с геометрией аффинной (и тем более с метрической) изучает свойства геометрических фигур, более устойчивые в том смысле, что они сохраняются при любых преобразованиях более обширной группы.

20. Все изложенное в пп. 8 — 19 служит иллюстрацией нашей краткой формулировки п. 7.

§ 3. Связка плоскостей в аффинном пространстве

1. Рассмотрим в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве $\mathfrak{A}_{n+1}$ множество всех плоскостей всех размерностей (в том числе прямых), проходящих через зафиксированную точку O. Это множество называется *связкой* с центром O. Дальше мы связку и ее центр будем обозначать одной и той же буквой O.

Примем точку O в качестве начала аффинной системы координат с произвольно выбранным базисом $e_1, \ldots, e_{n+1}$. Начало координат мы менять не будем, поэтому будем отождествлять $\mathfrak{A}_{n+1}$ и соответствующее ему линейное пространство L_{n+1}.

Каждая прямая связки однозначно определяется заданием какой-нибудь своей точки M, отличной от точки O. Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ — координаты точки M в базисе $e_1, \ldots, e_{n+1}$. Тогда точка $(\lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_{n+1})$ при любом $\lambda \neq 0$ определяет ту же самую прямую OM.

Прямую, рассматриваемую как элемент связки, назовем точкой, числа $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ — ее однородными координатами. Тогда ясно, что множество таких точек (то есть прямых связки O) представляет собой n-мерное проективное пространство P_n. Ясно также, что каждая $(k+1)$-мерная плоскость связки O является k-мерной проективной плоскостью в P_n, поскольку она проходит через начало координат, и, следовательно, определяется системой однородных линейных уравнений ранга $r = (n+1) - (k+1) = n - k$.

Таким образом, мы получили еще одну геометрическую модель проективного пространства P_n — в виде связки в аффинном пространстве размерности $n+1$. В отличие от § 1, здесь не требуется какого-либо пополнения новыми точками; все элементы рассматриваемого множества (прямые связки) геометрически равноправны.

2. Рассмотрим совместно обе известные нам модели n-мерного проективного пространства. Это поможет выяснить геометрический смысл преобразований координат и проективных преобразований в P_n, которые были определены алгебраически в § 2.

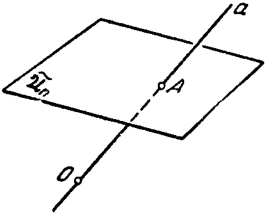


Рис. 94.

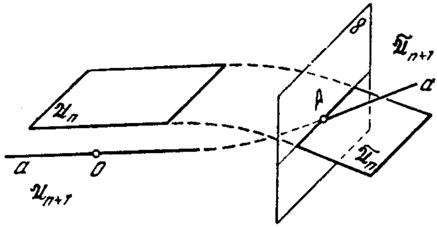


Рис. 95.

В качестве n-мерного аффинного пространства $\mathfrak{A}_n$ возьмем какую-нибудь гиперплоскость в пространстве $\mathfrak{A}_{n+1}$, не проходящую через центр связки O. Пополним $\mathfrak{A}_{n+1}$ бесконечно удаленными элементами согласно пп. 5—8 § 1. Тогда $\mathfrak{A}_{n+1}$ превратится в проективное пространство P_{n+1}, а гиперплоскость $\mathfrak{A}_n$ превратится в проективное пространство размерности n, которое мы будем обозначать $\tilde{\mathfrak{A}}_n$.

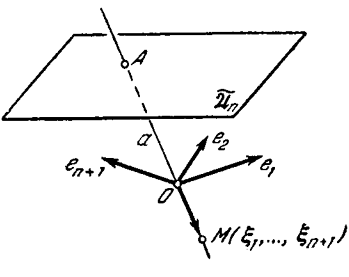


Рис. 96.

Каждая прямая a связки O (пополненная бесконечно удаленной точкой) пересекает $\tilde{\mathfrak{A}}_n$ в некоторой точке A (рис. 94). Будем говорить, что точка A соответствует прямой a. Это соответствие является взаимно однозначным благодаря проведенному пополнению $\mathfrak{A}_{n+1}$; именно, если прямая в аффинном пространстве параллельна гиперплоскости $\mathfrak{A}_n$, то точка A является бесконечно удаленной (рис. 95).

Пусть $\overline{OM}$ — какой-нибудь направляющий вектор прямой a, $\overline{OM} = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_{n+1} e_{n+1}$. Числа $(\lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_{n+1})$ $(\lambda \neq 0)$, пропорциональные координатам вектора $\overline{OM}$, примем за однородные координаты точки A в $\tilde{\mathfrak{A}}_n$, соответствующей прямой a

(рис. 96). Они совпадают с однородными координатами этой прямой, определенными согласно п. 1.

Ясно, что выбором базиса $e_1, \ldots, e_{n+1}$ в $\mathfrak{A}_{n+1}$ полностью определяются проективные координаты в связке O и в гиперплоскости $\tilde{\mathfrak{A}}_n$. Эта система проективных координат сохраняется при подобном преобразовании базиса e_i (т. е. при переходе к базису вида $\alpha e_1, \ldots, \alpha e_{n+1}$, $\alpha \neq 0$).

Обратим внимание на частный случай, когда векторы $e_1, \ldots, e_n$ параллельны $\mathfrak{A}_n$. В этом случае обозначим через O' точку пересечения гиперплоскости $\mathfrak{A}_n$ с той прямой связки O, направляющим вектором которой служит e_{n+1}. Введем в $\mathfrak{A}_n$ аффинные координаты с началом O' и базисом $e_1, \ldots, e_n$ (рис. 97). Тогда аффинные координаты $(x_1, \ldots, x_n)$ произвольной точки $A \in \mathfrak{A}_n$ и ее однородные координаты $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ будут связаны формулами (1) § 1, то есть $x_i = \xi_i/\xi_{n+1}$, $i = 1, \ldots, n$, $\xi_{n+1} \neq 0$.

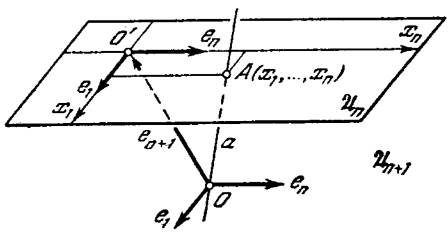


Рис. 97.

3. Вернемся к рассмотрению общего случая. Пусть $e'_1, \ldots, e'_{n+1}$ — новый базис в $\mathfrak{A}_{n+1}$. Тогда

$$e_j = \sum_{i=1}^{n+1} Q_{ij} e'_i, \qquad j = 1, \ldots, n+1. \tag{1}$$

Если $\overline{OM}$ — произвольный ненулевой вектор на прямой a, имеющий в старом базисе координаты $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$, а в новом координаты $\xi'_1, \ldots, \xi'_{n+1}$, то

$$\xi'_i = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{ij} \xi_j, \qquad i = 1, \ldots, n+1. \tag{2}$$

Но числа $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ являются старыми однородными координатами точки A, а числа $(\xi'_1, \ldots, \xi'_{n+1})$ — ее новыми однородными координатами в $\tilde{\mathfrak{A}}_n$. Поэтому формулы (2) можно рассматривать как преобразование однородных координат точек в пополненной гиперплоскости $\tilde{\mathfrak{A}}_n$ (а вместе с тем и в связке O) при только что описанном изменении координатной системы пространства $\mathfrak{A}_{n+1}$. Вместо (2) можно написать формулы (1) § 2, поскольку однородные координаты определяются с точностью до множителя пропорциональности.

4. Пусть теперь в n-мерном проективном пространстве P_n задано формулами (1) § 2 какое-нибудь преобразование проективных координат. Отождествляя P_n со связкой O в $\mathfrak{A}_{n+1}$ и положив в формулах (1) § 2 $\lambda = 1$, получим формулы (2). Их можно рассматривать как формулы такого преобразования координат в $\mathfrak{A}_{n+1}$, при котором начало координат остается на месте, а базис преобразуется по формулам (1).

5. Подводя итог, можно сказать, что проективные координаты в P_n определяются заданием базиса $e_1, \ldots, e_{n+1}$ в $\mathfrak{A}_{n+1}$, а формулы (1) § 2 выражают переход к новой проективной системе координат в P_n, задаваемой новым базисом $e'_1, \ldots$ $\ldots, e'_{n+1}$ в $\mathfrak{A}_{n+1}$. При этом безразлично, какую из двух моделей P_n рассматривать: связку O или гиперплоскость $\tilde{\mathfrak{A}}_n$.

6. Аналогичным образом можно истолковать формулы (1) § 2, если считать, что они задают проективное преобразование в P_n. Для этого нужно рассмотреть в $\mathfrak{A}_{n+1}$ аффинное преобразование, которое оставляет на месте точку O и задается формулами (2). При этом произвольная точка $M \in \mathfrak{A}_{n+1}$ с координатами $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ переходит в точку $M'(\xi'_1, \ldots$ $\ldots, \xi'_{n+1})$. Если нас не интересует сама по себе точка M', а интересует только прямая OM', в которую переходит прямая OM, то мы можем в соотношениях (2) числа $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ или числа $\xi'_1, \ldots, \xi'_{n+1}$ умножить на любое число $\lambda \neq 0$. Если мы поставим множитель λ в левых частях формул (2), то получим формулы (1) § 2.

Таким образом, можно сказать, что любое проективное преобразование в пополненной гиперплоскости $\tilde{\mathfrak{A}}_n$ индуцируется некоторым аффинным преобразованием в $\mathfrak{A}_{n+1}$, оставляющим на месте точку O (или, что то же самое, невырожденным линейным преобразованием в L_{n+1}).

Если же в качестве модели проективного пространства P_n взять связку O, то можно сказать, что проективные преобразования в P_n есть просто аффинные преобразования в $\mathfrak{A}_{n+1}$, сохраняющие точку O, не забывая при этом, что точками P_n являются прямые связки O,

7. Чтобы придать полную наглядность всему сказанному о модели проективного пространства в виде связки O в $\mathfrak{A}_{n+1}$ и о проективных преобразованиях на этой модели мы порекомендуем читателю вообразить себе, что он наблюдает пространство $\mathfrak{A}_{n+1}$ из центра связки O. Тогда все точки этого пространства, лежащие на каком-нибудь луче его зрения, он увидит как одну точку. Поэтому если читатель будет следить из точки O за перемещением точек при каком-нибудь невырожденном линейном преобразовании в $L_{n+1}=\mathfrak{A}_{n+1}$, то на самом деле он увидит проективное преобразование в связке или в какой угодно гиперплоскости, не проходящей через точку O.

Отметим, что разные линейные преобразования Ax и μAx (μ — любое число $\neq 0$) в $\mathfrak{A}_{n+1}$ являются одним и тем же проективным преобразованием в связке O.

8. В качестве приложения рассмотренных выше конструкций выясним условия, однозначно определяющие проективное преобразование в P_n. Введем важное для дальнейшего определение.

Определение. Система $r+1$ точек в P_n находится в общем положении, если они не принадлежат одной $(r-1)$-мерной (проективной) плоскости.

Очевидно, что общее число точек такой системы не может быть больше $n+1$.

Замечание. Если в качестве P_n рассматривается связка O в $\mathfrak{A}_{n+1}$, то точки $a_1, \ldots, a_m \in P_n$ находятся в общем положении в пространстве P_n тогда и только тогда, когда направляющие векторы прямых $a_1, \ldots, a_m \in \mathfrak{A}_{n+1}$ линейно независимы в $\mathfrak{A}_{n+1}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что в такой модели k-мерные (проективные) плоскости пространства P_n суть $(k+1)$-мерные плоскости связки O.

