Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

КУРС математического АНАЛИЗА

1

ББК 22.16
К88
УДК 517(0.75.8)

Кудрявцев Л. Д.

К 88 Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для студентов университетов и втузов. — М.: Высш. школа, 1981, т. I. — 687 с., ил.

В пер.: 1 р. 60 к.

Книга написана профессором, доктором физико-математических наук, заведующим кафедрой высшей математики МФТИ, ст. научным сотрудником Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Учебник соответствует новой программе для вузов.

Особое внимание в учебнике обращено на изложение качественных и аналитических методов, в нем нашли отражение и некоторые геометрические приложения анализа. В первом томе излагаются дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной, простейшие сведения о функциях многих переменных и теория рядов.

Предназначается студентам университетов и физико-математических и инженерно-физических специальностей втузов, а также студентам других специальностей для углубленной математической подготовки.

К $\frac{20203-045}{001(01)-81}$ 35—81 1702050000

517.2
ББК 22.16

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый курс математического анализа написан на основе двухтомного учебника автора «Математический анализ». *) Настоящий учебник соответствует новым требованиям, предъявляемым к математическому образованию. Благодаря более четкому выделению вопросов, относящихся к основным понятиям математического анализа и их применению к решению задач, этот учебник можно использовать как в высших технических учебных заведениях, так и в университетах. Изложение материала ведется на уровне, доступном широкому кругу студентов. Вопросы, выходящие за рамки программы по высшей математике для втузов и посвященные более глубокому изучению анализа на университетском уровне, отмечены звездочкой.

В курсе излагаются как традиционные классические методы математического анализа, так и современные, которые возникли в последние десятилетия. Действительные числа вводятся аксиоматически. Этот путь дает возможность наиболее компактно и полно изложить необходимые для анализа сведения о числах. Вместе с тем он и логически наиболее совершенен, ибо при других, так называемых «конструктивных», методах построения теории действительных чисел (когда за основу берутся бесконечные десятичные дроби или сечения в области рациональных чисел, или классы эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел) все равно необходимо вводить аксиому существования (непротиворечивости) множества действительных чисел, что, правда, далеко не всегда отмечается в учебниках. Поскольку же при построении теории действительных чисел использование аксиом неизбежно, то проще всего их сразу сформулировать и перейти к изучению математического анализа в собственном смысле слова.

За исключением параграфов, посвященных теории действительных чисел, в курсе за основу принят индуктивный метод изложения материала. Так, например, понятие предела сначала изучается для числовых последовательностей, затем для функций одной действительной переменной, далее вводится понятие предела по множеству в евклидовом пространстве, предела интегральных сумм и, наконец, все завершается рассмотрением общего понятия предела по фильтру в топологическом пространстве.

Доказываемые теоремы не всегда формулируются с наибольшей общностью; иногда для лучшего выявления сущности изучаемого вопроса и идеи проводимого доказательства рассмотрение проводится лишь для достаточно гладких функций. Такая точка зрения оправдана также тем, что благодаря плотности гладких функций

*) Второе издание этого учебника выходило в 1973 г. в издательстве «Высшая школа».

в соответствующих функциональных пространствах многие теоремы, доказанные для гладких функций, могут быть единым методом с помощью предельного перехода перенесены на более широкие классы функций. К сожалению, эту идею невозможно довести до конца без существенного увеличения объема книги. Поэтому вопрос о плотности «хороших» функций в различных функциональных пространствах рассмотрен в курсе лишь в простейших случаях.

Большое внимание в учебнике уделяется решению задач методами, основанными на изложенной теории. Кроме того, читателю для самостоятельной работы рекомендуются упражнения и задачи. Решение упражнений весьма полезно для активного усвоения математического анализа. Отдельные же из предлагаемых задач довольно трудны. Их решение не является необходимым для овладения материалом и может потребовать довольно длительного времени. Как правило, они связаны с интересными и достаточно глубокими математическими фактами, для подробного изложения которых не нашлось места в книге. Нумерация упражнений ведется отдельно в каждом параграфе, нумерация же задач, как и рисунков — сквозная.