Пусть в P_n произвольно задана система точек $a_1, \ldots$ $\ldots, a_{n+1}, a_{n+2}$ в числе $n+2$ такая, что любые $n+1$ из этих точек находятся в общем положении. Пусть далее в P_n произвольно задана другая аналогичная система точек $a_1', \ldots$ $\ldots, a_{n+1}', a_{n+2}'$. Докажем, что справедлива

Теорема 1. *Существует и притом единственное проективное преобразование пространства P_n, которое переводит a_i в a_i' для всех номеров $i=1, \ldots, n+2$.*

Доказательство. В качестве модели проективного пространства P_n снова возьмем связку O в $\mathfrak{A}_{n+1}$. Пусть в связке O прямые $a_1, \ldots, a_{n+1}, a_{n+2}$ заданы в качестве точек-прообразов, а прямые $a_1', \ldots, a_{n+1}', a_{n+2}'$ — в качестве точек-образов. Возьмем какой-нибудь направляющий (ненулевой) вектор e_{n+2} прямой a_{n+2}; возьмем любые направляющие (ненулевые) векторы $\tilde{e}_i$ прямых a_i $(i=1, \ldots, n+1)$. По условию прямые $a_1, \ldots, a_{n+1}$ как точки P_n находятся в общем положении; значит, векторы $\tilde{e}_i$ $(i=1, \ldots, n+1)$ составляют базис в $\mathfrak{A}_{n+1}$. Поэтому существует разложение

$$e_{n+2}=\lambda_1\tilde{e}_1+\ldots+\lambda_{n+1}\tilde{e}_{n+1}.$$

Докажем, что ни одно из чисел λ_i не равно нулю:

$$\lambda_i \neq 0, \qquad i=1, \ldots, n+1. \tag{3}$$

Предположим противное. Пусть, например, $\lambda_1=0$. Тогда e_{n+2} линейно выражается через векторы $\tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_{n+1}$, поэтому система $\tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_{n+1}, e_{n+2}$ линейно зависима, что противоречит условию, поскольку точки $a_2, \ldots, a_{n+1}, a_{n+2} \in P_n$ находятся в общем положении. Итак, $\lambda_1 \neq 0$. Аналогично устанавливаются остальные неравенства (3).

Положим $e_i=\lambda_i\tilde{e}_i$, $i=1, \ldots, n+1$. Тогда

$$e_{n+2}=e_1+\ldots+e_{n+1}. \tag{4}$$

Из независимости векторов $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{n+1}$ и неравенств (3) следует, что векторы $e_1, \ldots, e_{n+1}$ тоже независимы. Аналогично доказывается, что найдутся векторы e_i', лежащие соответственно из прямых a_i', такие, что

$$e_{n+2}'=e_1'+\ldots+e_{n+1}', \tag{5}$$

причем $e_1', \ldots, e_{n+1}'$ линейно независимы в $\mathfrak{A}_{n+1}$. Отсюда и из п. 6 § 3 гл. VII следует, что в $\mathfrak{A}_{n+1}=L_{n+1}$ существует невырожденное линейное преобразование $x'=Ax$, для которого $e_i'=Ae_i$, $i=1, \ldots, n+1$. Используя (5), находим, что

$$e_{n+2}'=e_1'+\ldots+e_{n+1}'=Ae_1+\ldots+Ae_{n+1}=$$
$$=A(e_1+\ldots+e_{n+1})=Ae_{n+2}'.$$

Тем самым $e_i'=Ae_i$ для всех $i=1, \ldots, n+1, n+2$, то есть линейное преобразование $x'=Ax$ в $\mathfrak{A}_{n+1}$ переводит данные прямые $a_1, \ldots, a_{n+2}$ в данные прямые $a_1', \ldots, a_{n+2}'$ и, следовательно, индуцирует искомое проективное преобразование в связке O, которое мы обозначим через f.

Докажем единственность. Пусть имеется еще одно проективное преобразование φ в связке O, для которого $\varphi(a_i) = a_i'$, $i = 1, \ldots, n+2$. Согласно п. 8 оно индуцируется некоторым невырожденным линейным преобразованием B пространства $\mathfrak{A}_{n+1}$, которое также переводит прямые a_i в a_i' ($i = 1, \ldots, n+2$). В таком случае

$$e_i'' = Be_i = \mu_i e_i', \tag{6}$$

где μ_i — какие-то числа; $i = 1, \ldots, n+2$. При этом вследствие (4) и (6) имеем

$$e_{n+2}'' = Be_{n+2} = Be_1 + \ldots + Be_{n+1} = \\ = \mu_1 e_1' + \ldots + \mu_{n+1} e_{n+1}'. \tag{7}$$

С другой стороны, используя (5) и (6), находим, что

$$e_{n+2}'' = \mu_{n+2} e_{n+2}' = \mu_{n+2} e_1' + \ldots + \mu_{n+2} e_{n+1}'. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует

$$\mu_{n+2} = \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n+1}, \tag{9}$$

поскольку векторы $e_1', \ldots, e_{n+1}'$ независимы. Полагая $\mu_{n+2} = \mu$, получим

$$Be_i = \mu e_i' = \mu A e_i, \ i = 1, \ldots, n+1.$$

Но тогда $Bx = \mu Ax$ для любого вектора x из $\mathfrak{A}_{n+1}$, а это и значит, что $\varphi = f$. Тем самым теорема 1 доказана.

9. Выше было указано, что координаты в P_n определяются заданием базиса в $\mathfrak{A}_{n+1}$. Однако базис в $\mathfrak{A}_{n+1}$ является объектом, внешним по отношению к пространству P_n. Желательно иметь другой способ задания проективных координат, опирающийся лишь на рассмотрение объектов самого проективного пространства.

Пусть в P_n произвольно выбрана и зафиксирована система точек в числе $n+2$

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}, B \tag{10}$$

такая, что любые $n+1$ из этих точек находятся в общем положении.

Теорема 2. *В n-мерном проективном пространстве P_n найдется единственная система проективных* *координат, в которой точки* (10) *имеют следующие однородные координаты:*

$$
\begin{array}{ll}
A_1 & (1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\
A_2 & (0,\ 1,\ \ldots,\ 0), \\
\multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
A_{n+1} & (0,\ 0,\ \ldots,\ 1), \\
B & (1,\ 1,\ \ldots,\ 1).
\end{array}
\tag{11}
$$

Доказательство. В качестве модели P_n рассмотрим связку O в $\mathfrak{A}_{n+1}$. Так же, как в доказательстве теоремы 1, найдем направляющие векторы $e_1, \ldots, e_{n+1}, e_{n+2}$ прямых $A_1, \ldots, A_{n+1}, B$ связки O такие, что:

а) $e_{n+2} = e_1 + \ldots + e_{n+1}$;

б) $e_1, \ldots, e_{n+1}$ линейно независимы в $\mathfrak{A}_{n+1}$.

Примем векторы $e_1, \ldots, e_{n+1}$ за базис в $\mathfrak{A}_{n+1}$. Тогда, согласно п. 1, в P_n определятся однородные координаты точек, причем условия (11) будут выполнены (последнее из них — вследствие а)).

Докажем единственность. Пусть некоторая проективная система координат в P_n задана другим базисом $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{n+1}$ пространства $\mathfrak{A}_{n+1}$, и пусть условия (11) снова соблюдены. Тогда в силу (11) векторы $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{n+1}$ необходимо являются направляющими для прямых $A_1, \ldots, A_{n+1}$ связки O, то есть $\tilde{e}_i = \alpha_i e_i$ ($\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n+1$); кроме того, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \tilde{e}_i = \alpha_{n+2} e_{n+2}$, $\alpha_{n+2} \neq 0$, поскольку вектор $\tilde{e}_1 + \ldots$ $\ldots + \tilde{e}_{n+1}$ должен быть направляющим для прямой $B \in O$. Далее аналогично выкладкам (7)—(9) устанавливается, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n+1}$. Отсюда следует, что однородные координаты $(\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_{n+1})$ точки X, задаваемые с помощью базиса $\tilde{e}_1, \ldots$ $\ldots, \tilde{e}_{n+1}$, пропорциональны ее кординатам $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$, полученным, исходя из базиса $e_1, \ldots, e_{n+1}$. Теорема 2 доказана.

10. Замечание. Для иллюстрации геометрического смысла теоремы 2 рассмотрим в качестве модели P_n пополненное аффинное пространство $\mathfrak{A}_n$, считая, что однородные координаты $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ вводятся, согласно пп. 1—5 § 1, исходя из некоторой аффинной системы координат $(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$ в $\mathfrak{A}_n$. Тогда точки, имеющие координаты (11), выполняют следующие роли:

$A_{n+1}(0, \ldots, 0, 1)$ служит началом аффинной системы координат в $\mathfrak{A}_n$;

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ являются бесконечно удаленными точками координатных осей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно; их выбор определяет направление координатных осей;

точка $B(1, \ldots, 1, 1)$, называемая точкой единиц, определяет собой выбор базисных векторов на каждой из осей $x_1, \ldots, x_n$ (рис. 98).

11. В заключение параграфа укажем еще одну весьма популярную геометрическую модель для действительного проективного пространства P_n. Будем считать, что в $\mathfrak{A}_{n+1}$

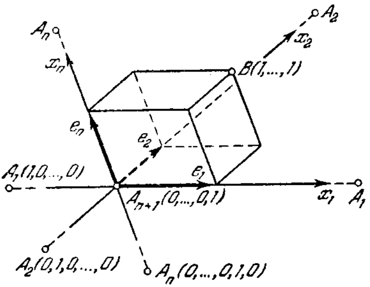


Рис. 98.

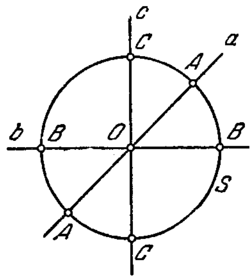


Рис. 99.

введена евклидова метрика, и наряду со связкой O рассмотрим n-мерную сферу S с центром O (определение n-мерной сферы см. в п. 5 § 6 гл. XI). Каждая прямая связки пересекает сферу в двух диаметрально противоположных точках (при $n=1$ см. рис. 99). Отождествим такие точки, то есть каждую пару диаметрально противоположных точек сферы S будем рассматривать как одну точку нового множества. Так полученное множество по построению взаимно однозначно соответствует связке O и, следовательно, может рассматриваться в качестве P_n. Каждая k-мерная проективная плоскость изображается в этой модели в виде k-мерной сферы с отождествленными диаметрально противоположными точками, поскольку каждая $(k+1)$-мерная плоскость связки O пересекает сферу S по некоторой сфере размерности k (см. рис. 100, где $n=2$, $k=1$).

Заметим, что в частном случае $n=1$ (и только в этом случае) можно изобразить P_n в виде одномерной сферы, то есть в виде окружности, не отождествляя диаметрально противоположных точек. Именно, рассмотрим на двумерной плоскости связку O (иначе говоря, пучок прямых, проходящих через точку O) и окружность S, проходящую через эту же точку (рис. 101). Точке O на окружности S поставим в

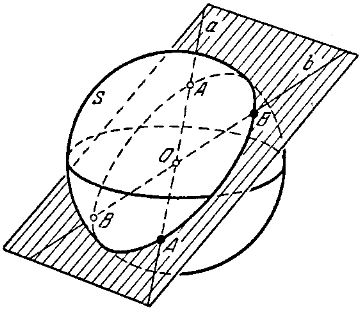


Рис. 100.

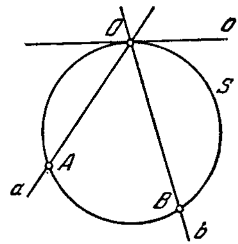


Рис. 101.

соответствие прямую o, касающуюся окружности в этой точке. Любой другой точке $A \in S$ поставим в соответствие прямую OA. Мы получим взаимно однозначное соответствие между прямыми связки O и точками окружности S, позволяющее рассматривать окружность как модель проективной прямой (см. в связи с этим п. 13 § 2).

§ 4. Центральное проектирование

1. Выше мы рассматривали проективные преобразования в данном пространстве P_n. Это понятие можно обобщить и рассматривать проективное отображение одного n-мерного проективного пространства P_n на другое n-мерное проективное пространство P'_n, считая, что это отображение дается формулами (1) § 2 при условии, что $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ — координаты прообраза в пространстве P_n, $(\xi'_1, \ldots, \xi'_{n+1})$ — координаты образа в пространстве P'_n. В этом параграфе мы рассмотрим важный частный случай: так называемое центральное проектирование.

2. Из п. 10 § 2 следует, что в P_n любая прямая и любая гиперплоскость пересекаются.

Нетрудно проверить, что если прямая a не лежит целиком в гиперплоскости Π, то у них имеется единственная общая точка. Для доказательства добавим уравнение гиперплоскости Π к системе уравнений ранга $n-1$, определяющих прямую a. Если a и Π имеют две разные общие точки, то объединенная система уравнений имеет два независимых нетривиальных решения, так что ее ранг $r \leqslant n-1$. Но это возможно лишь тогда, когда уравнение гиперплоскости Π является следствием уравнений прямой a, то есть когда $a \subset \Pi$.

3. Пусть теперь в P_n выбраны какие-нибудь две различные гиперплоскости Π и Π' и зафиксирована произвольная точка O, не принадлежащая ни одной из этих гиперплоскостей.

Через произвольную точку M гиперплоскости Π и через точку O проведем прямую OM. Вследствие п. 2 прямая OM пересекает Π' в единственной точке M', и для каждой точки $M' \in \Pi'$ найдется единственная точка $M \in \Pi$ такая, что M, O и M' лежат на одной прямой (рис. 102).

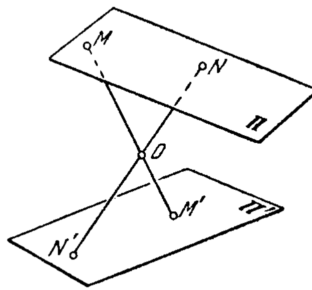


Рис. 102.

Точку M' будем называть *проекцией точки M из центра O на гиперплоскость* Π'. Будем писать также $M' = f(M)$. Взаимно однозначное отображение $M' = f(M)$ гиперплоскости Π на гиперплоскость Π' называется *центральным проектированием гиперплоскости* Π *на гиперплоскость* Π' *из центра* O.

4. Вместо гиперплоскостей Π, Π' можно рассматривать две плоскости Π_k, Π'_k произвольной одинаковой размерности k и определить центральное проектирование одной из них на другую, но при этом требуется специальное взаимное расположение плоскостей Π_k, Π'_k и точки O.

Именно, предположим, что Π_k, Π'_k и O принадлежат какой-нибудь одной $(k+1)$-мерной проективной плоскости Π_{k+1} в пространстве P_n. Кроме того, будем считать, что плоскости Π_k и Π'_k не совпадают, и точка O им не принадлежит. Тогда полностью применимы рассуждения и построения пп. 2, 3, поскольку Π_k и Π'_k можно рассматривать как гиперплоскости в $(k+1)$-мерном проективном пространстве, которым является плоскость Π_{k+1} (см. рис. 103, на котором $k=1$).

5. Теорема. *Центральное проектирование плоскости* Π_k *на плоскость* Π'_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ *есть проективное отображение.*

Доказательство. Мы знаем, что Π_k и Π'_k можно рассматривать как проективные пространства (§ 2, п. 14) и что центральное проектирование $M' = f(M)$ является взаимно однозначным отображением Π_k на Π'_k (при $k \leqslant n-2$ вследствие специального взаимного расположения плоскостей). Поэтому нам достаточно выяснить вид формул, задающих это отображение.

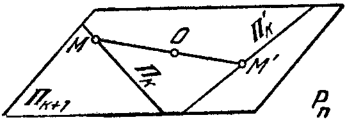


Рис. 103.

Выберем в P_n систему координат так, чтобы точка O имела координаты $\xi_1^0 = \ldots = \xi_n^0 = 0$, $\xi_{n+1}^0 \neq 0$. Согласно формуле (11) из § 2 произвольная точка $M \in \Pi_k$ имеет координаты

$$\xi_i = \mu_1 u_i^{(1)} + \ldots + \mu_{k+1} u_i^{(k+1)},$$

где $u_i^{(l)}$ — некоторые числа. Аналогично произвольная точка $M' \in \Pi'_k$ имеет координаты

$$\xi_i = \mu'_1 v_i^{(1)} + \ldots + \mu'_{k+1} v_i^{(k+1)}.$$

При этом $(\mu_1, \ldots, \mu_{k+1})$ можно считать однородными координатами M внутри Π_k, а $(\mu'_1, \ldots, \mu'_{k+1})$ — однородными координатами M' внутри Π'_k. Если точки O, M, M' лежат на одной прямой, то

$$\xi_i^0 = \alpha\xi_i + \beta\xi'_i, \qquad i = 1, \ldots, n+1. \tag{1}$$

Здесь $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, так как ни одна из точек $M(\xi_i)$ и $M'(\xi'_i)$ не совпадает с точкой $O(\xi_i^0)$. При $i = 1, \ldots, n$ получаем $\alpha\xi_i + \beta\xi'_i = 0$, но $\alpha\xi_{n+1} + \beta\xi'_{n+1} \neq 0$. Обратно, если равенства (1) обеспечены для некоторых чисел $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ при $i = 1, \ldots, n$ и если $\alpha\xi_{n+1} + \beta\xi'_{n+1} \neq 0$, то точки $M(\xi_i)$ и $M'(\xi'_i)$ лежат на одной прямой с точкой O. Таким образом, если мы хотим найти проекцию M' по данной точке M, то должны решить систему уравнений

$$\mu'_1 v_i^{(1)} + \ldots + \mu'_{k+1} v_i^{(k+1)} = \lambda(\mu_1 u_i^{(1)} + \ldots + \mu_{k+1} u_i^{(k+1)}),$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

считая $\mu_1, \ldots, \mu_{k+1}, u_i^{(j)}, v_i^{(j)}$ и $\lambda \neq 0$ данными, а $\mu_1', \ldots, \mu_{k+1}'$ — искомыми. Тогда в качестве $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ можно будет взять любые числа при условии $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$. Кроме того, мы должны иметь

$$\mu_1' v_{n+1}^{(1)} + \ldots + \mu_{k+1} v_{n+1}^{(k+1)} \neq \lambda \left(\mu_1 u_{n+1}^{(1)} + \ldots + \mu_{k+1} u_{n+1}^{(k+1)}\right). \quad (3)$$

Мы заведомо знаем, что точка M' существует и единственна. Поэтому система (2) однозначно разрешима, а неравенство (3) соблюдается. Кроме того, матрица, составленная из столбцов $v_i^{(1)}, \ldots, v_i^{(k+1)}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, имеет ранг $k+1$ (см. п. 14 § 2). Поэтому у нее есть базисный минор D порядка $k+1$. Предположим для простоты изложения, что минор D составлен первыми $k+1$ строчками. Тогда мы возьмем в системе (2) первые $k+1$ уравнений, а остальные отбросим. Решая полученную систему по правилу Крамера, получим

$$\begin{gathered} \mu_1' = \lambda \left(\frac{D_{11}}{D} \mu_1 + \ldots + \frac{D_{1\, k+1}}{D} \mu_{k+1}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_{k+1}' = \lambda \left(\frac{D_{k+1\, 1}}{D} \mu_1 + \ldots + \frac{D_{k+1\;k+1}}{D} \mu_{k+1}\right), \end{gathered} \quad (4)$$

где D_{jl} есть определитель, полученный из D заменой столбца с номером j столбцом $u_i^{(l)}$ ($i = 1, \ldots, k+1$). Мы видим, что $\mu_1', \ldots, \mu_{k+1}'$ выражаются (с точностью до множителя λ) линейными и однородными формулами через $\mu_1, \ldots, \mu_{k+1}$. Коэффициенты этих формул, т. е. $\frac{\lambda}{D} D_{jl}$, составляют невырожденную матрицу, так как в противном случае можно подобрать не все равные нулю числа $\mu_1, \ldots, \mu_{k+1}$, для которых будет $\mu_1' = \ldots = \mu_{k+1}' = 0$. Но это означает, что некоторая точка $M \in \Pi_k$ не имеет проекции на Π_k', вопреки условию. Таким образом, мы установили, что центральное проектирование Π_k на Π_k' из центра O задается линейными однородными формулами (4) с невырожденной матрицей коэффициентов. Теорема доказана.

Итак, центральное проектирование является частным случаем проективного отображения. Отсюда, по-видимому, происходит название проективных отображений.

6. В качестве упражнения рекомендуем читателю доказать, что если возможно (взаимно однозначное) центральное проектирование плоскости Π_k на плоскость Π'_k из центра O, то Π_k, Π'_k и O содержатся в некоторой $(k+1)$-мерной плоскости пространства P_n.

7. Результаты, установленные в § 2 о проективных преобразованиях, автоматически переносятся на случай проективных отображений. Поэтому из доказанной в п. 5 теоремы вытекает следующее предложение.

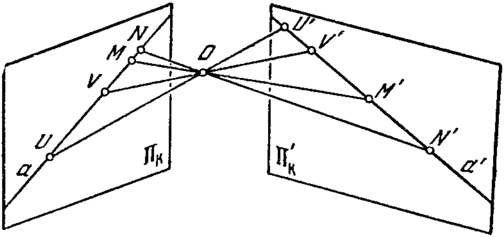


Рис. 104.

Пусть дана прямая a в плоскости Π_k и прямая $a' \in \Pi'_k$, которая является образом a при проектировании Π_k на Π'_k из некоторого центра O. Пусть далее U, V, M, N — четыре точки на прямой a; U', V', M', N' — их проекции на a' (рис. 104). Тогда

$$(U'V'M'N') = (UVMN),$$

то есть двойное отношение является инвариантом относительно центральных проектирований.

§ 5. Проективная эквивалентность фигур

1. Две фигуры в проективном пространстве P_n (то есть два множества, состоящие из точек, прямых и k-мерных плоскостей) называются *проективно эквивалентными*, если одна из них переводится в другую с помощью некоторого проективного преобразования.

Так как все проективные преобразования образуют группу, то имеют место следующие предложения:

1) Если фигура $\mathscr{A}$ проективно эквивалентна фигуре $\mathscr{A}'$, то $\mathscr{A}'$ эквивалентна $\mathscr{A}$.

2) Если фигура $\mathscr{A}$ эквивалентна $\mathscr{A}'$ и фигура $\mathscr{A}'$ эквивалентна $\mathscr{A}''$, то $\mathscr{A}$ эквивалентна $\mathscr{A}''$.

3) Каждая фигура эквивалентна самой себе.

В проективной геометрии проективно эквивалентные фигуры не различаются, подобно тому как в метрической геометрии не различаются конгруэнтные фигуры.