Значительная часть материала, вошедшего в книгу, в течение многих лет излагается автором в Московском физико-техническом институте в лекционном курсе математического анализа. Автор обсуждал многие вопросы, относящиеся к изложению различных тем, со своими коллегами по кафедре высшей математики Московского физико-технического института и получил от них много полезных советов, которые все были приняты во внимание при подготовке рукописи к печати.

Автор выражает свою глубокую благодарность С. М. Никольскому, О. В. Бесову и Г. Н. Яковлеву, с которыми он много лет читает параллельно курс математического анализа и постоянно обсуждает различные аспекты курса. Раздел, посвященный обобщенным функциям, написан под несомненным влиянием В. С. Владимирова, которому автор выражает свою искреннюю признательность за многие полезные замечания.

Особенно признателен автор рецензентам книги — Н. В. Ефимову и В. А. Ильину, подробные и обстоятельные рецензии которых позволили во многом улучшить изложение материала.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность преподавателям кафедры математики Московского физико-технического института И. А. Борачинскому, К. А. Бежанову, Ф. Г. Булаевской, В. А. Ходакову, сделавшим много полезных предложений, которые все были учтены при окончательном редактировании текста.

Автор также приносит свою искреннюю признательность научному редактору Н. М. Флайшеру, проделавшему большую работу, содействовавшую несомненному улучшению учебника.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ. ЛОГИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ

1.1. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

В математике первичными понятиями являются понятия множества, элемента и принадлежности элемента множеству. Множества будем обозначать большими буквами латинского или какого-либо другого алфавита: $A, B, \ldots, X, Y, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$, а элементы множеств — малыми буквами: $a, b, \ldots, x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$. Если a является элементом множества A, то пишут $a \in A$ (читается «a принадлежит множеству A») или, что означает то же, $A \ni a$. Если же a не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$ или $A \not\ni a$.

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Таким образом, равенство $A = B$ означает, применительно к множествам, что одно и то же множество обозначено разными буквами A и B.

Запись $A = \{a, b, c, \ldots\}$ означает, что множество A состоит из элементов a, b, c и, возможно, каких-то других, заданных тем или иным способом.

Если множество A состоит из элементов a_α, где α пробегает некоторое множество индексов $\mathfrak{A}$, то будем писать $A = \{a_\alpha\}$ или, подробнее, $A = \{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, или, если это не может привести к недоразумениям, просто $A = \{a\}$. Если множество A состоит из элементов, обладающих определенным свойством, то будем писать $A = \{a: \ldots\}$, где в фигурных скобках после двоеточия записано указанное свойство элементов множества A. Например, если a и b — два таких действительных числа, что $a \leqslant b$, и через $[a, b]$ обозначено множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, то определение этого множества (отрезка) посредством введенных символов можно записать следующим образом:

$$[a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Для удобства вводится понятие *пустого множества*, которое обозначается символом $\varnothing$. По определению пустое множество не содержит элементов.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что множество A есть часть множества B, или что A является *подмножеством* множества B, и пишут $A \subset B$ (читается: множество A содержится во множестве B) или, что то же, $B \supset A$ (читается: множество B содержит множество A).

Упражнение. Доказать, что включения $A \subset B$ и $B \subset A$ выполняются одновременно тогда и только тогда, когда $A = B$.

Из определения подмножества следует, что $A \subset A$, каково бы ни было множество A; принято также считать, по определению, что пустое множество считается подмножеством каждого множества, $\varnothing \subset A$. Если A — произвольное множество, то $\varnothing$ и A называются его *несобственными подмножествами*; если же $A \subset B$ и существует такой элемент $x \in B$, что $x \notin A$, то множество A называется *собственным подмножеством* множества B.