2. Теорема 1. *В n-мерном проективном пространстве любые две плоскости одинаковой размерности проективно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть произвольная k-мерная плоскость Π_k задана системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\xi_1+\ldots+a_{1\,n+1}\;\xi_{n+1}&=0,\\ \cdots\cdots&\cdots\\ a_{r1}\xi_1+\ldots+a_{r\,n+1}\;\xi_{n+1}&=0,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ранг которой равен числу уравнений ($r=n-k$). Рассмотрим проективное преобразование

$$\left.\begin{aligned} \xi_1'&=a_{11}\xi_1\quad+\ldots+a_{1\,n+1}\xi_{n+1},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \xi_r'&=a_{r1}\xi_1\quad+\ldots+a_{r\,n+1}\xi_{n+1},\\ \xi_{r+1}'&=a_{r+1\,1}\xi_1+\ldots+a_{r+1\,n+1}\xi_{n+1},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \xi_{n+1}'&=a_{n+1\,1}\xi_1+\ldots+a_{n+1\,n+1}\xi_{n+1},\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где коэффициенты выражений $\xi_{r+1}', \ldots, \xi_{n+1}'$ взяты как угодно, лишь бы матрица преобразования (2) была невырожденной (такой выбор возможен, поскольку система (1) имеет ранг $r=n-k$). Плоскость Π_k преобразованием (2) переводится во вполне определенную плоскость $\xi_1'=0, \ldots, \xi_r'=0$, которую мы обозначим через Π_k^0. Аналогично предыдущему устанавливается, что любая другая k-мерная проективная плоскость $\tilde{\Pi}_k$ проективно эквивалентна плоскости Π_k^0. Отсюда следует, что Π_k и $\tilde{\Pi}_k$ эквивалентны между собой.

3. Рассмотрим проективную прямую. На ней всевозможные упорядоченные тройки различных точек проективно эквивалентны между собой вследствие теоремы 1 § 3; выясним, при каких условиях проективно эквивалентны четверки точек. Докажем, что справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы упорядоченные четверки различных точек U, V, M, N и U', V', M', N' на одной прямой были проективно эквивалентны, необходимо и достаточно равенство их двойных отношений*

$$(UVMN)=(U'V'M'N'). \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость равенства (3) следует из проективной инвариантности двойного отношения. Докажем достаточность. Пусть равенство (3) соблюдается. По теореме 1 § 3 существует проективное преобразование f такое, что

$$U'=f(U),\ V'=f(V),\ M'=f(M).$$

Положим $f(N)=N''$. Тогда $(U'\,V'\,M'\,N'')=(U\,V\,M\,N)=$ $=(U'V'M'N')$ вследствие проективной инвариантности двойного отношения и условия (3). Но если заданы различные точки U', V', M' и двойное отношение $(U'V'M'N')=g$, то точка N' определяется однозначно, так как ее однородные координаты однозначно (с точностью до множителя) выражаются из формул п. 15 § 2 через g и координаты U', V' и M'. Поэтому $N''=N'$. Теорема доказана.

4. Говорят, что упорядоченная пара точек MN гармонически разделяет упорядоченную пару точек UV (расположенных на прямой MN), если

$$(UVMN)=-1. \tag{4}$$

В этом случае говорят также, что четверка точек U, V, M, N является ***гармонической*** и что точка N — ***четвертая гармоническая*** для (упорядоченной) тройки точек U, V, M.

Гармоничность четверки точек не нарушится, если:

1) поменять местами пары точек M, N и U, V;

2) поменять местами точки внутри любой из этих пар.

Эти свойства сразу следуют из формулы (4) и формул п. 15 § 2.

5. Пусть аффинная прямая пополнена бесконечно удаленной точкой N. Рассмотрим на этой прямой отрезок AB; обозначим через M его середину.

Теорема 3. *Пара точек MN гармонически разделяет пару точек AB.*

Иначе говоря, середина отрезка AB является четвертой гармонической для A, B, N, где N — бесконечно удаленная точка.

Доказательство теоремы. Введем на прямой аффинную координату x так, чтобы $x=0$ в точке A и $x=1$ в точке B. Тогда $x={}^1/_2$ в точке M (рис. 105). Введем, кроме того, однородные координаты (ξ, η), полагая $x={}^{\xi}/_{\eta}$. Мы получим следующие однородные координаты рассматриваемых точек: $A(0, 1)$, $M(1, 2)$, $B(1, 1)$, $N(1, 0)$. Отсюда с помощью формул (12)—(14) § 2 находим

$$(ABMN) = -1.$$

6. Перейдем к рассмотрению некоторых фигур на двумерной проективной плоскости.

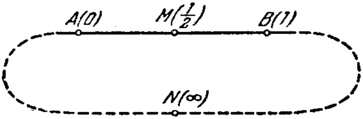


Рис. 105.

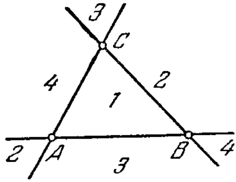


Рис. 106.

Трехвершинником называется совокупность трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех прямых, попарно соединяющих эти точки (рис. 106).

Поскольку при проективном преобразовании прямая переходит в прямую, из теоремы 1 § 3 вытекает проективная эквивалентность любых двух трехвершинников на проективной плоскости.

7. Понятие трехвершинника помогает наглядно проиллюстрировать некоторые геометрические свойства действительной проективной плоскости. Перечислим эти свойства, не останавливаясь на доказательствах.

Один трехвершинник разбивает всю действительную проективную плоскость на четыре треугольника, которые на рис. 106 и 107 помечены цифрами *1*, *2*, *3*, *4* (на рис. 107 проективная плоскость изображена в виде сферы с отождествлением диаметрально противоположных точек).

Если на аффинной плоскости какой-нибудь многоугольник разбит на треугольники, то можно так выбрать направление обхода каждого из этих треугольников, чтобы обходам любых двух соседних треугольников соответствовали противоположные направления движения по их общей стороне (рис. 108). Такой выбор обхода треугольников можно сделать двумя разными способами, что соответствует двум различным ориентациям аффинной плоскости.

На проективной плоскости, разбитой на треугольники, такого согласованного обхода всех треугольников выбрать невозможно. Например, если мы согласуем обходы первого и второго треугольников (рис. 107), а затем второго и третьего, то обходы первого и третьего треугольников оказываются не согласованными между собой.

Говорят поэтому, что действительная проективная плоскость не ориентируема.

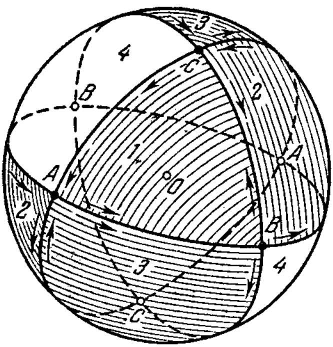


Рис. 107.

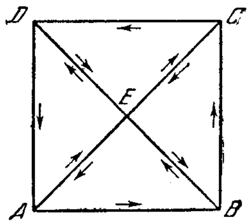


Рис. 108.

Замечание. На аффинной плоскости нельзя разместить не только четыре, но даже и три треугольника с таким взаимным прилеганием сторон, какое наблюдается в трехвершиннике. Однако в трехмерном аффинном пространстве можно построить модель взаимного расположения любых трех треугольников трехвершинника с помощью так называемого листа Мёбиуса (т. е. поверхности, склеенной из изогнутого прямоугольника, как показано на рис. 109). К краю листа Мёбиуса можно подклеить и четвертый треугольник трехвершинника и получить модель всей проективной плоскости в виде поверхности, если допускать деформацию склеиваемых треугольников и самопересечение поверхности. Это самопересечение можно ликвидировать за счет выхода в четырехмерное пространство.

8. Фигура на проективной плоскости, составленная четырьмя точками, из которых никакие три не лежат на одной прямой, и шестью прямыми, соединяющими попарно эти точки, называется полным *четырехвершинником*.

Указанные точки называют вершинами, прямые, которые попарно их соединяют,— сторонами четырехвершинника. На рис. 110 изображен четырехвершинник $ABCD$. Стороны,

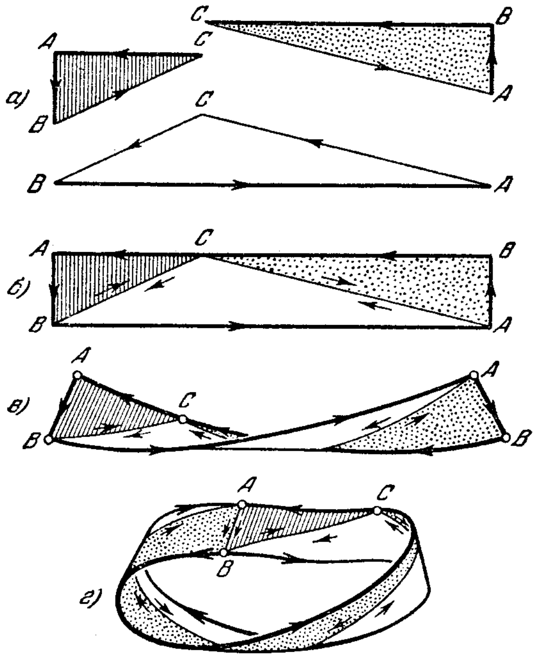


Рис. 109.

не имеющие общей вершины, называются противоположными. Так, четырехвершинник $ABCD$ обладает тремя парами противоположных сторон: AB и CD, AC и BD, BC и AD. Точки пересечения противоположных сторон называют диагональными точками четырехвершинника. На рис. 110 диагональные точки суть P, Q, R.

Из теоремы 1 § 3 следует, что любые два четырехвершинника проективно эквивалентны (тогда как системы из пяти точек на проективной плоскости, вообще говоря, не эквивалентны между собой).

Обратим внимание на то, что все три диагональные точки четырехвершинника равноправны между собой: любую из них можно перевести в любую другую таким проективным преобразованием, которое переводит четырехвершинник в себя.

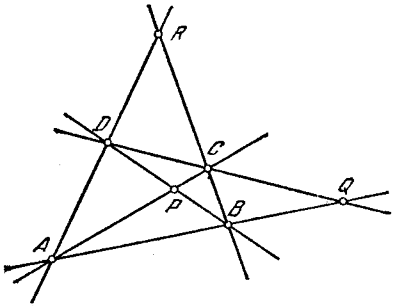


Рис. 110.

Например, если мы хотим перевести точку P в точку Q (см. рис. 110), то нам достаточно взять такое проективное преобразование f, при котором

$$f(A)=A,\quad f(B)=C,$$
$$f(C)=B,\quad f(D)=D.$$

Тогда прамая AB перейдет в прямую AC, прямая CD — в прямую BD так, что точки P и Q поменяются местами, а четырехвершинник $ABCD$ преобразуется в этот же четырехвершинник.

9. Пусть дан четырехвершинник $ABCD$. Через две его диагональные точки P и Q проведем прямую и обозначим через E и F точки ее пересечения с теми двумя сторонами четырехвершинника, которые проходят через третью диагональную точку R (рис. 111).

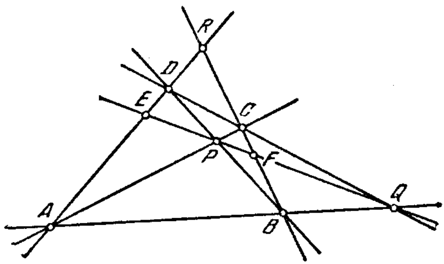


Рис. 111.