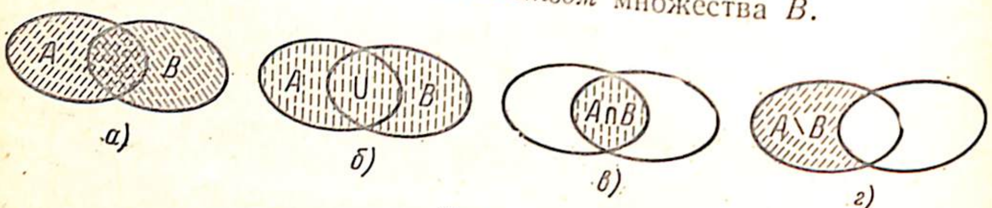

Рис. 1

Если заданы два множества A и B (рис. 1, *а*), то через $A \cup B$ обозначается множество, называемое их *объединением* или *суммой*, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств A и B (рис. 1, *б*). Таким образом, если некоторый элемент принадлежит множеству $A \cup B$, то он принадлежит либо только множеству A, либо только множеству B, либо обоим этим множествам.

Через $A \cap B$ обозначается множество, называемое *пересечением* множеств A и B, которое состоит из элементов, принадлежащих одновременно как множеству A, так и множеству B (рис. 1, *в*).

Через $A \setminus B$ обозначается множество, называемое *разностью* множеств A и B и состоящее из элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B (рис. 1, *г*).

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется *дополнением* множества B до множества A или дополнением B в A. Говорят также, что $A \setminus B$ получается из множества A вычитанием из него множества B.

Если задана система множеств A_α (термины: множество, система, совокупность, семейство, класс будут употребляться как синонимы), где значения α образуют некоторую совокупность индек-

сов $\mathfrak{A}$, то *объединением* $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ *множеств* A_α называется множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из заданных множеств A_α, т. е. условие $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ равносильно следующему: существует такое $\alpha \in \mathfrak{A}$, что $x \in A_\alpha$.

Пересечением множеств A_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, называется такое множество, обозначаемое через

$$\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha,$$

что каждый его элемент принадлежит всем множествам A_α, т. е. условие $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ означает: для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ имеет место $x \in A_\alpha$.

Если $A_\alpha \subset E$ *для всех* $\alpha \in \mathfrak{A}$, *то*

$$E \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha), \tag{1.1}$$

$$E \setminus \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha). \tag{1.2}$$

Докажем, например, равенство (1.1). Если $x \in E \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, то, в силу определения разности множеств, $x \in E$ и $x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$. В свою очередь это, согласно определению объединения множеств, эквивалентно тому, что $x \in E$ и для всех $\alpha \in A_\alpha$ имеет место соотношение $x \notin A_\alpha$. Это же, снова по определению разности множеств, равносильно утверждению, что для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ имеем $x \in E \setminus A_\alpha$. Наконец, последнее утверждение, по определению пересечения множеств, означает, что $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha)$. Итак, условия $x \in E \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ и $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha)$ — эквивалентны, вследствие чего выполняется равенство (1.1). Равенство (1.2) доказывается аналогично.

В следующем пункте 1.2* рассмотрено понятие функции, а пункт 1.3* будет посвящен понятиям конечных множеств и последовательности. Пункты и параграфы курса, отмеченные звездочкой, при первом чтении можно пропустить и вернуться к ним лишь в случае внутренней потребности. В частности, для понимания дальнейшего материала достаточно представления о функции, имеющегося в курсе элементарной математики, как об определенном соответствии между элементами двух множеств. При этом понятие соответствия можно понимать как первичное.

1.2*. ФУНКЦИИ

Будем говорить, что *число элементов множества A равно единице* 1, если в нем имеется элемент $a \in A$ и нет других (иначе говоря, если из множества A вычесть множество, состоящее из элемента a, то получится пустое множество).

Множество A называется *множеством из 2-х (двух) элементов*, если после вычитания из него множества, состоящего только из одного элемента $a \in A$, т. е. множества, число элементов которого равно 1, останется множество, число элементов которого также равно единице. Нетрудно доказать, что это определение не зависит от выбора указанного элемента $a \in A$, т. е. если $a \in A$ и $b \in A$, причем $A \setminus \{a\}$ состоит из одного элемента, то и множество $A \setminus \{b\}$ также состоит из одного элемента (а именно, из элемента a).

Пусть теперь заданы множества $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$. Множество, состоящее из двух элементов $x \in X$ и $y \in Y$, называется *парой* $\{x, y\}$ элементов x, y.

Пара вида $\{x, \{x, y\}\}$, где $x \in X$, $y \in Y$, $\{x, y\}$ — пара элементов x, y, называется *упорядоченной парой* элементов x и y. Элемент x называется первым элементом упорядоченной пары $\{x, \{x, y\}\}$, а элемент y — вторым. Упорядоченная пара $\{x, \{x, y\}\}$ обозначается через (x, y). В дальнейшем под парой понимается обычно упорядоченная пара.

Множество всех упорядоченных пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, называется *произведением множеств* X и Y и обозначается через $X \times Y$. При этом не предполагается, что обязательно множество X отлично от множества Y, т. е. возможен и случай, когда $X = Y$.

Определение 1. *Всякое множество $f = \{(x, y)\}$ упорядоченных пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, такое, что для любых пар $(x', y') \in f$ и $(x'', y'') \in f$ из условия $y' \neq y''$ следует, что $x' \neq x''$ называется функцией, или, что то же, отображением.*

Наряду с терминами «функция» и «отображение» в определенных ситуациях употребляются им равнозначные термины *преобразование, морфизм, соответствие*.

Функции будут обозначаться различными буквами: $f, g, \ldots, F, G, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$.

Множество всех первых элементов упорядоченных пар (x, y) некоторой функции f называется *областью определения* (или множеством определения) этой функции и обозначается через X_f, а множество всех вторых элементов — *множеством ее значений* и обозначается через Y_f. Само множество упорядоченных пар $f = \{(x, y)\}$, рассматриваемое как подмножество произведения $X \times Y$, называется *графиком функции* f.

Элемент $x \in X_f$ называется *аргументом функции* f или независимой переменной, а элемент $y \in Y$ — *зависимой переменной*.

Если $f = \{(x, y)\}$ есть функция (отображение), то пишут $f: X_f \to Y$ и говорят, что f отображает множество X_f в множество Y. В случае $X = X_f$ пишется просто $f: X \to Y$.

Если $f: X \to Y$ — функция, т. е. множество упорядоченных пар $f = \{(x, y)\}$, $x \in X$, $y \in Y$, удовлетворяющих условиям определения 1, и $(x, y) \in f$, то пишут $y = f(x)$ (иногда просто $y = fx$) или $f: x \mapsto y$ и говорят, что функция f ставит в соответствие элементу x элемент y (отображение f отображает элемент x в элемент y) или, что то же самое, элемент y соответствует элементу x. В этом случае говорят также, что элемент y является значением функции f в точке x, или образом элемента x при отображении f.

Наряду с символом $f(x_0)$ для обозначения значения функции f в точке x_0 употребляется также обозначение $f(x)|_{x=x_0}$.

При заданном $y \in Y$ совокупность всех таких элементов $x \in X$, что $f(x) = y$ называется *прообразом элемента* y и обозначается посредством $f^{-1}(y)$. Таким образом,

$$f^{-1}(y) = \{x : x \in X,\ f(x) = y\}.$$

Очевидно, если $y \in Y \setminus Y_f$, то $f^{-1}(y) = \varnothing$.

Иногда сама функция f обозначается символом $f(x)$. Обозначение функции $f: X \to Y$ и ее значения в точке $x \in X$ одним и тем же символом $f(x)$ не приводит к недоразумению, так как в каждом конкретном случае всегда ясно, о чем именно идет речь.