Теорема 4. *Если выполнено указанное построение, то следующие четверки точек являются гармоническими*

$$P,\ Q,\ E,\ F;\qquad A,\ D,\ E,\ R;\qquad B,\ C,\ F,\ R.$$

Доказательство. Будем считать, что проективная плоскость получена в результате пополнения аффинной плоскости бесконечно удаленными точками. Сделаем проективное преобразование, переводящее точки A, B, C и D

соответственно в вершины A', B', C' и D' некоторого параллелограмма. Тогда точка P перейдет в центр P' параллелограмма $A'B'C'D'$ (рис. 112), точки Q и R перейдут в бесконечно удаленные точки Q' и R' прямых $A'B'$ и $A'D'$ соответственно. Прямая PQ перейдет в прямую, параллельную $A'B'$, точки E и F — в середины E' и F' противоположных сторон $A'D'$ и $B'C'$, а точка P' окажется серединой отрезка $E'F'$. Поэтому с учетом теоремы 3 п. 5 и проективной инвариантности двойного отношения имеем

$$(PQEF) = (P'Q'E'F') = -1,$$
$$(ADER) = (A'D'E'R') = -1,$$
$$(BCFR) = (B'C'F'R') = -1,$$

что и требовалось доказать.

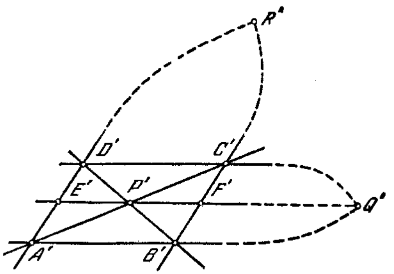


Рис. 112.

10. Покажем, как геометрически построить четвертую гармоническую точку N для трех заданных точек U, V, M на евклидовой плоскости (U, V, M — три различные точки на одной прямой).

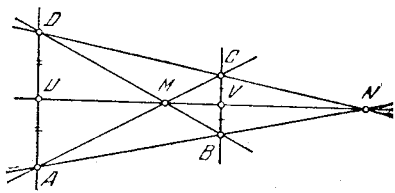


Рис. 113.

Через точку U проведем прямую, перпендикулярную UV, и отложим на ней отрезки $AU = UD$ (рис. 113). Обозначим через B и C точки пересечения прямых DM и AM с перпендикуляром к прямой UV, проходящим через точку V. Тогда прямые DC и AB, очевидно, пересекают UV в одной точке, которая является искомой вследствие теоремы 4.

§ 6. Проективная классификация гиперповерхностей второго порядка

1. Теорема. *Для того чтобы две гиперповерхности второго порядка в действительном P_n были проективно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы левые части их уравнений имели одинаковые ранги и равные по абсолютной величине сигнатуры.*

Доказательство. Пусть даны гиперповерхности

$$a(\xi, \xi) = 0, \qquad b(\xi, \xi) = 0, \tag{1}$$

где $a(\xi, \xi)$ и $b(\xi, \xi)$ — квадратичные формы относительно однородных координат $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) = \xi$.

Геометрический смысл каждого из уравнений (1) не изменится, если обе части уравнения умножить на -1. Поэтому можно предполагать, что канонический вид каждой из квадратичных форм содержит отрицательных членов не больше, чем положительных. Тогда сигнатура положительна и равенство рангов и сигнатур двух квадратичных форм равносильно равенству их рангов и положительных индексов. Учитывая это соображение, докажем сначала достаточность, затем необходимость.

1) Пусть квадратичные формы $a(\xi, \xi)$ и $b(\xi, \xi)$ имеют один и тот же ранг r и один и тот же положительный индекс k.

Рассмотрим квадратичную форму

$$c(\xi, \xi) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_k^2 - \xi_{k+1}^2 - \ldots - \xi_r^2 \tag{2}$$

и вместе с ней третью гиперповерхность $c(\xi, \xi) = 0$.

Мы знаем, что существует невырожденное линейное преобразование переменных, которое форму $a(\xi, \xi)$ переводит в форму вида (2). Это значит, что существует проективное преобразование, которое переводит гиперповерхность $a(\xi, \xi) = 0$ в гиперповерхность $c(\xi, \xi) = 0$, то есть указанные гиперповерхности проективно эквивалентны. Точно так же гиперповерхность $b(\xi, \xi) = 0$ проективно эквивалентна гиперповерхности $c(\xi, \xi) = 0$. Следовательно, гиперповерхности (1) проективно эквивалентны между собой.

2) Пусть $a(\xi, \xi) = 0$ и $b(\xi, \xi) = 0$ проективно эквивалентны. Это значит, что существует линейное преобразование переменных ξ в переменные η, которое переводит форму $a(\xi, \xi)$ в квадратичную форму $b(\eta, \eta)$. Но тогда ранги и положительные индексы квадратичных форм $a(\xi, \xi)$ и $b(\xi, \xi)$ одинаковы. Теорема доказана.

Замечание. В n-мерном комплексном проективном пространстве гиперповерхности $a(\xi, \xi) = 0$ и $b(\xi, \xi) = 0$ проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда квадратичные формы $a(\xi, \xi)$ и $b(\xi, \xi)$ имеют одинаковый ранг r. Доказательство аналогично предыдущему.

2. Определение. Гиперповерхность второго порядка $a(\xi, \xi) = 0$ в n-мерном проективном пространстве называется *невырожденной*, если невырождена квадратичная форма $a(\xi, \xi)$, то есть если ее ранг $r = n + 1$.

Замечание. Сформулированное определение согласуется с терминологией предыдущей главы.

3. В действительном P_n всякая невырожденная гиперповерхность проективно эквивалентна одной из гиперповерхностей вида

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_k^2 - \xi_{k+1}^2 - \ldots - \xi_{n+1}^2 = 0,$$

где $\frac{n+1}{2} \leqslant k \leqslant n + 1$. Поэтому при четном n в пространстве P_n имеется $\frac{n}{2} + 1$ проективно различных невырожденных гиперповерхностей второго порядка, а при нечетном n число их равно $\frac{1}{2}(n + 3)$.

4. В двумерном проективном пространстве, которое называется проективной плоскостью, имеются (в действительном случае) две проективно различные невырожденные гиперповерхности второго порядка, которые, впрочем, в этом случае гораздо естественнее называть кривыми (что все и делают).

Именно:

1) кривая

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0,$$

которая на действительной плоскости совсем не имеет точек и потому называется нулевой;

2) кривая

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0, \tag{3}$$

которая имеет действительные точки и носит название овальной.

5. Будем считать, что проективная плоскость получена из обычной плоскости добавлением бесконечно удаленной прямой $\xi_3 = 0$. Прямая $\xi_3 = 0$ не пересекает кривую (3), и мы можем в уравнении (3) перейти к неоднородным координатам $x = \frac{\xi_1}{\xi_3}$, $y = \frac{\xi_2}{\xi_3}$. Получаем эллипс

$$x^2 + y^2 = 1.$$

6. Предположим теперь, что бесконечно удаленной является прямая $\xi_2=0$. Она пересекает кривую (3) в двух различных действительных точках $(\pm\lambda,\ 0,\ \lambda)$. Исключая их из рассмотрения, перейдем к неоднородным координатам $x=\frac{\xi_3}{\xi_2}$, $y=\frac{\xi_1}{\xi_2}$. Получим гиперболу

$$x^2-y^2=1.$$

7. Теперь сделаем на проективной плоскости следующее преобразование однородных координат:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \xi_1, \\ \eta_2 &= \quad -\xi_2+\xi_3, \\ \eta_3 &= \qquad \xi_2+\xi_3. \end{aligned}\right\}$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$\eta_1^2-\eta_2\eta_3=0. \tag{3a}$$

Будем считать, что бесконечно удаленной является прямая $\eta_3=0$. Эта прямая пересекает кривую (3а) в двукратной точке $(0,\lambda,0)$. Исключая ее из рассмотрения, положим $x=\frac{\eta_1}{\eta_3}$, $y=$ $=\frac{\eta_2}{\eta_3}$. Получим параболу $y=x^2$.

8. Таким образом, аффинно различные эллипс, гипербола и парабола получаются из одной и той же овальной кривой в зависимости от того, как она расположена по отношению к той прямой, которая является (или считается) бесконечно удаленной.

В тех моделях проективной плоскости, где не выделена бесконечно удаленная прямая, такого различия нет. Так, например, если в качестве P_2 взята связка O в $\mathfrak{A}_3$, то овальная кривая представляет собой обычный конус. Переходя от связки к плоскости $\mathfrak{A}_2$ согласно п. 2 § 3, мы получим эллипс, гиперболу или параболу в зависимости от расположения плоскости $\mathfrak{A}_2$ по отношению к рассматриваемому конусу (см. рис. 114, 115, 116).

9. Согласно п. 3 в трехмерном действительном проективном пространстве имеются три различные невырожденные поверхности второго порядка. Перечислим их.

1) $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2=0$ — нулевая поверхность (мнимый эллипсоид), у нее нет действительных точек.

2) $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2-\xi_4^2=0$ — овальная поверхность. Этот тип включает эллипсоид, эллиптический параболоид и двуполостный гиперболоид. Здесь полная аналогия с овальной кривой, рассмотренной выше.

3) $\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2-\xi_4^2=0$ — кольцевидная поверхность. Надлежащим подсчетом нетрудно проверить, что при переходе

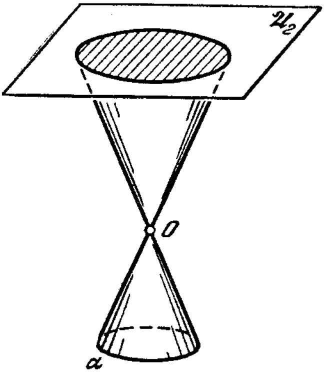


Рис. 114.

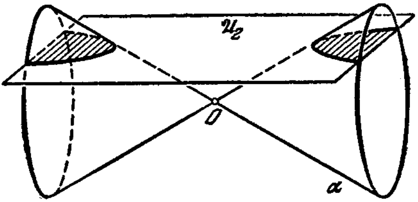


Рис. 115.

к аффинному пространству кольцевидная поверхность превращается либо в однополостный гиперболоид, либо в гипер-

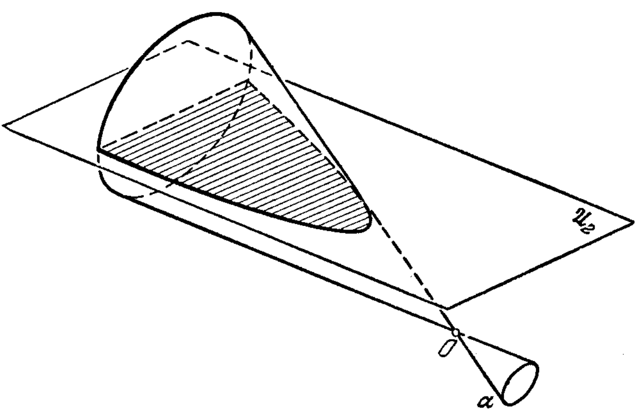
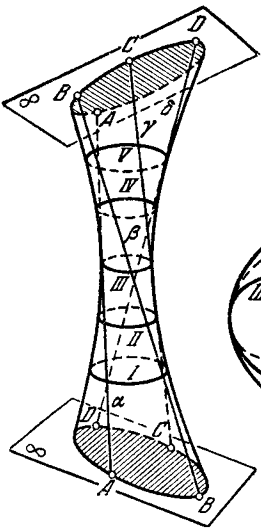


Рис. 116.