Обозначение $f(x)$ обычно удобнее обозначения $f: x \mapsto y$ при вычислениях. Например, запись $f(x) = x^2$ значительно удобнее и проще использовать при аналитических преобразованиях, чем запись $f: x \mapsto x^2$.

Пусть задано отображение $f: X \to Y$, т. е. отображение множества X в множество Y. Иначе говоря, каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие и притом единственный элемент $y \in Y$, и каждый элемент $y \in Y_f \subset Y$ поставлен в соответствие хотя бы одному элементу $x \in X$.

Если $Y = X$, то говорят, что отображение f отображает множество X в себя.

Если $Y = Y_f$, т. е. множество Y совпадает с множеством значений функции f, то говорят, что f отображает множество X *на* множество Y или, что отображение f является сюръективным отображением, короче, *сюръекцией*. Таким образом, отображение $f: X \to Y$ есть сюръекция, если для любого элемента $y \in Y$ существует по крайней мере один такой элемент $x \in X$, что $f(x) = y$.

Очевидно, если $f: X \to Y$ и Y_f — множество значений функции f, то $f: X \to Y_f$ является сюръективным отображанием.

Если при отображении $f: X \to Y$ разным $x \in X$ соответствуют разные $y \in Y$, т. е. при $x' \neq x''$ имеет место $f(x') \neq f(x'')$, то отображение f называется взаимно однозначным отображением (взаимно однозначным соответствием) X в Y, а также однолистным отображением или *инъекцией*. Таким образом, отображение

$f: X \to Y$ однолистно (инъективно) тогда и только тогда, когда прообраз каждого элемента y, принадлежащего множеству значений функции $f: y \in Y_f$, состоит в точности из одного элемента.

Если отображение $f: X \to Y$ является одновременно взаимно однозначным и на множество Y, т. е. является одновременно инъекцией и сюръекцией, то оно естественно называется *взаимно однозначным отображением* множества X *на* множество Y или, что то же, *биективным отображением* (биекцией) в Y.

Таким образом, отображение $f: X \to Y$ является взаимно однозначным отображением множества X на множество Y тогда и только тогда, когда для любых $x' \in X$ и $x'' \in X$, $x' \neq x''$, справедливо неравенство $f(x') \neq f(x'')$, и каково бы ни было $y \in Y$ существует такой элемент $x \in X$, что $f(x) = y$.

Взаимно однозначное отображение множества X на множество Y часто называют также взаимно однозначным соответствием элементов этих множеств.

Если $f: X \to Y$ и $A \subset X$, то множество

$$B = \{y : y \in Y,\ y = f(x),\ x \in A\},$$

т. е. множество всех тех y, в каждый из которых при отображении f отображается хоть один элемент из подмножества A множества X, называется *образом подмножества* A и пишется $B = f(A)$. В частности, всегда имеем $Y_f = f(X)$.

Если $f: X \to Y$ и $B \subset Y$, то множество

$$A = \{x : x \in X,\ f(x) \in B\},$$

называется *прообразом множества* B и пишется $A = f^{-1}(B)$. Таким образом, прообраз множества B состоит из всех тех элементов $x \in X$, которые при отображении f отображаются в элементы из B, или, что то же самое, которое состоит из всех прообразов точек $y \in B$:

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y).$$

Если $A \subset X$, то функция $f: X \to Y$ естественным образом порождает функцию, определенную на множестве A, ставящую в соответствие каждому элементу $x \in A$ элемент $f(x)$. Эта функция называется *сужением функции* f на множестве A и иногда обозначается через $f|_A$.

Таким образом, $f|_A: A \to Y$ и для любого $x \in A$ имеет место $f|_A: x \mapsto f(x)$. Если множество A не совпадает с множеством X, то сужение $f|_A$ функции f на множестве A имеет другую область определения, чем функция f, и, следовательно, является другой, чем f, функцией. Нередко сужение функции на некотором множестве обозначается тем же символом, что и исходная функция.

Если две функции f и g рассматриваются на одном и том же множестве X, точнее, если рассматриваются сужения функций f и g на одном и том же множестве X, то запись $f = g$ на X означает, что $f(x) = g(x)$ для каждого $x \in X$. В этом случае говорят, что функция f тождественно равна функции g на множестве X.

Отметим, что функции, у которых всем элементам некоторого множества соответствует один и тот же элемент, т. е. функции, у которых при изменении значения аргумента значение функции не меняется, называются *постоянными* (на данном множестве), или *константами*.

Итак, если при изменении одной переменной (аргумента функции) другая переменная, являющаяся функцией первой, не меняется (т. е. «не зависит» от первой переменной), то это является частным и в определенном смысле простейшим случаем функциональной зависимости.

Если $f: X \to Y$ и каждый элемент $y \in Y_f$ представляет из себя множество каких-то элементов $y = \{z\}$, причем среди этих множеств имеется по крайней мере одно непустое множество, состоящее не из одного элемента, то такая функция f называется *многозначной функцией*. При этом элементы множества $f(x) = \{z\}$ часто также называют значениями функции f в точке x.

Если каждое множество $f(x)$ состоит только из одного элемента, то функцию f называют также *однозначной функцией*.

Если $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$, то функция $F: X \to Z$, определенная для каждого $x \in X$ равенством $F(x) = g(f(x))$, называется *композицией* (иногда *суперпозицией*) функций f и g, или *сложной функцией*, и обозначается через $g \circ f$.

Таким образом, по определению каждого $x \in X$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Пусть задана функция $f: X \to Y$ и Y_f — множество ее значений. Совокупность всевозможных упорядоченных пар вида $(y, f^{-1}(y))$, $y \in Y_f$, образует функцию, которая называется *обратной функцией* для функции f и обозначается через f^{-1}. Обратная функция f^{-1} ставит в соответствие каждому элементу $y \in Y_f$ его прообраз $f^{-1}(y)$, т. е. некоторое множество элементов. Тем самым обратная функция является, вообще говоря, многозначной функцией.

Если отображение $f: X \to Y$ однолистно (инъективно), то обратное отображение, определенное, как всегда, на Y_f, является однозначной функцией и отображает Y_f на X, т. е. $f^{-1}: Y_f \to X$. Действительно, в этом случае прообразы всех точек $y \in Y_f$ состоят в точности из одной точки $x \in X$.

1.3*. КОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА И НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Важным, часто встречающимся классом множеств является класс так называемых конечных множеств. Чтобы сформулировать определение конечного множества, дадим сначала определение понятия натурального числа.

Определение 2. *Множество* $N = \{n\}$ *называется множеством натуральных чисел, если*

а) один из его элементов обозначен символом 1;

б) каждому элементу $n \in N$ *поставлен в соответствие в точности один элемент этого множества, обозначаемый через* n^* *и называемый элементом, следующим за элементом* n;

в) для любого $n \in N$ *имеет место* $n^* \neq 1$;

г) из $n^* = m^*$, $n \in N$, $m \in N$, *следует, что* $n = m$;

д) (аксиома индукции) пусть множество $M = \{m\} \subset N$ *обладает свойствами*

1°) $1 \in M$;

2°) *если* $m \in M$, *то* $m^* \in M$,

тогда множество M *содержит все натуральные числа:* $M = N$.

Приведенное аксиоматическое определение множества натуральных чисел принадлежит Пеано *), поэтому свойства а) — д) называются *аксиомами Пеано*.

Элементы множества N обозначаются через 1, 2, 3, 4, ... (здесь после каждого натурального числа написано следующее за ним).

Определение 3. *Множество* X *называется множеством, состоящим из* n *элементов,* $n \in N$, *если существует взаимно однозначное отображение множества* X *на множество* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Если для множества существует такое натуральное n, *что число его элементов равно* n, *то это множество называется конечным.*

Всякое множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Примером бесконечного множества является множество всех натуральных чисел.