болический параболоид. Разница состоит в том, что однополостный гиперболоид пересекает бесконечно удаленную плоскость по овальной кривой, а гиперболический параболоид пересекает бесконечно удаленную плоскость по двум прямолинейным образующим. Наглядной моделью кольцевидной поверхности может служить тор. Не останавливаясь на доказательстве, ограничимся лишь рис. 117, на котором параллелям тора α, β, γ, δ соответствуют прямолинейные образующие кольцевидной поверхности, помеченные теми же буквами; меридианам тора *I*, *II*, *III*, *IV*, *V* соответствуют овальные кривые на кольцевидной поверхности, помеченные теми же цифрами. Одному меридиану *ABCD*, взятому на торе,



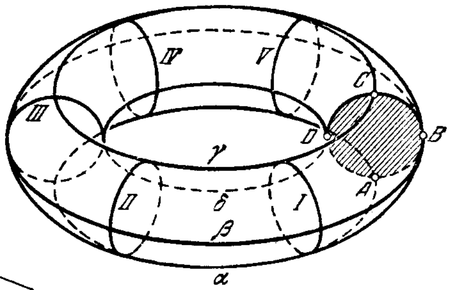


Рис. 117.

соответствует бесконечно удаленная овальная кривая кольцевидной поверхности. Она условно изображена в двух экземплярах; нужно представить себе, что точки на ней, помеченные одинаковыми буквами, отождествляются.

Выше, в п. 9 § 6 гл. XI, мы отмечали, что в четырехмерном аффинном пространстве существуют два различных вида действительных конусов второго порядка. Один из этих конусов изображает овальную поверхность, а другой — кольцевидную, если в качестве модели P_3 рассматривается связка в $\mathfrak{A}_4$.

10. Заметим еще, что при рассмотрении вырожденных поверхностей нужно иметь в виду, что в проективном пространстве исчезает разница между цилиндрами и конусами. Прямолинейные образующие цилиндра, параллельные с аффинной точки зрения, пересекаются в одной бесконечно удаленной точке. Так, например, уравнение (3) в трехмерном действительном проективном пространстве задает действительный конус. При переходе к аффинному пространству этот конус в зависимости от положения бесконечно удаленной

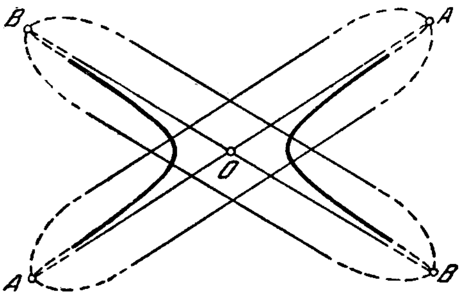


Рис. 118.

плоскости превращается в одну из следующих четырех поверхностей, различных в аффинной классификации: конус x^2+ $+y^2-z^2=0$, эллиптический цилиндр, параболический цилиндр или гиперболический цилиндр.

11. Вернемся к двумерному случаю. Нетрудно заметить, что при переходе от аффинной плоскости к проективной

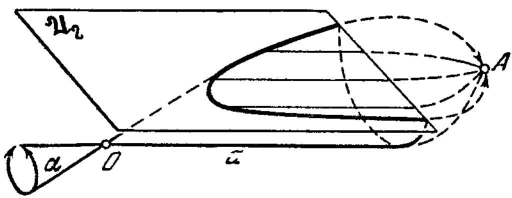


Рис. 119.

кривая второго порядка пополняется бесконечно удаленными точками тех и только тех прямых, которые имеют асимптотические направления относительно рассматриваемой кривой (рис. 118, 119). На рис. 119 (как и на рис. 116) показана парабола и модель овальной кривой в виде конуса α в связке O. Параболе соответствует конус α, за исключением одной прямолинейной образующей a. Ось параболы и все параллельные ей прямые плоскости $\mathfrak{A}_2$ имеют общую бесконечно удаленную точку A, которой в связке O соответствует прямая a. Точка A является бесконечно удаленной точкой рассматриваемой параболы.

12. Утверждение, сформулированное в п. 11, мы докажем сразу для n-мерного случая.

Если мы считаем точки $\xi_{n+1}=0$ бесконечно удаленными, то для нахождения всех бесконечно удаленных точек, лежащих на гиперповерхности второго порядка, достаточно в ее уравнении положить $\xi_{n+1}=0$. Вернемся к уравнению (6) § 1. При $\xi_{n+1}=0$ получим

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} A_{ij}\xi_i\xi_j=0. \tag{4}$$

Уравнение (4) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (8) § 9 гл. XI, которое определяет координаты векторов, имеющих асимптотические направления относительно рассматриваемой гиперповерхности. Отсюда следует, что прямые асимптотических направлений и есть те прямые, на которых находятся бесконечно удаленные точки данной гиперповерхности.

§ 7. Пересечение гиперповерхности второго порядка и прямой. Поляры

1. Пусть в n-мерном проективном пространстве P_n дана гиперповерхность второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}\xi_i\xi_j=0 \tag{α}$$

и прямая

$$\xi_i=\mu u_i+\nu v_i \qquad (i=1,\ldots,n+1), \tag{1}$$

проходящая через какие-нибудь две точки $U(u_1, \ldots, u_{n+1})$, $V(v_1, \ldots, v_{n+1})$ пространства P_n. Для нахождения точек пересечения прямой (1) с гиперповерхностью (α) нужно подставить выражения (1) в уравнение (α). Мы получим уравнение вида

$$A\mu^2+2B\mu\nu+C\nu^2=0, \tag{2}$$

где

$$A=\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}u_iu_j,\quad B=\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}u_iv_j,\quad C=\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}v_iv_j. \tag{3}$$

Уравнение (2) определяет искомые точки пересечения.

Исследуем уравнение (2). Решение $\mu=\nu=0$ дает $\xi_1=\ldots=\xi_{n+1}=0$, так что ему не соответствует никакая точка в P_n. Нужно искать лишь те решения, для которых μ и ν не обращаются в нуль одновременно. В зависимости от коэффициентов A, B, C возможны следующие три случая:

1) $AC-B^2\neq 0$. Покажем, что в этом случае имеются две различные точки пересечения.

Предположим сначала, что $A\neq 0$. Тогда, если $\nu=0$, то $\mu=0$. Поэтому будем считать, что $\nu\neq 0$ и, разделив (2) на ν^2, получим квадратное уравнение для отношения μ/ν, которое имеет два разных корня. Обозначим их λ_1 и λ_2. В результате получим два семейства решений уравнения (2)

$$\mu=\lambda_1\nu,\qquad \mu=\lambda_2\nu, \tag{4}$$

где ν — свободное неизвестное. При $\nu\neq 0$ из (4) и (1) находим однородные координаты двух разных точек пересечения гиперповерхности (α) и прямой (1).

Если при этом a_{ij}, u_i, v_i действительны, но $AC-B^2<0$, то для $\{\xi_i\}$ получаются комплексно сопряженные значения. Тогда, даже если рассматривается действительное пространство P_n, говорят, что прямая (1) пересекает гиперповерхность (α) в двух комплексно сопряженных точках.

Пусть теперь $A=0$. Геометрически это означает, что точка U находится на гиперповерхности (α) (см. первое из равенств (3)). Точке U соответствует семейство решений (μ, 0) уравнения (2). Из условия $AC-B^2=-B^2\neq 0$ следует, что $B\neq 0$, поэтому, кроме точки U, есть еще одна точка пересечения, координаты которой определяются из (1) при условии $2B\mu+C\nu=0$.

2) $AC-B^2=0$, но среди коэффициентов A, B, C по крайней мере один отличен от нуля. Рассуждая аналогично предыдущему, нетрудно проверить, что уравнение (2) имеет два семейства решений, слившихся в одно семейство решений либо вида $\nu=\lambda\mu$, $\lambda\neq 0$, либо вида $\mu=\lambda\nu$, $\lambda\neq 0$; оно дает единственную точку, принадлежащую прямой (1) и гиперповерхности (α).

В этом случае говорят, однако, что имеется двойная точка пересечения. Если такая точка не является особой точкой гиперповерхности (как, например, вершина конуса), то в этой точке прямая (1) *касается* гиперповерхности.

3) $A=B=C=0$. Уравнение (2) обращается в тождество. Это значит, что прямая (1) целиком принадлежит гиперповерхности (α), то есть является ее *прямолинейной образующей.*

Замечание. В проективном пространстве, в отличие от аффинного, любая гиперповерхность второго порядка пересекается с любой прямой, и понятие асимптотического направления не имеет смысла.

2. Заменим квадратичную форму в левой части уравнения полярной билинейной формой

$$\sum_{i,\,j=1}^{n+1} a_{ij}u_i\xi_j=0, \tag{5}$$

считая, что $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ — координаты произвольно выбранной зафиксированной точки $U\in P_n$, $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ — текущие координаты.

Уравнение (5) определяет гиперплоскость, за исключением особого случая, когда обращаются в нуль коэффициенты при всех ξ_i, то есть когда

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}u_1+\ldots+a_{n+1\,1}u_{n+1}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1\,n+1}u_1+\ldots+a_{n+1\,n+1}u_{n+1}=0. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Но однородные координаты $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ не обращаются в нуль одновременно, поэтому из (6) имеем

$$\operatorname{Det}\|a_{ij}\|=0. \tag{7}$$

Далее, умножив уравнения (6) на $u_1, \ldots, u_{n+1}$ соответственно и затем сложив, получим

$$\sum_{i,\,j=1}^{n+1} a_{ij}u_iu_j=0. \tag{8}$$

Соотношения (7) и (8) показывают, что (5) может обратиться в тождество лишь тогда, когда гиперповерхность (α) вырождена, а точка U принадлежит (α).

Более того, для точки U не просто соблюдается уравнение (8), а соблюдаются по отдельности все уравнения (6);

такая точка U называется *особой точкой* гиперповерхности (α). Особыми точками обладают вырожденные гиперповерхности и только они. Типичный пример особой точки — вершина конуса. Итак, (5) обращается в тождество тогда, когда гиперповерхность (α) вырождена, а точка U принадлежит ей и является ее особой точкой. Во всех остальных случаях равенство (5) определяет некоторую гиперплоскость.

Определение. Гиперплоскость (5) называется *полярой* точки U относительно гиперповерхности (α).

Непосредственно из определения следует, что если точка U расположена на гиперповерхности (α) и имеет поляру, то эта поляра проходит через точку U; если же U не принадлежит (α), то поляра точки U не проходит через эту точку.

Если гиперплоскость Π является полярой точки U, то точка U называется *полюсом* гиперплоскости Π (относительно рассматриваемой гиперповерхности (α)). Легко показать, что произвольная гиперплоскость Π имеет единственный полюс относительно любой невырожденной гиперповерхности второго порядка.

В самом деле, пусть дана гиперплоскость

$$A_1\xi_1+\ldots+A_{n+1}\xi_{n+1}=0.$$

Для отыскания полюса этой гиперплоскости получаем из уравнения (5) систему

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}u_1+\ldots+a_{n+1\,1}u_{n+1}=A_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1\,n+1}u_1+\ldots+a_{n+1\,n+1}u_{n+1}=A_{n+1}. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Вследствие невырожденности данной гиперповерхности второго порядка имеем $\operatorname{Det}\|a_{ij}\|\neq 0$. При этом условии система уравнений (9) имеет и притом единственное решение $(u_1, \ldots, u_{n+1})$, что и требовалось.

3. Высказанное выше определение поляры как гиперплоскости, которая дана для точки U $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ уравнением (5), связано с некоторой системой проективных координат. Нужно показать, что это определение имеет инвариантный (геометрический) смысл, т. е. что поляра данной точки U относительно данной гиперповерхности второго порядка не зависит от выбора системы проективных координат.

Допустим, что мы переходим от старых координат ξ_i к новым координатам ξ_i' по формулам вида (1) п. 4 § 2; без потери общности можем считать в этих формулах $\lambda=1$. По терминологии тензорной алгебры формулы такого вида определяют контравариантный закон преобразования. По таким формулам, в частности, преобразуются старые координаты u_i точки U в новые координаты u'_i той же самой точки. Преобразуя левую часть уравнения данной гиперплоскости второго порядка, мы получим тождество

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a'_{ij}\xi'_i\xi'_j=\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}\xi_i\xi_j,$$

вследствие которого новые коэффициенты a'_{ij} выражаются через старые a_{ij} по ковариантному закону. Но в таком случае

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a'_{ij}u'_i\xi'_j=\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}u_i\xi_j, \tag{10}$$

поскольку полная свертка двухвалентного ковариантного тензора с двумя контравариантными тензорами есть инвариант. Из равенства (10) видно, что уравнения $\sum\limits_{i,j=1}^{n+1} a'_{ij}u'_i\xi'_j=0$ и $\sum\limits_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}u_i\xi_j=0$ соблюдаются одновременно и, следовательно, определяют одну и ту же плоскость. Тем самым инвариантность определения поляры, т. е. независимость поляры от выбора проективных координат, доказана. Заметим теперь, что формулы вида (1) п. 4 § 2 можно рассматривать с другой точки зрения, а именно как формулы проективного преобразования. Поэтому нами доказана также следующая теорема.

Теорема 1 (проективная инвариантность поляры). *Если при проективном преобразовании гиперповерхность* (α) *переходит в некоторую гиперповерхность* (α'), *а точка U — в точку U', то поляра точки U относительно* (α) *переходит в поляру точки U' относительно* (α').

4. Выше, в § 5 были определены гармонические четверки точек. Для дальнейшего нужно распространить это понятие на случай, когда точки одной из двух гармонически разделенных пар сливаются.

Временно будем считать, что проективная прямая с четверкой точек M, N, U, V получена в результате пополнения аффинной прямой бесконечно удаленной точкой U. Тогда $(MNUV) = -1$, если V является серединой отрезка MN (см. § 5, п. 5). Пусть теперь точка N стремится к M, а точка V остается четвертой гармонической для упорядоченной тройки M, N, U. Тогда V тоже стремится к M.

Исходя из этого, будем вообще считать, что если $M = N$, то четвертая гармоническая точка V для упорядоченной тройки M, N, U совпадает с M и N и будем писать в этом случае

$$(MNUV) = (UVMN) = -1.$$

5. Пусть точка U не принадлежит гиперповерхности (α), и пусть прямая a проходит через U.

Согласно п. 1 прямая a пересекает гиперповерхность в двух точках M, N (различных, совпадающих или комплексно сопряженных).

Определение. Точки U и V на прямой a расположены *гармонически* относительно гиперповерхности (α), если $(UVMN) = -1$.

Замечание. Этим определением можно пользоваться и тогда, когда пространство действительно, а точки M, N комплексно сопряженные (здесь мы используем терминологию, принятую нами в п. 1 § 7). С помощью формул п. 15 § 2 можно доказать, что в этом случае, если точка U является действительной, то и точка V действительна.

6. Теорема 2. *Если точка U не принадлежит гиперповерхности* (α), *то поляра точки U есть геометрическое место всех таких точек V, что пары UV расположены гармонически относительно* (α).

Доказательство. Пусть V — четвертая гармоническая для точек M, N, U. Координаты произвольной точки на прямой a, отличной от U, можно представить в виде

$$\xi_i = \lambda u_i + v_i \tag{11}$$

(см. (1) при $\nu \neq 0$, $\lambda = \mu/\nu$). Точки M и N определяются из (11) при $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, где λ_1, λ_2 — корни квадратного уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} v_i v_j + 2\lambda \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} u_i v_j + \lambda^2 \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} u_i u_j = 0, \tag{12}$$

которое получается при подстановке (11) в (α).

Предположим, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда точки M и N различны, и в силу выбора точки V имеем

$$(MNUV) = (UVMN) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1. \tag{13}$$

Значит, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, и по теореме Виета

$$\sum_{i,\,j=1}^{n+1} a_{ij} u_i v_j = 0. \tag{14}$$

Равенство (14) показывает, что точка V принадлежит поляре точки U.

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то $M = N$, а согласно п. 4 $V = M = N$, и из (11) находим, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (эти же равенства можно получить и из (12), учитывая, что точка V находится на гиперповерхности (α). Таким образом, снова имеем

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \tag{15}$$

откуда, как и выше, получаем (14).

Пусть теперь точка V принадлежит поляре, то есть соблюдается (14). Из (14), (12) и теоремы Виета следует (15). Дальше имеются две возможности:

либо $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, тогда $V = M = N$ вследствие (11), и $(UVMN) = -1$ согласно п. 4;

либо $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и тогда применима формула (13).

Теорема 2 доказана.

7. Теорема 1 является геометрически очевидным следствием теоремы 2. Чтобы пояснить это, рассмотрим случай, когда точка U не принадлежит гиперповерхности (α). Тогда для построения поляры точки U достаточно найти n точек $V_1, \ldots, V_n$, находящихся в общем положении и таких, что все пары UV_i расположены гармонически относительно (α). Гиперплоскость, проходящая через точки $V_1, V_2, \ldots, V_n$, и будет полярой точки U. При проективном преобразовании она перейдет в поляру образа точки U относительно образа гиперповерхности (α) вследствие проективной инвариантности двойного отношения.

8. Пусть точка U не принадлежит гиперповерхности (α) и расположена на некоторой гиперплоскости, принимаемой за бесконечно удаленную. Тогда из теоремы 2 и п. 5 § 5 (с учетом § 10 гл. XI) следует, что поляра Π точки U представляет собой диаметральную гиперплоскость, сопряженную направлению тех параллельных прямых, которые пересекаются в точке U (рис. 120).

9. Рассмотрим частный случай, когда гиперповерхность имеет уравнение вида

$$c_1\xi_1^2+\ldots+c_{n+1}\xi_{n+1}^2=0, \tag{16}$$

где $c_i\neq 0$ для всех $i=1, \ldots, n+1$, а в качестве точки U берется точка A_j с координатами

$$\xi_j=1,\ \xi_i=0 \qquad \text{при} \quad i\neq j \tag{17}$$

(j — некоторый фиксированный номер, $1\leqslant j\leqslant n+1$).

Согласно формуле (5) полярой точки A_j является гиперплоскость $\xi_j=0$.

Напомним, что выбор точек с координатами вида (17) и точки единиц $B(1, \ldots, 1)$ однозначно определяет систему координат в P_n (§ 3, п. 9). В данном случае система точек $A_1, \ldots, A_{n+1}$ обладает следующим свойством, характеризующим специальное расположение этих точек относительно гиперповерхности (16).

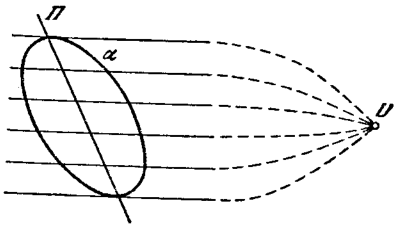


Рис. 120.

Каждая из точек A_j является полюсом гиперплоскости, проходящей через остальные точки $A_1, \ldots$ $\ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_{n+1}$.

Такая система точек называется автополярной.

Можно доказать, что указанное свойство не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы уравнение невырожденной гиперповерхности второго порядка приняло вид (16), а за счет выбора точки единиц можно добиться, чтобы $|c_i|=1$ при $i=1, \ldots, n+1$.

10. Рассмотрим еще некоторые свойства поляр.

Теорема 3 (принцип взаимности в теории поляр). *Если точка V расположена на поляре точки U, то поляра точки V проходит через точку U.*

Доказательство. Теорема 3 следует из определения поляры и симметричности матрицы $\|a_{ij}\|$ коэффициентов уравнения (α).

Теорема 4. *Если точка U лежит на гиперповерхности* (α) *и имеет поляру* Π, *то каждая прямая в поляре* Π, *проходящая через точку U, касается этой гиперповерхности в точке U, являясь, быть может, ее прямолинейной образующей* (рис. 121).

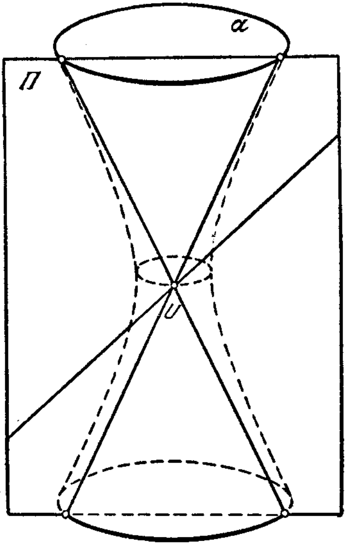


Рис. 121.

Доказательство. Если прямая вида (1) не имеет с гиперповерхностью (α) других общих точек, кроме точки U, то она является касательной согласно пп. 1, 2. Поэтому достаточно доказать, что если на прямой (1), кроме U, есть еще точка V, принадлежащая и гиперповерхности (α) и ее поляре (5), то прямая (1) целиком принадлежит гиперповерхности. Пусть точки U, V принадлежат гиперповерхности (α)

$$\sum_{i,\, j=1}^{n+1} a_{ij}u_iu_j = 0,$$

$$\sum_{i,\, j=1}^{n+1} a_{ij}v_iv_j = 0, \qquad (18)$$

и пусть, кроме того, точка V находится на поляре точки U

$$\sum_{i,\, j=1}^{n+1} a_{ij}u_iv_j = 0. \qquad (19)$$

Используя (18), (19), (1) и (α), находим, что

$$\sum_{i,\, j=1}^{n+1} a_{ij}\xi_i\xi_j = \sum_{i,\, j=1}^{n+1} a_{ij}(\mu u_i + \nu v_i)(\mu u_j + \nu v_j) =$$

$$= \mu^2 \sum_{i,\, j=1}^{n+1} a_{ij}u_iu_j + 2\mu\nu \sum_{i,\, j=1}^{n+1} a_{ij}u_iv_j + \nu^2 \sum_{i,\, j=1}^{n+1} a_{ij}v_iv_j = 0,$$

при любых μ, ν, то есть прямая UV является прямолинейной образующей гиперповерхности (α). Теорема 4 доказана.

Следствие. *Если точка на проективной плоскости принадлежит овальной кривой, то поляра этой точки является касательной к овальной кривой.*

11. В качестве приложения изложенных выше результатов рассмотрим следующую задачу.

Пусть на двумерной евклидовой плоскости дан эллипс и точка U вне его. Требуется построить касательные к эллипсу, проходящие через точку U.

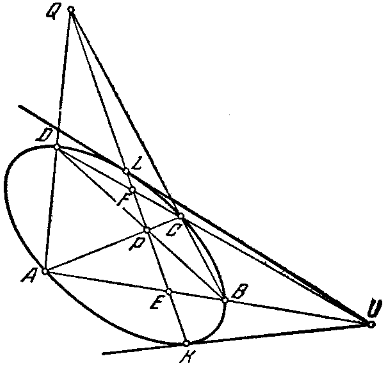


Рис. 122.

Построение. Через точку U проведем какие-нибудь две прямые, каждая из которых пересекает эллипс в двух различных (действительных) точках A, B и C, D соответственно (рис. 122). Пусть Q — точка пересечения прямых AD и BC; P — точка пересечения прямых AC и BD; K и L — точки пересечения эллипса с прямой PQ. Тогда прямые UK и UL являются искомыми касательными.