Пустое множество считается по определению конечным, а число его элементов равным нулю.

Если множество, содержащее m элементов, может быть получено из множества, содержащего n элементов, вычитанием из него некоторого конечного множества, то натуральное число m называется меньшим, чем натуральное число n, или, что то же, число n называется бóльшим, чем число m; в этом случае пишут $m < n$, или $n > m$.

Определение 4. *Пусть* X — *какое-либо множество и* N — *множество натуральных чисел. Всякое отображение* $f: N \to X$ (см. п. 1.2*) *называется последовательностью элементов множества* X. *Элемент* $f(n)$ *обозначается через* x_n *и называется* n*-м членом последовательности* $f: N \to X$, *а сама эта последовательность обозначается через* $\{x_n\}$ *или* x_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Каждый элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ представляет собой упорядоченную пару, состоящую из числа $n \in N$ и соответствующего ему при отображении $f: N \to X$ элемента x множества X,

*) Д. Пеано (1858—1932) — итальянский математик.

т. е. $x_n = (n, x)$. Второй элемент этой пары называется значением элемента последовательности $\{x_n\}$, а первый — его номером.

Множество элементов последовательности всегда бесконечно. Два различных элемента последовательности могут иметь одно и то же значение, но заведомо отличаются номерами, которых бесконечное множество.

Множество значений элементов последовательности (обычно говорят короче: множество значений последовательности) может быть конечным. Например, если всем $n \in N$ поставлен в соответствие один и тот же элемент $a \in X$, т. е. при всех $n \in N$ имеет место $f(n) = a$, то множество значений последовательности $x_n = a$, $n = 1, 2, \ldots$, состоит из одного элемента $a \in X$. Такие последовательности называются *стационарными*.

Если $n_1 < n_2$, $n_1 \in N$, $n_2 \in N$, то член x_{n_1} последовательности $\{x_n\}$ называется членом, предшествующим члену x_{n_2}, а член x_{n_2} членом, следующим за членом x_{n_1}. В этом смысле члены последовательности всегда упорядочены.

1.4. ЛОГИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ

В математических рассуждениях часто встречаются выражения «существует элемент», обладающий некоторыми свойствами, и «любой элемент» среди элементов, имеющих некоторое свойство. Вместо слова «существует» или равносильного ему слова «найдется» иногда пишется символ $\exists$, т. е. перевернутая латинская буква E (от английского слова Existence — существование), а вместо слов «любой», «каждый», «всякий» — символ $\forall$, т. е. перевернутое латинское A (от английского слова Any — любой). Символ $\exists$ называется символом *существования*, а символ $\forall$ — символом *всеобщности*.

П р и м е р ы. 1. Определение объединения $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ множеств A_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, записывается с помощью логического символа существования следующим образом:

$$\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in \mathfrak{A},\ x \in A_\alpha\},$$

а определение пересечения $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, записанное с помощью символа всеобщности, имеет вид

$$\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in \mathfrak{A},\ x \in A_\alpha\}.$$

2. Пусть R — множество действительных чисел и пусть задана функция $f: R \to R$, т. е. функция, определенная на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения.

Глава четвертая

Ряды

3в. АРХИМЕД до н.э.

1596 Р. ДЕКАРТ 1650

1736 Ж. ЛАГРАНЖ 1813

1749 П. ЛАПЛАС 1827

1601 П. ФЕРМА 1665

1777 К. ГАУСС 1855

1643 И. НЬЮТОН 1727

1646 Г. ЛЕЙБНИЦ 1716

1772 Ж. ФУРЬЕ 1837

1789 О. КОШИ 1857

1707 Л. ЭЙЛЕР 1783

1781 Б. БОЛЬЦАНО 1848

1685 Б. ТЕЙЛОР 1731

1717 Ж. ДАЛАМБЕР 1783

1792 Н.И. ЛОБАЧЕВСКИЙ 1856

1802 М.В. ОСТРОГРАДСКИЙ 1862