Доказательство легко проводится с помощью теоремы 4 из п. 9 § 5, теорем 2—3 этого параграфа и следствия, сформулированного в предыдущем пункте.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О КЛАССИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Утверждение, которое мы высказали в главе VI в конце § 2 и в п. 8 § 3 и оставили там без доказательства, может быть сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть G_n — группа всех действительных невырожденных $n \times n$-матриц, $f(P)$ — действительная числовая функция, заданная на G_n. Пусть $u = f(P)$ — гомоморфизм группы G_n в группу (по умножению) всех действительных чисел без нуля, т. е.*

$$f(PP') = f(P)\, f(P') \tag{1}$$

для любых $P, P' \in G_n$. Тогда

$$\text{либо } f(P) = |\operatorname{Det} P|^{\sigma}, \quad \sigma = \text{const}, \tag{2}$$

$$\text{либо } f(P) = \pm |\operatorname{Det} P|^{\sigma}, \tag{3}$$

где знак плюс отвечает случаю $\operatorname{Det} P > 0$, знак минус — случаю $\operatorname{Det} P < 0$.

Замечание 1. Обе функции (2), (3) удовлетворяют условию (1) вследствие хорошо известного свойства определителя произведения матриц. Поэтому сущность теоремы заключается в гарантии, что, кроме (2) и (3), нет других функций, удовлетворяющих условию (1).

Замечание 2. В приведенной выше формулировке теоремы упущены теоретико-функциональные условия. Мы докажем теорему, предполагая, что функция $f(P)$ непрерывна на G_n.

Замечание 3. Дальше мы можем забыть, что $u = f(P)$ есть гомоморфизм G_n в группу по умножению действительных чисел без нуля, а требовать только соблюдения (1). Дело в том, что если исключить неинтересный случай тождественного равенства $f(P) \equiv 0$, то из условия (1) само собой следует, что $f(P) \neq 0$ для всех $P \in G_n$.

В самом деле, допустим, что есть хотя бы одна матрица $P_0 \in G_n$, для которой $f(P_0) = 0$. Тогда для любой $P \in G_n$ имеем $f(P) = f(PP_0^{-1})\, f(P_0) = 0$.

Отсюда находим важное следствие условия (1):

$$f(E) = 1, \tag{4}$$

где E — единичная матрица. Равенство (4) вытекает из соотношения $f(P) = f(PE) = f(P)\, f(E)$, поскольку $f(P) \neq 0$.

Из (4) получаем

$$f(P^{-1}) = \{f(P)\}^{-1}, \tag{5}$$

поскольку $f(P^{-1})f(P) = f(E) = 1$.

2. Доказательство теоремы проведем сначала для случая $n = 1$. При $n = 1$ имеем

$$f(xy) = f(x)f(y), \tag{6}$$

где $x, y \in R$. Через R обозначена числовая ось, из которой выброшен нуль.

Отметим несколько простых следствий равенства (6):

1) Если $x > 0$, то $f(x) > 0$. В самом деле, легко видеть, что $f(x) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) = \{f(\sqrt{x})\}^2 > 0$.

2) Если есть число $x_0 < 0$, для которого $f(x_0) < 0$, то $f(x) < 0$ для любого $x < 0$ ($x \in R$). В самом деле, если $x < 0$, то $f(x)f(x_0) = f(xx_0) > 0$.

При этом же предположении при $x < 0$ имеем $f(x) = -f(|x|)$. В самом деле, вследствие (5) находим $\{f(|x|)\}^{-1} = f(|x|^{-1})$; отсюда $f(x)$: $f(|x|) = f(-1) = -1$ (поскольку $f(-1)f(-1) = f(1) = 1$ и $f(-1) < 0$).

3) Если есть число $x_0 < 0$, для которого $f(x_0) > 0$, то $f(x) > 0$ для всех $x \in R$, причем всегда $f(x) = f(|x|)$.

Вследствие свойств 1), 2), 3) дело сводится к рассмотрению полуоси $x > 0$.

4) Для любого рационального числа $r > 0$ и для любого $x > 0$

$$f(x^r) = \{f(x)\}^r. \tag{7}$$

В самом деле, если $r = n$ (n — натуральное), то вследствие (6)

$$f(x^n) = f(xx\ldots x) = f(x)\,f(x)\ldots f(x) = (f(x))^n. \tag{8}$$

Если $r = 1/m$ (m — натуральное), то вследствие (8) $\{f(x^{1/m})\}^m = f(x)$; отсюда

$$f(x^{1/m}) = \{f(x)\}^{1/m}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем

$$f(x^{n/m}) = \{f(x)\}^{n/m}.$$

Тем самым (7) доказано.

Возьмем теперь какое-нибудь фиксированное число a, $a > 0$, $a \neq 1$. Положим $b = f(a)$; при наших условиях $b > 0$. Мы можем написать: $b = a^\sigma$, $\sigma = \text{const}$. Пусть x — любое положительное число. Мы также можем написать $x = a^k$ и считать, что k есть предел некоторой последовательности рациональных чисел r_n:

$$k = \lim_{n \to +\infty} r_n.$$

Согласно (7)

$$f(a^{r_n}) = \{f(a)\}^{r_n}.$$

Отсюда и вследствие непрерывности функции $f(x)$ имеем
$$f(x)=f(a^k)=f(\lim a^{r_n})=\lim f(a^{r_n})=\lim\{f(a)\}^{r_n}=\{f(a)\}^k=$$
$$=b^k=a^{\sigma k}=(a^k)^\sigma=x^\sigma.$$

Тем самым при $n=1$ теорема доказана. Именно, либо $f(x)=|x|^\sigma$ при любом $x\in R$, либо $f(x)=\pm|x|^\sigma$, где знаки плюс и минус отвечают случаям $x>0$ и $x<0$ $(x\in R)$.

3. Обратимся к группе G_n при любом n. Допустим, что существует числовая функция $f(P)$, $P\in G_n$, удовлетворяющая условию (1).

Заметим прежде всего, что на эквивалентных матрицах рассматриваемая функция принимает одно и то же значение. В самом деле, если
$$P_2=AP_1A^{-1},$$
то вследствие (1) и (5)
$$f(P_2)=f(A)f(P_1)f(A^{-1})=f(P_1).$$

Поэтому мы можем считать, что рассматриваемая функция $f(P)$ определена на множестве всех невырожденных линейных преобразований некоторого n-мерного действительного линейного пространства L_n. Символ P при этом будем понимать по своему усмотрению либо как обозначение линейного преобразования, либо как обозначение его матрицы (безразлично, в каком базисе).

Введем в пространстве L_n евклидову метрику. Тогда для любого P имеем
$$P=JB, \tag{10}$$
где J — некоторое изометричное линейное преобразование, B — самосопряженное преобразование (см. гл. IX). Мы можем считать, что $\operatorname{Det} J>0$ (следовательно, $\operatorname{Det} J=+1$).

Рассмотрим подгруппу $j(t)$ группы G_n, составленную матрицами вида
$$j(t)=\begin{Vmatrix}1 & & & & & & 0\\ & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & (k) & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1\end{Vmatrix},\qquad (k)=\begin{Vmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{Vmatrix}, \tag{11}$$
считая, что клетка (k) занимает на диагонали какое-нибудь фиксированное место. Убедимся, что $f(j(t))=1$ при любом t. В самом деле, функция $u=f(j(t))$ отображает сегмент $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ на некоторый сегмент $a\leqslant u\leqslant b$, $[a,\ b]\subset R$, причем, так как $f(j(0))=$ $=f(E)=1$, то $0<a\leqslant 1\leqslant b$ (здесь следует учесть замечание 3 п. 1). Отсюда, если есть значение t, для которого $f(j(t))\neq 1$, то $a<b$. Кроме того, так как $j(t)$ — подгруппа, то вместе с каждым своим элементом она содержит обратный ему. Поэтому из равен-

ства (5) следует, что $a < 1 < b$. Пусть j есть такой элемент $j(t)$, что $f(j) = b$. Мы имеем $f(j^2) = b^2 > b$, что невозможно, поскольку j^2 принадлежит $j(t)$ и b есть наибольшее значение $f(j(t))$. Остальную часть доказательства мы разделим на два пункта.

1) Согласно гл. IX (с учетом, что $\operatorname{Det} J = +1$) матрица J представляется в виде $J = j_1 \dots j_s$, где $j_1, \dots, j_s$ — матрицы вида (11) при разных расположениях клетки (k). Отсюда и на основании предыдущего

$$f(J) = f(j_1) \dots f(j_s) = 1. \tag{12}$$

2) Положим

$$b_k(x) = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & x & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & & 1 \end{Vmatrix}, \tag{13}$$

где x занимает на диагонали k-е место. При данном x и при разных k выражение (13) дает эквивалентные матрицы. Следовательно, функция

$$\varphi(x) = f(b_k(x))$$

не зависит от k. Заметим далее, что $b_1(x)\, b_1(y) = b_1(xy)$. Отсюда и из основного равенства (1) находим $\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)$, $x, y \in R$. Поэтому и на основании п. 2 имеем: либо $\varphi(x) = |x|^\sigma$, $\sigma = \mathrm{const}$, либо $\varphi(x) = \pm |x|^\sigma$, где знаки плюс и минус соответствуют случаям $x > 0$ и $x < 0$.

Согласно гл. IX линейное преобразование B в некотором базисе представляется диагональной матрицей; пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — числа, стоящие на диагонали этой матрицы.

Тогда имеем: $B = b_1(\lambda_1) \dots b_n(\lambda_n)$. Отсюда либо

$$f(B) = \varphi(\lambda_1) \dots \varphi(\lambda_n) = |\lambda_1 \dots \lambda_n|^\sigma, \tag{14}$$

либо

$$f(B) = \varphi(\lambda_1) \dots \varphi(\lambda_n) = \pm |\lambda_1 \dots \lambda_\lambda|^\sigma. \tag{15}$$

Равенство (15) получается, если $\varphi(x) = \pm |x|^\sigma$. Тогда в (15) знак минус возникаст в случае, если среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ имеется нечетное число отрицательных, т. е. если $\lambda_1 \dots \lambda_n < 0$. Но $\lambda_1 \dots \lambda_n = \operatorname{Det} B = \operatorname{Det} P$. Отсюда и из равенств (10), (12), (14), (15) получаем утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры с приложением собрания задач, снабженных решениями, составленного А. С. Пархоменко, «Наука», 1968.
2. Бурбаки Н., Алгебра (Алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра), Физматгиз, 1962.
3. Бурбаки Н., Алгебра (Модули, кольца, формы), «Наука», 1966.
4. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, «Наука», 1967.
5. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, «Наука», 1966.
6. Ефимов Н. В., Высшая геометрия, Физматгиз, 1961.
7. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, «Наука», 1968.
8. Ленг С., Алгебра, «Мир», 1968.
9. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, «Наука», 1970.
10. Проскуряков И. В., Сборник задач по линейной алгебре, «Наука», 1967.
11. Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, Гостехиздат, 1953.
12. Розенфельд Б. А., Многомерные пространства, «Наука», 1966.
13. Спивак М., Математический анализ на многообразиях, «Мир», 1968.
14. Тышкевич Р. И. и Феденко А. С., Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Минск, «Выш. шк.», 1968.
15. Фаддеев Д. К., Соминский И. С., Сборник задач по высшей алгебре, изд. 9-е, «Наука», 1968.
16. Фаддеев Д. К. и Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1963.
17. Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, Гостехиздат, 1956.
18. Шилов Г. Е., Математический анализ. Конечномерные линейные пространства, «Наука», 1969.
19. Шрейер О. и Шпернер Е., Введение в линейную алгебру в геометрическом изложении, ОНТИ, 1934.
20. Юдин Д. Б. и Гольштейн Е. Г., Линейное программирование (Теория, методы и приложения), «Наука», 1969.
21. Manning H. P., Geometry of four dimensions, New York, 1955.
22. Reichardt H., Vorlesungen über Vektor-und Tensorrechnung, Berlin, 1968.
23. Sommerville D. M. Y, An introduction to the geometry of *N* dimensions, New York, 1958.